10. RISOLUZIONE GRAFICA DI UN'EQUAZIONE (o di un semplice sistema)

Per risolvere graficamente un'equazione $\boxed{f(x)=g(x)}$

si rappresentano, in uno stesso riferimento cartesiano, le due funzioni $y=f(x)$; $y=g(x)$
e si vanno a ricercare quei valori di x per i quali la y corrispondente è la medesima.

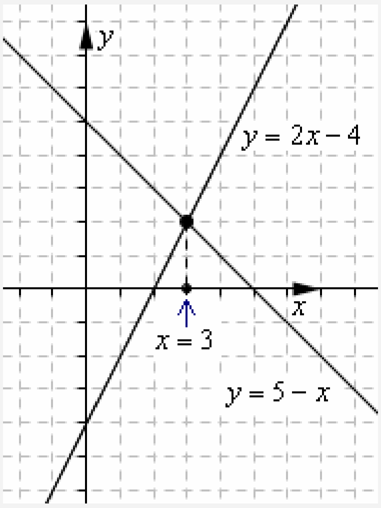
In altre parole,

♥ **si vanno a individuare i punti di intersezione fra le due curve $y=f(x)$, $y=g(x)$,
e si prendono le ASCISSE di questi punti.
Tali ascisse sono le soluzioni dell'equazione data.**

Di norma, la risoluzione grafica consente di determinare le soluzioni soltanto **in modo approssimato**.

$\boxed{2x-4=5-x}$

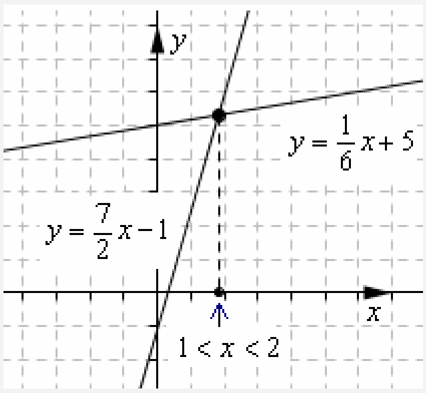
La retta in salita
è il grafico della funzione
$y=2x-4$
mentre quella in discesa
è il grafico della funzione
$y=5-x$.
Per quale valore di x
Le due y sono uguali?
Per $x=3$.
Infatti con $x=3$ si ha,
sia per il 1° che il 2° membro,
$y=2$.
La soluzione di questa equazione
è dunque $\mathbf{x=3}$,
come la "classica" risoluzione algebrica
potrebbe immediatamente confermare.



x	1° membro y		2° membro y
–2	–8		7
–1	–6		6
0	–4		5
1	–2		4
2	0		3
3	**2**	=	**2**
4	4		1
5	6		0
6	8		–1
7	10		–2

$\boxed{\frac{1}{6}x+5=\frac{7}{2}x-1}$

Se tracciamo i grafici delle due rette
vediamo che si intersecano
nel 1° quadrante,
in un punto la cui ascissa è
leggermente inferiore a 2.
Possiamo dunque dire che
la soluzione di questa equazione
è un valore compreso fra 1 e 2:
$1<x<2$

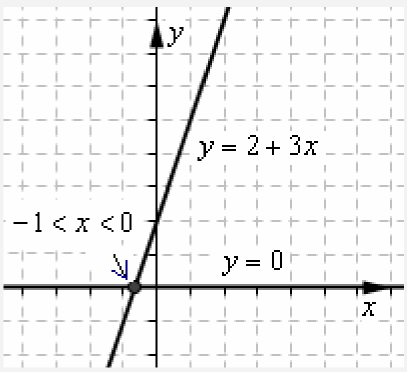


La risoluzione algebrica
in effetti ci dà:

$$\frac{1}{6}x+5=\frac{7}{2}x-1$$
$$x+30=21x-6$$
$$-20x=-36$$
$$x=\frac{36}{20}=\frac{9}{5}=1,8$$

$\boxed{2+3x=0}$

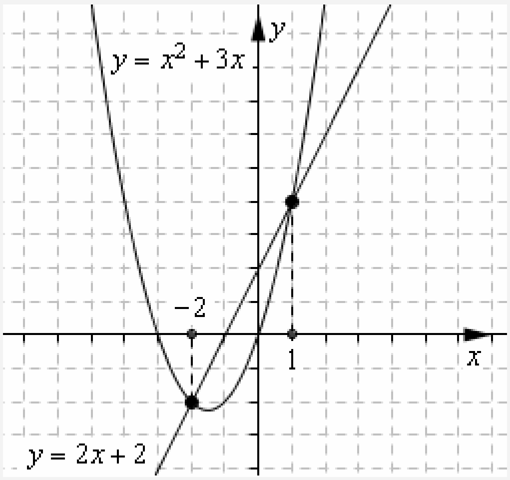
La funzione a 1° membro
$y=2+3x$
ha come grafico
una retta in salita.
La funzione $y=0$
(2° membro)
ha come grafico
una retta orizzontale,
che coincide
con l'asse delle ascisse.



