Giancarlo Zilio

Chi ha paura della matematica?

www.chihapauradellamatematica.org

Volume 2

- Radicali
- Equazioni di 2° grado
- Numeri complessi
- Equazioni di grado superiore al 2°
- Equazioni irrazionali
- Grafici e risoluzioni grafiche
- Sistemi di grado superiore al 1°
- Disequazioni algebriche
- Circonferenza
- Misura delle grandezze
- Teoremi di Euclide e Pitagora
- Similitudini
- Poligoni regolari
- Trasformazioni geometriche
- Matrici e vettori
- Geometria solida
- Principio di Induzione Matematica
- Cantor e i “gradi di infinito”
- Statistica descrittiva
- Introduzione alla Trigonometria
- Cenni di Calcolo Combinatorio
- Cenni di Calcolo delle Probabilità
- Algoritmi
- Prove INVALSI
- Quesiti per divertirsi e ripassare

www.chihapauradellamatematica.org
“Chi ha paura della matematica?”
Volume 2
Quest'opera è distribuita con Licenza
Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale.

SIMBOLOGIA

$>,\ \geq,\ <,\ \leq,\ \neq$	"Maggiore di", "maggiore o uguale di", "minore di", "minore o uguale di", "diverso da"
$\equiv$	"Coincidente con"
$\approx$	"Uguale circa a", "pressappoco uguale a"
$\doteq$	"Equivalente a" (fra superfici)
, ·	Per separare, in un numero, la parte intera da quella decimale, si utilizzerà in genere la virgola, che sarà in certi casi sostituita dal punto (all'anglosassone): ciò avverrà quando verranno riportati materiali in Inglese, o nei capitoli di Goniometria e Linguaggio Pascal.
$\{\quad\}$	Una coppia di graffe può essere impiegata per indicare un insieme. E l'ordine degli elementi in un insieme è irrilevante: $\{\text{Roma, Milano}\} = \{\text{Milano, Roma}\}$
$(\ldots,\ldots)$	Una coppia di tonde può essere utilizzata, oltre che nel simbolo di "intervallo" (vedi), anche per indicare una coppia *ordinata*, o più in generale una sequenza *ordinata*. Ad esempio, la scrittura $(-5, 4)$ può rappresentare la coppia ordinata che ha per 1° elemento -5 e per 2° elemento 4, ed è $(-5, 4) \neq (4, -5)$
$\in$	"Appartiene a", "è contenuto in". Si usa per un elemento rispetto a un insieme. Negazione: $\notin$
$\subseteq$	"E' incluso in", "è sottoinsieme di". Si usa per un insieme rispetto a un altro insieme.
$\subset$	"E' incluso strettamente in". Questo simbolo compare di rado; serve per mettere in risalto che un dato sottoinsieme non coincide con l'insieme più grande, non lo riempie del tutto.
$\cap,\ \cup,\ -,\ \bar{}$	Operazioni fra insiemi: intersezione, unione, differenza insiemistica, complementazione
$\wedge,\ \vee,\ \bar{}$	Operazioni logiche: "et" (congiunzione), "vel" (disgiunzione), "non" (negazione)
$\exists,\ \exists!$	"Esiste" (quantificatore esistenziale); con il punto esclamativo: "esiste uno e un solo"
$\forall$	"Per ogni", "per qualsiasi", "qualunque sia" (quantificatore universale)
/ o anche :	"Tale che, tali che" (gli stessi simboli, naturalmente, indicano anche frazione o divisione)
$\rightarrow,\ \leftrightarrow$	Implicazione e biimplicazione "materiale" e, in senso più generale, abbreviazioni di SE … ALLORA … oppure QUINDI, DI CONSEGUENZA ($\rightarrow$); SE … ALLORA … E VICEVERSA ($\leftrightarrow$). Ma possono anche indicare semplicemente "corrispondenza", "rimando", o "orientamento".
$\Rightarrow,\ \Leftrightarrow$	Implicazione logica, doppia implicazione (o biimplicazione) logica. SE … ALLORA … ($\Rightarrow$), SE … ALLORA … E VICEVERSA ($\Leftrightarrow$), *per qualsiasi valore delle lettere coinvolte*.
$\varnothing,\ \{\,\}$	Entrambi i simboli indicano l'insieme vuoto, l'insieme senza elementi
$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri "reali"	Comprende sia i numeri interi che quelli con la virgola (tanto i finiti quanto gli illimitati, periodici o non periodici), sia quelli positivi che quelli negativi (e anche, ovviamente, lo 0). E' l'insieme dei numeri che sono rappresentabili su di una "number line", ossia su di una retta dotata di "origine", orientamento e unità di misura. L'insieme dei numeri reali senza segno (="assoluti") si indica invece con $\mathbb{R}_a$.
$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri "naturali"	I numeri "naturali" sono: 0, 1, 2, 3, 4, 5, … Lo stesso simbolo, ma asteriscato, è utilizzato per indicare il medesimo insieme, privato dello 0: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$ = insieme degli interi relativi	$\mathbb{Z} = \{\ \ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\ \}$
$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri "razionali" $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = insieme dei numeri "irrazionali"	Dal latino "*ratio*" che significa "*rapporto, quoziente*", i numeri razionali sono i numeri frazionari o che, comunque, si possono portare sotto forma di frazione, intesa come "quoziente fra due numeri interi". Ad esempio, i numeri con la virgola finiti o illimitati *periodici* sono razionali, gli illimitati *non* periodici non lo sono (sono "irrazionali"). Si intende che il simbolo $\mathbb{Q}$ indichi i razionali *relativi* (sia positivi, che negativi); il simbolo usato per indicare l'insieme dei razionali assoluti (=senza segno) è $\mathbb{Q}_a$.
$\mathbb{R}^*, \mathbb{N}^*, \ldots$	L'asterisco * indica che dall'insieme va tolto lo 0. Es. $\mathbb{R}^*$ = {numeri reali non nulli}
∞	Infinito
$(a, b)\ [a, b]$ $[a, b)\ (a, b]$	Intervalli. La parentesi tonda indica che quell'estremo è escluso, la quadra che è incluso. Ad esempio, $[2, 5)$ indica tutti i numeri reali compresi fra 2 (incluso) e 5 (escluso). $(-\infty, 0)$ è l'insieme dei numeri reali < 0 ("strettamente negativi", negativi in senso stretto) $(-\infty, 0]$ è l'insieme dei numeri reali ≤ 0 (negativi o nulli, negativi in senso lato) $(0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali > 0 ("strettamente positivi", positivi in senso stretto) $[0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali ≥ 0 (positivi o nulli, positivi in senso lato) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
$\times$	Prodotto cartesiano di insiemi; anche per l'ordinaria moltiplicazione, al posto di "·"
$\parallel\ \perp$	"Parallela a"; "perpendicolare a" (fra rette)

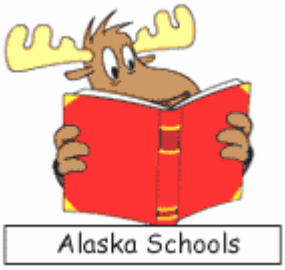
Chi ha paura della matematica?

Matematica gioiosa e solidale

Se dai alle stampe un volume di
“Chi ha paura della matematica?”
sei moralmente tenuto
a compensare l’autore
attraverso
una piccola offerta in solidarietà
... anche direttamente a un povero per strada.

Questo progetto rientra infatti nella “filosofia” del cosiddetto
Careware o Charityware o Helpware:
visita il sito
www.chihapauradellamatematica.org
per i particolari.

Buono studio!!!



”Chi ha paura della matematica?” di G.Z.
è distribuito con Licenza
Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 4.0 Internazionale

I radicali pagg. 2-35
Le equazioni di 2° grado - prima parte 36-50
Numeri complessi 51-60
Le equazioni di 2° grado - seconda parte 61-67
Oltre le equazioni di 2° grado 68-88
Grafici e risoluzioni grafiche 89-127
Sistemi di grado superiore al 1° 128-135
Disequazioni 136-166
Geometria 167-277
Trasformazioni geometriche piane 278-314
Le matrici e I) il Teorema di Rouché-Capelli II) le trasformazioni lineari 315-324
I vettori e i concetti di dipendenza e indipendenza lineare 325-328
Cenni di geometria solida 330-347
Principio di induzione matematica 348-349
Cantor e i "gradi di infinito" 350-353
Elementi di Statistica descrittiva 354-427
Introduzione alla Trigonometria 428-462
Cenni di Calcolo Combinatorio 463-473
Cenni di Calcolo delle Probabilità 474-501
Algoritmi 503-517
Prove INVALSI - Problemi vari e "creativi" 518-539

L'INDICE NEL DETTAGLIO

DAL VOLUME 1 AL 2 pag. 1

I RADICALI

1. Definizione di radice 2
2. Due identità veramente fondamentali 2
3. Radicando e risultato positivi. Ma perché? 3
4. La proprietà invariantiva dei radicali 4
5. Prodotto e quoziente di radicali 5
6. Trasporto di un fattore dentro e fuori dal segno di radice 6
7. Radice di un radicale 6
8. Potenza di un radicale 6
9. Somma algebrica di radicali 7
10. Espressioni "tipo monomi, polinomi, prodotti notevoli" 8, 9
11. L'aggettivo "irrazionale" 10, 11
12. Razionalizzazione del denominatore di una frazione 12, 13
13. Radicali doppi 14, 15
14 Espressioni varie con radicali 16, 17
15. Esercizi sui radicali, e rispettivi risultati
    a) Definizione di radice, identità fondamentali 18
    b) Proprietà invariantiva 19, 20
    c) Prodotti, quozienti di radicali 19, 20
    d) Portare il fattore esterno sotto radice e) Estrarre un fattore dal segno di radice 21, 22
    f) Radice di un radicale g) Potenza di un radicale 21, 22
    h) Somma algebrica di radicali 23, 24
    i) Operazioni tipo "prodotti notevoli" 23, 24
    l) Razionalizzazione 23, 24
    ♪ La sagra degli errori; qualche quesito pescato su Internet 25

m) Radicali doppi 26, 27
n) Espressioni varie 26, 27
o) Esercitazioni conclusive 27

16. Equazioni e sistemi di 1° grado con coefficienti irrazionali 28, 29
17. Dai "radicali assoluti" ai "radicali in $\mathbb{R}$" 30
18. Radicali e valori assoluti 31
19. Sigh! I paragrafi 17) e 18) ci costringerebbero a rimettere in discussione … 32
    ♪ Quesiti; un sito Internet sui radicali 33
20. Esponenti frazionari 34, 35

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - PRIMA PARTE

1. Che cos'è e come si risolve un'equazione di 2° grado
   Equazioni incomplete 36, 37
   L'equazione completa 38, 39
   La formula "ridotta" 40
   Coefficienti irrazionali 41
   Esercizi 42, 43
2. Equazioni di 2° grado letterali 44, 45
   Esercizi 46
   ♪ Approfondimento (Internet, lingua inglese, computer) 47
3. Problemi di 2° grado 48, 49, 50

NUMERI COMPLESSI

1. "Impossibile"? Uah, uah! 51
2. Numeri immaginari, numeri complessi 52, 53
3. A cosa non servono i numeri complessi 54, 55
4. A cosa servono i numeri complessi a) in matematica pura b) in Fisica e in Ingegneria 56 … 59
5. Esercizi 60

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - SECONDA PARTE

a) Relazioni fra soluzioni e coefficienti 61
b) Trovare due numeri conoscendone la somma e il prodotto 61
c) Formula generale per scomporre in fattori un trinomio di 2° grado 62
d) Regola di Cartesio 63
e) Quesiti sulle equazioni parametriche di 2° grado 64, 65
   Esercizi 66, 67

OLTRE LE EQUAZIONI DI 2° GRADO

1. Equazioni algebriche, loro soluzioni e risolubilità 68, 69
   ♪ Approfondimento (in Inglese): Fundamental Theorem of Algebra 70
2. Le "soluzioni trovate per strada" 71
3. Equazioni di grado superiore al 2°: principali tipologie 72, 73, 74, 75
   A) risolubili per scomposizione
   B) binomie
   C) trinomie e in particolare biquadratiche
   D) risolubili con artifici
4. Esercizi 76, 77, 78, 79
5. Equazioni irrazionali 80, 81, 82, 83
   Esercizi 84, 85

♫ *Matematica e Problemi della Realtà*: *equazioni irrazionali e situazioni reali* 86, 87, 88

GRAFICI E RISOLUZIONI GRAFICHE

1. Presentazione 89
2. Funzioni lineari: rette 90, 91, 92, 93
3. Funzioni quadratiche: parabole 94, 95
4. Funzioni della proporzionalità inversa: iperboli 95
5. Il simbolo di "limite" (introduzione elementare) 96
6. Qualche cenno alla "Geometria Analitica" 97
7. Signori, le coniche !!! 98, 99, 100, 101
8. Grafici di potenze e radici, e della funzione "valore assoluto".
   Funzioni pari, dispari, né pari né dispari 102, 103
9. Risoluzione grafica di un'equazione 104, 105
10. Funzioni quadratiche ed equazioni di secondo grado 106, 107

♫ *Matematica e Problemi della Realtà*: *funzioni quadratiche e problemi reali*
108, 109, 110, 111, 112, 113

11. Manipolazioni di grafici 114, 115, 116, 117, 118, 119
12. Inversione di una funzione numerica 120, 121, 122
13. Composizione di funzioni 123
14. Determinazione del dominio e del condominio di una funzione reale di variabile reale
    124, 125, 126
15. Risposte agli esercizi 126, 127

SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1°

1. Grado di un sistema. Metodi generali di risoluzione 128, 129
2. Sistemi simmetrici 130, 131
3. Sistemi di grado superiore al 1° con 3 o più incognite 132, 133
4. Sistemi risolubili con artifici vari o fattorizzazioni 134
5. Esercizi vari sui sistemi di grado superiore al 1° 135

DISEQUAZIONI

1. La "number line" 136
2. Intervalli 136
3. Proprietà delle disuguaglianze 137
4. Data una disuguaglianza, 138
   - si possono elevare a potenza i due membri?
   - si possono estrarre le radici dei due membri?
5. Le disequazioni e la loro risoluzione 139
6. La risoluzione di una disequazione di 1° grado 139
7. Lo studio del segno di un trinomio di 2° grado e la risoluzione di una disequazione di 2° grado
   140, 141, 142, 143
8. Significato dei simboli $\leq, \geq$ 144
9. Esercizi sulle disequazioni di 1° e 2° grado 144, 145

♪ Ancora sullo studio del segno di un trinomio di 2° grado 146

10. Disequazioni in cui compaiono potenze 146, 147, 148, 149
11. La risoluzione grafica di una disequazione 150, 151
12. Problemi che hanno come modello una o più disequazioni 152

♫ *Matematica e Problemi della Realtà*: *disequazioni e situazioni reali; cenni alla "ricerca operativa"*
153, 154, 155

13. Disequazioni di grado superiore al 2° 156, 157
14. Disequazioni fratte 158, 159
    Esercizi
    160 (grado superiore al 2°)
    161, 162, 163 (fratte)
15. Sistemi di disequazioni 164, 165, 166

GEOMETRIA

Cap. 6: LA CIRCONFERENZA

6.1 Definizioni 167

6.2 Teoremi fondamentali sulla circonferenza 168

6.3 Posizioni reciproche di una retta e di una circonferenza 169
Teorema "del cappello" 170
♪ Tangents and Circles 171

6.4 Angoli alla circonferenza e angoli al centro 172, 173

6.5 Posizioni reciproche di due circonferenze 174, 175

6.6 Poligoni inscritti e circoscritti 176, 177

♪ *Aiuto al ripasso* 178, 179, 180

♪ *Esercizi sul capitolo* 6 da 181 a 188

Cap. 7: MISURA DELLE GRANDEZZE

7.1 Misuriamo i segmenti (misura intera, misura razionale, misura irrazionale) 189, 190, 191

7.2 Misuriamo le superfici 192

7.3 Generalizziamo 193, 194, 195

♪ *Questionario per il ripasso* 196

♪ *Un uomo, un maestro: Pitagora di Samo* 197

Cap. 8: EQUIVALENZE; I TEOREMI
DI EUCLIDE E DI PITAGORA

8.1 L'equivalenza delle superfici piane 198, 199

8.2 I teoremi di Euclide e di Pitagora 200, 201
Esempi numerici, esercizi 202, 203
Inverso del teorema di Pitagora; i teoremi di Euclide "ritrovati per similitudine";
terne pitagoriche; storia, approfondimenti dal sito del prof. Peiretti;
le tante dimostrazioni alternative del teorema di Pitagora 204, 205, 206

♪ *Ripasso, esercizi su equivalenze e teoremi di Euclide e Pitagora* 207, 208

Cap. 9: SIMILITUDINI

9.1 Proporzioni 209, 210, 211

9.2 Similitudini da 212 a 219

9.3 Applicazioni delle similitudini
(teoremi della Bisettrice, delle Due Corde, delle Due Secanti, della Tangente e Secante) 220, 221

♪ *Aiuto al ripasso, altri esercizi* 222, 223

Cap. 10: POLIGONI REGOLARI, COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

10.1 Triangoli rettangoli particolari (con angoli acuti di 45° oppure di 30° e 60°) 224, 225

10.2 Poligoni regolari (Generalità, Triangolo equilatero, Quadrato, Esagono regolare 226, 227, 228
Sezione aurea, decagono regolare 229
Realtà e leggenda 230, 231
Formula per il raddoppio del numero dei lati; Ottagono regolare; Pentagono regolare 232

10.3 Una relazione interessante fra cateti, ipotenusa e altezza ad essa relativa 233

10.4 Il trapezio circoscritto ad una semicirconferenza 233

10.5 La formula di Erone 234

10.6 Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo, espresso in funzione dei lati 235

10.7 Il raggio del cerchio circoscritto 235

♪ *Ripasso, esercizi geometrici vari* 236, 237

10.8 Area del cerchio, lunghezza della circonferenza, il numero π 238, 239

♪ *Quesiti su cerchi e circonferenze, tratti da gare matematiche* 240, 241

PROBLEMI GEOMETRICI
- 1° grado 242, 243, 244
- con applicazione di Euclide e Pitagora 245
- 2° grado 246, 247, 248, 249, 250, 251
- con triangoli rettangoli particolari 252, 253
- con equazione risolvente irrazionale 254, 255 (esempio); 257 (esercizi)
- risolubili con un sistema 256 (esempio); 257 (esercizi)
- similitudini da 258 a 265
- applicazioni delle similitudini 266
- poligoni regolari 267

Problemi geometrici vari 268, 269

♪ *Quesiti geometrici da gare matematiche* 270, 271

Problemi geometrici + grafici da 272 a 277

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

1. Cosa si intende per "trasformazione piana" 278, 279, 280
   ♪ Semplici trasformazioni geometriche con GEOGEBRA 280
2. Un controesempio 281
3. L'immagine di un segmento attraverso una trasformazione piana 281
4. Trasformazioni piane molto speciali: le affinità e, in particolare, le isometrie 282, 283
5. Teoremi sulle isometrie 284
6. Isometrie notevoli: simmetrie, traslazioni, rotazioni 285
7. Altre isometrie. Relazione fra isometrie e movimenti rigidi 286
8. Teoremi sulla composizione (= applicazione successiva) di due isometrie 287
9. Omotetie con rapporto negativo, similitudini 288, 289
10. Punti uniti, rette di punti uniti, rette unite 290
11. Inversa di una trasformazione 290
12. Figure simmetriche rispetto a un punto, o a una retta 291
13. Esercizi sulle trasformazioni geometriche 292, 293
14. Approfondimento: trasformazioni un po' più generali 294, 295
15. Trasformazioni geometriche (soprattutto: affinità) nel piano cartesiano 296, 297
16. Affinità particolari (traslazioni, simmetrie, omotetie) descritte in coordinate, nel piano cartesiano 298, 299
17. Come scrivere le equazioni della trasformazione inversa di una trasformazione data 300, 301
18. Equazione dell'immagine di una curva assegnata 302
19. Equazione della controimmagine di una curva data 303
    Esercizi (inversa, immagine, controimmagine) 303, 304
20. Equazioni della trasformazione composta (detta anche "trasformazione prodotto") 305
21. Lo studio di un'affinità 306, 307, 308, 309
22. Esercizi sulle affinità 310, 311, 312, 313, 314

LE MATRICI da 315 a 324
e
I) il Teorema di Rouché-Capelli
II) le trasformazioni lineari

I VETTORI da 325 a 328
e
i concetti di dipendenza e indipendenza lineare

CENNI DI GEOMETRIA SOLIDA

1. Nozioni generali 330, 331, 332
2. Superfici e solidi di rotazione 333
3. Il volume di un solido 334
4. Il Principio di Cavalieri e la sua applicazione al calcolo dei volumi di prismi, cilindri, piramidi e coni 335, 336, 337
5. Il volume della sfera 338
6. Aree di superfici di solidi di rotazione 339
7. Specchietto delle formule studiate; altre formule 340, 341
8. Esercizi da 342 a 347
   ♪ *I solidi platonici sono solo 5: perché*? 347

PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

348, 349

CANTOR E I "GRADI DI INFINITO"

350, 351, 352, 353

ELEMENTI DI STATISTICA DESCRITTIVA

1. Esempi introduttivi 354
2. Due righe di storia 355
3. Di cosa tratta la statistica; statistica descrittiva e inferenziale 356, 357
   - Fenomeno collettivo, popolazione statistica, carattere, modalità, unità statistica
   - Tipi di caratteri
   - Definizioni di "statistica"
   - La statistica nel mondo contemporaneo
   - Origine storica del termine
4. Le prime tre fasi di un'indagine statistica; terminologia 358 … 361
   - Prima fase: la scelta del "fenomeno collettivo"
   - Seconda fase: la rilevazione dei dati
   - Terza fase: lo spoglio dei dati
   - Frequenza assoluta, relativa, percentuale
   - Distribuzioni di frequenza
   - Classi di frequenza
   - Separatore della parte intera dalla decimale
   - Esercizi 8, 9 (Questionario del Curiosone 8)
5. Rappresentazioni grafiche 362 … 367
   - Diagrammi a barre, grafici cartesiani, serie storiche
   - Cartogrammi
   - Esercizi
   - Diagrammi a barre e a segmenti
   - Ideogrammi, diagrammi a strisce, a torta
   - Istogrammi
   - Tabelle a doppia entrata
   - I tipi di diagramma più "gettonati"
6. Una breve introduzione al "foglio elettronico" 368 … 379
   - *Microsoft Office*, *OpenOffic*e
   - Sommaria guida al foglio elettronico
   - Diagrammi e grafici col foglio elettronico
   - CONTA.SE
   - Numeri pseudocasuali
   - Esercizi sul foglio elettronico
7. ESERCIZI sulle rappresentazioni grafiche 380 … 385

8. Gli indici di posizione 386 … 395
   A) Le medie "ferme"
      - Media aritmetica
      - Media geometrica
      - Media armonica
      - Media quadratica
      - Generalizzazione del concetto di "media"
      - Media per classi, valore centrale
      - Proprietà dei vari tipi di media
      - RIASSUNTO SCHEMATICO
   B) Medie ponderate
   C) Le medie "lasche"
      - Mediana
      - Moda
   Un'esercitazione col foglio elettronico: medie, conteggi, istogramma

9. Gli indici di dispersione 396 … 399
   - Campo di variabilità
   - Scarto assoluto medio
   - Varianza
   - Scarto quadratico medio (deviazione standard)
   - Coefficiente di variazione
   RIASSUNTO SCHEMATICO
   ♫ Tabelle, e poesie

