9. RELAZIONI D'ORDINE

Si dice che una relazione R interna ad un insieme A è una relazione D'ORDINE se gode delle proprietà ANTISIMMETRICA e TRANSITIVA (come la relazione $<$ o la relazione $\leq$ in un insieme numerico).

Una relazione d'ordine R in un insieme A si dice poi

- di **ORDINE STRETTO se è anche ANTIRIFLESSIVA**
  (= *nessun* elemento è in relazione con sé stesso)
- di **ORDINE LARGO se è anche RIFLESSIVA**
  (= *ogni* elemento è in relazione con sé stesso)

Un esempio classico di ordine *stretto* è dato dalla relazione $<$,
mentre un esempio classico di ordine *largo* è dato da $\leq$.

Anzi!

- **Per ricordare meglio sotto quali condizioni una relazione viene detta "di ordine stretto", converrà proprio pensare alla relazione $<$, che è il "prototipo" dell'ordine stretto**:
  essa è appunto caratterizzata dalle proprietà antisimmetrica, transitiva e antiriflessiva.
- **E per ricordare meglio sotto quali condizioni una relazione viene detta "di ordine largo", converrà proprio pensare alla relazione $\leq$, che è il "prototipo" dell'ordine largo**:
  essa è appunto caratterizzata dalle proprietà antisimmetrica, transitiva e riflessiva.

Altri esempi:

- nell'insieme dei cittadini di un dato Comune, la relazione: … è discendente di … è di ordine stretto
- nell'insieme delle persone in una "coda", la relazione: … non sta dietro a … è di ordine largo.

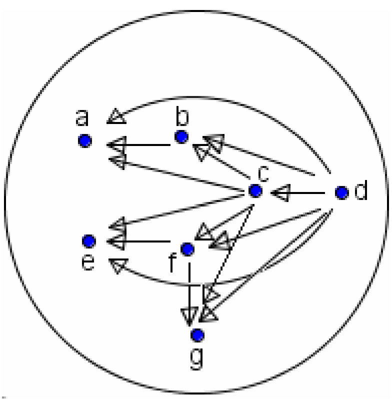
- **Si dice che una relazione d'ordine (largo o stretto) in un insieme A è un ORDINE TOTALE quando, presi due elementi distinti x, y di A, essi sono sempre "confrontabili", sono sempre "in relazione", nel senso che o risulta x R y, oppure y R x; in questo caso, si dice che A è un insieme "totalmente ordinato" dalla relazione considerata.**
- **In caso contrario**, cioè se la relazione d'ordine è tale che NON TUTTE le coppie di elementi distinti di A sono "confrontabili", **si parla di ORDINE PARZIALE e di insieme "parzialmente ordinato".**

Esempi:

- Consideriamo l'insieme N* e in esso la relazione R definita dal predicato: ... è divisore di ...
  E' facile riconoscere che R è un "ordine largo, parziale".
- Sia dato un insieme E.
  Consideriamo P(E), ossia: l' "insieme delle parti di E", l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di E.
  Ad esempio, se E = { a, b, c }, allora P(E) = { {}, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a, b, c} }.
  In P(E), la relazione di inclusione $\subseteq$ è di ordine largo, parziale
  mentre la relazione di "inclusione stretta" $\subset$ è di ordine stretto, parziale.

La relazione in figura, essendo antisimmetrica e transitiva, è di **ordine**.

Essendo pure antiriflessiva, è di ordine **stretto**.

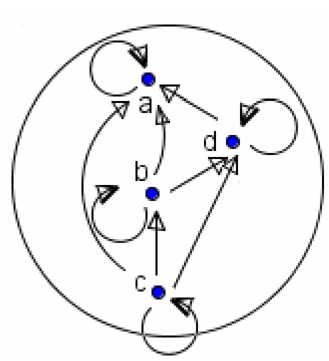


Non tutti gli elementi sono "confrontabili" (ad esempio e, g non lo sono), quindi l'ordine è **parziale**.
E' come se la relazione stabilisse delle "**gerarchie**" fra gli elementi dell'insieme.

La relazione rappresentata qui a destra, essendo antisimmetrica e transitiva, è di **ordine**.