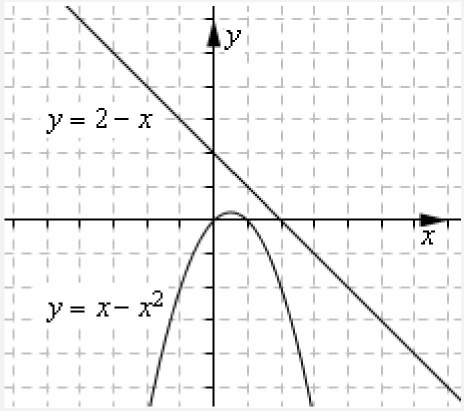
La soluzione è
l'ascissa del punto
in cui i due grafici
si tagliano;
vediamo che di tratta
di un valore compreso
fra –1 e 0: $-1<x<0$.

La risoluzione algebrica
ci fornisce

$$x=-\frac{2}{3}$$



$\boxed{x^2+3x=2x+2}$: le soluzioni sono $x=-2,\ x=1$



$\boxed{x-x^2=2-x}$

Le due curve non si intersecano:
l'equazione è IMPOSSIBILE.

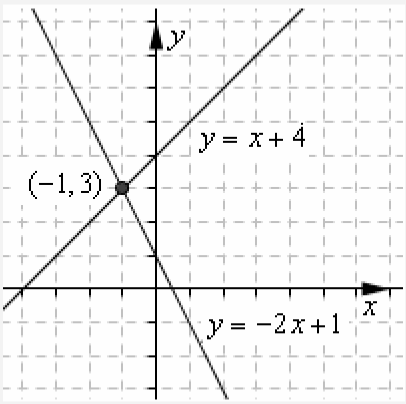
Questa figura risolve il SISTEMA IN DUE INCOGNITE

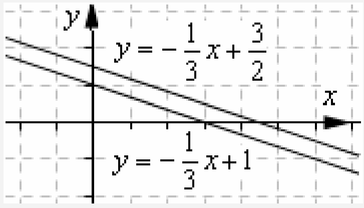
$$\boxed{\begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+y=1 \end{cases}}$$

Lo si scrive nella forma

$$\begin{cases} y=x+4 \\ y=-2x+1 \end{cases}$$

e si tracciano i grafici delle due rette. La soluzione del sistema è la coppia (x, y) delle coordinate del punto di intersezione.





Il sistema

$$\boxed{\begin{cases} 2x+6y-9=0 \\ x+3y-3=0 \end{cases}} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{3}x+1 \end{cases}$$

è IMPOSSIBILE (le rette sono parallele).

ESERCIZI

1) Risolvi graficamente le seguenti equazioni,
poi controlla la correttezza delle tue conclusioni risolvendo anche algebricamente:

a) $x-1=2x+3$ b) $-x+5=2x-1$ c) $4x-5=-3x-2$ d) $\frac{1}{2}x-2=\frac{1}{3}x-1$

e) $4x+5=3-5x$ f) $\frac{3}{8}x+1=2$ g) $-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}=x$ h) $-2x+7=-4x$ i) $3x=3x+2$

2) Risolvi graficamente le seguenti equazioni (cosa puoi notare?):

a) $x^2-4x+3=0$ b) $x^2-4x=-3$ c) $x^2=4x-3$ d) $-x^2=3-4x$ e) $4x=x^2+3$

3) Risolvi graficamente le seguenti equazioni.

a) $x^2+2x-4=4x-1$ b) $2x^2-1=x$ c) $x^2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}x$ d) $x^2=(x-1)^2$ e) $\frac{x^2}{2}=3-x^2$

4) Risolvi graficamente le seguenti equazioni.

a) $\frac{4}{x}=x+3$ b) $\frac{1}{4}x^2+1=\frac{6}{x}$ c) $-\frac{6}{x}=-x+2$ d) $2x=x^2+4$ e) $x+2=-\frac{1}{x}$

5) Risolvi graficamente, poi anche algebricamente, i seguenti sistemi di 1° grado in 2 incognite.