10. ESERCIZI 400 … 407
   - sugli indici di posizione
   - sugli indici di dispersione

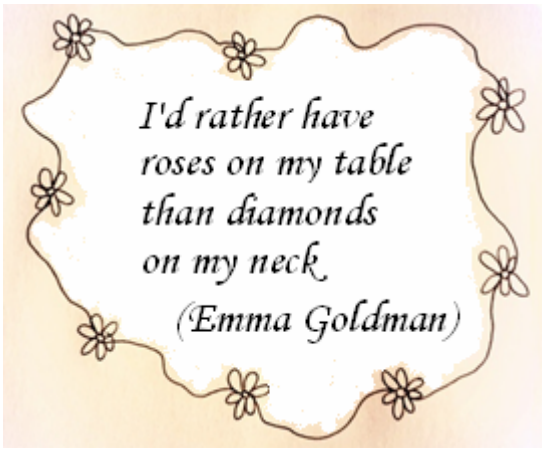
11. Gli errori di misura 408 … 417
   - Gaussiana
   - Media, scarto quadratico medio
   - Scarto quadratico medio "corretto"
   - Intervalli di confidenza
   - Errore standard della media
   - Un bell'esempio: quanto insetticida?
   - SD e SEM
   - Ancora sulla statistica inferenziale
   - *How to Lie with Statistics*
   - Scarto assoluto medio
   - Semidispersione
   - Il caso della misura unica
   - Errori relativi / incertezze relative
   - Errori sistematici
   - Esercizi

12. Arrotondamenti e cifre significative 418 … 421
   - La regola per arrotondare
   - Cifre significative
   - Arrotondamento di media e incertezza
   - Quante cifre lasciare nel risultato di un calcolo su dati incerti
   - La "propagazione" degli errori, o meglio: delle "incertezze"

13. RISPOSTE AGLI ESERCIZI 422 … 427
   - sui concetti introduttivi
   - sulle rappresentazioni grafiche
   - sugli indici di posizione
   - sugli indici di dispersione
   - sugli errori di misura
   - su arrotondamenti e cifre significative

INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

1. Seno, coseno e tangente di un angolo: un primo approccio 428 … 433
   - Il seno di un angolo acuto
   - Come risalire dal valore del seno all'ampiezza dell'angolo
   - Il coseno di un angolo acuto
   - La tangente di un angolo acuto
2. Misura di un arco di circonferenza in radianti 434, 435, 436
   - Un arco si può misurare sia in radianti che in gradi e un angolo sia in gradi che in radianti
   - Come si passa, in generale, dai gradi ai radianti e viceversa?
3. Circonferenza goniometrica 437
4. Seno e coseno di un angolo nella circonferenza goniometrica 437, 438, 439
5. Tangente di un angolo nella circonferenza goniometrica 440, 441, 442
6. Poligoni simili (cenni) 442… 445
7. Periodicità delle funzioni goniometriche 446
8. Calcolatrici e funzioni goniometriche 447
9. Alcune formule utili (angoli di 45°, 30° e 60°) 448, 449, 450
10. Teoremi sui triangoli rettangoli 451, 452
11. Teoremi sui triangoli qualsiasi 452
12. ESERCIZI 453 … 462
    - Esempi svolti - Seno, coseno, tangente (e rispettive inverse): triangoli rettangoli
    - Orizzonte - Terra e Luna - Pendenza di una strada - Triangoli qualsiasi
    - Problemi che richiedono un'equazione - Esercizi da siti in lingua Inglese
    - Eratostene e il raggio della Terra - Risorse su Internet - Risposte



CENNI DI CALCOLO COMBINATORIO

1 - STRATEGIE DI PENSIERO

1.1 - Premessa 463
1.2 - Il "primo principio" del C.C. 464, 465
1.3 - Esercizi sul "primo principio" 466
1.4 - Il "secondo principio" del C.C. 467
1.5 - n-uple ordinate e non ordinate 468
1.6 - Il "terzo principio" del C.C. 468, 469
1.7 - Esercizi 470 … 473

CENNI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA'

1 - IL CONCETTO DI PROBABILITA' TI E' GIA' NOTO!
LA "LEGGE EMPIRICA DEL CASO"

1.1 - Casi possibili e casi favorevoli; definizione provvisoria di probabilità 474, 475

♫ Il mazzo di carte da scopa 476

1.2 - La legge empirica del caso 476

1.3 - Proposte di riflessione per la piena comprensione della "legge empirica del caso" 477

2 - INADEGUATEZZA DELLA DEFINIZIONE DATA; LA DEFINIZIONE DI LAPLACE

2.1 - La definizione che abbiamo appena scritto è da buttare? 478

2.2 - La definizione "perfezionata" (di Laplace) 478

2.3 - Nemmeno la definizione "perfezionata" è, a ben guardare, impeccabile 479

2.4 - Il problema dell'equipossibilità 479

3 - DIVERSI APPROCCI ALLA PROBABILITA'

Definizione classica, frequentista, assiomatica, soggettivista 480

4 - TERMINOLOGIA E SIMBOLOGIA; INDICAZIONI METODOLOGICHE; ESEMPI

4.1 - Terminologia specifica 481

4.2 - Indicazioni metodologiche 481

4.3 - Anticipazione: l'evento contrario 481

4.4 - Esempi svolti (sulla definizione di Laplace) 482, 483, 484

4.5 - Esercizi 485 … 491

4.6 - Esercizi su probabilità e frequenza relativa 492

4.7 - Speranza matematica 493 … 497

4.8 - Probabilità soggettiva 498

♫ IL MONDO INFIDO E TRISTE DELLE SCOMMESSE 499

Esercizi sulla probabilità soggettiva 500

ALGORITMI

1 - Cos'e' un "algoritmo" 501
2 - Algoritmi e programmi 502, 503
3 - Diagrammi di flusso; programmazione strutturata 504, 505
4 - Esempi; lo pseudocodice (o "linguaggio di progetto") 506, 507, 508
5 - Esercizi 509 … 515

PROVE INVALSI - PROBLEMI VARI E "CREATIVI"

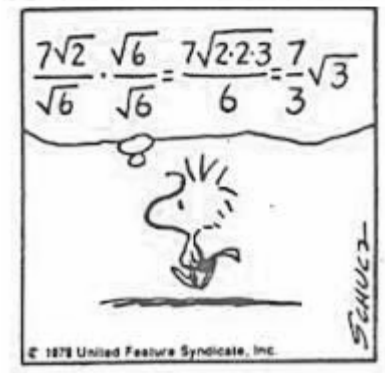
- Prove INVALSI: esempi, link da 516 a 525
- Quesiti da Free Puzzles 526, 527, 528, 529
- Giochi di Archimede
  2008 530, 531
  2009 532, 533
  2010 534, 535
  2003 536, 537











Chi ha paura della *matematica?*



I RADICALI

1. DEFINIZIONE DI RADICE (esercizi a pag. 18)

Si dice "radice quadrata" (cubica, quarta, quinta, ...) di un numero reale $a \geq 0$, quel numero reale $b \geq 0$ che elevato al quadrato (al cubo, alla quarta, alla quinta, ...) dà come risultato a.

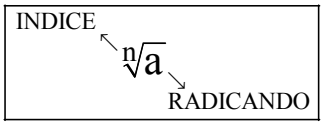
(1) **DEFINIZIONE:** $\sqrt[n]{a} = b \overset{def.}{\Leftrightarrow} b^n = a \quad (a,b \geq 0)$ $\quad \overset{def.}{\Leftrightarrow}$ *si legge*: *"se e solo se, per definizione"*

Quindi L'OPERAZIONE DI ESTRAZIONE DI RADICE È L'OPERAZIONE INVERSA DELL'ELEVAMENTO A POTENZA.

Esempi:

$\sqrt[4]{81} = 3$ perché $3^4 = 81$; $\quad \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$ perché $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$; $\quad \sqrt[2]{0,09} = 0,3$ perché $(0,3)^2 = 0,09$

- Un simbolo del tipo $\sqrt[n]{a}$ viene chiamato "**radicale**".
  Vale a dire, "radice" è il *risultato*,
  "radicale" è il *simbolo* dell'operazione di estrazione di radice.



RADICALE

- Il numero **n** viene detto "**indice**".
  Il numero **a** viene detto "**radicando**".
- L'indice n è un numero naturale, maggiore o uguale a 1.
  Se l'indice vale 1, la radice è uguale al radicando:

(2) $\sqrt[1]{a} = a$

Domanda: *ma non è estremamente banale (e privo di interesse) un radicale con indice* 1?
… Sì, senz'altro è banale! Ma *non* è privo di interesse, perché
i radicali con indice 1 si rivelano assai utili ai fini di un'esposizione più sintetica della teoria.

- **L'indice 2 viene di norma sottinteso.** Ossia, anziché scrivere $\sqrt[2]{a}$ si usa scrivere $\sqrt{a}$:

(3) $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ La convenzione è davvero vantaggiosa, dato che la radice quadrata è di gran lunga la più utilizzata

Ancora qualche esempio:

$\sqrt[3]{1000} = 10$ perché $10^3 = 1000$; $\quad \sqrt{25} = 5$ perché $5^2 = 25$;

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ perché $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$; $\quad \sqrt[4]{0,0016} = 0,2$ perché $(0,2)^4 = 0,0016$

Osserviamo (gli esempi riportati lo illustrano bene) che

♪ se il radicando è maggiore di 1 il valore della radice è *minore* del radicando stesso
ma (IMPORTANTE!)
♫ se invece è minore di 1 (compreso fra 0 e 1) il valore della radice è *maggiore* del radicando stesso.

2. DUE IDENTITA' VERAMENTE FONDAMENTALI

Dalla definizione data di estrazione di radice si traggono direttamente e immediatamente le *identità*:

(4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $\quad$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ Indice ed esponente sono uguali: la radice e la potenza, operazioni inverse l'una dell'altra, si "compensano", quindi si possono semplificare

(5) $\sqrt[n]{a^n} = a$ $\quad$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ Anche qui, potenza e radice, operazioni inverse fra loro, si "compensano", da cui la semplificazione

Dovremo tenerle sempre presenti, quali "pietre miliari" del nostro discorso.
In particolare, le utilizzeremo nel corso della dimostrazione di alcuni teoremi.

3. RADICANDO E RISULTATO POSITIVI. MA PERCHE' ?

E' importante ribadire che in questa nostra sistemazione teorica
SIA IL RADICANDO a CHE LA RADICE b SONO NUMERI POSITIVI O NULLI: $a \geq 0$, $b \geq 0$.

A ben riflettere, tale impostazione potrebbe essere contestata.
Ascoltiamo come ragiona Giannino il contestatore.

LE DUE OBIEZIONI DI GIANNINO



Siccome l'operazione di estrazione di radice viene pensata come l'inversa dell'elevamento a potenza, secondo me, che sono Giannino:

I) quando l'*indice* è *dispari*,
è logico che si possa anche estrarre la radice di un numero negativo:
ad esempio, trovo del tutto giustificato scrivere $\sqrt[3]{-8} = -2$,
perché in effetti $(-2)^3 = -8$;

II) quando l'*indice* è *pari* e il *radicando positivo*,
è logico che l'operazione ammetta DUE possibili risultati,
opposti fra loro (e NON un solo risultato positivo):
ad esempio, $\sqrt{49} = \pm 7$ perché $(+7)^2 = 49$ ma anche $(-7)^2 = 49$.

Le argomentazioni di Giannino sono giuste ed intelligenti! Tuttavia …

♥ **RISPOSTA DELLA COMUNITA' MATEMATICA A GIANNINO**

❑ Allo scopo di fissare un'impostazione teorica che consenta di evitare eccessive complicazioni, **è estremamente conveniente, quando si inizia** a studiare l'operazione di estrazione di radice, **supporre positivi** (in senso "largo": ≥ 0) **sia il radicando che il risultato**.
In questo modo, infatti, la trattazione fila senz'altro più "liscia".

❑ **In una seconda fase**, quando si termina lo studio di questi radicali con radicando e risultato positivi (che i testi chiamano generalmente "radicali assoluti"),
si procede a qualche semplicissima **integrazione della teoria** (noi faremo questo al paragrafo 17), **per poter accettare anche** operazioni come

$\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[5]{-0,00001} = -0,1$ ecc.

(**radicali con indice dispari, radicando negativo e risultato negativo**).

❑ **Invece con indice pari e radicando negativo l'estrazione di radice è un'operazione impossibile** (NOTA):

$\sqrt{-25}$ = IMPOSSIBILE ; $\sqrt[4]{-1}$ = IMPOSSIBILE ecc.

Nessun numero reale, infatti, può fare da risultato in situazioni come queste, perché nessun numero dell'insieme $\mathbb{R}$, se elevato ad esponente pari, dà un risultato negativo.

NOTA - Salvo poi ridiscuterne quando viene introdotto l'insieme $\mathbb{C}$ dei "numeri complessi"; leggi il riquadro a fianco →

❑ **Nel caso, infine, di indice pari e radicando positivo** (es. $\sqrt{49}$), **si continua sempre ad assegnare all'operazione, convenzionalmente, un UNICO risultato, quello positivo:**

$\sqrt{49} = 7$ e NON ~~$\sqrt{49} = \pm 7$~~ ; $\sqrt[4]{16} = 2$ e NON ~~$\sqrt[4]{16} = \pm 2$~~

Questa convenzione è universalmente accettata a motivo di tutta una serie di inconvenienti che si verrebbero a creare qualora si decidesse invece di ammettere il "doppio risultato".

L'insieme $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri "reali", e contiene sia i numeri interi che quelli con la virgola, sia i razionali che gli irrazionali, sia i positivi che i negativi.
Contiene, insomma, tutti i numeri rappresentabili su di una *number line*, che sono poi i numeri "comunemente utilizzati".
In particolari contesti, di matematica pura o di Fisica o di Ingegneria, intervengono anche *altri* numeri, quelli dell'insieme $\mathbb{C}$.
… Sorprendente! Ne riparleremo!

Ma adesso proseguiamo con lo studio dei radicali ***"assoluti"****,*
quelli in cui il radicando e il risultato sono sempre positivi (≥ 0*).*

Scriveremo, per brevità, soltanto "radicali", ma intenderemo sempre, fino al paragrafo 16 compreso, "radicali assoluti".

4. LA PROPRIETA' INVARIANTIVA DEI RADICALI (esercizi a pag. 19)

(6) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^{m}}$ PROPRIETA' INVARIANTIVA

ossia:

- **se il radicando è una potenza, il cui esponente è semplificabile con l'indice, è possibile effettuare la semplificazione: il valore del radicale non cambierà;**
- **e viceversa**, leggendo da destra verso sinistra:

  il valore di un radicale non cambia se si moltiplicano sia l'indice che l'esponente del radicando per uno stesso intero positivo k;

  o, in altre parole,

  se si moltiplica l'indice per un intero positivo k, e contemporaneamente si eleva il radicando all'esponente k.

Dimostrazione della (6)
Il ragionamento dimostrativo si basa su di una proprietà dei numeri reali della quale ci serviremo in seguito anche per altre dimostrazioni, e che quindi appare opportuno denominare con un termine convenzionale. Chiameremo questa proprietà "principio E" ("E" come "Elevamento a potenza").

Il "**Principio E**"

Se elevando ad uno stesso esponente $p \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ due numeri reali POSITIVI O NULLI, si ottengono risultati uguali, allora si era partiti da numeri uguali

$x^p = y^p \Rightarrow x = y$ (x, y numeri reali non negativi, p numero naturale non nullo)

Prendiamo dunque separatamente il primo e il secondo membro della uguaglianza (6) che vogliamo dimostrare, ed eleviamoli entrambi all'esponente nk .
Se così facendo otterremo risultati uguali,
ne dedurremo che eravamo partiti da numeri uguali, cioè che la (6) è corretta.

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^{nk} \underset{\text{identità (4)}}{=} \boxed{a^{mk}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{n}\right]^{k} \underset{\text{identità (4)}}{=} \left(a^{m}\right)^{k} = \boxed{a^{mk}}$$

OK!!! In virtù del "principio E", la (6) è corretta.

Poiché, elevando il 1° e il 2° m. dell'uguaglianza (6) da dimostrare al medesimo esponente nk, si è ottenuto lo stesso risultato a^{mk}, resta stabilito, in virtù del "principio E", che la (6) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4):
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$

Esempi:

$\sqrt[12]{x^{15}} = \sqrt[4]{x^{5}}$; $\sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{49}$ (NOTA 1) ; $\sqrt{x+y} = \sqrt[6]{(x+y)^3}$

$\sqrt[8]{9x^2y^4z^6} = \sqrt[4]{(3xy^2z^3)^2} = \sqrt[4]{3xy^2z^3}$ quindi, direttamente: $\sqrt[4]{3^2x^2y^4z^6} = \sqrt[4]{3xy^2z^3}$ (NOTA 2)

$\sqrt[6]{\frac{a^3b^6}{125}} = \sqrt[2]{\left(\frac{ab^2}{5}\right)^3} = \sqrt{\frac{ab^2}{5}}$ quindi, direttamente: $\sqrt[2]{\frac{a^3b^6}{5^3}} = \sqrt{\frac{ab^2}{5}}$ (NOTA 2)

NOTA 1 - L'applicazione della proprietà invariantiva "nel senso della moltiplicazione" si rende necessaria in determinate circostanze, ad esempio quando, per la moltiplicazione o divisione di due radicali, occorre preliminarmente portare i radicali in gioco allo stesso indice.

♥ NOTA 2 - **ATTENZIONE BENE!**
Semplificazioni indice-esponenti di questo tipo **si possono fare quando a radicando compaiono ESCLUSIVAMENTE moltiplicazioni e/o divisioni,** mentre sarebbero ERRORE GRAVE in presenza di addizioni e sottrazioni!



$\sqrt[3]{a^{15} + b^{5}}$
NO, PER CARITA' !!!

Ad esempio,
$\sqrt[4]{3^4 + 4^4} = \sqrt[4]{337} = 4{,}28\dots$
mentre
$\sqrt[2]{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

5. PRODOTTO E QUOZIENTE DI RADICALI (esercizi a pag. 19)

Valgono le uguaglianze:

(7) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (8) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Esse possono essere lette così:

(7) **il prodotto di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice, e per radicando il prodotto dei radicandi;**

(8) **il quoziente di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice, e per radicando il quoziente dei radicandi.**

Leggendo la (7) e la (8) da destra verso sinistra, otteniamo

(7') $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ (8') $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

ossia:

(7') **la radice di un prodotto è uguale al prodotto delle radici dei singoli fattori;**
(8') **la radice di un quoziente è uguale al quoziente delle radici del dividendo e del divisore.**

Dimostrazione di (7), (8), (7'), (8').

Basterà dimostrare, ovviamente, la (7) e la (8).
Dimostriamo la (7); la tecnica dimostrativa per la (8) è identica.

Dunque, consideriamo i due membri della (7) ed applichiamo il "principio E", utilizzando n come esponente a cui elevare ambo i membri:

$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n \underset{\text{due volte}}{\overset{\text{identità (4),}}{=}} \boxed{ab}$

$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n \overset{\text{identità (4)}}{=} \boxed{ab}$

Poiché, elevando il 1° e il 2° membro dell'uguaglianza (7) da dimostrare al medesimo esponente n, si è ottenuto lo stesso risultato ab, resta stabilito, in virtù del "principio E", che la (7) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4):

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

Esempi: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$; $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x^3}=x$; $\sqrt[4]{\dfrac{5}{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{2}$; $\sqrt{xy}:\sqrt{y}=\sqrt{xy:y}=\sqrt{x}$

Se vogliamo moltiplicare o dividere due radicali con indici diversi, dovremo prima portarli allo stesso indice applicando la proprietà invariantiva.
Come indice comune converrà assumere il m.c.m. degli indici, detto "**minimo comune indice**".

Esempi:

$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{3^2}=\sqrt[12]{2^3\cdot3^2}=\sqrt[12]{8\cdot9}=\sqrt[12]{72}$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}=\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{a^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^2}}=\sqrt[6]{a}$

$\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}=\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt[4]{\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2}=$

$=\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^2}}=\sqrt[4]{\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+2}}\cdot\dfrac{(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)^{\cancel{2}}}}=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x+1}}$

♥ **OCCHIO !!!**
Attento a non cadere in un "tipico" errore!
In generale, NON è vero che



$\cancel{\sqrt[n]{a\pm b}=\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}}$

NO, PER CARITA' !!!

Ad esempio,
$\sqrt{9+16}=$
$=\sqrt{25}=\mathbf{5}$
mentre
$\sqrt{9}+\sqrt{16}=$
$=3+4=\mathbf{7}$

6. TRASPORTO DI UN FATTORE DENTRO E FUORI DAL SEGNO DI RADICE

La catena $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ mostra che vale l'uguaglianza (esercizi a pag. 21)

(9) $\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a, b \geq 0)}$

Un fattore POSITIVO, che moltiplica un radicale, può essere fatto FILTRARE SOTTO IL SEGNO DI RADICE, PURCHE' LO SI ELEVI ad un esponente uguale all'indice.

Esempi: $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$; $\quad (a-b)\sqrt{a-b} = \sqrt{(a-b)^2 (a-b)} = \sqrt{(a-b)^3}$

Sovente è invece utile, ai fini del calcolo, percorrere il CAMMINO INVERSO; ossia, ESTRARRE UN FATTORE da un radicale il cui radicando è un prodotto. Ciò è possibile solo se uno dei fattori del prodotto che sta a radicando è elevato ad un esponente maggiore o uguale all'indice della radice.

♥ A tale scopo (estrazione di un fattore dal segno di radice) non è necessario imparare regole particolari (NOTA); **basterà procedere "per tentativi"**, ponendosi sempre, a cose fatte, la seguente domanda: **"e se adesso riportassi dentro il fattore che ho estratto, ritroverei l'espressione di partenza?" In caso di risposta affermativa, tutto è OK!**

NOTA. La regola - non indispensabile, ripeto - direbbe che un fattore interno ad un radicale, e avente esponente non inferiore all'indice, può essere estratto dal segno di radice con esponente uguale al QUOZIENTE della *divisione intera* ESPONENTE:INDICE, e rimanere all'interno della radice con esponente uguale al RESTO della stessa divisione.

Es.: $\sqrt[3]{x^3 y} = x\sqrt[3]{y}$; $\quad \sqrt[7]{a^{14} b} = a^2 \sqrt[7]{b}$; $\quad \sqrt[5]{x^{23}} = x^4 \sqrt[5]{x^3}$; $\quad \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$ *PSST ... Guarda pure gli "esercizi svolti" di pag. 21!*

7. RADICE DI UN RADICALE (esercizi a pag. 21)

(10) $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$

La radice di un radicale è un radicale che ha per radicando lo stesso radicando, e per indice il prodotto degli indici.

Dimostrazione di (10). Col "Principio E":

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right]^{k} \underset{\text{identità (4)}}{=} \left[\sqrt[k]{a}\right]^{k} \underset{\text{identità (4)}}{=} \boxed{a}$$

$$\left(\sqrt[nk]{a}\right)^{nk} \underset{\text{identità (4)}}{=} \boxed{a}$$

Poiché, elevando il 1° e il 2° membro dell'uguaglianza (10) da dimostrare al medesimo esponente nk, si è ottenuto lo stesso risultato a, resta stabilito, per il "principio E", che la (10) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4): $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$

Esempi: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[12]{6}$; $\quad \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[8]{x}$; $\quad \sqrt{\sqrt[3]{121}} = \sqrt[6]{121} = \sqrt[\cancel{6}^{3}]{11^{\cancel{2}}} = \sqrt[3]{11}$

8. POTENZA DI UN RADICALE (esercizi a pag. 21)

(11) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{k} = \sqrt[n]{a^k}}$

Per elevare a potenza un radicale, basta elevare a quell'esponente il radicando, mantenendo invariato l'indice. In altre parole: **un esponente esterno può essere fatto "filtrare sotto il simbolo di radice".**

Dim. di (11): lasciata al lettore. Col "Principio E", elevando allo stesso esponente n ambo i membri.

