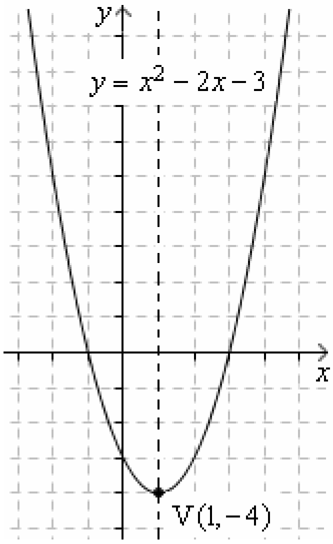
8. FUNZIONI QUADRATICHE: PARABOLE

Parliamo ora delle funzioni **“di 2° grado”, o “quadratiche”,** la cui equazione è della forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

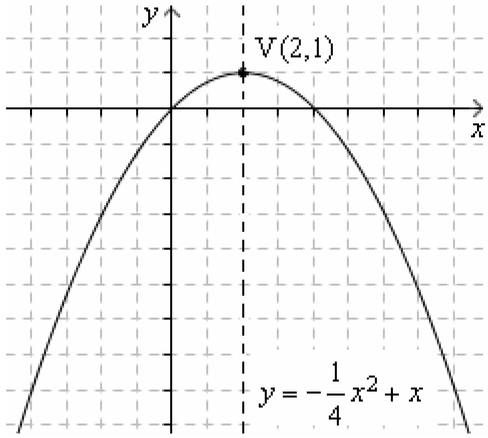
x	$y = x^2 - 2x - 3$
-3	12
-2	5
-1	0
0	-3
$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$
1	-4
$\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$
2	-3
3	0
4	5
5	12



Disegnando questa curva per punti, ci si rende conto che essa presenta una simmetria “assiale”, cioè una simmetria rispetto a una retta (tratteggiata nella figura). La presenza di un asse di simmetria consente di tracciare il grafico con più facilità: calcolate le coordinate di un punto, dopo averlo disegnato possiamo immediatamente disegnare anche un altro punto, quello che è simmetrico del primo rispetto all’asse.

Abbiamo indicato con V (“V” di “vertice”) il punto di ordinata minima del grafico.

x	$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$
-2	-3
-1	$-1{,}25$
0	0
1	$0{,}75$
2	1
3	$0{,}75$
4	0
5	$-1{,}25$
6	-3



Questa seconda curva è “capovolta” rispetto alla precedente; inoltre la sua “curvatura” è meno accentuata. Entrambe le circostanze sono legate al coefficiente del termine di 2° grado nelle rispettive equazioni, come è spiegato più avanti.

Il vertice in questo caso è il punto di ordinata massima.

Una funzione di 2° grado $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ ha come grafico una “parabola”.

♥ Il **segno del coefficiente $\boldsymbol{a}$** determina l’orientamento della “**concavità**” ovvero della “parte cava”:
- $\boldsymbol{a > 0}$: **concavità rivolta verso l’alto** $\cup$
- $\boldsymbol{a < 0}$: **concavità rivolta verso il basso** $\cap$

♥ Il **valore assoluto di $\boldsymbol{a}$** si dice “**apertura**” perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola
- sia più “dolce” (valori di $|a|$ piccoli)
- o sia più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Si dimostra che l’**ascissa del** “**vertice**” (che possiamo provvisoriamente descrivere come il punto della parabola avente ordinata minima oppure massima, o anche come l’intersezione della parabola col proprio asse di simmetria) è calcolabile tramite la formula

♥ $$x_V = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}.$$

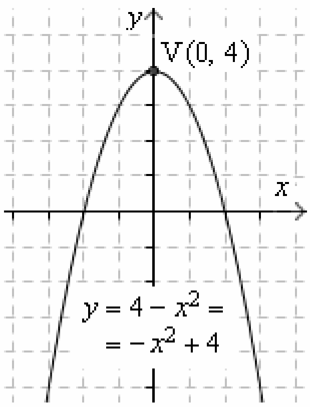
Trovata con questo calcolo l’ascissa del vertice, la rispettiva ordinata si potrà determinare facilmente: basterà semplicemente sostituire, nell’equazione della parabola, al posto di $\boldsymbol{x}$ il valore trovato.

Ad esempio, nel caso della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$,

il calcolo fornisce: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ da cui successivamente $y_V = x_V^2 - 2x_V - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

♥ L’*individuazione del vertice* è *la prima cosa* che conviene fare, quando si vuole disegnare una parabola, come d’altronde il tracciamento dell’**asse di simmetria**, che è poi la retta verticale passante per il vertice, ossia la retta formata dai punti di ascissa $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ (brevemente: la retta di equazione $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$).

x	$y=4-x^2$
-3	-5
-2	0
-1	3
$-\frac{1}{2}$	$4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$
0	4
$1/2$	$15/4$
1	3
2	0
3	-5



Un ultimo esempio.

$\boldsymbol{y=4-x^2}$ si può riscrivere come $y=-x^2+4$.

E' dunque $b=0$, quindi anche $x_V=-\frac{b}{2a}=0$.