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-y=2 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+3=0 \\ y=-x-5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3y-12=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=3x \\ x+y=0 \end{cases}$

RISPOSTE

1) Controllo tramite risoluzione algebrica 2) Le 5 equazioni sono tutte equivalenti. Soluzioni: $x=1,\ x=3$

3) a) $x_1=-1,\ x_2=3$ b) $x_1=1,\ -1<x_2<0$ c) $x_1=-1,\ 1<x_2<2$ d) $0<x<1$ e) $-2<x_1<-1,\ 1<x_2<2$

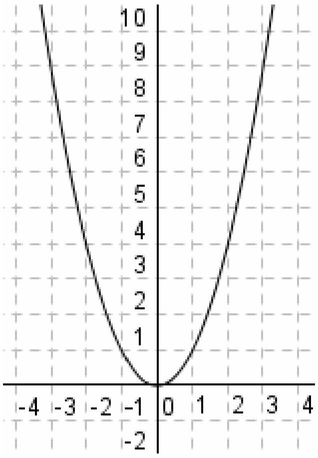
4) a) $x_1=1,\ x_2=-4$ b) $2<x<3$ c) $-2<x_1<-1,\ 3<x_2<4$ d) Imposs. e) $x=-1$ 5) Controlla algebricamente

Altri ESERCIZI sulle risoluzioni grafiche

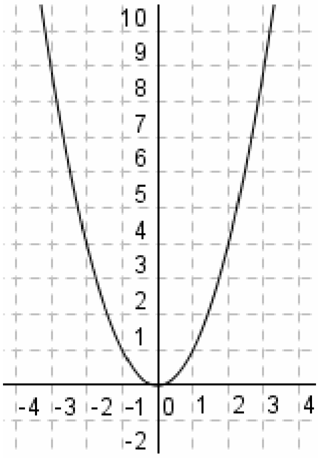
1) Non offenderti se trovi la domanda banale:
per stabilire se il valore $x=-5$ è soluzione dell'equazione $2x^2+7x-15=0$ occorre risolvere l'equazione?

2) I grafici della figura sottostante rappresentano tutti la funzione $y=x^2$. Utilizzali per risolvere graficamente le quattro equazioni proposte; verificherai che le loro soluzioni sono tutte intere.
Per ogni soluzione trovata, controlla che sia esatta sostituendola nell'equazione considerata.