Esempi: $\left(\sqrt[7]{2}\right)^3 = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$; $\quad \left(\sqrt[15]{a}\right)^6 = \sqrt[\cancel{15}^{5}]{a^{\cancel{6}^{2}}} = \sqrt[5]{a^2}$ (NOTA 1); $\quad \left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$ (NOTA 2)

NOTA 1 - Si capisce allora che si può semplificare direttamente l'indice con l'esponente esterno, facendo poi filtrare questo all'interno soltanto alla fine: $\left(\sqrt[\cancel{15}^{5}]{a}\right)^{\cancel{6}^{2}} = \sqrt[5]{a^2}$

NOTA 2 - Nell'eseguire $\sqrt{3^4}$ si può pensare all'applicazione diretta della definizione di radice quadrata (qual è quel numero che elevato al quadrato dà come risultato 3^4? Evidentemente, è 3^2); *oppure* a una semplificazione che fa diventare l'indice uguale a 1, quindi fa scomparire il radicale (per definizione, un radicale con indice 1 lascia invariato il radicando e pertanto … è come se non ci fosse): $\sqrt{3^4} = \sqrt[\cancel{2}^{1}]{3^{\cancel{4}^{2}}} = \sqrt[1]{3^2} = 3^2$

9. SOMMA ALGEBRICA DI RADICALI (esercizi a pag. 23)

Premessa

In Algebra, un'espressione costituita dal prodotto di un radicale per un fattore esterno viene chiamata ancora, per estensione, "radicale".
Quindi, vengono chiamate "radicali", ad esempio, le espressioni seguenti:

$$3\sqrt{5}; \qquad x\sqrt[3]{y}; \qquad 2(x+1)\sqrt{x+2}$$

Definizione

Quando abbiamo una coppia di espressioni della forma

$$x\sqrt[n]{a}, \quad y\sqrt[n]{a}$$

diciamo che siamo in presenza di due "radicali simili". Pertanto:

due radicali si dicono "simili" se hanno ugual indice e ugual radicando
(= se differiscono al più per il fattore esterno)

Esempi: $3\sqrt{5}$ e $11\sqrt{5}$ sono radicali simili; $x\sqrt[4]{x+y}$ e $2\sqrt[4]{x+y}$ sono radicali simili.

La somma algebrica di due o più radicali simili
è un radicale simile ai dati,
avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti:

(12) $\boxed{x\sqrt[n]{a}+y\sqrt[n]{a}=(x+y)\sqrt[n]{a}}$

La (12) non necessita di dimostrazione: è infatti evidente che il secondo membro è ottenibile dal primo mediante un raccoglimento a fattor comune.

Esempi:

$$3\sqrt{5}+11\sqrt{5}=14\sqrt{5}; \qquad x\sqrt[4]{x+y}+2\sqrt[4]{x+y}+2x\sqrt[4]{x+y}=(3x+2)\sqrt[4]{x+y}$$
$$7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}=10\sqrt[3]{2}; \qquad (a+b)\sqrt{3}-(a-b)\sqrt{3}=\left[(a+b)-(a-b)\right]\sqrt{3}=2b\sqrt{3}$$

Invece, se due radicali NON sono simili,
la loro somma algebrica dev'essere lasciata indicata
(NON si possono ridurre in alcun modo ad un unico radicale).
Esempi: $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}=$ STOP! $\qquad \sqrt{2}+6\sqrt[3]{2}=$ STOP!

OCCHIO!!!



Ed eccoti alcuni altri esempi di espressioncine in cui compaiono somme algebriche di radicali:

a) $3\sqrt{6}-2\sqrt[3]{6}+10\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt[3]{6}=14\sqrt{6}-3\sqrt[3]{6}$

b) $7\sqrt{x}-\sqrt{xy}-\sqrt{x}+x\sqrt{x}-8\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xy}=(6+x)\sqrt{x}-9\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xy}$

c) $\sqrt{50}+\sqrt{8}=\sqrt{5^2\cdot 2}+\sqrt{2^3}=5\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

d) $\sqrt{x^3-x^2}-\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}=\sqrt{x^2(x-1)}-\sqrt{(x-1)^3}=x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x-1}=\left(\cancel{x}-\cancel{x}+1\right)\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}$

e) $\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{27}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}-\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{5}=\frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{10}=-\frac{\sqrt{3}}{10}$

f) $\frac{a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}-1}=\frac{a\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^4}-\sqrt[6]{a}}{a-1}=\frac{a\sqrt[6]{a^7}-\sqrt[6]{a}}{a-1}=\frac{a^2\cdot\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{a}}{a-1}=\frac{(a^2-1)\sqrt[6]{a}}{a-1}=\frac{(a+1)\cancel{(a-1)}\sqrt[6]{a}}{\cancel{a-1}}=(a+1)\sqrt[6]{a}$

10. ESPRESSIONI "TIPO MONOMI, POLINOMI, PRODOTTI NOTEVOLI"

Osservazione preliminare, ovvia ma fondamentale:

♥ **quando una radice quadrata è elevata al quadrato, la radice scompare e rimane solo il radicando.**

♥ **Lo stesso avviene se una radice quadrata è moltiplicata per sé stessa.**

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7; \qquad \sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = \begin{cases} \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 \\ \sqrt{7\cdot 7} = \sqrt{7^2} = 7 \end{cases}$$

Nella pratica del calcolo, si possono tracciare delle "**barre di semplificazione**" (noi, negli esercizi svolti di questo testo, **non sempre le abbiamo riportate** sia per ragioni grafiche che per lasciare questo compito, se lo ritiene, al lettore):

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 \qquad \sqrt{7^2} = 7$$

$$\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^{14}} = \sqrt[5]{x^{19}} = x^3$$

$$\left(-5\sqrt[6]{3}\right)^2 = (-5)^2\left(\sqrt[6]{3}\right)^2 = 25\sqrt[3]{3}$$

Ed ecco qualche esempio svolto.

a) $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2 = 9\cdot 5 = 45$

b) $\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right) = \sqrt{15}+3-2\sqrt{18} = \sqrt{15}+3-2\cdot 3\sqrt{2} = \sqrt{15}+3-6\sqrt{2}$

c) $\left(a\sqrt{b}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt{ab}-b\sqrt{b}\right) = a\sqrt{ab^2}-ab\cdot b-\sqrt[3]{b}\sqrt{ab}+b\sqrt[3]{b}\sqrt{b} =$

$$= ab\sqrt{a}-ab^2-\sqrt[6]{b^2}\sqrt[6]{a^3b^3}+b\sqrt[6]{b^2}\sqrt[6]{b^3} = ab\sqrt{a}-ab^2-\sqrt[6]{a^3b^5}+b\sqrt[6]{b^5}$$

d) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 5\sqrt{2}\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)+\left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 50-20\sqrt{6}+12 = 62-20\sqrt{6} = 2\left(31-10\sqrt{6}\right)$

e) $\left(\sqrt[4]{a}+3\right)^2 = \left(\sqrt[2]{\sqrt[4]{a}}\right)^2+2\cdot\sqrt[4]{a}\cdot 3+3^2 = \sqrt{a}+6\sqrt[4]{a}+9$

f) $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right) = \left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2 = 8-7 = 1$

g) $\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}\right) = \left(\sqrt{a-1}\right)^2-\left(\sqrt{a+1}\right)^2 = (a-1)-(a+1) = \cancel{a}-1\cancel{-a}-1 = -2$

h) $\left(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}\right)^2 = \left(\sqrt{a-1}\right)^2+\left(-\sqrt{a+1}\right)^2+2\sqrt{a-1}\left(-\sqrt{a+1}\right) =$

$$= a\cancel{-1}+a\cancel{+1}-2\sqrt{(a-1)(a+1)} = 2a-2\sqrt{a^2-1} = 2\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)$$

i) $\left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2 = \left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2+2\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

$$= \sqrt{x}\cancel{+\sqrt{y}}+\sqrt{x}\cancel{-\sqrt{y}}+2\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = 2\sqrt{x}+2\sqrt{x-y} = 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-y}\right)$$

j) $\left(5-2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 = 5^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 5\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)+2\cdot 5\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right) =$

$$= 25+8+3-20\sqrt{2}-10\sqrt{3}+4\sqrt{6} = 36-20\sqrt{2}-10\sqrt{3}+4\sqrt{6} = 2\left(18-10\sqrt{2}-5\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)$$

k) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\cdot\sqrt[3]{b}+3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b$

l) $\left(2\sqrt{2}-1\right)^3 = \left(2\sqrt{2}\right)^3+3\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2\cdot(-1)+3\cdot 2\sqrt{2}\cdot(-1)^2+(-1)^3 =$

$$= 8\sqrt{8}+3\cdot 8\cdot(-1)+3\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1-1 = 16\sqrt{2}-24+6\sqrt{2}-1 = 22\sqrt{2}-25$$

Fai ora tu qualcuno di questi ESERCIZI:

1) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ 2) $\left(3\sqrt{a+b}\right)^2$ 3) $\left(-2\sqrt{2}\right)^2$

4) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$ 5) $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)$ 6) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

7) $\left(2\sqrt{3}+1\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)$ 8) $\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)$ 9) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)$

10) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ 11) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ 12) $\left(2\sqrt{2}+3\right)^2$

13) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$ 14) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)^2$ 15) $\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{5}+4\sqrt{3}\right)^2$

16) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)$ 17) $\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$ 18) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$

19) $\left(1+2\sqrt{7}\right)\left(3+4\sqrt{11}\right)$ 20) $2\sqrt{5}\left(2\sqrt{10}-3\sqrt{5}\right)$ 21) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)$

22) $\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}-1\right)$ 23) $\left(\sqrt[4]{2}-1\right)^2$ 24) $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}\right)$

25) $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}\right)^2$ 26) $\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ 27) $\left(\sqrt{3}+1\right)^4$

28) $\left(2\sqrt{3}-3\right)^3$ 29) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^3$ 30) $\left(\sqrt{2}-1\right)^5$

31) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$ 32) $\left(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right)^2$ 33) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3$

34) $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)$ 35) $\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)^2$

36) $\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ 37) $\left(2\sqrt{a}-\sqrt{3a-1}\right)\left(2\sqrt{a}+\sqrt{3a-1}\right)$

38) $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)^2$ 39) $\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}-1\right)^2$

40) $\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[5]{a}\right)$ 41) $\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)^2$

42) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ 43) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+1\right)$

44) $\left(3\sqrt{x}+4\right)\left(5\sqrt{x}+6\right)$ 45) $\left(x\sqrt{x}+1\right)\left(x\sqrt{x}-2\right)$

46) $3\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-5y\right)$ 47) $\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

48) $\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)$ 49) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{a+b}\right)^2$ ALTRI ESERCIZI a pag. 23

RISULTATI

1) 12 2) $9(a+b)=9a+9b$ 3) 8 4) 1 5) –1 6) 1 7) 11 8) –1 9) 2

10) $3+2\sqrt{2}$ 11) $5-2\sqrt{6}$ 12) $17+12\sqrt{2}$ 13) $38-12\sqrt{10}$ 14) $6-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

15) $121+12\sqrt{35}+16\sqrt{21}+24\sqrt{15}$ 16) $3+2\sqrt{6}$ 17) $\sqrt{2}$ 18) $2-3\sqrt{6}$

19) $3+4\sqrt{11}+6\sqrt{7}+8\sqrt{77}$ 20) $20\sqrt{2}-30=10\left(2\sqrt{2}-3\right)$ 21) $2+2\sqrt{3}=2\left(1+\sqrt{3}\right)$

22) $\sqrt{2}-1$ 23) $\sqrt{2}+1-2\sqrt[4]{2}$ 24) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}$ 25) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[12]{128}$ 26) $6\sqrt{3}+10$

27) $28+16\sqrt{3}$ 28) $78\sqrt{3}-135$ 29) $27\sqrt{3}+34\sqrt{2}$ 30) $29\sqrt{2}-41$ 31) $485-198\sqrt{6}$

32) $a^2b+ab^2+2ab\sqrt{ab}$ 33) $(a+3b)\sqrt{a}-(3a+b)\sqrt{b}$ 34) 1 35) $2\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)$ 36) $a-b$

37) $a+1$ 38) $2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2}$ 39) $4a+b+1-4\sqrt{ab}-4\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ 40) $\sqrt{a}+\sqrt[20]{a^9}$

41) $x+1+3\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt[4]{x}$ 42) $a+\sqrt{ab}$ 43) $x-y-1+2\sqrt{y}$ 44) $15x+38\sqrt{x}+24$

45) $x^3-x\sqrt{x}-2$ 46) $6x-15y\sqrt{x}$ 47) $2\left(1+\sqrt{1-x}\right)$ 48) $2\sqrt{x}$ 49) $2a+b-2\sqrt{a^2+ab}$

11. L'AGGETTIVO "IRRAZIONALE"

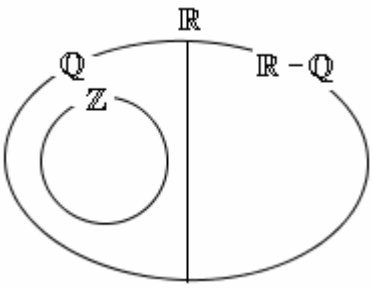
Ripassiamo innanzitutto alcune cose già viste in passato.

Un **numero** è detto

- "**RAZIONALE**" se è esprimibile come frazione, ossia come "ratio", "rapporto", fra due interi:
  es. $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{12}$; $+3=+\frac{3}{1}$; $-0,7=-\frac{7}{10}$; $1,\overline{2}=1,22222...=\frac{12-1}{9}=\frac{11}{9}$; ecc. ecc.
- "**IRRAZIONALE**" in caso contrario.
  Sappiamo che quando si trasforma una frazione in numero decimale, eseguendo la divisione, si ottiene sempre un numero decimale *finito*, oppure *periodico*;
  NON si potrà mai ottenere un numero decimale *illimitato non periodico*.
  Bene! Ciò implica allora che **i numeri con la virgola illimitati non periodici sono tutti irrazionali**.

Dal punto di vista insiemistico, **gli interi sono considerati come casi particolari di razionali** (ad es., 5 = 5/1); **l'insieme costituito da tutti i numeri razionali, più anche tutti i numeri irrazionali, viene detto "insieme dei numeri REALI"** e indicato con uno dei due simboli $\mathbb{R}$ oppure $(-\infty, +\infty)$.

Quando si parla di "numeri reali", ci si riferisce di norma ai "reali *relativi*".
L'insieme dei reali *assoluti* (= senza segno) può essere indicato con $\mathbb{R}_a$.



$\mathbb{R} = \{\text{reali (relativi)}\}$
$\mathbb{Q} = \{\text{razionali (relativi)}\}$
$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{\text{irrazionali (relativi)}\}$
$\mathbb{Z} = \{\text{interi (relativi)}\}$

Il simbolo per indicare l'insieme dei RAZIONALI è $\mathbb{Q}$
(dal tedesco Quotient = Quoziente, rapporto).
Per indicare l'insieme degli IRRAZIONALI
si utilizza di solito l'operazione di "differenza insiemistica", scrivendo $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
(in pratica, se dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali noi togliamo gli elementi di $\mathbb{Q}$, ossia i razionali, otteniamo l'insieme dei non-razionali o irrazionali).
Quando si dice "numeri razionali", senza specificare altro,
si intende "razionali *relativi*"; se si desidera indicare l'insieme dei razionali *assoluti* (= senza segno), al posto di $\mathbb{Q}$ si scrive $\mathbb{Q}_a$.

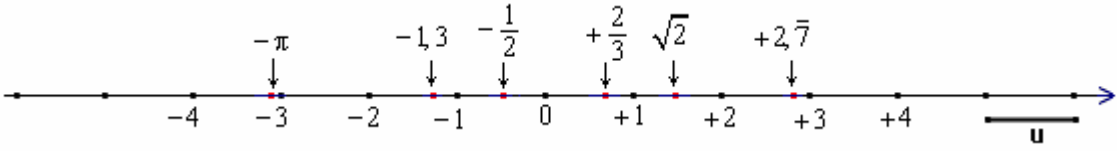
Ad esempio, **si dimostra che sono irrazionali**:

- **i decimali illimitati non periodici**, come abbiamo già sottolineato
- **le radici quadrate degli interi che non sono "quadrati perfetti"**, come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ...
- **le radici n-esime degli interi che non sono n-esime potenze perfette**, come $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$, ...
- **il numero π**, che esprime il rapporto fra una circonferenza e il suo diametro,
  o anche, volendo, "la misura della circonferenza, se come unità di misura si prende proprio il diametro".
  La prima dimostrazione dell'irrazionalità di π si deve al francese J. Lambert (2^a metà del XVIII secolo).

L'insieme $\mathbb{R}$ è "rappresentabile sopra una retta", nel senso che, presa una "number line"
(= retta dotata di origine, orientamento e unità di misura),

- **ad ogni punto corrisponde uno e un solo numero reale (detto "ascissa" di quel punto) e viceversa**
- **ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto (detto "immagine" di quel numero).**

In ogni intervallino, anche piccolissimo, della "number line",
troviamo sempre infiniti punti con ascissa razionale ed infiniti altri punti con ascissa irrazionale.



Esistono infiniti numeri razionali, ed esistono pure infiniti numeri irrazionali;
però, in un certo senso, i numeri irrazionali sono "più infiniti ancora" dei razionali
(la loro "numerosità" ha un "grado di infinito" maggiore).
Affascinante! Se vuoi approfondire, puoi andare alla pagina 402 di questo volume.

Andiamo ora alla dimostrazione del fantastico, importantissimo

TEOREMA	**Il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, ossia:** **non esiste nessuna frazione ("frazione" in senso stretto: "rapporto fra due interi") la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.**

Questo enunciato si dimostra ragionando *per assurdo.*
Supponiamo, per assurdo, che esista una frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

Detta, per fissare le idee, $\frac{m}{n}$ tale frazione, avremo: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Riduciamo la frazione m/n ai minimi termini, se già non lo è; otterremo una frazione p/q,
con p e q primi fra loro (cioè: privi di divisori comuni; in altre parole: non più semplificabili), tale che
$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Si potrà scrivere quindi la seguente catena di deduzioni:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \;\rightarrow\; \frac{p^2}{q^2} = 2 \;\rightarrow\; p^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; \text{il numero } p^2 \text{ è pari} \;\rightarrow\; \boxed{\text{p è PARI}} \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \text{esiste un INTERO p' tale che } p = 2p' \;\rightarrow\; (2p')^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; 4p'^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; q^2 = 2p'^2 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \text{il numero } q^2 \text{ è pari} \;\rightarrow\; \boxed{\text{q è PARI}}$$

Ora, nel corso di tale catena abbiamo dedotto che p e q sono entrambi PARI, cioè entrambi divisibili per 2,
mentre eravamo partiti dal presupposto che la frazione p/q fosse ridotta ai minimi termini,
vale a dire non più semplificabile.

Ricapitoliamo:
supponendo che esistesse una frazione m/n tale che $(m/n)^2 = 2$, siamo pervenuti a conclusioni assurde.
Non esiste perciò alcuna frazione che elevata al quadrato dia 2.

♥ **Poiché il primo numero di cui fu scoperta l'irrazionalità fu $\sqrt{2}$, l'aggettivo "irrazionale" finì per essere storicamente collegato con l'idea della presenza di una radice!**

Precisiamo meglio.

I) Dicendo che **un'ESPRESSIONE è "irrazionale"**, si intende affermare che **contiene il segno di radice**.
Ad esempio, l'espressione $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x+1} - x + 2$ è "irrazionale".
Osserviamo che un'espressione come $\sqrt{2}+1$ può meritarsi l'aggettivo "irrazionale" per *entrambi* i motivi:

a) pensata come *espressione*, contiene il segno di radice;
b) pensata come *numero*, non è esprimibile sotto forma di rapporto fra due interi:
infatti, se per assurdo lo fosse, si avrebbe
$\sqrt{2}+1 = \frac{m}{n}$ (per due opportuni interi m, n) e ne seguirebbe $\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 1 = \frac{m-n}{n}$
impossibile in quanto, come abbiamo visto, $\sqrt{2}$ non è esprimibile come rapporto fra due interi.

A proposito, con riferimento ai numeri:
a) sommando un irrazionale con un razionale si ottiene sempre un irrazionale (pensa all'es. prec. $\sqrt{2}+1$);
b) sommando due numeri razionali si ottiene sempre un numero razionale (ovviamente);
c) sommando due irrazionali si può ottenere, a seconda dei casi, un irrazionale oppure un razionale.
Esempi: $\underbrace{3\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} + \underbrace{\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} = \underbrace{4\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ ma $\underbrace{(5-\sqrt{3})}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} + \underbrace{(\sqrt{3}-1)}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} = \underbrace{4}_{\in\mathbb{Q}}$

II) Quando si dice che **un'EQUAZIONE** è "**irrazionale**",
si intende affermare che **contiene almeno una volta l'incognita sotto il segno di radice.**
Ad esempio, l'equazione $\sqrt{x+3} - 2x = 0$ è "irrazionale".
CONTROESEMPIO - Osserviamo che invece l'equazione $x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$ NON è irrazionale:
si tratta semmai di una equazione "a *coefficienti* irrazionali".

III) Quando si dice che **una FUNZIONE** è "**irrazionale**",
si intende affermare che **in essa la variabile indipendente compare almeno una volta sotto radice**.

NUMERO IRRAZIONALE: numero non esprimibile come rapporto (latino: *ratio*) fra due interi
ESPRESSIONE IRRAZIONALE: espressione contenente il segno di radice
EQUAZIONE IRRAZIONALE: equazione in cui l'incognita compare almeno una volta sotto radice
FUNZIONE IRRAZIONALE: funzione in cui la var. indipendente compare almeno una volta sotto radice

12. RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

(esercizi a pag. 23)

L'esperienza mostra che in parecchi casi (non sempre, ma con grande frequenza), quando in una frazione compare **il SEGNO DI RADICE a DENOMINATORE**, tale segno di radice **"dà fastidio"**:

- può essere scomodo ai fini della valutazione del valore numerico del risultato,
- o per le esigenze del calcolo letterale,
- oppure può influire negativamente sulla compattezza e/o eleganza dell'espressione.

E' spesso conveniente, dunque, **operare sulla frazione (senza alterarne, beninteso, il valore),** in modo da **cacciar via il segno di radice dal denominatore**.
Tale procedimento prende il nome di "**razionalizzazione del denominatore**".

Esso si effettua applicando la **PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI**, ossia
moltiplicando sia "sopra" che "sotto" per uno stesso numero,
da scegliersi opportunamente
(= da scegliersi in modo tale che, una volta eseguite le moltiplicazioni,
il nuovo denominatore non contenga più il segno di radice).

Due esempi:

♪ $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{^{2}\cancel{4}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=2\sqrt{2}$

♫ $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\dfrac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{9-7}=\dfrac{\cancel{2}\left(3-\sqrt{7}\right)}{\cancel{2}}=3-\sqrt{7}$

Il fattore per cui moltiplicare ambo i termini della frazione, onde eliminare il segno di radice dal denominatore, prende il nome di "**fattore razionalizzante**".

Passiamo ora in rassegna le casistiche più rilevanti di razionalizzazione.

❑ $\dfrac{3}{\sqrt{15}}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}=\dfrac{\cancel{3}\sqrt{15}}{\cancel{15}_{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$; $\qquad\dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{xy}}{3y}$

Regola 1: $\dfrac{1}{a\sqrt{b}}\cdot\boxed{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}=\dfrac{\sqrt{b}}{ab}$

❑ $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\dfrac{^{2}\cancel{4}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}}=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}+3}=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-3^2}=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{8-9}=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{-1}=-\left(2\sqrt{2}+3\right)$

Regola 2: $\dfrac{1}{a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}}\cdot\boxed{\dfrac{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}}=\dfrac{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}{a^2b-c^2d}$

❑ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$; $\qquad\dfrac{xy}{3\sqrt[5]{x^4y^2t}}=\dfrac{xy}{3\sqrt[5]{x^4y^2t}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{xy^3t^4}}{\sqrt[5]{xy^3t^4}}=\dfrac{xy\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3\sqrt[5]{x^5y^5t^5}}=\dfrac{\cancel{xy}\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3\,\cancel{xy}t}=\dfrac{\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3t}$

Regola 3:

$$\frac{1}{x\sqrt[n]{a^m b^p c^k}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{x\sqrt[n]{a^n b^n c^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{x\cdot abc}\qquad (m,\,p,\,k<n)$$

NOTA

NOTA: se così non fosse, si estrarrebbero innanzitutto uno o più fattori e ci si ricondurrebbe a questo caso

❑ $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\cancel{2}+\cancel{3}+2\sqrt{6}\cancel{-5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

L'ultimo esempio illustra la
Regola 4:
Quando a denominatore abbiamo la somma algebrica di tre termini con radicali quadratici,
prima di tutto si raggruppano due fra i termini entro parentesi,
poi si moltiplica per l'espressione che permette di ottenere il prodotto notevole
$(a+b)(a-b)$,
tenendo presente che in questo caso occorrono
DUE FASI SUCCESSIVE per completare la razionalizzazione.