Essendo pure riflessiva, è di ordine **largo**.

Tutti gli elementi sono "confrontabili", quindi l'ordine è **totale**.



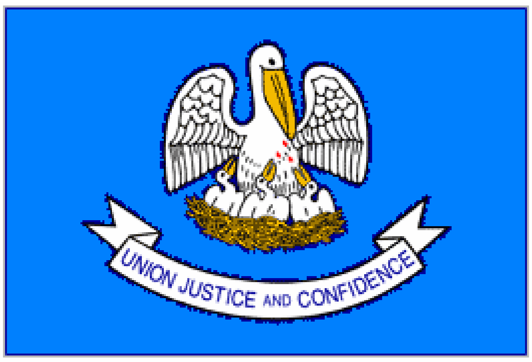
Viene stabilita una "**lista di precedenze**", una "**coda**": **c-b-d-a**.

Se valgono perlomeno le proprietà **riflessiva** e **transitiva** si parla di relazione di **PREORDINE**.
Un preordine può essere
- "totale" se, presi due qualsivoglia elementi, essi risultano sempre "confrontabili";
- "parziale" se ciò non avviene.

ESERCIZI SULLE RELAZIONI DI EQUIVALENZA E DI ORDINE (risposte a pag. 484)
Fra le seguenti relazioni, alcune sono di equivalenza, altre di ordine, altre né di equivalenza né di ordine.
Stabilisci, per ciascuna relazione, se è di equivalenza o di ordine
(specificando, in quest'ultimo caso, se *stretto* o *largo*, *parziale* o *totale*).
Riconosci anche le eventuali relazioni di "**preordine**".

1) ... è divisore di ... (in $\mathbb{N}^*$)
2) ... è congruente a ... (nell'insieme dei segmenti nello spazio) [NOTA]
NOTA: due figure si dicono "congruenti" quando è possibile, con un movimento "rigido" (= non deformante) sovrapporre una di esse all'altra, in modo che combacino perfettamente. Anziché dire "congruenti" si può anche dire semplicemente "uguali": noi, nel presente testo, abbiamo fatto quasi sempre questa scelta.
3) ... ha almeno un punto in comune con ... (nell'insieme delle rette di un piano)
4) ... x R y se e solo se esiste un numero naturale n tale che $x^n = y$ (in $\mathbb{N}^*$)
5) … può ricevere ordini da … (nell'insieme dei militari di una caserma)
6) … sa dove abita … (nell'insieme degli studenti di una data scuola superiore)
7) … ha vinto più campionati del mondo di calcio di … (nell'insieme delle nazioni)
8) … ha vinto almeno tanti campionati del mondo di calcio quanto …
9) … gioca attualmente nella stessa squadra di … (nell'insieme dei giocatori di un campionato nazionale)
10) … ha giocato almeno una volta nella stessa squadra di …
11) a è in relazione R con b se e solo se la cifra delle unità di a è minore rispetto alla cifra delle unità di b (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
12) La somma delle cifre di x è maggiore della somma delle cifre di y (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
13) La somma delle cifre di x non è inferiore alla somma delle cifre di y (nell'insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
14) a R b se e solo se a è parallela a b, o in alternativa a è perpendicolare a b (nell'insieme delle rette di un piano fissato)
15) a R b se e solo se la differenza fra a e b (s'intende: presa in valore assoluto) è divisibile per 5 (in $\mathbb{N}$)
16) "x R y se e solo se i nomi di battesimo di x e di y non hanno nessuna lettera in comune" (in un insieme fissato di persone)
17) "x R y se e solo se il giudizio di x al termine delle scuole medie è stato più alto del giudizio di y" (nell'insieme degli alunni di una scuola superiore)
18) "x R y se e solo se l'area di x è inferiore all'area di y" (nell'insieme delle superfici su di un piano).
19) "x R y se e solo se esiste un numero naturale n tale che $y = x+n$" (nell'insieme dei numeri reali positivi)

Dal sito
www.perma-bound.com



Louisiana State Standards for Mathematics: Grade 5
…
In problem-solving investigations, students demonstrate an understanding of patterns (= *modelli*), relations, and functions
…