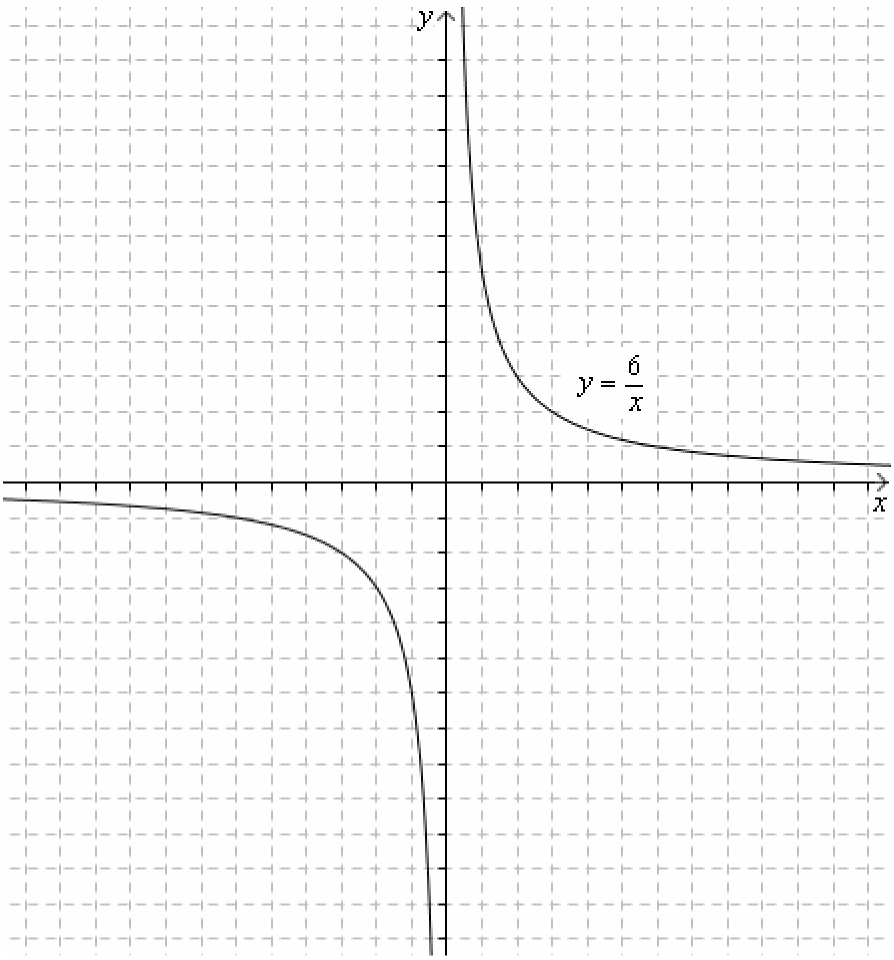
Ma se il vertice ha ascissa 0, esso si troverà sull'asse delle y, che sarà perciò l'asse di simmetria per la curva.

D'altronde, che la curva fosse simmetrica rispetto all'asse y lo si poteva capire pure dal fatto che, non essendoci il termine contenente x ma solo il termine con x^2 e il termine noto, dando a x due valori opposti si ottiene sempre lo stesso valore di y!

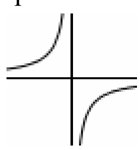
9. FUNZIONI DELLA PROPORZIONALITA' INVERSA: IPERBOLI

Una funzione della forma $\boldsymbol{y=k/x}$, con k costante, è detta "**funzione della proporzionalità inversa**", perché **le due variabili in gioco, *x* e *y*, sono inversamente proporzionali**:
se *x* raddoppia, *y* si dimezza; se *x* triplica, *y* si riduce alla terza parte; ecc. ecc.
Tracciamo ad esempio il grafico della funzione $y=6/x$.
Otterremo un'armoniosa curva in due rami, della quale una caratteristica che balza subito in evidenza è la simmetria "centrale", dove il centro di simmetria è l'origine del riferimento cartesiano.
*Si potrebbe dimostrare che si tratta di una "**iperbole**".*

x	$y=\frac{6}{x}$
–1000	–0,006
–12	–0,5
–6	–1
–5	–1,2
–4	–1,5
–3	–2
–2	–3
–1	–6
–0,5	–12
–0,1	–60
–0,001	–6000
0,001	6000
0,1	60
0,5	12
1	6
2	3
3	2
4	1,5
5	1,2
6	1
12	0,5
1000	0,006
1000000	0,000006



In questo esempio è $k>0$ e la curva sta nel 1° e 3° quadrante; se invece fosse $k<0$, come nei casi $y=-\frac{2}{x}=\frac{-2}{x}$ oppure $y=-\frac{7}{4x}=\frac{-\frac{7}{4}}{x}$, la curva andrebbe ad occupare il 2° e 4° quadrante:



- Quando x diventa *grande grande* ($x=1000, x=1000000, \ldots$), y diventa *piccola piccola*, "si schiaccia a zero"
- Quando x si avvicina a 0 da destra, ossia "per valori positivi", la y corrispondente tende a $+\infty$
- Quando x si avvicina a 0 da sinistra, ossia "per valori negativi", la y corrispondente tende a $-\infty$
- Quando x tende a $-\infty$, la y corrispondente tende a 0 dal basso, per valori negativi

Le **definizioni** rigorose di "**parabola**" e "**iperbole**" sono riportate in un bellissimo capitolo del Volume 2.

ESERCIZI Traccia i grafici di: a) $y=x^2+4x$ b) $y=x^2-x-6$ c) $y=-x^2$ d) $y=3x^2-9$ e) $y=\frac{1}{10}x^2$ f) $y=\frac{4}{x}$ g) $y=-\frac{2}{x}$ h) $y=\frac{1}{x}$