Vediamo un'altra situazione analoga:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}-\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{8-\left(5-2\sqrt{5}+1\right)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{8-5+2\sqrt{5}-1}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{2+2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{2\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{2(1-5)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1-2\sqrt{10}-5+\sqrt{5}}{2\cdot(-4)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-6}{-8}=-\frac{\cancel{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}-3\right)}{\cancel{8}_4}=$$

$$=\frac{3+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$$

❑ $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}$ Questo caso, bizzarro ma rilevante, si affronta nel modo seguente:
si "tratta" l'espressione $(\sqrt[3]{5}+7)$ come un binomio $(a+b)$
che verrà moltiplicato per un'opportuna espressione,
in modo da ottenere come risultato a^3+b^3 e mandar via così le radici cubiche.
Ma questa espressione è il trinomio (a^2-ab+b^2)!
Infatti è noto che $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.
Dunque, nel nostro esempio,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}=\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+7^3}=\frac{\sqrt[3]{25}-7\sqrt[3]{5}+49}{5+343}=\frac{\sqrt[3]{25}-7\sqrt[3]{5}+49}{348}$$

Ancora due razionalizzazioni del medesimo tipo:

♪ $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}_{=5-4=1}}=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+2\sqrt[3]{2}$$

♫ $$\frac{4}{5-3\sqrt[3]{2}}=\frac{4}{5-3\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}=\frac{4\left(25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{125-54}=\frac{4\left(25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{71}$$

Regola 5: $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a\pm b}$$

13. RADICALI DOPPI (esercizi a pag. 26)

Si dice "radicale doppio" un'espressione della forma

$$\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}}$$

A volte (non sempre!) un radicale doppio si può trasformare nella somma algebrica di due espressioni che non contengano più radici quadrate "sovrapposte".

SPEZZAMENTO DI UN RADICALE DOPPIO PER TENTATIVI

L'idea di "spezzare", se possibile, un radicale doppio, parte da un'osservazione.
Quando si esegue il quadrato di un binomio nel quale uno o entrambi i termini contengano radici quadrate, si incontrano situazioni come quelle che seguono:

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2 = \underline{7} + 2\sqrt{35} \underline{\underline{+5}} = 12 + 2\sqrt{35}$$

$$\left(4\sqrt{2}-3\right)^2 = \underline{\underline{32}} - 24\sqrt{2} \underline{\underline{+9}} = 41 - 24\sqrt{2}$$

vale a dire:
inizialmente si ottengono tre termini (quadrato del primo / doppio prodotto / quadrato del secondo), ma **nel passaggio successivo questi tre termini si riducono a due**, per il fatto che i due quadrati, non contenendo più la radice, possono diventare per somma algebrica un termine solo.
Rimane poi il doppio prodotto, che conserva la radice.

In definitiva, dunque,
dal quadrato di un binomio "a base di radici quadrate" si ottiene un altro binomio, con:

- **un termine senza radice (proveniente dalla somma dei quadrati)**
- **e un termine che presenta ancora la radice (proveniente, questo, dal doppio prodotto).**

Ma allora, di fronte ad un radicale doppio $\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}}$,
noi possiamo "sperare" che l'espressione sotto la radice quadrata principale, $\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}$,
risulti essere proprio il risultato dello sviluppo di un opportuno quadrato di binomio.
Se dovesse verificarsi questo caso "fortunato", scriveremmo $\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}} = \sqrt{(... \pm ...)^2}$
e nel passaggio dopo manderemmo via la radice semplificandola con l'esponente 2.

Vediamo QUALCHE ESEMPIO.

- Prendiamo il radicale doppio: $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.
  Il nostro obiettivo è di riuscire a scrivere $\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{(...+...)^2}$
  ($12\sqrt{2}$ = *doppio prodotto*)

  Se *doppio prodotto* $= 12\sqrt{2}$, sarà *prodotto* $= 6\sqrt{2}$
  e si tratta quindi di determinare due numeri che abbiano come prodotto $6\sqrt{2}$ e come somma dei quadrati 17 .

  $$\boxed{\textit{prodotto} = 6\sqrt{2}} \rightarrow \begin{array}{l} \left(6,\ \sqrt{2}\right) \textit{ oppure} \\ \left(6\sqrt{2},\ 1\right) \textit{ oppure} \\ \left(3,\ 2\sqrt{2}\right) \textit{ oppure} \\ \ldots \end{array}$$

  Fra le varie possibilità dobbiamo cercare (se esiste) quella per cui la somma dei quadrati è 17;
  provando a fare i calcoli, vediamo che $3^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 9 + 8 = 17$ e di conseguenza
  la coppia che fa al caso nostro sarà $\left(3,\ 2\sqrt{2}\right)$ da cui, finalmente:

  $$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2} = 3+2\sqrt{2}\ .$$ *Ce l'abbiamo fatta! E' spezzato!!!*

- L' esempio che segue è più complicato, per un paio di ragioni.

$$\sqrt{62-20\sqrt{6}}$$

$$doppio\ \ prodotto \underset{\text{NOTA}}{=} 20\sqrt{6} \rightarrow \boxed{prodotto = 10\sqrt{6}}$$

da cui le possibilità

$$\left(10,\sqrt{6}\right)\ opp.\ \left(10\sqrt{6},1\right)\ opp.\ \left(5\sqrt{6},2\right)\ opp.\ \left(2\sqrt{6},5\right)$$

sennonché, disgraziatamente:

$$10^2+\left(\sqrt{6}\right)^2 = 100+6 = 106 \neq 62; \qquad \left(10\sqrt{6}\right)^2+1^2 = 600+1 = 601 \neq 62;$$

$$\left(5\sqrt{6}\right)^2+2^2 = 150+4 = 154 \neq 62; \qquad \left(2\sqrt{6}\right)^2+5^2 = 24+25 = 49 \neq 62$$

NOTA
Sì, è vero, rigorosamente sarebbe $doppio\ \ prodotto = -20\sqrt{6}$,
ma è più comodo per noi pensare al VALORE ASSOLUTO dei termini; tanto, alla fine, metteremo il segno "–" in mezzo.

Tuttavia, possiamo trovare altre coppie con prodotto $10\sqrt{6}$ se spezziamo $\sqrt{6}$ in $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$;
in definitiva, vediamo che la coppia cercata è $\left(2\sqrt{3},5\sqrt{2}\right)$.

Dunque scriviamo $\sqrt{62-20\sqrt{6}} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}-5\sqrt{2}$ …

… e a questo punto saremmo molto soddisfatti, se qualche scocciatore, purtroppo a ragione, non ci dicesse invece che IL NOSTRO RISULTATO E' SBAGLIATO!

Il fatto è che $2\sqrt{3}-5\sqrt{2}$ è un numero NEGATIVO : $2\sqrt{3}-5\sqrt{2} \approx 2\cdot 1{,}7-5\cdot 1{,}4 = 3{,}4-7 < 0$
e un numero negativo, per quanto abbiamo detto riguardo ai segni,
non può mai essere il risultato dell'estrazione di una radice quadrata!

Niente paura … basterà scambiare l'ordine dei termini, in modo da
far sì che la base del quadrato sia positiva, prima di mandar via l'esponente con la radice:

$$\sqrt{62-20\sqrt{6}} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2} = \underbrace{5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}_{>0} \qquad \textit{Ora è tutto OK.}$$

SPEZZAMENTO DI UN RADICALE DOPPIO TRAMITE FORMULA

Per spezzare (*tentare* di spezzare) un radicale doppio,
esiste anche un'apposita FORMULA (difficilotta):

$$(13)\quad \boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

Per esercizio, controllane tu stesso la validità verificando che, se si eleva al quadrato il secondo membro, si ottiene il radicando del radicale a primo membro, ossia $a\pm\sqrt{b}$

Esempio:

$$\sqrt{10-3\sqrt{11}} \underset{\text{NOTA}}{=} \sqrt{10-\sqrt{99}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10+\sqrt{100-99}}{2}} - \sqrt{\frac{10-\sqrt{100-99}}{2}} = \sqrt{\frac{10+1}{2}} - \sqrt{\frac{10-1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{22}-3\sqrt{2}}{2}$$

NOTA: è indispensabile, se si vuole applicare la formula, ricondursi innanzitutto alla situazione cui la formula si riferisce:
$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ SENZA fattore fuori da $\sqrt{b}$.
In pratica,
se c'è un fattore fuori da $\sqrt{b}$, questo fattore va fatto immediatamente **filtrare all'interno**;
solo a questo punto la formula sarà applicabile.

Ma … **esiste un CRITERIO per stabilire a priori se un radicale doppio è spezzabile oppure no?**
Risposta affermativa: **lo "spezzamento" di un radicale doppio si può effettuare se e soltanto se il numero $\boxed{a^2-b}$ presente nella formula è un QUADRATO PERFETTO**.

Se non lo è, abbandoniamo pure l'impresa:
il radicale doppio non si potrà spezzare, né con la formula, né per tentativi.

14. ESPRESSIONI VARIE CON RADICALI (esercizi alle pagg. 26-27)

Presentiamo qualche esempio svolto.

a) $\boxed{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[6]{64x^3+128x^2+64x}}$

Dobbiamo moltiplicare i primi due radicali, dopo averli portati allo stesso indice; nell'ultimo radicale, invece, scomponiamo in fattori il radicando: potendosi raccogliere $64=2^6$, si potrà estrarre un fattore 2.

L'estrazione di un fattore, quando è possibile, è quasi sempre conveniente negli esercizi coi radicali.

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[6]{64x^3+128x^2+64x}=$$

$$=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2}}+\sqrt[6]{64x\left(x^2+2x+1\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{\cancel{x^3}\cdot\frac{(x+1)^2}{\cancel{x^2}}}+\sqrt[6]{64x(x+1)^2}=\sqrt[6]{x(x+1)^2}+2\sqrt[6]{x(x+1)^2}\underset{\text{radicali simili}}{=}3\sqrt[6]{x(x+1)^2}$$

b) $\boxed{\frac{\sqrt{25a^2-25}}{\sqrt{4a+4}+\sqrt{9a+9}}}$

Innanzitutto raccogliamo ed estraiamo un fattore:

$$\frac{\sqrt{25a^2-25}}{\sqrt{4a+4}+\sqrt{9a+9}}=$$

$$=\frac{\sqrt{25\left(a^2-1\right)}}{\sqrt{4(a+1)}+\sqrt{9(a+1)}}=\frac{5\sqrt{a^2-1}}{2\sqrt{a+1}+3\sqrt{a+1}}=\frac{\cancel{5}\sqrt{(a+1)(a-1)}}{\cancel{5}\sqrt{a+1}}\underset{\substack{\text{quoziente di radicali}\\ \text{con lo stesso indice}}}{=}\sqrt{\frac{\cancel{(a+1)}(a-1)}{\cancel{a+1}}}=\sqrt{a-1}$$

c) $\boxed{\frac{\sqrt{15}}{7-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}}$

Cominciamo a svolgere i calcoli a denominatore, poi vedremo.

$$\frac{\sqrt{15}}{7-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{7-\left(5+2-2\sqrt{10}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{\cancel{7}-\cancel{7}+2\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cancel{15}^3}{\cancel{10}^2}}\underset{\substack{\text{conviene}\\ \text{spezzare}\\ \text{il radicale}}}{=}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

d) $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}}$

Questo esercizio si presta ad essere eseguito in due modi alternativi:

♪ *razionalizzando* le prime due frazioni …

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$
$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$
$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$
$$=\frac{a-\cancel{\sqrt{ab}}\ \cancel{-\sqrt{ab}}-b+\cancel{2\sqrt{ab}}}{a-b}=\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-b}}=1$$

♫ … oppure *scomponendo in fattori* il denominatore della terza frazione

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$
$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$
$$=\frac{a-\cancel{\sqrt{ab}}\ \cancel{-\sqrt{ab}}-b+\cancel{2\sqrt{ab}}}{a-b}=\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-b}}=1$$

e) $\boxed{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)-\sqrt{x-1}}$

In quest'altra espressione, è decisamente poco conveniente razionalizzare: converrà invece fare il denominatore comune entro ciascuna parentesi.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)-\sqrt{x-1}=$$
$$=\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}:\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x-1}=\frac{\cancel{1+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{\cancel{1+\sqrt{x^2-1}}}-\sqrt{x-1}=$$
$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x-1}=\frac{\cancel{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{x-1}}{\cancel{\sqrt{x+1}}}-\sqrt{x-1}=\cancel{\sqrt{x-1}}\ \cancel{-\sqrt{x-1}}=0$$

f) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}+\dfrac{10}{\sqrt{2}}}$

Qui si potrà procedere razionalizzando, e spezzando i radicali doppi.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}+\frac{10}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}+\frac{10}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1}-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\cancel{10}^{5}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1}+5\sqrt{2}=$$
$$=\cancel{2}\ \cancel{+1}\ \underline{-2\sqrt{2}}\ \cancel{-2}\ \cancel{-1}\ \underline{-2\sqrt{2}}\ \underline{+5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

15. ESERCIZI SUI RADICALI

a) DEFINIZIONE DI RADICE, IDENTITA' FONDAMENTALI

Nei casi in cui il risultato non sia "tondo", **evita la macchinetta** procedendo invece **per tentativi**.
Ad esempio, per calcolare (meglio: approssimare) il numero $\sqrt{30}$ fino alla prima cifra decimale, puoi fare così:

$5^2 = 25 \quad 6^2 = \boxed{36 > 30} \quad$ QUINDI $\quad 5 < \sqrt{30} < 6$

$5{,}1^2 = 26{,}01 \quad 5{,}2^2 = 27{,}04 \quad 5{,}3^2 = 28{,}09 \quad 5{,}4^2 = 29{,}16 \quad 5{,}5^2 = \boxed{30{,}25 > 30} \quad$ QUINDI $\quad 5{,}4 < \sqrt{30} < 5{,}5$

1) $\sqrt[3]{8}$ 2) $\sqrt[4]{625}$ 3) $\sqrt{49}$ 4) $\sqrt[5]{32}$ 5) $\sqrt[3]{27}$

6) $\sqrt[7]{1}$ 7) $\sqrt[8]{0}$ 8) $\sqrt{-4}$ 9) $\sqrt[3]{125}$ 10) $\sqrt{36}$

11) $\sqrt[4]{16}$ 12) $\sqrt[3]{216}$ 13) $\sqrt{196}$ 14) $\sqrt[4]{10000}$ 15) $\sqrt[5]{243}$

16) $\sqrt{900}$ 17) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ 18) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ 19) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ 20) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

21) $\sqrt{\frac{121}{289}}$ 22) $\sqrt{\frac{100}{9}}$ 23) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ 24) $\sqrt[3]{\frac{64}{729}}$ 25) $\sqrt{10}$

26) $\sqrt{20}$ 27) $\sqrt{60}$ 28) $\sqrt{200}$ 29) $\sqrt{2000}$ 30) $\sqrt[3]{10}$

31) $\sqrt[3]{555}$ 32) $\sqrt[4]{10}$ 33) $\sqrt{0{,}09}$ 34) $\sqrt{0{,}25}$ 35) $\sqrt[3]{0{,}008}$

36) $\sqrt{0{,}4}$ 37) $\sqrt[3]{0{,}1}$ 38) $\left(\sqrt{39}\right)^2$ 39) $\sqrt{41}\cdot\sqrt{41}$ 40) $\sqrt{23^2}$

41) $\sqrt{64}$ 42) $\sqrt[3]{64}$ 43) $\sqrt[6]{64}$ 44) $\sqrt[10]{1024}$ 45) $\sqrt{9/4}$

46) $\sqrt[3]{\frac{125}{343}}$ 47) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$ 48) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$ 49) $\sqrt{\frac{121}{169}}$ 50) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

51) $\sqrt[4]{13^4}$ 52) $\sqrt{(-7)^2}$ 53) $\sqrt{0}$ 54) $\sqrt{1}$ 55) $\sqrt{-9}$

56) Può la radice quadrata di un numero essere maggiore del numero stesso?
57) Può la radice cubica di un numero essere maggiore della radice quadrata dello stesso numero?
58) Quali numeri coincidono con la propria radice quadrata?
59) Quali sono quei due numeri che hanno la proprietà di essere uguali al doppio della propria radice quadrata?
60) Completa le seguenti tabelle.

a	0	0,1	0,5	2	3	4	5	6	9	10	12
$\sqrt{a}$ (1)	0	0,3...		1,4...							

a	20	50	100	1000	2000	5000	1000000	a	0,01	0,0004	0,000001
$\sqrt{a}$ (2)	4,...							$\sqrt{a}$ (3)			
$\sqrt[3]{a}$ (2)		3,...						$\sqrt[3]{a}$ (3)	0,2...		

(1) fino alla 1ª cifra decimale (2) solo la parte intera (3) valore esatto o approssimazione ritenuta adeguata

RISULTATI, RISPOSTE

1) 2 2) 5 3) 7 4) 2 5) 3 6) 1 7) 0 8) impossibile 9) 5 10) 6 11) 2 12) 6 13) 14
14) 10 15) 3 16) 30 17) $\frac{3}{4}$ 18) $\frac{1}{2}$ 19) $\frac{3}{10}$ 20) $\frac{1}{2}$ 21) $\frac{11}{17}$ 22) $\frac{10}{3}$ 23) $\frac{2}{3}$ 24) $\frac{4}{9}$
25) 3,1... 26) 4,4... 27) 7,7... 28) 14,1... 29) 44,7... 30) 2,1... 31) 8,2... 32) 1,7... 33) 0,3
34) 0,5 35) 0,2 36) 0,6... 37) 0,4... 38) 39 39) 41 40) 23 41) 8 42) 4 43) 2 44) 2
45) 3/2 46) 5/7 47) 3/5 48) 1/3 49) 11/13 50) 2/3 51) 13 52) +7 53) 0 54) 1 55) impossibile
56) Sì, se il numero di partenza è compreso fra 0 e 1 57) Come per il 56) 58) 0 e 1 59) 0 e 4

60)	a	0	0,1	0,5	2	3	4	5	6	9	10	12
	$\sqrt{a}$	0	0,3...	0,7...	1,4...	1,7...	2	2,2...	2,4...	3	3,1...	3,4...

a	20	50	100	1000	2000	5000	1000000	a	0,01	0,0004	0,000001
$\sqrt{a}$	4,...	7,...	10	31,...	44,...	70,...	1000	$\sqrt{a}$	0,1	0,02	0,001
$\sqrt[3]{a}$	2,...	3,...	4,...	10	12,...	17,...	100	$\sqrt[3]{a}$	0,2...	0,07...	0,01

b) PROPRIETA' INVARIANTIVA (risultati alla pagina successiva)



OSSERVAZIONE IMPORTANTE
Per semplicità, laddove compaiono espressioni letterali, sei autorizzato a supporre ≥ 0 l'espressione stessa e più in generale la base di ciascuna potenza in gioco. Questa avvertenza vale anche per tutti gli esercizi successivi.
Soltanto nel paragrafo 17 lasceremo cadere questa ipotesi "di comodo".

1) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{\ldots}$ 2) $\sqrt{5} = \sqrt[6]{\ldots}$ 3) $\sqrt[5]{t} = \sqrt[10]{\ldots}$ 4) $\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[18]{\ldots}$ 5) $\sqrt[6]{a^5b^2c} = \sqrt[18]{\ldots}$

6) $\sqrt{a+b} = \sqrt[4]{\ldots}$ 7) $\sqrt[3]{2a} = \sqrt[9]{\ldots}$ 8) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[8]{\ldots}$

Semplificare, ove possibile:

9) $\sqrt[8]{y^6}$ 10) $\sqrt[6]{8}$ 11) $\sqrt[15]{a^{10}}$ 12) $\sqrt[3]{b^6}$ 13) $\sqrt[6]{a^4b^4}$ 14) $\sqrt[6]{a^4+b^4}$ 15) $\sqrt[12]{x^3y^6}$

16) $\sqrt[12]{\frac{x^3}{y^6}}$ 17) $\sqrt[12]{x^3+y^6}$ 18) $\sqrt[12]{x^3-y^6}$ 19) $\sqrt[4]{9}$ 20) $\sqrt{7^6}$ 21) $\sqrt[24]{x^{18}}$ 22) $\sqrt[10]{32}$

23) $\sqrt[6]{81}$ 24) $\sqrt[3n]{a^{2n}}$ 25) $\sqrt[k]{3^{k^2}}$ 26) $\sqrt[9]{27a^{27}}$ 27) $\sqrt{25y^4}$ 28) $\sqrt[10]{4t^2}$ 29) $\sqrt[10]{4+t^2}$

30) $\sqrt[10]{4+4t+t^2}$ 31) $\sqrt[8]{x^6}$ 32) $\sqrt[9]{a^{15}}$ 33) $\sqrt[6]{x^2y^4}$ 34) $\sqrt[4]{9x^2y^2}$ 35) $\sqrt[4]{\frac{9x^2}{y^2}}$ 36) $\sqrt[4]{9x^2+y^2}$

37) $\sqrt[4]{a^4b^4}$ 38) $\sqrt{a^2b^2}$ 39) $\sqrt{a^2+b^2}$ 40) $\sqrt[4]{a^2b^2}$ 41) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}}$ 42) $\sqrt[3]{x^3-8}$ 43) $\sqrt[4]{9}$

44) $\sqrt[15]{1024}$ 45) $\sqrt[10]{2^{20}}$ 46) $\sqrt{24^2}$ 47) $\left(\sqrt{17}\right)^2$ 48) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$

49) $\sqrt{9+16}$ 50) $\sqrt{81+144}$ 51) $\sqrt{\frac{9}{49}\cdot\frac{16}{49}}$ 52) $\sqrt{\frac{9}{49}+\frac{16}{49}}$ 53) $\sqrt{1+\frac{25}{144}}$

54) $\sqrt{(2,7)^2}$ 55) $\sqrt[3]{64(a-b)^3}$ 56) $\sqrt[4]{\frac{(x^2+1)^2}{81}}$ 57) $\sqrt{x^2+1}$ 58) $\sqrt{25x^8}$

59) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$ 60) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$ 61) $\sqrt{x^4+2x^2+1}$ 62) $\sqrt[6]{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$ 63) $\sqrt{4(x-1)^2(x-2)^2}$

c) PRODOTTI, QUOZIENTI DI RADICALI

Vai agli svolgimenti dei numeri 80 … 89 ⇨

64) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{7}$ 65) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$ 66) $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{a-b}}$ 67) $\sqrt[4]{3a}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{3}}$

68) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$ 69) $\sqrt[4]{y}\cdot\sqrt[6]{y}$ 70) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}$ 71) $\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{t^2}\cdot\sqrt[4]{t^3}$

72) $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$ 73) $\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}$ 74) $\sqrt[3]{x-y}\cdot\sqrt[4]{x+y}$ 75) $\sqrt[5]{10}:\sqrt[5]{2}$

76) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a}}$ 77) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{7}}$ 78) $\sqrt[4]{12}:\sqrt{2}$ 79) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{x}$

80) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$ 81) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}$ 82) $\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ 83) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{2}$

84) $\sqrt[3]{\frac{a-1}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{a-1}}$ 85) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[8]{24}}$ 86) $\frac{\sqrt[4]{a^2b^2}}{a\sqrt{a}\cdot b\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2b^2}$ 87) $\sqrt{\frac{2a+2b}{3a-3b}}:\sqrt[4]{\frac{4a+4b}{9a-9b}}$

88) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ 89) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\cdot\sqrt[5]{x^2y^2}:\sqrt{x+y}$

RISULTATI

b) PROPRIETA' INVARIANTIVA

1) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$ 2) $\sqrt{5} = \sqrt[6]{125}$ 3) $\sqrt[5]{t} = \sqrt[10]{t^2}$ 4) $\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[18]{a^{15}}$ 5) $\sqrt[6]{a^5b^2c} = \sqrt[18]{a^{15}b^6c^3}$

6) $\sqrt{a+b} = \sqrt[4]{(a+b)^2}$ 7) $\sqrt[3]{2a} = \sqrt[9]{8a^3}$ 8) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[8]{\frac{x^4}{y^4}}$

Semplificare, ove possibile:

