RELAZIONI E FUNZIONI

1. PRODOTTO CARTESIANO DI DUE INSIEMI

Si dice "**prodotto cartesiano**" di due insiemi A e B,
l'insieme $A \times B$ (leggi: "A cartesiano B") formato da tutte le **coppie ordinate**
aventi come *primo elemento* un elemento di A, e come *secondo elemento* un elemento di B.

In simboli: $\boxed{A \times B = \{(x, y) /\ x \in A \wedge y \in B\}}$

ESEMPIO

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{s, t\}$,
allora $A \times B = \{(1,s); (1,t); (2,s); (2,t); (3,s); (3,t)\}$

	s	t
1	$(1, s)$	$(1, t)$
2	$(2, s)$	$(2, t)$
3	$(3, s)$	$(3, t)$

IM-POR-TAN-TE

Le GRAFFE indicano "INSIEME",
es. $B = \{s, t\}$ (NON CONTA L'ORDINE);
le TONDE indicano invece "COPPIA ORDINATA",
es. $(1, s)$ (PRIMA 1 e POI s)

ALTRI ESEMPI

- Detto S l'insieme delle *squadre* di calcio di un dato campionato nel quale ogni squadra incontra tutte le altre e si ha un girone di *andata* + un girone di *ritorno*, l'insieme P di tutte le *partite* del campionato coincide sostanzialmente con
  $S \times S$, PRIVATO PERO' delle coppie del tipo (x, x),
  voglio dire: tolte le coppie in cui il primo elemento coincida col secondo (una squadra non gioca contro sé stessa).
- Detto F l'insieme delle alunne di una classe femminile, se si devono eleggere una *miss* e una *rappresentante di classe*, e le due cariche sono *compatibili*, l'insieme dei possibili esiti di questa elezione è $F \times F$.
- Ancora: ogni punto del piano cartesiano è individuato dalla coppia ordinata delle sue coordinate. Ciò stabilisce una corrispondenza biunivoca fra il piano cartesiano, visto come l'insieme dei suoi punti, e l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i cui elementi sono le *coppie ordinate* di numeri reali.

2. RELAZIONI

Nel linguaggio di tutti i giorni, la parola RELAZIONE è usata in contesti molto diversi.
Tuttavia, il suo significato è sempre quello di "legame, collegamento".
Esempi:

a) " La parsimonia di quell'uomo è in RELAZIONE con la sua povertà "
b) " C'è una RELAZIONE fra il giardiniere e la padrona di casa "
c) " La camorra napoletana è in RELAZIONE con la malavita cinese "

In Matematica, la parola "relazione" è particolarmente importante
quando viene impiegata per indicare un "**COLLEGAMENTO FRA DUE INSIEMI**".

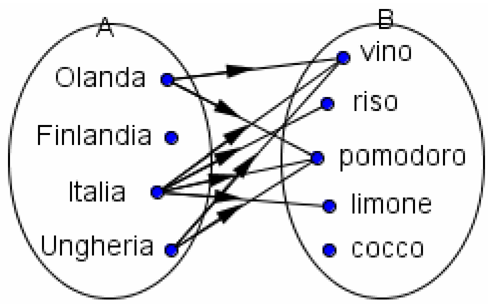
ESEMPIO 1

Consideriamo i due insiemi seguenti:
A = {Olanda, Finlandia, Italia, Ungheria}
B = {vino, riso, pomodoro, limone, cocco}

Il primo è un insieme di nazioni europee,
il secondo è un insieme di beni dell'agricoltura.

Esiste una RELAZIONE fra i due insiemi,
nel senso che alcune fra le nazioni di A
sono produttrici di alcuni fra i prodotti di B.

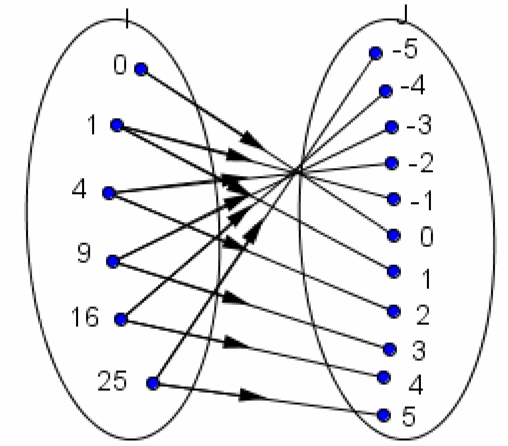
Tale relazione è illustrata
dal diagramma riportato qui a fianco.