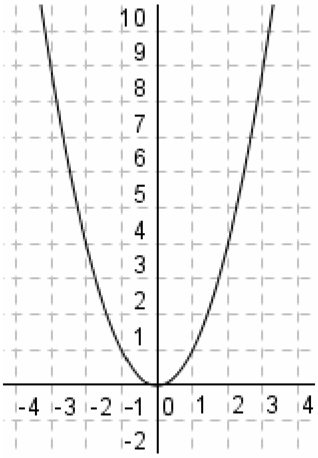
a) $x^2=2x$



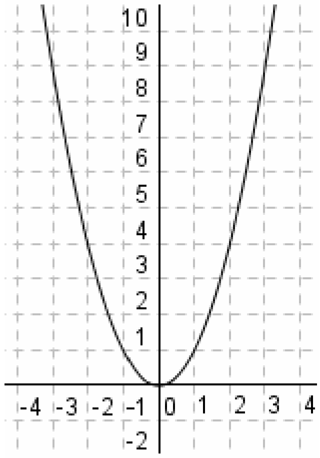
b) $x^2=2-x$



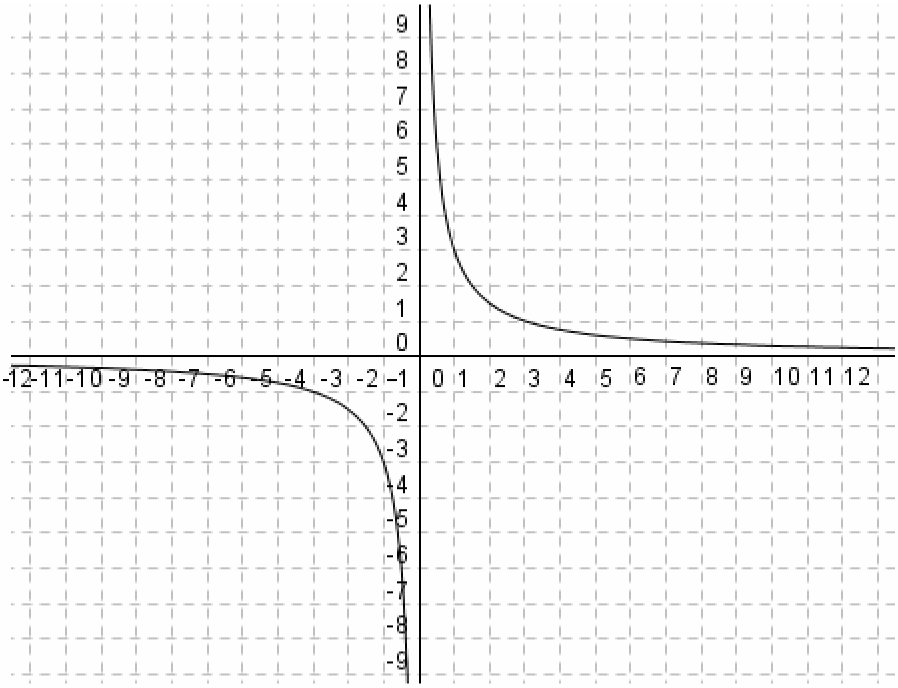
c) $x^2=(x+2)^2$



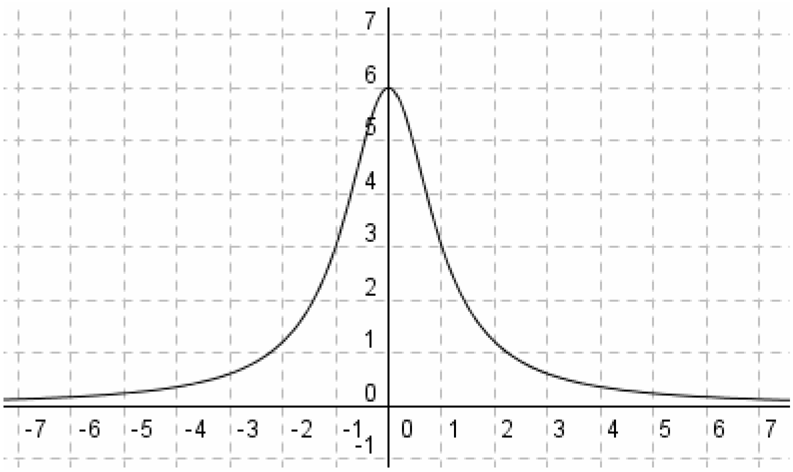
d) $x^2=8-x^2$



3) In figura è rappresentato il grafico della funzione $y=\frac{3}{x}$.
Servitene per risolvere graficamente l'equazione
$\frac{3}{x}=7-2x$
Vedrai che fra le soluzioni, una è intera; sostituiscila nell'equazione, per controllare che si ottiene un'uguaglianza vera.



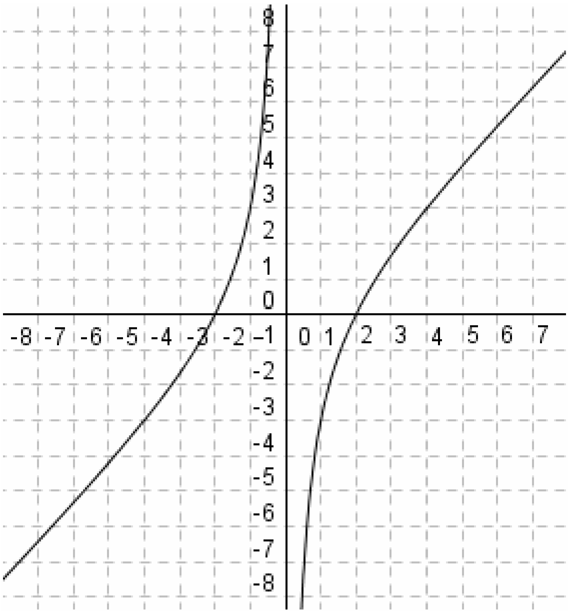
4) Nella figura è rappresentato il grafico della funzione $y=\frac{6}{1+x^2}$.
Servitene per risolvere graficamente l'equazione
$\frac{6}{1+x^2}=x+4$.

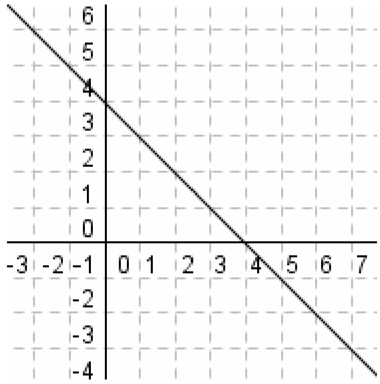


5) Nella figura a fianco è rappresentato il grafico della funzione

$$y=\frac{x^2-4}{x}.$$

- ❑ Qual è il dominio di tale funzione?
- ❑ Verifica che l'equazione
$$\frac{x^2-4}{x}=1+\frac{1}{2}x$$
ha due soluzioni intere. Sostituiscile nell'equazione per verificarne la correttezza.