9) $\sqrt[4]{y^3}$ 10) $\sqrt{2}$ 11) $\sqrt[3]{a^2}$ 12) b^2 13) $\sqrt[3]{a^2b^2}$

14) non semplif. 15) $\sqrt[4]{xy^2}$ 16) $\sqrt[4]{\frac{x}{y^2}}$ 17) non semplificabile 18) non semplificabile

19) $\sqrt{3}$ 20) $7^3 = 343$ 21) $\sqrt[4]{x^3}$ 22) $\sqrt{2}$ 23) $\sqrt[3]{9}$

24) $\sqrt[3]{a^2}$ 25) 3^k 26) $\sqrt[3]{3a^9}$ 27) $5y^2$ 28) $\sqrt[5]{2t}$

29) non semplif. 30) $\sqrt[5]{2+t}$ 31) $\sqrt[4]{x^3}$ 32) $\sqrt[3]{a^5}$ 33) $\sqrt[3]{xy^2}$

34) $\sqrt{3xy}$ 35) $\sqrt{\frac{3x}{y}}$ 36) STOP 37) ab 38) ab

39) STOP 40) $\sqrt{ab}$ 41) $\frac{x}{2}$ 42) STOP 43) $\sqrt{3}$

44) $\sqrt[3]{4}$ 45) 4 46) 24 47) 17 48) 3

49) 5 50) 15 51) $\frac{12}{49}$ 52) $\frac{5}{7}$ 53) $\frac{13}{12}$

54) 2,7 55) $4(a-b)$ 56) $\sqrt{\frac{x^2+1}{9}}$ 57) STOP 58) $5x^4$

59) 5 60) 2 61) $\sqrt{(x^2+1)^2} = x^2+1$ 62) $\sqrt[6]{(a-b)^3} = \sqrt{a-b}$ 63) $2(x-1)(x-2)$

c) PRODOTTI, QUOZIENTI DI RADICALI

64) $\sqrt[3]{14}$ 65) 12 66) $\sqrt{a+b}$ 67) $\sqrt[4]{ab}$ 68) $\sqrt[6]{500}$

69) $\sqrt[12]{y^5}$ 70) $\sqrt[4]{12}$ 71) $\sqrt[12]{t^{23}}$ 72) n 73) $\sqrt{x^2-y^2}$

74) $\sqrt[12]{(x-y)^4(x+y)^3}$ 75) $\sqrt[5]{5}$ 76) $\sqrt{a}$ 77) $\sqrt[6]{\frac{25}{343}}$ 78) $\sqrt[4]{3}$

79) $\sqrt[6]{8x^5}$ 80) 6 81) $\sqrt[6]{200}$

82) 1 **83)** $\sqrt[8]{8}$ **84)** $\sqrt[6]{\frac{a}{a-1}}$ **85)** $\sqrt[8]{6}$

86) 1 **87)** $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}}$ **88)** $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$ **89)** $\sqrt[30]{\frac{x^2y^2}{(x+y)^5}}$



Forse qui c'è un piccolo errore ... :)

$\sqrt[3]{3} = \sqrt{\ }$

d) PORTARE IL FATTORE ESTERNO SOTTO RADICE

Svolgimenti dal n. 6 al n. 12 ⇨

1) $2\sqrt[3]{10}$ 2) $x\sqrt{x}$ 3) $(a+b)\sqrt[4]{c}$ 4) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

5a) $(1+k)\sqrt{\frac{1}{k^2+k}}$ 5b) $1+k\sqrt{\frac{1}{k^2+k}}$ 6) $5\sqrt{2}$ 7) $\frac{1}{9}\sqrt{243}$ 8) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

9) $(x-2)\sqrt{\frac{1}{2x^2-8}}$ 10) $a^k\cdot\sqrt{a}$ 11) $a^k\cdot\sqrt[k]{a}$ 12) $(1-\sqrt{2})\sqrt{2}$

(risultati alla pagina successiva)

e) ESTRARRE UN FATTORE DAL SEGNO DI RADICE

Svolgimenti dal n. 38 al n. 49 ⇨

♥ **ESERCIZI SVOLTI: estrarre un fattore da un radicale, il cui radicando non contiene lettere**

❑ **Estrarre un fattore da $\sqrt{384}$**

Scompongo 384 in fattori primi e ottengo $384 = 2^7\cdot 3$ da cui: $\sqrt{384} = \sqrt{2^7\cdot 3} = 2^3\sqrt{2\cdot 3} = 8\sqrt{6}$

❑ **Estrarre un fattore da $\sqrt{6250}$**

Si vede "a occhio" che il più grande quadrato perfetto contenuto come fattore nel 6250 è $625 = 25^2$.
Allora, in un attimo: $\sqrt{6250} = \sqrt{625\cdot 10} = \sqrt{25^2\cdot 10} = 25\sqrt{10}$.



La "ricerca del fattore *quadrato perfetto* (o *cubo perfetto*, ecc.) più grande" è, nei casi semplici, il metodo più rapido (oltre che il più divertente):

$\sqrt{88} = \sqrt{4\cdot 22} = 2\sqrt{22}$; $\sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = 6\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{560} = \sqrt[3]{8\cdot 70} = 2\sqrt[3]{70}$

13) $\sqrt[5]{2x^5}$ 14) $\sqrt[5]{2x^{10}}$ 15) $\sqrt[5]{2x^{12}}$ 16) $\sqrt[5]{a^7b^{10}}$ 17) $\sqrt[5]{x^5+y}$

18) $\sqrt{12}$ 19) $\sqrt{18}$ 20) $\sqrt{45}$ 21) $\sqrt{50}$ 22) $\sqrt{98}$

23) $\sqrt{162}$ 24) $\sqrt{972}$ 25) $\sqrt{1210}$ 26) $\sqrt{1584}$ 27) $\sqrt{5000}$

28) $\sqrt[3]{24}$ 29) $\sqrt[3]{16}$ 30) $\sqrt[3]{432}$ 31) $\sqrt[3]{1024}$ 32) $\sqrt[3]{54}$

33) $\sqrt{4b}$ 34) $\sqrt[3]{\frac{a}{27}}$ 35) $\sqrt{\frac{9}{8}}$ 36) $\sqrt[n]{a^{n+1}}$ 37) $\sqrt[k]{5a^{2k}}$

38) $\sqrt{288}$ 39) $\sqrt[4]{1024}$ 40) $\sqrt{242}$ 41) $\sqrt[3]{625}$ 42) $\sqrt{1728}$

43) $\sqrt[3]{24000}$ 44) $\sqrt[3]{2592}$ 45) $\sqrt[4]{a^3b^4c^5d^6e^{10}}$ 46) $\sqrt{x^3+6x^2+12x+8}$ 47) $\sqrt{4x^7+8x^5+4x^3}$

48) $\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{3}}$ 49) $\sqrt{8x^2-48x+72}$

f) RADICE DI UN RADICALE

Svolgimenti dal n. 59 al n. 61 ⇨

50) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ 51) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ 52) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{t^2}}$ 53) $\sqrt{\sqrt[5]{a^2+b^2}}$ 54) $\sqrt[k]{\sqrt[k]{w}}$

55) $\sqrt[a+b]{\sqrt[a-b]{4}}$ 56) $\sqrt[x]{\sqrt{x}}$ 57) $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}$ 58) $\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}$ 59) $\sqrt{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{x}}}$

60) $\sqrt{a\sqrt{b}\cdot\sqrt{b\sqrt{a}}}$ *Porta innanzitutto "dentro" a nel 1° radicale, b nel 2°*

61) $\sqrt[3]{2\sqrt{x\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{4x}}$

g) POTENZA DI UN RADICALE

Svolgimenti dal n. 76 al n. 80 ⇨

62) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$ 63) $\left(\sqrt{5}\right)^3$ 64) $\left(\sqrt[6]{a}\right)^4$ 65) $\left(\sqrt{7}\right)^4$ 66) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$

67) $\left(\sqrt{a-1}\right)^3$ 68) $\left(\sqrt{6}\right)^2$ 69) $\left(2\sqrt{3}\right)^3$ 70) $\left(x\sqrt{x}\right)^2$ 71) $\left(\sqrt[6]{c}\right)^2$

72) $\left(\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)^2$ 73) $\left(2\sqrt{3}\right)^4$ 74) $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{y}\right)^5$ 75) $\left(\sqrt{\sqrt{m}}\right)^6$ 76) $\left(\sqrt[4]{8}\right)^3$

77) $\left(\sqrt[3]{18}\right)^3$ 78) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^8$ 79) $\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^6$ 80) $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+2a+1}{a+2}}\right)^2$

RISULTATI

d) PORTARE IL FATTORE ESTERNO SOTTO AL SEGNO DI RADICE

1) $\sqrt[3]{80}$ 2) $\sqrt{x^3}$ 3) $\sqrt[4]{(a+b)^4\cdot c}$ 4) $\sqrt[4]{\frac{27}{8}}$ 5a) $\sqrt{\frac{1+k}{k}}$ 5b) $1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}$

6) $\sqrt{50}$ 7) $\sqrt{3}$ 8) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ 9) $\sqrt{\frac{x-2}{2(x+2)}}$ 10) $\sqrt{a^{2k+1}}$ 11) $\sqrt[k]{a^{k^2+1}}$

12) $\underbrace{(1-\sqrt{2})}_{<0}\sqrt{2} \overset{\text{NOTA}}{=} -\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{>0}\sqrt{2} = -\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\cdot 2} = -\sqrt{(2-2\sqrt{2}+1)\cdot 2} = -\sqrt{(3-2\sqrt{2})\cdot 2} = -\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

NOTA: un fattore esterno si può "portar dentro" solo se è positivo

e) ESTRARRE UN FATTORE DAL SEGNO DI RADICE

13) $x\sqrt[5]{2}$ 14) $x^2\sqrt[5]{2}$ 15) $x^2\sqrt[5]{2x^2}$ 16) $ab^2\sqrt[5]{a^2}$ 17) rimane così

18) $2\sqrt{3}$ 19) $3\sqrt{2}$ 20) $3\sqrt{5}$ 21) $5\sqrt{2}$ 22) $7\sqrt{2}$

23) $9\sqrt{2}$ 24) $18\sqrt{3}$ 25) $11\sqrt{10}$ 26) $12\sqrt{11}$ 27) $50\sqrt{2}$

28) $2\sqrt[3]{3}$ 29) $2\sqrt[3]{2}$ 30) $6\sqrt[3]{2}$ 31) $8\sqrt[3]{2}$ 32) $3\sqrt[3]{2}$

33) $2\sqrt{b}$ 34) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{a}$ *opp.* $\frac{\sqrt[3]{a}}{3}$ 35) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ 36) $a\sqrt[n]{a}$ 37) $a^2\sqrt[k]{5}$

38) $12\sqrt{2}$ 39) $4\sqrt{2}$ 40) $11\sqrt{2}$ 41) $5\sqrt[3]{5}$ 42) $24\sqrt{3}$

43) $20\sqrt[3]{3}$ 44) $6\sqrt[3]{12}$ 45) $bcde^2\sqrt[4]{a^3cd^2e^2}$ 46) $(x+2)\sqrt{x+2}$ 47) $2x(x^2+1)\sqrt{x}$

48) $\frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 49) $2(x-3)\sqrt{2}$

f) RADICE DI UN RADICALE

50) $\sqrt[6]{x}$ 51) $\sqrt[8]{3}$ 52) $\sqrt[6]{t}$ 53) $\sqrt[10]{a^2+b^2}$ 54) $\sqrt[k^2]{w}$

55) $\sqrt[a^2-b^2]{4}$ 56) $\sqrt[2x]{x}$ 57) $\sqrt[4]{6}$ 58) $\sqrt[xy]{a}$ 59) $\sqrt[4]{x}$

60) $\sqrt[4]{a^3b^3}$ 61) $2x\sqrt[12]{128}$

g) POTENZA DI UN RADICALE

62) $\sqrt[4]{x^3}$ 63) $\sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$ 64) $\sqrt[3]{a^2}$ 65) 49 66) $2\sqrt[3]{2}$

67) $(a-1)\sqrt{a-1}$ 68) 6 69) $24\sqrt{3}$ 70) x^3 71) $\sqrt[3]{c}$

72) $\sqrt[6]{a^3b^4}$ 73) 144 74) $\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{y^5}$ 75) $m\sqrt{m}$ 76) $4\sqrt[4]{2}$

77) 18 78) $x^2\sqrt[3]{x^2}$ 79) $(a+b)^2$ 80) $(a+1)\sqrt[3]{\frac{a+1}{(a+2)^2}}$

h) SOMMA ALGEBRICA DI RADICALI Svolgimenti dal n. 16 al n. 24 ⇨ **Risultati: pag. succ.**

1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}$ 2) $4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}$ 3) $x\sqrt{x}-2\sqrt{x}$ 4) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$

5) $3\sqrt{a}-2\sqrt{b}+\sqrt{b}+2\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}$ 6) $3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}$ 7) $\sqrt{8}+\sqrt{50}$ 8) $\sqrt{x^3}-\sqrt{x^5}$

9) $\sqrt{18}-\sqrt[3]{81}+6\sqrt[3]{3}+\sqrt{27}$ 10) $(a-b)\sqrt{c}+(a+b)\sqrt{c}$ 11) $\sqrt[4]{32}-\sqrt[4]{162}$ 12) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{24}$

13) $7\sqrt{11}-\sqrt{7}+2\sqrt{11}-4\sqrt{11}-4\sqrt{7}$ 14) $\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{48}$ 15) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}+2\sqrt{27}-\sqrt{75}$

16) $\dfrac{5\sqrt[3]{192}+4\sqrt[3]{81}}{\sqrt[4]{65536}}$ 17) $\sqrt{(a-b)^3}+\sqrt{ab^2-b^3}$ 18) $\dfrac{2}{5}\sqrt{9a}+\sqrt{4b^3}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

19) $\dfrac{\sqrt{2048}-\sqrt{512}}{2\sqrt{50}+\sqrt{72}}$ 20) $\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{4x}}{x^2-4}$ 21) $\sqrt{4t+4}+\sqrt{9t+9}+\sqrt[3]{64t+64}$

22) $\dfrac{\sqrt[4]{a^9}-\sqrt[4]{16a^5}+\sqrt[4]{a}}{a^3-3a^2+3a-1}$ 23) $\sqrt[3]{\dfrac{81}{8}}+\sqrt[3]{\dfrac{3}{125}}$ 24) $\sqrt{x^3+x^2-x-1}-\sqrt{4x-4}$

i) OPERAZIONI TIPO "PRODOTTI NOTEVOLI" Svolgimenti dal n. 45 al n. 54 ⇨

25) $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ 26) $\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ 27) $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$

28) $\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{11}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{11}\right)$ 29) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2$ 30) $\left(2\sqrt{3}-1\right)^2$

31) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3$ 32) $\left(2-\sqrt[4]{3}\right)^2$ 33) $\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)$

34) $\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)$ 35) $\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2$ 36) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

37) $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}\right)^2$ 38) $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^4$ 39) $\sqrt{\sqrt{x}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-1}$ 40) $\left(2-\sqrt{3}\right)^3$

41) $\sqrt{a}\left(a+\sqrt{a}\right)$ 42) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)^2$ 43) $\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{c}\right)^2$ 44) $\left(\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2$

45) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ 46) $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)$ 47) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)^2$ 48) $\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2$

49) $\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)$ 50) $\left(\sqrt{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$ 51) $\left(\sqrt{5}-2\right)^3$

52) $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-4\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(3x+4\sqrt{2}\right)$ 53) $\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)-\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2$ 54) $\left(\sqrt{2}-1\right)^4$

l) RAZIONALIZZAZIONE Svolgimenti dal n. 76 al n. 89 ⇨

55) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 56) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 57) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ 58) $\dfrac{x}{a\sqrt{x}}$ 59) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

60) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}$ 61) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ 62) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ 63) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$ 64) $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$ 65) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$

66) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 67) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}$ 68) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ 69) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$ 70) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$ 71) $\dfrac{1}{a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a}}$

72) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ 73) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ 74) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 75) $\dfrac{1}{3-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

76) $\dfrac{x}{2\sqrt{x}}$ 77) $\dfrac{9-4t}{3-2\sqrt{t}}$ 78) $\dfrac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 79) $\dfrac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$ 80) $\dfrac{y}{\sqrt{x}-\sqrt{x+y}}$

81) $\dfrac{a^2-1}{\sqrt{a+1}}$ 82) $\dfrac{2c-18}{3\sqrt{c}+9}$ 83) $\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$ 84) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-1}$ 85) $\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

86) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{15}}$ 87) $\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}+2}$ 88) $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{3}}$ 89) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{(a-b)^3}}$ 90) $\dfrac{4}{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

RISULTATI

h) SOMMA ALGEBRICA DI RADICALI

1) $7\sqrt{2}$ 2) $\sqrt[3]{5}$ 3) $(x-2)\sqrt{x}$ 4) STOP!

5) $5\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[3]{a}$ 6) $\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$ 7) $7\sqrt{2}$ 8) $x(1-x)\sqrt{x}$

9) $3\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}\right)$ 10) $2a\sqrt{c}$ 11) $-\sqrt[4]{2}$ 12) $3\sqrt{6}$

13) $5\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)$ 14) $6\sqrt{3}+7\sqrt{2}$ 15) $\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}$

16) $2\sqrt[3]{3}$ 17) $a\sqrt{a-b}$ 18) $\frac{1}{5}\sqrt{a}+(2b-1)\sqrt{b}$ 19) 1 20) $\frac{\sqrt{x}}{x+2}$

21) $5\sqrt{t+1}+4\sqrt[3]{t+1}$ 22) $\frac{\sqrt[4]{a}}{a-1}$ 23) $\frac{17}{10}\sqrt[3]{3}$ 24) $(x-1)\sqrt{x-1}$

i) OPERAZIONI TIPO “PRODOTTI NOTEVOLI”

25) $\sqrt{6}+3$ 26) $6\sqrt{10}-4-3\sqrt{5}+\sqrt{2}$ 27) 2

28) 1 29) $11+2\sqrt{30}$ 30) $13-4\sqrt{3}$

31) $a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b$ 32) $4-4\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}$ 33) $\sqrt[15]{x^8}+\sqrt[10]{x^7}+\sqrt[12]{x^7}+\sqrt[4]{x^3}$

34) $2b$ 35) $2\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$ 36) $18+5\sqrt{6}$ 37) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[6]{x^2y^3}+y$

38) $3+4\sqrt[4]{2}+6\sqrt{2}+4\sqrt[4]{8}$ 39) $\sqrt{x-1}$ 40) $26-15\sqrt{3}$

41) $a\sqrt{a}+a$ 42) $6-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 43) $b\left(a^2-2a\sqrt{bc}+bc\right)$ 44) $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

45) $5-2\sqrt{6}$ 46) 1 47) $2\left(3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ 48) $2\left(5x+4-3\sqrt{x^2-1}\right)$

49) $2(4x+5)$ 50) $2\left(2\sqrt{a}-\sqrt{4a-b}\right)$ 51) $17\sqrt{5}-38$ 52) x^2 53) $2\left(7\sqrt{6}-12\right)$ 54) $17-12\sqrt{2}$

l) RAZIONALIZZAZIONE

55) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 56) $(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 57) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 58) $\frac{\sqrt{x}}{a}$ 59) $\sqrt{2}-1$

60) $\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$ 61) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 62) $2\sqrt{2}$ 63) $2\sqrt[3]{4}$ 64) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$ 65) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

66) $\sqrt{2}-1$ 67) $2\sqrt{14}-7$ 68) $\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$ 69) $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

70) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$ 71) $\frac{a^2\sqrt[3]{b^2}-ab\sqrt[3]{ab}+b^2\sqrt[3]{a^2}}{ab\left(a^2+b^2\right)}$ 72) $x+\sqrt{x^2-1}$

73) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 74) $\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{12}$ 75) $-\frac{6\sqrt{6}+4\sqrt{2}+7\sqrt{3}-3}{46}$

76) $\frac{\sqrt{x}}{2}$ 77) $3+2\sqrt{t}$ 78) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 79) $\frac{4x+1-4\sqrt{x}}{4x-1}$ 80) $-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+y}\right)$

81) $(a-1)\sqrt{a+1}$ 82) $\frac{2\left(\sqrt{c}-3\right)}{3}$ 83) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$ 84) $\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}+3\sqrt{3}-7}{11}$ 85) $\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

86) $4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{225}$ 87) $(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)$ 88) $\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$ 89) $\sqrt[4]{a-b}$ 90) $\frac{2\sqrt{3}+3+\sqrt{21}}{3}$

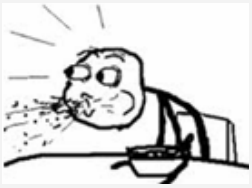
1) **POVERO PIERINO, NON NE AZZECCA UNA …**
VUOI CORREGGERE GLI ERRORI TREMENDI CHE IL COMPAGNO HA COMMESSO?

a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y}=\sqrt[12]{xy}$ c) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{x^6}$

d) $\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}$ e) $3\sqrt{x}+5\sqrt{x}=8\sqrt{2x}$ f) $3\sqrt{x}\cdot 5\sqrt{x}=15\sqrt[4]{x}$

g) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=\sqrt[6]{a}$ h) $\sqrt{x^4+9}=x^2+3$ i) $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt[4]{8}$

l) $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}$ m) $\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{7}=\sqrt{16}=4$



QUALCHE QUESITO PESCATO SU INTERNET

Dal sito www.glencoe.com: **Radical Expressions-Multiple Choice**

2) Simplify $\sqrt{180}$ a) $10\sqrt{3}$ b) $18\sqrt{5}$ c) $6\sqrt{5}$ d) $50\sqrt{3}$

3) Simplify $\dfrac{\sqrt{48x^3y^2}}{\sqrt{4xy^3}}$ a) $\dfrac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{y}}$ b) $\dfrac{3x\sqrt{2y}}{y}$ c) $\dfrac{2x\sqrt{3y}}{y}$ d) $\dfrac{2y\sqrt{3x}}{x}$

4) Find the result of $\sqrt{6}\cdot\sqrt{48}$ a) $12\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{3}$ c) $24\sqrt{2}$ d) $12\sqrt{2}$

5) Simplify $\dfrac{3}{4+\sqrt{2}}$ a) $\dfrac{12+3\sqrt{2}}{14}$ b) $\dfrac{12+\sqrt{2}}{14}$ c) $\dfrac{12-3\sqrt{2}}{14}$ d) $\dfrac{12-\sqrt{2}}{14}$

Check It

Da http://teachers.henrico.k12.va.us/math/HCPSAlgebra2/modules.html: **Simplify the expression**

6) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}$ a) $\sqrt{221}$ b) 221 c) $\sqrt{30}$ d) $2\sqrt{221}$

7) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ a) $\dfrac{21}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{8}{13}$ c) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ d) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

8) $\sqrt{14}-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ a) $\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$ b) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ c) $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ d) $7\sqrt{2}$

9) $3\sqrt{32}-2\sqrt{18}+\sqrt{54}$ a) $4\sqrt{2}-3\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{6}+6\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{6}-6\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{2}+3\sqrt{6}$

10) $\left(\sqrt{19}-\sqrt{2}\right)^2$ a) $21-2\sqrt{38}$ b) 17 c) $21+2\sqrt{38}$ d) $17-2\sqrt{38}$

Check Your Work

Correggi gli errori:



11) $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2a-1}=\sqrt{2a\not{+1}+2a\not{-1}}=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$

12) $\sqrt{4+\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)}=\sqrt{4+5+\sqrt{65}}=\sqrt{9+\sqrt{65}}=3+\sqrt[4]{65}$

13) $\dfrac{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{2+25+10\sqrt{2}}{10}=\dfrac{27+\not{10}\sqrt{2}}{\not{10}}=27+\sqrt{2}$



RISPOSTE:

1a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 1b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y}=\sqrt[12]{x^4y^3}$ 1c) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{x^5}=x$ 1d) $\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}=$ STOP

1e) $3\sqrt{x}+5\sqrt{x}=8\sqrt{x}$ 1f) $3\sqrt{x}\cdot 5\sqrt{x}=15x$ 1g) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=\sqrt[3]{a^2}$ 1h) $\sqrt{x^4+9}=$ STOP

1i) $\sqrt{3}+\sqrt{5}=$ STOP 1l) $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$ STOP 1m) $\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{7}=$ STOP 2c3a4d5c6a7c8a9d10a