ESEMPIO 2

I = {0, 1, 4, 9, 16, 25}
J = {−5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}

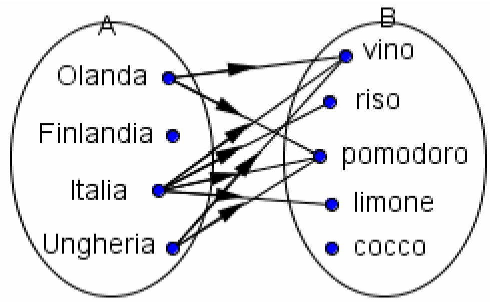
Fra i due insiemi I, J esiste una RELAZIONE, in quanto gli elementi di I sono i quadrati degli elementi di J: vedi la figura qui a fianco per una rappresentazione di questa relazione fra I e J.



Collegare gli elementi di due insiemi, stabilire fra di essi una corrispondenza, un legame,
e saper riconoscere le proprietà di questo legame, è di estrema importanza in Matematica.
Per questo,
i matematici hanno riservato estrema attenzione al concetto di "relazione" intesa come "collegamento tra due insiemi", stabilendo alcune definizioni ed un preciso gergo tecnico, al giorno d'oggi indispensabili per chiunque intenda occuparsi di questioni matematico-logiche.

Riprendiamo il primo dei due esempi dai quali eravamo partiti.

Fra l'insieme A = {Olanda, Finlandia, Italia, Ungheria} e l'insieme B = {vino, riso, pomodoro, limone, cocco} abbiamo considerato la relazione definita dal **predicato** " ... è nazione produttrice di ... " , ed illustrata dal **diagramma a frecce** qui a fianco:



In definitiva, tale relazione stabilisce un INSIEME DI COPPIE, sottoinsieme di $A \times B$:

{ (Olanda, vino); (Olanda, pomodoro);
(Italia, vino); (Italia, riso); (Italia, pomodoro); (Italia, limone);
(Ungheria, vino); (Ungheria, pomodoro) }

Questa osservazione ci porta a formulare la definizione generale seguente:

Si dice RELAZIONE fra due insiemi A, B
un legame fra gli elementi di A e gli elementi di B,
che è espresso da un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Detta R una relazione,
per indicare che a (elemento dell'insieme A) è in relazione con b (elemento dell'insieme B)
si usa, indifferentemente, una delle due scritture

- **a R b** ("notazione infissa")
- **R(a, b)** ("notazione prefissa")

ESEMPI

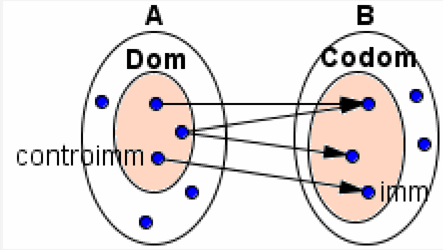
1) Andando a riprendere la relazione
R = " ... è nazione produttrice di ..."
fra gli insiemi A, B precedentemente considerati, possiamo scrivere:
- Italia R pomodoro
- R (Italia, pomodoro)

2) Con riferimento alla relazione
Q = "... è quadrato di ..."
(relazione fra I, J dell'esempio 2), abbiamo:
$9\,Q\,3 \quad 9\,Q\,-3 \quad Q(16, 4) \quad \overline{Q}(1, 0)$
(la soprallineatura ha il significato di *negazione*)

Data una relazione R fra un insieme A ed un insieme B
(si preferisce dire, anche per mettere in risalto l'ordine: "**di**" **un insieme A** "**verso**" **un insieme B**),

- **A** si dice "**INSIEME DI PARTENZA**" e **B** si dice "**INSIEME DI ARRIVO**";
- **il sottoinsieme di A costituito da quegli elementi di A, che sono in relazione R con almeno un elemento di B, si dice "DOMINIO" di R** (in pratica, il *dominio* di una relazione R di A verso B è **il sottoinsieme di A formato dagli elementi da cui parte almeno una freccia**);
- **invece**, **si dice "CODOMINIO" di R il sottoinsieme di B costituito da quegli elementi di B ai quali arriva almeno una freccia**.
- **Se a R b, allora b si dice "IMMAGINE" di a, mentre a si dice "CONTROIMMAGINE" di b.**

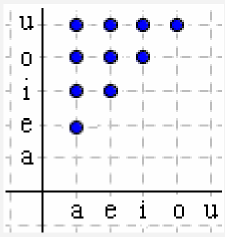
Dunque
- **il DOMINIO di R è l'insieme degli elementi dell'insieme di partenza A, che hanno almeno una immagine;**
- **e il CODOMINIO di R è l'insieme degli elementi dell'insieme di arrivo B, che hanno almeno una controimmagine.**



Nel nostro Esempio 1 (nazioni e prodotti dell'agricoltura), il dominio della relazione è D = {Olanda, Italia, Ungheria}; il codominio è C = {vino, riso, pomodoro, limone}.
L' Ungheria ha due "immagini": il vino e il pomodoro. L'unica "controimmagine" del riso è l'Italia.