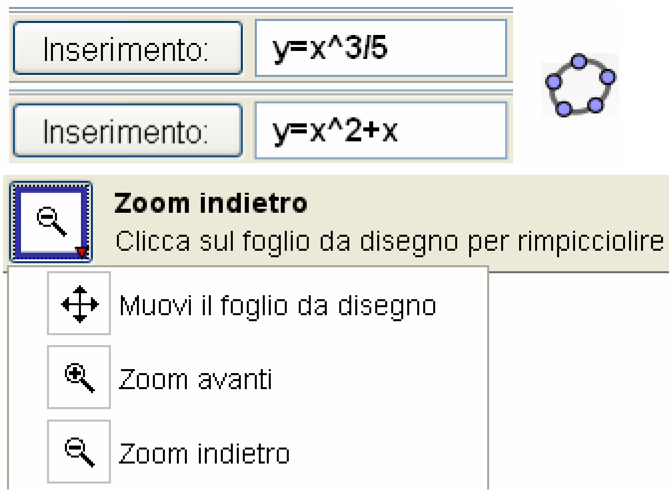


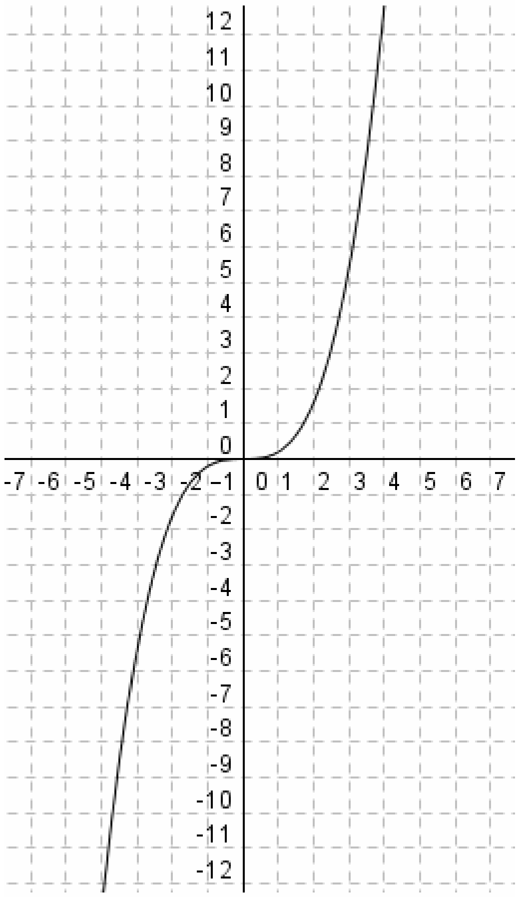
6) Il grafico riporta la retta $y=4-x$. Utilizzalo per risolvere graficamente il sistema
$$\begin{cases} y=4-x \\ x-5y+5=0 \end{cases}$$

7) Nella figura qui a destra è rappresentato il grafico della funzione

$$y=\frac{x^3}{5}.$$

- ❑ Servitene per risolvere graficamente l'equazione
$$\frac{x^3}{5}=x^2+x.$$
- ❑ Secondo te, oltre alle soluzioni che la figura può evidenziare, ce n'è anche un'altra?
- ❑ Controlla poi la risposta a quest'ultima domanda facendo la figura con GeoGebra e "zoomandola".





RISPOSTE

1) Nel modo più assoluto, NO! Basta sostituire quel valore al posto di x nell'equazione, per controllare se l'uguaglianza così ottenuta è vera o falsa. Nel nostro caso, si vede che è vera, quindi -5 è soluzione.

2) a) $x=0,\ x=2$ b) $x=-2,\ x=1$ c) $x=-1$ d) $x=-2,\ x=2$

3) $0<x_1<1,\ x_2=3$ 4) $-4<x_1<-3,\ \ x_2=-1,\ \ 0<x_3<1$ 5) Il dominio è $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$. $x_1=-2,\ x_2=4$

6) Si trova una soluzione $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$, con $2<a<3,\ 1<b<2$. Risolvendo algebricamente si ottiene $\begin{cases} x=5/2 \\ y=3/2 \end{cases}$.

7) $-1<x_1<0,\ \ x_2=0$; senz'altro c'è poi una terza soluzione positiva! Infatti, al crescere di x, la quantità $y=\dfrac{x^3}{5}$ a un certo punto comincia a crescere più rapidamente della quantità $y=x^2+x$.