11) La somma di due radici quadrate NON è uguale alla radice quadrata della somma …

12) La radice di una somma NON è uguale alla somma delle radici. Invece:

$$\sqrt{9+\sqrt{65}}=\sqrt{\frac{18+2\sqrt{65}}{2}}=\sqrt{\frac{18+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{26}}{2}$$

13) Sbagliata la semplificazione finale

m) RADICALI DOPPI

Svolgimenti dal n. 11 al n. 14 ⇨

1) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$ 3) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$ 4) $\sqrt{35+12\sqrt{6}}$

5) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ → con la formula o con il "trucchetto" (più seriamente, si dice "artificio"): $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=ecc.$

6) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ 7) $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ 8) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$ 9) $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$ 10) $\sqrt{6-2\sqrt{3}}$

11) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ 12) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$ 13) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$ 14) $\sqrt{2-2\sqrt{1-t^2}}$

n) ESPRESSIONI VARIE

Svolgimenti dal n. 15 al n. 52 ⇨

15) $\sqrt[3]{\frac{t^2-4}{t-1}}\cdot\sqrt{\frac{t^2-3t+2}{t+2}}$

16) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[5]{5}}$ Semplifica, verificando, alla fine, che si tratta di un numero leggermente superiore a 1

17) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}:\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

18) $\frac{\left(\sqrt[3]{(x-y)\sqrt[4]{(x-y)}}\right)^8}{x^3-y^3}$

19) $\sqrt[k]{a^p}\cdot\sqrt[p]{a^k}$

20) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[8]{ab}-\sqrt[8]{\frac{a^3}{b}}$

21) $\sqrt{160}+\sqrt{250}+\sqrt{360}-\sqrt{2250}$

22) $\frac{\sqrt{108}+\sqrt{243}}{\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{3}}$

23) $\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}+\sqrt{9x-9}$

24) $\frac{\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{48}}{\sqrt{13^2-12^2}}$

25) $\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}$

26) $\left(\sqrt[4]{1+m}-\sqrt[4]{1-m}\right)\left(\sqrt[4]{1+m}+\sqrt[4]{1-m}\right)\left(\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}\right)$

27) $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1\right)^2-\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\left(2+\frac{9}{2}\sqrt{2}-4\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

28) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

29) $\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\sqrt{\frac{x^2}{y^2}-1}$

30) $\frac{2\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}$

31) $\frac{\frac{1}{1+\sqrt{x}}-1}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(1-\sqrt[4]{x}\right)}$

32) $\frac{x^2-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}$

33) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}+\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+1$

34) $\sqrt[3]{2\sqrt{7}-1}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{7}+1}-\sqrt{16-6\sqrt{7}}-\left(\sqrt{7}\right)^2$

35) $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}-3}}$

36) $\frac{\overset{Ruffini}{\sqrt{x^3-3x-2}}-\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}}{3}$

37) $\left(\sqrt[4]{a}+\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)\left(\frac{a-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}\right)+\sqrt[3]{a}$

38) $\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}$

39) $\frac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

40) $\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}$

41) $\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^2-1}{\sqrt{12}+\sqrt{8}}$

42) $\frac{\sqrt{\sqrt{9+4\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}}{2}$

43) $\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right):\sqrt[4]{x}+2\frac{\sqrt{x}}{x}$

44) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-w}}+\frac{1}{\sqrt{1+w}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{1-w^2}}$

45) $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right):\sqrt{1+x}$

46) $\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}}}$

47) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{a}\right)^4-\left(\sqrt{b}\right)^4}{b\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)^6-1}}$

48) Razionalizza: $\frac{1}{x+\sqrt[3]{1-x^3}}$

49) Razionalizza: $\frac{2}{\sqrt[4]{a+1}+\sqrt[4]{a-1}}$

50) Scomponi in fattori e semplifica: $\dfrac{\sqrt{ac}-\sqrt{c}}{a-\sqrt{a}+\sqrt{ab}-\sqrt{b}}$ 51) Scomponi in fattori e semplifica: $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$

52) Semplifica $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ verificando, alla fine, che si tratta di un numero prossimo a $\pi \approx 3{,}14$

o) ESERCITAZIONI CONCLUSIVE

Correzione A) ⇨ Correzione B) ⇨

A)

53) $\sqrt{27}+\sqrt{20}-\sqrt{12}-\sqrt{5}$ 54) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt{x}}{x}$ 55) $\sqrt[3]{\dfrac{\left(a^2-a\right)^2}{a^2}}:\sqrt{a-1}$ 56) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{200}}$

57) $\sqrt{9a^3-9a^2}-\left(\sqrt{4a^3-4a^2}+\sqrt{a^3-a^2}\right)$ 58) $\sqrt[4]{\left(x+\sqrt{2x-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2x-1}\right)}$ 59) $\left(\sqrt{2}+1\right)^3$

60) $\dfrac{1}{96}\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2$ 61) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$ 62) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$ 63) $\dfrac{\sqrt{19-6\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

B)

64) $\sqrt{48}+\sqrt{8}-\sqrt{27}-\sqrt{18}$ 65) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}{x}$ 66) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3}}:\sqrt[12]{x}$ 67) $\sqrt[4]{\left(a+\sqrt{a^2-9}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^2-9}\right)}$

68) $\sqrt{t^3-t^2}-\left(\sqrt{t-1}\right)^3$ 69) $\dfrac{\left(2\sqrt{2}-2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}+2-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{128}}{8}$ 70) $\dfrac{25+\left(2\sqrt{2}-1\right)^3}{22}$

71) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{15}{\left(\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{3}\right)^2}$ 72) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}-\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}\right)\left(\sqrt{a+1}+1\right)$ 73) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-x}-1}$

RISULTATI

1) $3-\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{5}-1$ 3) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ 4) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

5) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 6) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ 7) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$ 8) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$ 9) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

10) Non è "spezzabile": infatti $a^2-b=36-12=24$, e 24 NON è un quadrato perfetto.

11) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ 12) $2\sqrt{3}+1$ 13) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$ 14) $\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}$

15) $\sqrt[6]{\dfrac{(t-1)(t-2)^5}{t+2}}$ 16) $\sqrt[15]{1{,}944}\approx 1{,}045$ 17) $\sqrt[6]{x}$ 18) $\dfrac{(x-y)^2\sqrt[3]{x-y}}{x^2+xy+y^2}$ 19) $\sqrt[kp]{a^{p^2+k^2}}$ 20) 0

21) 0 22) $15\sqrt[6]{3}$ 23) $(x+2)\sqrt{x-1}$ 24) $\sqrt[4]{3}$ 25) $2\sqrt{5}$ 26) $2m$ 27) 0 28) $\dfrac{4\sqrt{ab}}{a-b}$ 29) $\dfrac{x}{y}$ 30) 1

31) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 32) $\dfrac{x-1-\sqrt{1-x^2}}{2}$ 33) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 34) 0 35) 2 36) $\sqrt{x-2}$ 37) a 38) $\sqrt{3}$ 39) 0

40) 1 41) 1 42) $\sqrt[4]{2}$ 43) $\dfrac{1}{2}$ 44) $\dfrac{2}{1-w^2}$ 45) 0 46) 1 47) b 48) $x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}$

49) $\left(\sqrt[4]{a+1}-\sqrt[4]{a-1}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)$ 50) $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 51) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$ 52) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}414+1{,}732=3{,}146$

53) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 54) $\sqrt[4]{x}$ 55) $\sqrt[6]{a-1}$ 56) 1 57) 0 58) $\sqrt{x-1}$

59) $5\sqrt{2}+7$ 60) 1 61) $\sqrt[3]{x}$ 62) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$ 63) $1+\sqrt{2}$

64) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 65) $\sqrt[6]{x}$ 66) $\sqrt{x}$ 67) $\sqrt{3}$ 68) $\sqrt{t-1}$

69) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ 70) $\sqrt{2}$ 71) 4 72) a 73) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

16. EQUAZIONI E SISTEMI DI PRIMO GRADO CON COEFFICIENTI IRRAZIONALI

Ecco qualche esempio.

OSSERVAZIONE
Si preferisce scrivere
$x\sqrt{3}$ al posto di $\sqrt{3}\cdot x$
$3x\sqrt{3}$ anziché $3\sqrt{3}\cdot x$

1) $\boxed{x\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+1\right)=x\sqrt{27}-1}$

$x\sqrt{3}-\sqrt{3}\cancel{-1}=3x\sqrt{3}\cancel{-1}$ (OSSERVAZIONE)

$x\sqrt{3}-3x\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$-2x\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$x=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}}{-2\cancel{\sqrt{3}}}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$ *Anche*: $x\cancel{\sqrt{3}}-3x\cancel{\sqrt{3}}=\cancel{\sqrt{3}}^{1}$; $-2x=1$; $x=-\dfrac{1}{2}$

2) $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{5}}-\dfrac{6}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{x\left(\sqrt{2}-1\right)}{5-\sqrt{5}}}$

$\dfrac{x}{\sqrt{5}}-\dfrac{6}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{x\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}$

$\dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)x-6\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}=\dfrac{x\left(\sqrt{2}-1\right)}{\cancel{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}$

$x\sqrt{5}\cancel{-x}-6\sqrt{5}=x\sqrt{2}\cancel{-x}$

$x\sqrt{5}-x\sqrt{2}=6\sqrt{5}$

$x\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=6\sqrt{5}$

$x=\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=\dfrac{^{2}\cancel{6}\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\cancel{3}}=\boxed{10+2\sqrt{10}}$

3) $\boxed{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}+2\right)x=\dfrac{3(2x+1)}{\sqrt{3}}-1}$

$\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}+2\right)x=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}(2x+1)}{\cancel{\sqrt{3}}}-1$

$x\sqrt{15}-x\sqrt{5}+2x=2x\sqrt{3}+\sqrt{3}-1$

$x\sqrt{15}-x\sqrt{5}+2x-2x\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$

$x\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}+2-2\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-1$

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{15}-\sqrt{5}+2-2\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-1\right)-2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}-1}}{\cancel{\left(\sqrt{3}-1\right)}\left(\sqrt{5}-2\right)}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4}=\boxed{\sqrt{5}+2}$

4) $\boxed{\begin{cases} x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=6 \\ \sqrt{3}\cdot\dfrac{x+y-2}{y-x}=1 \end{cases}}$

$$\begin{cases} x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=6 \\ x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-2\sqrt{3}=y-x \quad (y\neq x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=6 \\ x\sqrt{3}+x+y\sqrt{3}-y=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=6 \\ x\left(\sqrt{3}+1\right)+y\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sqrt{3}=y\sqrt{3}+6 \\ x\left(\sqrt{3}+1\right)+y\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{y\sqrt{3}+6}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3y+6\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\cancel{3}\left(y+2\sqrt{3}\right)}{\cancel{3}}=y+2\sqrt{3} \\ \left(y+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)+y\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+2\sqrt{3} \\ y\sqrt{3}+y+6+\cancel{2\sqrt{3}}+y\sqrt{3}-y=\cancel{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+2\sqrt{3} \\ 2y\sqrt{3}=-6; \quad y=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{3}}}=-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+2\sqrt{3}=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}}$$

ESERCIZI		**SOLUZIONI**
5) $x\sqrt{5}+15=0$	6) $3x=2-x\sqrt{7}$	5) $-3\sqrt{5}$ 6) $3-\sqrt{7}$
7) $x=2\left(2+\sqrt{2}\right)-x\sqrt{2}$	8) $\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)=\sqrt{6}$	7) $2\sqrt{2}$ 8) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
9) $3x\sqrt{2}=2+x\sqrt{8}$	10) $x\left(x+\sqrt{2}\right)=x\left(x+1\right)+1$	9) $\sqrt{2}$ 10) $\sqrt{2}+1$
11) $x\left(\sqrt{3}-1\right)^2=2\left(2x-\sqrt{6}\right)$	12) $\dfrac{x\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-x$	11) $\sqrt{2}$ 12) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
13) $\sqrt{2}\left(x-1\right)+1=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$	14) $\dfrac{x}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{x-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1}{2}$	13) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$ 14) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$
15) $\begin{cases} x\sqrt{5}+y=6 \\ x-y\sqrt{5}=0 \end{cases}$	16) $\begin{cases} x\sqrt{3}+y\sqrt{2}=1 \\ x\sqrt{6}+3y=0 \end{cases}$	15) $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=1 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$
17) $\begin{cases} x\sqrt{7}-y\sqrt{2}=5 \\ x\sqrt{2}-y\sqrt{7}=0 \end{cases}$	18) $\begin{cases} x\sqrt{5}+y\sqrt{5}=10 \\ x-y=2 \end{cases}$	17) $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x=\sqrt{5}+1 \\ y=\sqrt{5}-1 \end{cases}$
19) $\begin{cases} x\sqrt{3}+y\sqrt{2}=4 \\ x\sqrt{3}-y\sqrt{2}=2 \end{cases}$	20) $\begin{cases} \left(x+y-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}+y=x \\ \dfrac{2+y}{x}=1 \end{cases}$	19) $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x=\sqrt{2}+1 \\ y=\sqrt{2}-1 \end{cases}$

17. DAI "RADICALI ASSOLUTI" AI "RADICALI IN $\mathbb{R}$"

E dopo questa prima fase in cui, per rendere più semplice l'impostazione della teoria, ci siamo limitati a considerare radicali a radicando positivo (≥ 0), siamo ora pronti per accettare, in certi casi (e precisamente: quando l'indice è dispari) anche un radicando negativo.

In definitiva:

I) **Se INDICE è DISPARI**: $\boxed{\sqrt[2n+1]{a}}$

- **il radicando potrà essere positivo, negativo o nullo**;
- **il valore del radicale, ossia il risultato dell'estrazione di radice, avrà lo stesso segno del radicando**, quindi sarà, rispettivamente, positivo, negativo o nullo.

Esempi:

$\sqrt[3]{8} = 2$;

$\sqrt[3]{-125} = -5$;

$\sqrt[3]{0} = 0$;

$\sqrt[3]{-10} = -2{,}154...$ (notare che è $\sqrt[3]{-10} = -\sqrt[3]{10}$; in generale, si ha sempre $\boxed{\sqrt[2n+1]{-x} = -\sqrt[2n+1]{x}}$)

II) **Se INDICE è PARI**: $\boxed{\sqrt[2n]{a}}$

- **il radicando dovrà essere positivo o nullo**, altrimenti la radice non si potrebbe estrarre (operazione impossibile; ne riparleremo, comunque, quando introdurremo l'insieme $\mathbb{C}$ dei "numeri complessi");
- **il valore del radicale, ossia il risultato dell'estrazione di radice, sarà QUEL NUMERO POSITIVO O NULLO che, elevato all'esponente 2n, riproduce il radicando.** Infatti la comunità matematica ha deciso, per diversi ottimi motivi, che non debba intendersi, tanto per fare un esempio, ~~$\sqrt{9} = \pm 3$~~, bensì $\sqrt{9} = 3$.

Quindi, ricapitolando (IMPORTANTISSIMO!!!):

♥ **IN CASO DI INDICE PARI,**
SIA IL RADICANDO CHE IL RISULTATO SONO POSITIVI (≥ 0):
♪ **il *radicando*, perché altrimenti l'operazione sarebbe impossibile;**
♫ **il *risultato*, per CONVENZIONE.**

Esempi: $\sqrt[4]{16} = 2$ (e NON ± 2); $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ $\left(\text{e NON } \pm\frac{3}{5}\right)$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt[6]{-1}$ = IMPOSSIBILE



OCCHIO, ALLORA!
L'equazione $x^2 = 144$ ha DUE soluzioni,
ma il simbolo $\sqrt{144}$ indica la sola soluzione POSITIVA!
Quella negativa si indicherà con $-\sqrt{144}$ e si potrà scrivere, in forma compatta, che le soluzioni dell'equazione data sono i due numeri $\pm\sqrt{144}$
$(+\sqrt{144} = +12, \quad -\sqrt{144} = -12)$

- Si può verificare che **tutte le regole di calcolo imparate per i "radicali assoluti"** (= i radicali a radicando positivo sui quali abbiamo basato fino al par. precedente la nostra trattazione) **continuano a valere anche per i "radicali in $\mathbb{R}$"**, ossia per quella famiglia di radicali "ampliata" che si ottiene accettando pure i radicali con indice dispari e radicando negativo.

- Per quanto riguarda i **radicali con indice pari**, **ci sono alcune delicate questioni di segno che costringono, in certi casi, ad introdurre un simbolo di valore assoluto.** Di questo argomento si occupa il paragrafo successivo.

18. RADICALI E VALORI ASSOLUTI

Consideriamo l'espressione $\sqrt{a^2}$.

Essa ha significato qualunque sia il segno di a (quindi: sia per $a > 0$, che per $a < 0$ o $a = 0$), perché, qualunque sia il segno della base, un quadrato è sempre positivo o nullo (mai negativo) e perciò la radice quadrata di un quadrato si può sempre estrarre.

Chiediamoci ora: è sempre giusto scrivere $\sqrt{a^2} = a$?

Beh, è giusto solo se $a \geq 0$, perché se invece il numero a è negativo, sarebbe sbagliato !!!

Ad es., nel caso $a = -5$, l'uguaglianza $\underbrace{\sqrt{a^2}}_{\sqrt{(-5)^2}\ \sqrt{25}} = \underbrace{a}_{-5}$ non "funziona", perché $\sqrt{25}$ vale $+5$ e non -5.

Riflettendo bene, l'uguaglianza che vale sia per $a \geq 0$ che per $a < 0$, è la seguente:

♥ **(14)** $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ **MOLTO IMPORTANTE l'introduzione del simbolo di VALORE ASSOLUTO !**

Osserviamo che invece con una radice ad indice dispari (ad esempio, una radice cubica) NON avremmo dovuto introdurre le stanghette di valore assoluto; insomma, vale, *qualunque sia* il segno del numero reale a, l'uguaglianza

(15) $\sqrt[3]{a^3} = a$

(ricordiamo ancora una volta che nel caso di un radicale con indice dispari, sia il radicando che il risultato possono essere positivi, nulli o negativi e il risultato ha sempre lo stesso segno del radicando).

Analogamente, avremo, qualunque sia il segno del numero a:

(16) $\boxed{\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b} \quad (b \geq 0)}$

La (16) è ricavabile dalla (14) con la catena $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a|\sqrt{b}$.

Anche qui, in situazioni affini che però portino una radice cubica al posto della quadrata, le stanghette *non* vanno introdotte:

(17) $\sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$

Osservazione - E' chiaro che nella (14) e nella (16) possiamo fare a meno delle stanghette di val. assoluto in tutti quei casi in cui si sa per certo che il numero indicato con a è ≥ 0.

Ancora:
il radicale $\sqrt{ab}$ ha significato sia quando a, b sono entrambi positivi, sia quando sono entrambi negativi.
Ma l'uguaglianza $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ vale soltanto nel primo caso ($a \geq 0, b \geq 0$).
L'uguaglianza che vale anche con a, b entrambi negativi è

(18) $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$

Il problema *non* sussiste con indice dispari: qualunque siano i segni di a, b, è sempre

(19) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

Generalizzando, si vede che vale la seguente comoda REGOLA:

LE STANGHETTE DI VALORE ASSOLUTO VANNO INTRODOTTE NEI CASI IN CUI, OPERANDO CON UN RADICALE AD INDICE PARI, A PARTIRE DA UN FATTORE DI GRADO PARI SI PASSA AD UNO – O PIU' – FATTORI DI GRADO DISPARI per effetto

- di una semplificazione indice-esponente (proprietà invariantiva)
- o dell'estrazione di un fattore dal segno di radice
- o dello "spezzamento" di un radicale con la regola per la radice di un prodotto o di un quoziente.

Il simbolo di "modulo" (= di valore assoluto) si può evitare, in questi casi, solo se il numero che andrebbe a finire entro le stanghette è ≥ 0 .

19. SIGH! I PARAGRAFI 17) E 18) CI COSTRINGEREBBERO A RIMETTERE IN DISCUSSIONE I RISULTATI DI ALCUNI DEGLI ESERCIZI FATTI!

Negli esercizi con radicali proposti alle pagine precedenti, c'era un invito ad adottare un'ipotesi "di comodo":

"per semplicità, laddove compaiono espressioni letterali, sei autorizzato a supporre ≥ 0
l'espressione stessa e più in generale la base di ciascuna potenza in gioco".

E' giunto ora il momento di analizzare cosa accada se si lascia cadere questa supposizione.

Da qui in avanti, in TUTTO il nostro corso di Matematica,
il modo di utilizzare i radicali verrà generalizzato in DUE modi:
1) passeremo ad operare coi "radicali in $\mathbb{R}$ **"** e non più solamente coi radicali assoluti
2) e **simultaneamente abbandoneremo**, appunto, **l'ipotesi che tutte le potenze in gioco siano a base** ≥ 0 **.**

Andiamo dunque a riprendere alcuni esercizi già svolti
e **vediamo come si devono modificare i risultati, se si parte dalle premesse 1)+2).**

- Consideriamo ad esempio l'espressioncina $\sqrt[10]{4+4t+t^2}$ (pag. 19, n. 30).
  Si trattava di semplificare, tramite la proprietà invariantiva, e il risultato dichiarato era $\sqrt[5]{2+t}$.
  Ma ora, per le nuove premesse 1)+2) , dovremo scrivere invece, introducendo il valore assoluto,
  $$\sqrt[10]{4+4t+t^2} = \sqrt[10]{(2+t)^2} = \sqrt[5]{|2+t|} .$$
  Riflettiamo: poiché il valore assoluto di un numero è uguale
  a) al numero stesso, se questo è positivo (≥ 0)
  b) all'opposto del numero, se questo è negativo
  e poiché il numero $2+t$ è ≥ 0 quando $t \geq -2$, mentre è < 0 quando $t < -2$,
  in definitiva avremo:
  $$\sqrt[10]{4+4t+t^2} = \sqrt[10]{(2+t)^2} = \sqrt[5]{|2+t|} = \begin{cases} \sqrt[5]{2+t} & \text{quando } t \geq -2 \\ \sqrt[5]{-(2+t)} = -\sqrt[5]{2+t} & \text{quando } t < -2 \end{cases}$$

- Un altro esercizio (pag. 21, n. 49) terminava col passaggio $\sqrt{2^3(x-3)^2} = 2(x-3)\sqrt{2}$.
  Ora il passaggio finale verrebbe invece effettuato come segue:
  $$\sqrt{2^3(x-3)^2} = 2|x-3|\sqrt{2} = \begin{cases} 2(x-3)\sqrt{2} & \text{nel caso } x \geq 3 \ (a) \\ 2(3-x)\sqrt{2} & \text{nel caso } x < 3 \ (b) \end{cases}$$
  (a) *quando è* $x-3 \geq 0$, *cioé con* $x \geq 3$, *avremo* $|x-3| = x-3$
  (b) *quando è* $x-3 < 0$, *cioé con* $x < 3$, *avremo* $|x-3| = -(x-3) = -x+3 = 3-x$

- Ripensiamo pure al semplice esercizietto $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n^2} = n$ (pag. 19, n. 72).
  Qui invece nulla cambia, nemmeno con le nuove premesse 1) + 2), perché se fin dall'inizio troviamo $\sqrt{n}$,
  vuol dire che fin dall'inizio si suppone $n \geq 0$ (altrimenti la radice quadrata non sarebbe eseguibile).
  Dunque rimane pienamente confermata la catena $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n^2} = n$ (se n è positivo, $|n| = n$).

- E $\sqrt[9]{27a^{27}}$? (pag. 19, n. 26)
  Beh, qui se a è positivo, allora lo è anche il radicando, se a è negativo lo è anche il radicando.
  Ma in un contesto di radicali in $\mathbb{R}$, tutto questo non ci interessa:
  - con indice dispari, il radicando può avere segno qualsiasi,
  - e la semplificazione con l'invariantiva quando l'indice è dispari non richiede mai il valore assoluto.

  Quindi è, anche ora, giusto scrivere $\sqrt[9]{27a^{27}} = \sqrt[9]{3^3 a^{27}} = \sqrt[3]{3a^9}$.