Ecco un modo efficace di rappresentare una relazione. →
In un riferimento cartesiano, si elencano sull'asse orizzontale gli elementi dell'insieme di partenza X, e su quello verticale gli elementi dell'insieme di arrivo Y; nel caso sia $x \; R \; y$, si evidenzia poi con un tondino il punto di intersezione fra la retta verticale per *x* e la retta orizzontale per *y*.
Nella fattispecie, la relazione indicata in figura è: "la vocale *x* precede la vocale *y* in ordine alfabetico".
In questo esempio gli insiemi di partenza e di arrivo coincidono: la relazione si dice "interna ad un insieme" (vedi par. successivo).

Rappresentazione cartesiana



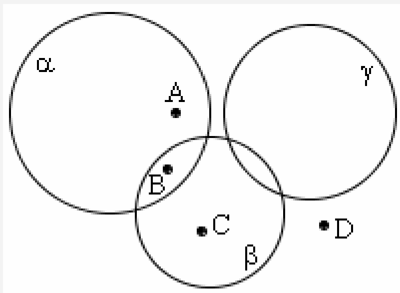
Alternativa: tabella a doppia entrata

1\2	a	e	i	o	u
a		●	●	●	●
e			●	●	●
i				●	●
o					●
u					

ESERCIZI (risposte alla pagina successiva)

1) Dati i due insiemi X = {2, 3, 4, 5, 6} e Y = {7, 8, 9, 10, 11} e la seguente relazione di X verso Y:
R = "... è divisore di ..."
   a) disegna il diagramma a frecce e anche il diagramma cartesiano della relazione; determina dominio e codominio di questa;
   b) fra le seguenti affermazioni, distingui le vere dalle false:
   I) 2 R 7 II) R(2, 8) III) R(8,2) IV) 3 non ha immagini V) 11 non ha controimmagini

2) La figura qui riportata mostra quattro punti A, B, C, D e tre circonferenze α, β, γ.
Posto $X = \{A, B, C, D\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,
scrivi gli elementi del sottoinsieme di $X \times Y$ che esprime la relazione:
"il punto *x* è interno alla circonferenza *y*".
Determina dominio e codominio della relazione.
Rappresentazione cartesiana e col diagramma a frecce.



3) Sempre con riferimento alla figura qui a destra,
scrivi gli elementi del sottoinsieme di $Y \times Y$ che esprime la relazione:
" la circonferenza y interseca in due punti la circonferenza y' ".
Determina dominio e codominio della relazione.
Rappresentazione cartesiana e col diagramma a frecce.

4) $L = \{33, 34, 35\}$, $N = \{36, 37, 38, 39\}$. Scrivi gli elementi del sottoinsieme di $L \times N$ che esprime la relazione: "Il prodotto di $x \in L$ per $y \in N$ è un multiplo di 3" e rappresenta la relazione sia con un diagramma a frecce, che con un riferimento cartesiano. Determina infine dominio e codominio della relazione.

5) Se ti chiedono quante sono le possibili relazioni di A in B (cioè: aventi come insieme di partenza A e come insieme di arrivo B) nel caso A abbia 3 elementi e B ne abbia 5, tu cosa rispondi?
[*Una relazione coincide sostanzialmente con un sottoinsieme del prodotto cartesiano* $A \times B$;
ma se A *ha* 3 *elementi e* B 5, *allora* $A \times B$ *ha … elementi, quindi i suoi sottoinsiemi sono in numero di …*]