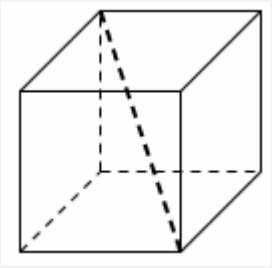
- Inventiamo infine un'espressione "ad hoc" per dare una idea di situazioni più complicate:
  $$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-7)^2} = |x-3| + |x-7| = \begin{cases} x-3+x-7 = 2x-10 & \text{se } x \geq 7 \\ x-3+7-x = 4 & \text{se } 3 \leq x < 7 \\ 3-x+7-x = 10-2x & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Appare chiaro da tutto questo non semplice discorso il motivo per cui fino ad ora avevamo sempre autorizzato lo studente a servirsi dell'ipotesi di positività delle basi di tutte le potenze in gioco: se infatti, caro lettore, ti avessimo fin dall'inizio sottoposto il carico di queste difficoltà, ti avremmo probabilmente indotto a sviluppare per i radicali una irreversibile antipatia, che speriamo di avere evitato.

E' sufficiente, a mio parere, l' "infarinatura" data in questa pagina, senza ulteriori esercizi, perché tu sia poi in grado di affrontare le problematiche esposte, nei contesti in cui si potranno ripresentare (es. "limiti", "studio di funzione").

QUESITI

La diagonale di un cubo misura 1 metro. Quanti metri misura il lato del cubo?



A) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ B) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) nessuno dei valori precedenti è esatto Correzione: ⇨

Trovato su http://bernard.langellier.pagesperso-orange.fr

Énigme mathématique.

1/4 d'euro = 25 centimes;
la racine carrée de 1/4 = 1/2;
la racine carrée de 25 = 5;
donc 1/2 d'euro = 5 centimes !!!

… Cos'è che "non funziona"?

Dall'eccellente sito www.themathpage.com
del prof. Lawrence Spector da New York, ecco
(clicca sulla freccia) le lezioni che riguardano i *radicali*: ⇨.

Esse iniziano nel modo seguente.

Vale davvero la pena di dare un'occhiata!

Davvero bello questo sito, approfondito e ricco di esercizi a risposta "nascosta"; facendo passare il puntatore del mouse sull'apposito spazio, ecco che la risposta esatta viene mostrata.

HERE ARE THE FIRST ten square numbers and their roots:

Square numbers	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**
Square roots	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

We write, for example,

$$\sqrt{25} = 5$$

"The square root of 25 is 5".

This mark $\sqrt{\ }$ is called the **radical sign** (after the Latin *radix* = root).
The number under the radical sign is called the **radicand**.
In the example, 25 is the radicand.

Problem 1. Evaluate the following.

To see the answer, pass your mouse over the colored area.
To cover the answer again, click "Refresh" ("Reload").
Do the problem yourself first!

a) $\sqrt{64} =$ ☐ b) $\sqrt{144} =$ ☐ c) $\sqrt{400} =$ ☐

d) $\sqrt{289} =$ ☐ e) $\sqrt{1} =$ ☐ f) $\sqrt{\frac{49}{81}} =$ ☐

20. ESPONENTI FRAZIONARI

Come è ben noto, una potenza con esponente intero ≥ 2 è definita come un prodotto di fattori tutti uguali fra loro (tanti fattori uguali alla base quante sono le unità dell'esponente): $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ …
Si introducono poi gli esponenti 1 e 0; noi abbiamo scritto che le rispettive definizioni

$a^1 = a$ ("un numero elevato a 1 è uguale a sé stesso")

$a^0 = 1$ ("un numero elevato a 0 è uguale a 1", con la sola eccezione $0^0 = \textit{indeterminata}$)

vengono scelte in questo modo perché sono le uniche che consentano alla proprietà sottrattiva degli esponenti di continuare a valere (poi, con tali def., si dimostra che continuano ad essere valide *tutte* le "vecchie" proprietà).
Avremmo anche potuto introdurre i nuovi esponenti ragionando sull'opportunità che essi risultassero compatibili con la *additiva* degli esponenti:
insomma, se desidero che si abbia, ad es., $a^3 \cdot a^1 = a^{3+1} = a^4$, è evidente che dovrò accettare la def. $a^1 = a$
e se desidero che risulti $a^3 \cdot a^0 = a^{3+0} = a^3$ è ovvio che dovrò adottare la definizione $a^0 = 1$.

Le definizioni degli esponenti negativi: $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ …

sono motivate, sostanzialmente, dall'esigenza che si estenda anche a questi la validità delle "vecchie" proprietà, così che (tanto per fare un esempio), se desideriamo che risulti vera l'uguaglianza $\boxed{a^{-3} \cdot a^3} = a^{-3+3} = a^0 \boxed{= 1}$,

siamo *necessariamente* condotti a porre, per definizione, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Dato che l'appetito vien mangiando, ci possiamo chiedere se possano avere un senso (e un'utilità) anche gli esponenti *frazionari*.

Ad esempio, che definizione sarà "logico" stabilire per una scrittura come $a^{\frac{1}{3}}$?
Beh, volendo attribuire a questa scrittura un significato compatibile con le proprietà già dimostrate valide in un ambito di esponenti interi, dovrà, in particolare, risultare

$$\boxed{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3} = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^1 \boxed{= a}$$

per cui la scrittura in esame dovrà indicare quel numero il cui cubo è a …
ma questo numero è la radice cubica di a !

Dunque si porrà, per definizione, $\boxed{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}}$ e, in generale, $\boxed{a^{\frac{1}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a}}$.

Poi, sempre nell'ottica di adottare definizioni tali che non si perda la validità di nessuna delle "vecchie" proprietà, si pone

$\boxed{a^{\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a^m}}$ NOTA : ♥ **il denominatore diventa l'indice, il numeratore l'esponente!**

e infine

$\boxed{a^{-\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$ NOTA : ♥ *prima di tutto, la negatività dell'esponente trasferisce la potenza dall'altra parte della linea di frazione con esponente che viene reso positivo, poi si applica la definizione precedente*

Dunque, per fare qualche esempio specifico,

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \quad y^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{y^3}, \quad z^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{z^2}}, \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2, \quad \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{16}{81}}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \quad \textit{o anche} \quad \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

RICAPITOLIAMO le definizioni date:

$$a^{\frac{1}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

In definitiva
le **POTENZE**
AD ESPONENTE FRAZIONARIO
non sono altro che
un modo alternativo
di rappresentare
i **RADICALI**!

♥ **Con gli esponenti frazionari, qualche problematica insorge qualora la base della potenza sia <0.**

Ad esempio, per la scrittura $(-8)^{1/3}$ si potrebbero scrivere entrambe le catene

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2\,; \qquad (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2$$

Per questo motivo, in generale gli esponenti frazionari m/n vengono utilizzati solo con m ed n primi fra loro.

Qualche testo, e qualche software, sceglie invece di impiegarli esclusivamente quando la base è positiva (≥ 0 se l'esponente frazionario è positivo, >0 se l'esponente è negativo).

LA CONSERVAZIONE DELLE PROPRIETA'

Per le potenze a esponente frazionario sopra introdotte, si può dimostrare che conservano la loro validità proprio *tutte* le proprietà che si era abituati ad applicare con esponente intero, nessuna esclusa.

Tali dimostrazioni si effettuano utilizzando le già dimostrate proprietà dei radicali.

- Verifichiamo, tanto per fare un esempio, che continua a valere la additiva degli esponenti (accontentandoci di considerare il caso in cui questi non siano negativi):

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

Comprendiamo a questo punto che un'espressione coi radicali potrebbe anche essere trasformata in espressione con esponenti frazionari, svolta utilizzando le proprietà delle potenze, e magari conclusa ritornando ai radicali.

- Un esempio: $\dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{6+4-9}{12}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$

  Prova a rifare l'espressione applicando le proprietà dei *radicali*: uscirà il *medesimo* risultato!

- Dài, un altro! $\sqrt{\sqrt{ab}} : \sqrt[8]{b} = \left[(ab)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{8}} = (ab)^{\frac{1}{4}} : b^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} : b^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{b}$

LE POTENZE AD ESPONENTE FRAZIONARIO E IL COMPUTER

♥ **Di solito in un software scientifico l'elevamento a potenza si indica con l'accento circonflesso ^**
… ma **ATTENZIONE! Occorre anche saper utilizzare in modo opportuno le PARENTESI!**

- Ad esempio, se lavorando con un software matematico o con un foglio elettronico io digito $x\,\hat{}\,1/3$, non otterrò $\sqrt[3]{x}$, bensì $x/3$! … **Per ottenere $\sqrt[3]{x}$ devo digitare** infatti $\boldsymbol{x\,\hat{}\,(1/3)}$, in quanto se scrivo $x\,\hat{}\,1/3$ il software eleverà x all'esponente 1, poi dividerà per 3.
- E per ottenere $\sqrt{x^2+1}$ si digita $\boldsymbol{(x\,\hat{}\,2+1)\,\hat{}\,(1/2)}$, o anche **sqrt(x ^ 2+1) [sqrt = SQuare RooT]**

ESERCIZI Vai alle risoluzioni ⇨

a) Determina il valore delle seguenti espressioni numeriche:

1) $8^{\frac{2}{3}} + 9^{\frac{1}{2}}$ 2) $4^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot 16^{\frac{1}{4}}$ 3) $\left[30\left(25^{-\frac{1}{2}} + 9^{-\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$ 4) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 5) $64^{\frac{5}{6}} - 81^{\frac{3}{4}}$

6) $2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}}$ 7) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{4}}$ 8) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}$ 9) $\left(81^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 10) $2^{-\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{2}{3}}$

b) Esegui le seguenti espressioni con radicali trasformando in potenze con esponente frazionario:

11) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$ 12) $\dfrac{\sqrt[4]{b^5}}{b \cdot \sqrt[8]{b}}$ 13) $\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^3}} \cdot \sqrt[3]{x}}{x}\right)^{12}$ 14) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[10]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}}{\sqrt{a}}}$

15) $\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)$ 16) $\dfrac{y^2 \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt[4]{9xy}}{\sqrt[3]{y^2}}$ 17) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{2}-1}}$ 18) $\sqrt[13]{\left(\sqrt{t+1}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{(t+1)^2}}$

RISULTATI

1) 7 2) 0 3) 2 4) 1 5) 5 6) $3/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}/2$ 7) 3 8) 5 9) 1/3 10) 1/4

11) $a^{\frac{23}{12}}$ 12) $b^{\frac{1}{8}}$ 13) x 14) 1 15) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$ 16) $3x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{19}{12}}$ 17) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 18) $(t+1)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{t+1}$

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - PRIMA PARTE

1. CHE COS'È E COME SI RISOLVE UN' EQUAZIONE DI 2° GRADO

Si dice "di 2° grado", o "quadratica" (inglese: *quadratic* equation)**, un'equazione della forma**

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)}$$

Casi particolari (equazioni "**incomplete**"):

$b = 0$	$\mathbf{ax^2 + c = 0}$	equazione "**binomia pura**"
$c = 0$	$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$	equazione "**binomia spuria**"
$b = c = 0$	$\mathbf{ax^2 = 0}$	equazione "**monomia**"

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

❑ BINOMIA PURA

Per risolvere una binomia pura, si isola x^2;
l'equazione potrà, a seconda dei casi, avere due soluzioni opposte, oppure essere impossibile.

$4x^2 - 9 = 0$
$4x^2 = 9$
$x^2 = \frac{9}{4}$
$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$ → vedi NOTA

$4x^2 + 9 = 0$
$4x^2 = -9$
$x^2 = -\frac{9}{4}$ IMPOSSIBILE

$8x + 25 = (x+4)^2$
$\cancel{8x} + 25 = x^2 \cancel{+8x} + 16$
$-x^2 = -9;\ x^2 = 9;\ x = \pm 3$

NOTA Il DOPPIO SEGNO davanti alla radice è INDISPENSABILE.
Infatti il simbolo $\sqrt{9/4}$ indicherebbe il solo numero $3/2$,
quindi *senza il doppio segno perderemmo una delle due soluzioni.*

❑ BINOMIA SPURIA

Per risolvere una binomia spuria, si scompone in fattori raccogliendo *x*,
e si applica la "legge di annullamento del prodotto":

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO: $\mathbf{a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0}$

$\Leftarrow$ *Se almeno uno dei fattori è nullo, il prodotto vale 0;*
$\Rightarrow$ *e viceversa: se un prodotto è uguale a 0, allora certamente almeno uno dei fattori è 0.*

In breve: **UN PRODOTTO E' UGUALE A 0 SE E SOLO SE ALMENO UNO DEI FATTORI E' 0**.

$5x^2 - 3x = 0$
$x(5x-3) = 0$
$x = 0 \vee 5x - 3 = 0$
$5x = 3$
$x = \frac{3}{5}$

$5x^2 + 3x = 0$
$x(5x+3) = 0$
$x = 0 \vee 5x + 3 = 0$
$5x = -3$
$x = -\frac{3}{5}$

$\frac{(2x+1)(2x-1)}{4} = x - \frac{1}{4};\ \frac{4x^2-1}{\cancel{4}} = \frac{4x-1}{\cancel{4}}$
$4x^2 \cancel{-1} = 4x \cancel{-1}$
$\cancel{4}x^2 - \cancel{4}x = 0$
$x^2 - x = 0 \quad x(x-1) = 0$
$x = 0 \vee x = 1$

Una binomia spuria ha sempre due soluzioni, di cui una nulla.

❑ MONOMIA

Un'equazione monomia ha sempre una sola soluzione, uguale a zero;
si può anche dire che ha "due soluzioni coincidenti, entrambe nulle".

$7x^2 = 0$
$x^2 = 0$
$x = 0 \ (x_1 = x_2 = 0)$

Si parla di "**due soluzioni coincidenti** $x_1 = x_2 = 0$"
per il fatto che, essendo $x^2 = x \cdot x$,
è come se la soluzione *x* = 0 venisse "trovata due volte";
e anche perché … (vedi NOTA)

$x^2 = 0$
$x \cdot x = 0$
$x = 0 \vee x = 0$
1° *fatt.* 2° *fatt.*

NOTA: $x^2 = 4 \to x = \pm 2;\ x^2 = \frac{1}{4} \to x = \pm\frac{1}{2};\ x^2 = \frac{1}{100} \to x = \pm\frac{1}{10};\ x^2 = \frac{1}{1000000} \to x = \pm\frac{1}{1000};\ \ldots$

In $x^2 = k$, quanto più la costante non negativa *k* diminuisce, tanto più le due soluzioni si avvicinano l'una all'altra sulla *number line* … Se *k* diventasse 0, si può pensare a due soluzioni che a forza di avvicinarsi hanno finito per sovrapporsi, per coincidere.

ESERCIZI SVOLTI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

1) $9(x^2-2)=7$
$9x^2-18=7$
$9x^2=25$
$x^2=\frac{25}{9}$
$x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

Non c'è x, quindi questa equazione è **binomia pura**: va isolato x^2

2) $\frac{(x+4)^2}{8}-x=0$
$(x+4)^2-8x=0$
$x^2+8x+16-8x=0$
$x^2+16=0$
$x^2=-16$
IMPOSSIBILE

3) $(4-x)(x-3)+12=0$
$4x-12-x^2+3x+12=0$
$-x^2+7x=0$
$x^2-7x=0$ (*)

Scompare il termine noto: si ha una **binomia spuria**

(*) ♥ **Quando il coeff. di x^2 è negativo, conviene cambiare tutti i segni!**

$x(x-7)=0$
$x=0 \vee x=7$

4) $15x^2+4x=3x^2$
3
$12x^2+4x=0$
$3x^2+x=0$
$x(3x+1)=0$
$x=0 \vee 3x+1=0$
$3x=-1$
$x=-\frac{1}{3}$

In questo caso abbiamo semplificato l'equazione, dato che tutti i coefficienti erano divisibili per uno stesso numero (il 4).

Domanda: *sarebbe lecito semplificare pure per x?*

… NO, perché così facendo "perderemmo" la soluzione $x = 0$.

Se ne riparlerà comunque a pag. 71.

5) $\frac{4x-3}{3}=\frac{1-x}{x}$
$x(4x-3)=3(1-x)$
$(x\neq 0)$
$4x^2-3x=3-3x$
$x^2=\frac{3}{4}$
$x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

La condizione $x \neq 0$ è dovuta al fatto che moltiplicando per $3x$ se n'è andato il denominatore. E' come se avessimo fatto il den. comune $3x$ in entrambi i membri e poi lo avessimo eliminato.

6) $\frac{x+8}{x^2-4x}+\frac{x+4}{2x}=\frac{x}{x-4}$ $\quad$ $\frac{x+8}{x(x-4)}+\frac{x+4}{2x}=\frac{x}{x-4}$

$\frac{2(x+8)+(x-4)(x+4)}{2x(x-4)}=\frac{2x^2}{2x(x-4)}$ $\quad$ $x\neq 0$, $x\neq 4$

$2x+16+x^2-16=2x^2$
$2x+x^2-2x^2=0$
$-x^2+2x=0$
$x^2-2x=0$ (**Quando il coefficiente di x^2 è negativo, è conveniente cambiare tutti i segni**)
$x(x-2)=0$
$x=0$ NON ACCETTABILE; $\boxed{x=2}$

7) $\frac{2}{5}x=\frac{3}{2}x^2$
$4x=15x^2$ (NOTA 1)
$15x^2-4x=0$ (NOTA 2)
$x(15x-4)=0$
$x=0 \vee x=4/15$

NOTA 1
Abbiamo moltiplicato per 10 per sbarazzarci dei denominatori

NOTA 2
Qui, allo scopo di far sì che x^2 avesse subito coefficiente positivo, abbiamo portato tutto a 2° membro, e simultaneamente abbiamo scambiato i due membri fra loro

ESERCIZI

8) $x^2-4x=0$ **9)** $x^2-4=0$ **10)** $-4x^2=0$ **11)** $x^2+4=0$ **12)** $x^2+4x=0$
13) $x^2-3=0$ **14)** $x^2+3=0$ **15)** $x^2=3x$ **16)** $4x^2-3x=0$ **17)** $4x^2-3=0$
18) $x^2=\frac{1}{2}x$ **19)** $\frac{3}{4}x=\frac{6}{7}x^2$ **20)** $1-\frac{1}{9}x^2=0$ **21)** $-\frac{1}{9}x^2=0$ **22)** $\frac{1}{3}x^2=-3x$
23) $25-16x^2=0$ **24)** $25+16x^2=0$ **25)** $25x+16x^2=0$ **26)** $3x^2=2$ **27)** $7x=6x^2$
28) $15x^2-30=0$ **29)** $15x^2-30x=0$ **30)** $(x+1)^2=1$ **31)** $(x+1)^2=2x$ **32)** $(x+1)^2=x+1$

SOLUZIONI (l'insieme delle soluzioni è indicato con *S*)

8) $S=\{0,4\}$ **9)** $S=\{-2,2\}$ **10)** $S=\{0\}$ **11)** $S=\varnothing$ **12)** $S=\{0,-4\}$
13) $S=\{-\sqrt{3},+\sqrt{3}\}$ **14)** $S=\varnothing$ **15)** $S=\{0,3\}$ **16)** $S=\{0,3/4\}$ **17)** $S=\{-\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2\}$
18) $S=\{0,1/2\}$ **19)** $S=\{0,7/8\}$ **20)** $S=\{-3,3\}$ **21)** $S=\{0\}$ **22)** $S=\{0,-9\}$
23) $S=\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\}$ **24)** $S=\varnothing$ **25)** $S=\{0,-\frac{25}{16}\}$ **26)** $S=\{-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\}$ **27)** $S=\{0,\frac{7}{6}\}$
28) $S=\{-\sqrt{2},+\sqrt{2}\}$ **29)** $S=\{0,2\}$ **30)** $S=\{0,-2\}$ **31)** $S=\varnothing$ **32)** $S=\{0,-1\}$

L'EQUAZIONE DI 2° GRADO COMPLETA

Per risolvere un'equazione completa, si può:

a) scomporre in fattori ed applicare la **legge di annullamento del prodotto**:

$$x^2-13x-30=0$$
$$(x-15)(x+2)=0$$
$$x=15 \vee x=-2$$

b) oppure utilizzare il **"metodo del completamento del quadrato"**:

$$4x^2-12x+3=0$$
$$4x^2-12x+9-6=0$$
$$(2x-3)^2=6$$
$$2x-3=\pm\sqrt{6}\begin{cases}2x-3=\sqrt{6}; & x=\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}\\ 2x-3=-\sqrt{6}; & x=\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}\end{cases}$$

In realtà, questo metodo è rarissimamente utilizzato e lo presentiamo soltanto perché si utilizza per "costruire" la formula risolutiva di cui al successivo punto c)

c) oppure ancora, servirsi della seguente **formula risolutiva**:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ **FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE** $ax^2+bx+c=0$

Esempio di applicazione della formula:

$$3x^2+x-2=0 \quad (a=3,\ b=1,\ c=-2)$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{-1\pm5}{6}=\begin{cases}\dfrac{-1-5}{6}=-\dfrac{6}{6}=-1\\ \dfrac{-1+5}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

La formula considerata è valida anche per le equazioni incomplete;
per queste ultime, però, sono di gran lunga più veloci i metodi "specifici" visti in precedenza.

Come è stata ricavata la formula risolutiva?

Sostanzialmente, applicando all'equazione "generale" $ax^2+bx+c=0$ il metodo del *completamento del quadrato*.
Si tratta di trovare la maniera di far comparire, a primo membro, un quadrato di binomio della forma $(x+...)^2$.

Ecco i passaggi:

$$ax^2+bx+c=0; \qquad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0; \qquad x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=0;$$

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0; \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a};$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}; \qquad x+\frac{b}{2a}\underset{\text{NOTA 1}}{=}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}};$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\underset{\text{NOTA 2}}{=}-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

NOTA 1
Questo passaggio vale a condizione che la quantità di cui si vuole estrarre la radice sia ≥ 0.
Poiché il denominatore $4a^2$ è positivo in quanto è un quadrato, in definitiva dovrà essere $b^2-4ac\geq 0$ perché il passaggio sia effettuabile.
A dire il vero, dopo l'introduzione dei cosiddetti "numeri complessi", questo vincolo di positività verrà a cadere …

NOTA 2
Nell'estrarre il fattore ci vorrebbero le stanghette di valore assoluto, ma sono rese superflue dalla presenza del doppio segno.

Il "DELTA" E IL NUMERO DI SOLUZIONI

La quantità b^2-4ac che sta sotto radice quadrata nella formula risolutiva, è chiamata "delta" o "discriminante" e indicata col simbolo Δ (la lettera greca "*delta*" maiuscola).

Sono possibili tre casi:

- **se $\Delta>0$, l'equazione ha due soluzioni distinte**
- **se $\Delta=0$, l'equazione ha una sola soluzione (si può anche dire che ha "due soluzioni coincidenti")**
- **se $\Delta<0$, l'equazione non ha nessuna soluzione (= è impossibile)**

ESERCIZI SVOLTI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE

1) $6(x^2+1)=x(x-13)$ *Svolgo i calcoli...*

$6x^2+6=x^2-13x$ *... e ora, dato che l'equazione è completa, porto tutto a primo membro*

$6x^2+6-x^2+13x=0$ *... dopodiché, riduco i termini simili scrivendoli nell'ordine corretto*

$5x^2+13x+6=0$ *Posso a questo punto applicare la formula:*

$$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot5\cdot6}}{2\cdot5}=\frac{-13\pm\sqrt{169-120}}{10}=\frac{-13\pm\sqrt{49}}{10}=\frac{-13\pm7}{10}=\begin{cases}\frac{-13-7}{10}=-\frac{20^{2}}{10}=-2\\ \frac{-13+7}{10}=-\frac{6^{3}}{10_{5}}=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

2) $16x^2+25=40x$

$16x^2-40x+25=0$ *Nel calcolo del* $\Delta=b^2-4ac$*, è indifferente se si prende* $-b$ *anziché* b*!* $b^2-4ac=(-b)^2-4ac$

$$x_{1,2}=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot16\cdot25}}{32}=\frac{40\pm\sqrt{1600-1600}}{32}=\frac{40\pm0}{32}=\frac{40^{5}}{32_{4}}=\frac{5}{4}$$

Risoluzione più "brillante":

$16x^2-40x+25=0$

$(4x-5)^2=0$

$x=\frac{5}{4}\quad\left(x_1=x_2=\frac{5}{4}\right)$

3) $-\frac{1}{15}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}=\frac{2}{3}$

$\frac{-x^2+5x+3}{15}=\frac{10}{15}$

$-x^2+5x-7=0$

$x^2-5x+7=0$ (NOTA)

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-28}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{-3}}{2}$ IMP. $(\Delta<0)$

NOTA:

♥ **quando il coefficiente di x^2 è < 0, è davvero conveniente cambiare tutti i segni!**

4) $12-x=x^2$

$x^2+x-12=0$ **(per avere immediatamente il 1° coefficiente positivo, ho portato tutto a 2° membro, e scambiato i membri fra loro)**

$(x-3)(x+4)=0$ (NOTA)

$x=3\vee x=-4$

Verifica che le soluzioni trovate sono corrette, sostituendole nell'uguaglianza iniziale!