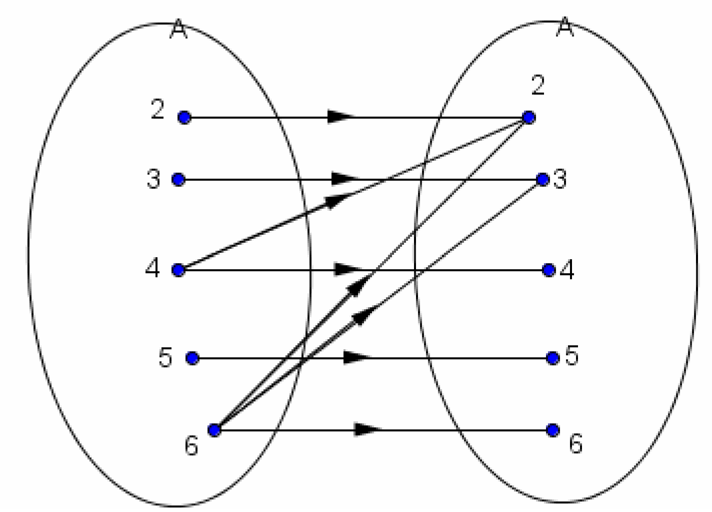
RELAZIONI INTERNE AD UN INSIEME

Se insieme di partenza e insieme di arrivo coincidono, si parlerà di "relazione **interna** ad un insieme".

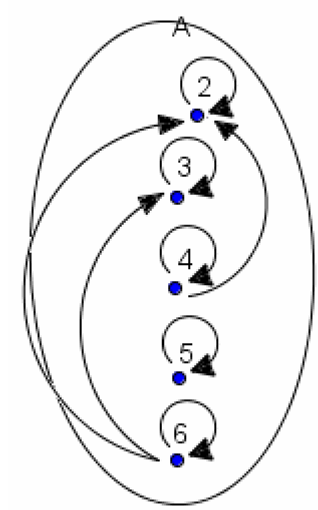
Quando vogliamo rappresentare una relazione interna ad un insieme, possiamo procedere in 2 modi.

Illustriamoli con riferimento all'insieme $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
e alla relazione, ad esso interna, R = " … è multiplo di … "

1° modo: rappresentiamo A due volte



2° modo: rappresentiamo A una volta sola



Un simbolo di "auto-corrispondenza"

si chiama anche "*buccola*" (da una parola in disuso che significava "boccolo, ricciolo" o anche "orecchino")

ESERCIZI

1) Considerato l'insieme A = {2, 3, 4, 5, 6}
traccia un diagramma a frecce,
con A rappresentato una sola volta,
per raffigurare la relazione R, interna ad A,
così definita:

$$x \text{ R } y \Leftrightarrow |x-y| = 3$$

(il simbolo $\Leftrightarrow$ è quello di "biimplicazione logica":
"se … allora … e viceversa,
per qualsiasi valore delle lettere coinvolte")

2) Nell'insieme X = {1, 2, 3, 4, 5, 6} rappresenta, sia con un diagramma a frecce che cartesianamente, le relazioni seguenti:

a) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *è divisibile per* y b) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *è divisore di* y
c) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *ha più divisori di* y d) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x+y$ *è pari*

RISPOSTE agli esercizi della pagina precedente

1) a) Dominio = {2, 3, 4, 5}, Codominio = {8, 9, 10} b) I) F II) V III) F IV) F V) V
2) $(A, \alpha); (B, \alpha); (B, \beta); (C, \beta)$. Dominio $= \{A, B, C\}$; Codominio $= \{\alpha, \beta\}$
3) $(\alpha, \beta); (\beta, \alpha); (\beta, \gamma); (\gamma, \beta)$. Dominio $= \{\alpha, \beta, \gamma\} = Y$; Codominio $= \{\alpha, \beta, \gamma\} = Y$
4) $(33, 36); (33, 37); (33, 38); (33, 39); (34, 36); (34, 39); (35, 36); (35, 39)$
Dominio $= \{33, 34, 35\} = L$, codominio $= \{36, 37, 38, 39\} = N$
5) 32768

RISPOSTE agli esercizi di questa pagina

1) $(2,5); (3,6); (5,2); (6,3)$
2) a) $(6,6); (6,3); (6,2); (6,1); (5,5); (5,1); (4,4); (4,2); (4,1); (3,3); (3,1); (2,2); (2,1); (1,1)$
b) $(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,2); (2,4); (2,6); (3,3); (3,6); (4,4); (5,5); (6,6)$
c) $(6,5); (6,4); (6,3); (6,2); (6,1); (5,1); (4,5); (4,3); (4,2); (4,1); (3,1); (2,1)$
d) $(1,1); (1,3); (1,5); (2,2); (2,4); (2,6); (3,1); (3,3); (3,5); (4,2); (4,4); (4,6); (5,1); (5,3); (5,5); (6,2); (6,4); (6,6)$