NOTA:

♥ **quando la risoluzione per fattorizzazione è facile, è la via più rapida e comoda**

ESERCIZI (alcuni si prestano, volendo, all'applicazione dalla "formula ridotta" di cui alla pag. seguente)

5) $15x^2-22x+8=0$ **6)** $12x^2+7x-12=0$ **7)** $x^2-4x-5=0$ **8)** $x^2-4x+5=0$

9) $x^2-4x+4=0$ **10)** $x^2+19x+90=0$ **11)** $x^2+8x-2=0$ **12)** $3x(2-3x)=1$

13) $15x=2(x^2+11)$ **14)** $3(x^2+4)=7x$ **15)** $13x^2+40x+27=0$ **16)** $(23x-11)(19x-31)=0$

17) $5x^2+4x+1=0$ **18)** $4x^2+4x+1=0$ **19)** $3x^2+4x+1=0$ **20)** $2x^2+4x+1=0$

21) $2-\frac{2}{3}x=\frac{1}{6}x^2$ **22)** $x=\frac{(x+3)(x-3)}{8}$ **23)** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{32}=\frac{9}{4}x^2-\frac{x}{32}$ **24)** $(2x-3)^2=(x-2)^2$

SOLUZIONI (l'insieme delle soluzioni è indicato con *S*)

5) $S=\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right\}$ **6)** $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{3}{4}\right\}$ **7)** $S=\{-1,5\}$ **8)** $S=\varnothing$

9) $S=\{2\}$ **10)** $S=\{-10,-9\}$ **11)** $S=\left\{-4-3\sqrt{2},-4+3\sqrt{2}\right\}$ **12)** $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

13) $S=\left\{2,\frac{11}{2}\right\}$ **14)** $S=\varnothing$ **15)** $S=\left\{-\frac{27}{13},-1\right\}$ **16)** $S=\left\{\frac{11}{23},\frac{31}{19}\right\}$

17) $S=\varnothing$ **18)** $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **19)** $S=\left\{-1,-\frac{1}{3}\right\}$ **20)** $S=\left\{\frac{-2-\sqrt{2}}{2},\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right\}$

21) $S=\{-6,2\}$ **22)** $S=\{-1,9\}$ **23)** $S=\left\{\frac{1}{8},\frac{1}{9}\right\}$ **24)** $S=\left\{1,\frac{5}{3}\right\}$

LA FORMULA "RIDOTTA"

Nel caso in cui b sia pari, è conveniente applicare, al posto della formula generale, la seguente variante, detta **"formula ridotta":**

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$ **LA FORMULA RIDOTTA (conveniente quando b è pari)**

Ecco i passaggi coi quali la formula "ridotta" si può ricavare da quella generale.

$$ax^2+bx+c=0 \quad con\ b\ pari: \boxed{b=2b'} \quad (b'=b/2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2-4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4\left(b'^2-ac\right)}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a} = \boxed{\frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$

Ed ecco qualche esempio di applicazione della formula ridotta.

Esempio 1: $7x^2+24x-16=0 \quad b=24$, PARI!

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2-7\cdot(-16)}}{7} =$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144+112}}{7} = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{7} = \frac{-12 \pm 16}{7} = \begin{cases} \frac{-28}{7} = -4 \\ \frac{4}{7} \end{cases}$$

♥ Imparare la formula ridotta non è "indispensabile", ma è davvero UTILISSIMO perché rende i calcoli molto, ma molto più semplici, rapidi e piacevoli.

Esempio 2: $(2x-3)^2 = 2x$

$$4x^2-12x+9=2x$$
$$4x^2-14x+9=0$$
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{4}$$

Esempio 3: $x^2 = 4(x+2)$

$$x^2 = 4x+8$$
$$x^2-4x-8=0$$
$$x_{1,2} \underset{\text{RIDOT-TISSIMA}}{=} 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm \sqrt{12} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

La formula ridotta, se applicata nel caso $a = 1$, non richiede neppure di scrivere la linea di frazione (infatti il denominatore sarebbe 1).
Alcuni parlano di formula "**ridottissima**" per indicare, appunto, la **ridotta nel caso particolare $a = 1$**.

Esempio 4:

$$\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{\frac{1-2x}{1+2x+x^2}}{(1-x)^2} = 0$$
$$\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1-2x}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = 0$$
$$\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1-2x}{(1+x)^2(1-x)^2} = 0$$
$$\frac{(1-x)^2-2(1-2x)}{2(1+x)^2(1-x)^2} = 0 \quad (x \neq \pm 1)$$
$$1-2x+x^2-2+4x = 0$$
$$x^2+2x-1=0$$
$$x_{1,2} \underset{\text{RIDOT-TISSIMA}}{=} -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2} \approx \begin{cases} -1-1{,}4 = -2{,}4 \\ -1+1{,}4 = 0{,}4 \end{cases}$$

IL "DELTA QUARTI"

Nella formula ridotta, sotto radice non troviamo più la quantità $\Delta = b^2-4ac$, sostituita da $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

che ne è poi la *quarta parte*: infatti $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{b^2}{4} - ac = \frac{b^2-4ac}{4} = \frac{\Delta}{4}$

♥ **Il "delta della ridotta"** è perciò chiamato **"DELTA QUARTI"** e indicato, appunto, col simbolo $\frac{\Delta}{4}$:

$$\boxed{\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$$

EQUAZIONI DI 2° GRADO CON COEFFICIENTI IRRAZIONALI

1) $(-2x)^2-(x+3)^2=6(\sqrt{2}-x)$

$4x^2-x^2-6x-9=6\sqrt{2}-6x$

$3x^2=9+6\sqrt{2}$

$x^2=3+2\sqrt{2}$

$x=\pm\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\pm\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\pm(\sqrt{2}+1)$

2) $x(x+4\sqrt{6})=126;\quad x^2+4x\sqrt{6}=126;$

$x^2+4x\sqrt{6}-126=0$

$x_{1,2}\ \underset{\text{con la formula RIDOTTA}}{=}\ -2\sqrt{6}\pm\sqrt{(2\sqrt{6})^2+126}=$

$=-2\sqrt{6}\pm\sqrt{24+126}=-2\sqrt{6}\pm\sqrt{150}=$

$=-2\sqrt{6}\pm\sqrt{25\cdot 6}=-2\sqrt{6}\pm 5\sqrt{6}=\begin{cases}-7\sqrt{6}\\ 3\sqrt{6}\end{cases}$

3) $x^2+2\sqrt{5}(5-2x)=2(2x-9)$

Svolgiamo innanzitutto i calcoli, trasportiamo e ordiniamo per portare sotto la forma $ax^2+bx+c=0$ ... (NOTA)

$x^2+10\sqrt{5}-4x\sqrt{5}=4x-18$

$x^2-4x\sqrt{5}-4x+18+10\sqrt{5}=0$

$\boxed{x^2-4(\sqrt{5}+1)x+2(9+5\sqrt{5})=0}$

... e a questo punto applichiamo la formula (*ridotta con* $a=1$, *quindi "ridottissima"*), *con coefficienti*

$\boxed{a=1\quad b=-4(\sqrt{5}+1)\quad c=2(9+5\sqrt{5})}$:

$x_{1,2}=2(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{[2(\sqrt{5}+1)]^2-2(9+5\sqrt{5})}=$

$=2(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{4(\sqrt{5}+1)^2-18-10\sqrt{5}}=$

$=2(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{4(5+1+2\sqrt{5})-18-10\sqrt{5}}=$

$=2\sqrt{5}+2\pm\sqrt{24+8\sqrt{5}-18-10\sqrt{5}}=$

$=2\sqrt{5}+2\pm\sqrt{6-2\sqrt{5}}=$

$=2\sqrt{5}+2\pm\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=$

$=2\sqrt{5}+2\pm(\sqrt{5}-1)=\begin{cases}2\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+1=\sqrt{5}+3\\ 2\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-1=3\sqrt{5}+1\end{cases}$

♥ NOTA

Si porta tutto a primo membro:
prima i termini con x^2,
poi i termini con x,
infine gli altri (termini noti).
Se i termini contenenti x^2 sono più d'uno,
fra essi si raccoglie x^2;
se i termini contenenti x sono più d'uno,
fra essi si raccoglie x.

Avrai osservato che è nostra abitudine,
quando ci serviamo della formula,
applicarla sempre

♪ PRIMA col "–"
♫ e POI col "+".

Ciò è conveniente perché in tal modo,
se, come di norma accade,
il *denominatore* è *positivo*,
la soluzione ricavata *per prima*
sarà la *minore* fra le due;
ossia, ci ritroveremo automaticamente
le due soluzioni
ordinate per valori crescenti.

E questo ci farà comodo,
in particolare,
quando dalle equazioni di 2° grado
passeremo alle *disequazioni*.

4) $3(x-1)(\sqrt{3}+1)=2x^2$

$3(x\sqrt{3}+x-\sqrt{3}-1)=2x^2;\qquad 3x\sqrt{3}+3x-3\sqrt{3}-3=2x^2;$

$-2x^2+3x\sqrt{3}+3x-3\sqrt{3}-3=0;\qquad 2x^2-3x\sqrt{3}-3x+3\sqrt{3}+3=0$

$\boxed{2x^2-3x(\sqrt{3}+1)+3(\sqrt{3}+1)=0}\qquad \boxed{\text{Ci siamo!}\quad a=2,\quad b=-3(\sqrt{3}+1),\quad c=3(\sqrt{3}+1)}$

$x_{1,2}=\dfrac{3(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{9(\sqrt{3}+1)^2-24(\sqrt{3}+1)}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\pm\sqrt{9(3+1+2\sqrt{3})-24\sqrt{3}-24}}{4}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3}+3\pm\sqrt{36+18\sqrt{3}-24\sqrt{3}-24}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\pm\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\pm\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}}{4}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3}+3\pm(3-\sqrt{3})}{4}=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{3}+3-3+\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\\ \dfrac{3\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2\sqrt{3}+6}{4}=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}\end{cases}$

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO

INCOMPLETE: 1) $5-3x=\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2$ 2) $(2x-1)(2x+1)=6$ 3) $x^2+9=0$ 4) $28-21x^2=0$

5) $\left(\frac{1}{3}x+1\right)^2=1$ 6) $\frac{x}{4}=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}x-2\right)$ 7) $(2x-3)^2-(2-3x)^2=0$ 8) $2+\frac{1}{6}x-\frac{x}{2}=\frac{2}{3}x\left(\frac{x}{4}-0{,}5\right)$

9) $\left(\frac{1}{3}x-2\right)^2=\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$ 10) $-4x^2=0$ 11) $\frac{1}{4}(x^2-2x)=\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)$ 12) $\frac{3}{5}(x-1)=\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{5}$

13) $2+\frac{1}{6}x^2=\frac{x^2}{2}$ 14) $(2x-1)(2x+1)+4=0$ 15) $\frac{1}{3}x(x-1)+\frac{1}{4}=\frac{3-x}{3}$ 16) $\frac{x^2+1}{4}=\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+x$

COMPLETE: 17) $5x^2+9x-2=0$ 18) $x^2=110+x$ 19) $9x=7x^2+1$ 20) $36x^2+1=12x$ 21) $2(x-1)=x^2$

22) $2x^2+x=1$ 23) $x^2+\frac{11}{6}x+\frac{1}{2}=0$ elimina prima i denominatori 24) $\frac{3}{2}x^2=\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}$ 25) $x=\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{5}$ 26) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2=\frac{x}{4}$

ESERCIZI VARI (clicca sulla freccia per la correzione):

27) $(x+7)(x-7)+3(x+13)=0$ ⇨ 28) $2(x+2)=x(5x+1)$ ⇨ 29) $9x(x-2)+x(x-1)+6=0$

30) $2x(x+3)=(3x+1)(3x-1)$ ⇨ 31) $7(3-x)=16-(5+x)(5-x)$

32) $(x+9)^2-\left[(x+1)^2+(x+8)^2\right]=0$ ⇨ 33) $(2x+1)^2+8=(4x-3)^2$ ⇨ 34) $3x(3x-8)=-16$ ⇨

35) $(x+3)^2=(x+2)^2+(x+4)^2$ ⇨ 36) $4(4+x)=(x+2)^2$ 37) $\frac{1}{4}x^2-\frac{11}{24}x+\frac{1}{6}=0$ ⇨

38) $\frac{5}{4}x^2-\frac{x(x-5)}{2}=0$ ⇨ 39) $\frac{(x+1)^2}{14}=\frac{x+5}{7}$ 40) $\frac{1}{6}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{12}x^2+\frac{x}{3}$ 41) $x=\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2$ ⇨

42) $\frac{1}{8}\left[\frac{(4x-1)(4x+1)}{2}+4x+1\right]=x$ ⇨ 43) $\frac{(x+2)^2-1}{2}=(2x-3)(2x+3)+5$ ⇨ 44) $\frac{x(2x+3)}{5}+\frac{x+1}{6}=0$

45) $2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x}{x+1}$ ⇨ 46) $\frac{3x+4}{x^2+1}=4$ ⇨ 47) $\frac{x}{x-3}+\frac{4}{x-1}=2$ 48) $\frac{x-1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{6}{x^2-3x}$ ⇨

49) $\frac{x+5}{x}-\frac{x+4}{x-5}=-\frac{29}{x^3-5x^2}$ ⇨ 50) $\frac{x^2-2}{2x}+\frac{1-x}{3x}+1=0$ 51) $\frac{x}{\frac{x-1}{x}}+x=1$ ⇨ 52) $\frac{3x^2}{2x+1}+1=2x$

53) $\frac{x}{x-4}-2=\frac{x+4}{x}$ 54) $\frac{x^2+9}{x}=6$ 55) $\frac{x+1}{x^2+2x-8}=-\frac{1}{x^2-6x+8}$

56) $x-2=-\frac{2}{x+1}$ 57) $\frac{(x+2)^2}{x}=4$ ⇨ 58) $\frac{9}{x}+\frac{x}{9}=2$ 59) $\frac{2x+1}{6x+9}=\frac{2x-3}{4x-2}$ ⇨

60) $\frac{x}{x^2-4}=2\frac{x}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}$ 61) $\frac{4\cdot\left(1+\frac{x}{x+1}\right)}{x-2}=\frac{x+2}{2x^2+x-1}$ ⇨

SOLUZIONI

1) $\pm\frac{4}{3}$ 2) $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 3) *imposs.* 4) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 5) $0;-6$ 6) $0;\frac{15}{2}$ 7) ±1 8) $\pm2\sqrt{3}$ 9) ±2 10) $0;0$

11) $0;-8$ 12) $0;\frac{9}{10}$ 13) $\pm\sqrt{6}$ 14) *imposs.* 15) $\pm\frac{3}{2}$ 16) $0;0$ 17) $-2;\frac{1}{5}$ 18) $-10;11$ 19) $\frac{9\pm\sqrt{53}}{14}$

20) $\frac{1}{6};\frac{1}{6}$ 21) *imposs.* 22) $-1;\frac{1}{2}$ 23) $-\frac{3}{2};-\frac{1}{3}$ 24) $-\frac{1}{3};\frac{3}{5}$ 25) $\frac{2}{5};\frac{2}{5}$ 26) *imposs.*

27) $-5;2$ 28) $-\frac{4}{5};1$ 29) $\frac{2}{5};\frac{3}{2}$ 30) $-\frac{1}{7};1$ 31) $-10;3$ 32) ±4 33) $0;\frac{7}{3}$ 34) $\frac{4}{3};\frac{4}{3}$ 35) *imposs.*

36) $\pm2\sqrt{3}$ 37) $\frac{1}{2};\frac{4}{3}$ 38) $0;-\frac{10}{3}$ 39) ±3 40) $-2;4$ 41) $\frac{1}{9};1$ 42) $\frac{1}{4};\frac{1}{4}$ 43) $-1;\frac{11}{7}$

44) $-5/3;-1/4$ 45) $-1/2;$ ~~-1~~ *non acc.* 46) $0;\ 3/4$ 47) $2;\ 9$ 48) $5;$ ~~3~~ *non acc.*

49) $-29/4;\ 1$ 50) $-2;\ 2/3$ 51) *imposs.* 52) ±1 53) $2\pm2\sqrt{3}$ 54) $3;\ 3$

55) $0;$ ~~2~~ *non acc.* 56) $0;\ 1$ 57) *imposs.* 58) $9;\ 9$ 59) $\pm5/2$ 60) $2\pm\sqrt{6}$ 61) $0;\ 0$

62) $\dfrac{x+2}{x^2+5x-24}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}=0$ 63) $\dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x^3+2x^2-x-2}-\dfrac{1}{x^2+3x+2}=0$ 64) $\dfrac{3x}{2x^2-5x+2}(x-1)-\dfrac{1}{4x-2}=0$

65) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x^2+x-2}-\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x+1}$ Stranamente, parecchi studenti sbagliano affrontando questa equazione … ⇨

66) $\dfrac{6}{x^3-3x^2-9x+27}-\dfrac{x+2}{x^3-5x^2+3x+9}=0$ Il 2° denominatore si scompone col metodo di Ruffini ⇨

67) $\dfrac{x-4}{x^3-5x^2+8x-4}+\dfrac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=0$ I due denominatori si scompongono col metodo di Ruffini

68) $3,71x^2+2,213x-5,88=0$ con la calcolatrice 69) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=1+\dfrac{30}{x^2-9}$

70) $\dfrac{1}{x-\frac{6}{x}+1}-\dfrac{x+1}{x^3-2x^2-9x+18}=0$ 71) $\dfrac{4}{x^3-1}=\dfrac{x-1}{x^3+2x^2+2x+1}$ ⇨ 72) $\dfrac{1}{x+\frac{2}{x}+3}+2\cdot\dfrac{\frac{2}{x+2}-1}{x-1}=0$

Con COEFFICIENTI IRRAZIONALI:

73) $x^2+4=3x\sqrt{2}$ ⇨ 74) $2x\left(\sqrt{2}-x\right)=1$ ⇨ 75) $\left(x\sqrt{3}-1\right)\left(2x\sqrt{3}-1\right)=0$ ⇨

76) $9x^2+2\sqrt{3}=4$ ⇨ 77) $9x^2+2\sqrt{3}=5$ 78) $9x^2+2\sqrt{3}=3$ ⇨ 79) $x^2-\sqrt{7}=0$ 80) $x^2+\sqrt{7}=0$

81) $(x+4)\cdot\dfrac{x-4}{x-1}-2\cdot\dfrac{x+2\sqrt{6}}{1-x}=2$ ⇨ 82) $\dfrac{x+1}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{4}{x-1}$ 83) $\dfrac{2-(1-x)(1+x)}{4}=2-\sqrt{3}$

84) $2x^2-3x\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=0$ ⇨ 85) $4x^2-4x\left(\sqrt{2}+1\right)+2\sqrt{2}-5=0$ 86) $2\left(\sqrt{2}+1\right)(x-1)=x^2$

87) $3x+\sqrt{3}(3x-5)=x^2+8$ ⇨ 88) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{x}(x+1)=\dfrac{1}{2x}-1$ 89) $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)x-\sqrt{3}}=2$

90) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x-3}{x}\sqrt{2}=1+\dfrac{3}{x}$ 91) $x^2=-\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)(2x+1)}{2}$ 92) $3x^2\sqrt{2}+x(3x-1)=2x$ ⇨ 93) $2\left(x^2+\sqrt{2}\right)=\sqrt{7}$

94) $\dfrac{x^2-\left(\sqrt{48}-2\right)x+13}{\sqrt{48}}=1$ 95) $x\left(\sqrt{3}-1-x\right)+2=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ *Il Δ qui è difficile ... comunque, è il quadrato di un trinomio!*

SOLUZIONI

62) $-3;\ 4$ 63) $2;\ \cancel{-1}$ *non acc.* 64) $\frac{2}{3};\ \cancel{\frac{1}{2}}$ *non acc.* 65) $-\frac{1}{2};\ \cancel{1}$ *non acc.*

66) $0;\ 1$ 67) $0;\ \frac{5}{2}$ 68) *circa* $0,996$; *circa* $-1,592$ 69) $\pm\sqrt{3}$

70) $2\pm\sqrt{5}$ 71) $3\pm2\sqrt{3}$ 72) $-3;\ \cancel{0}$ *non acc.* 73) $\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}$ 74) $\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

75) $\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{6}$ 76) $\pm\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ 77) $\pm\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{3}$ 78) *imposs.*

79) $\pm\sqrt[4]{7}$ 80) *imposs.* 81) $\pm\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ 82) $\pm\left(3-2\sqrt{2}\right)$

83) $\pm\left(2-\sqrt{3}\right)$ 84) $\frac{\sqrt{2}-1}{2};\ \sqrt{2}+2$ 85) $\frac{1-\sqrt{2}}{2};\ \frac{3\sqrt{2}+1}{2}$ 86) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}+2$

87) $\sqrt{3}+2;\ 2\sqrt{3}+1$ 88) $\sqrt{2}-3;\ \sqrt{2}+1$ 89) $\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+3$ 90) $2-\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}$

91) $-\frac{\sqrt{5}+3}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 92) $0;\ \sqrt{2}-1$ 93) *imposs.* 94) $2\sqrt{3}-1,\ 2\sqrt{3}-1$ 95) $\sqrt{2};\ \sqrt{3}-\sqrt{2}-1$

2. EQUAZIONI DI 2° GRADO LETTERALI

1) $\boxed{3x^2-25kx+8k^2=0}$

Si tratta di un'equazione di 2° grado "letterale", o "parametrica".
x è l'incognita, mentre k è un numero noto, che va a far parte dei coefficienti.
I $\boxed{\text{coefficienti}}$ *di questa equazione sono dunque:* $\boxed{a=3}$ $\boxed{b=-25k}$ $\boxed{c=8k^2}$

$$\boxed{x_{1,2}=}\ \frac{25k\pm\sqrt{625k^2-96k^2}}{6}=\frac{25k\pm\sqrt{529k^2}}{6}=\frac{25k\pm 23k}{6}=\begin{cases}\dfrac{25k-23k}{6}=\dfrac{2k}{6}=\boxed{\dfrac{1}{3}k}\\[2ex]\dfrac{25k+23k}{6}=\dfrac{48k}{6}=\boxed{8k}\end{cases}$$

(NOTA)

Anche per FATTORIZZAZIONE:

$3x^2-25kx+8k^2=0$
$3x^2-kx-24kx+8k^2=0$
$x(3x-k)-8k(3x-k)=0$
$(3x-k)(x-8k)=0$
$3x-k=0 \quad\vee\quad x-8k=0$
$x=\dfrac{k}{3}=\boxed{\dfrac{1}{3}k} \qquad x=\boxed{8k}$

NOTA
Per la precisione, sarebbe
$\sqrt{529k^2}=23|k|$;
ma il valore assoluto è reso inutile
dalla presenza del doppio segno $\pm$.
Si deve comunque osservare che in questo modo,
ogniqualvolta il parametro assumesse un valore NEGATIVO,
la soluzione che abbiamo scritto per prima
NON risulterebbe più la *minore* tra le due.

2) $(x-a)^2+a(a+2b)=(a+b)^2$ *Qui evidentemente i parametri "a" e "b" dell'esercizio non vanno confusi con le lettere "a" e "b" della teoria!*

$x^2-2ax+\cancel{a^2}+a^2+\cancel{2ab}=\cancel{a^2}+\cancel{2ab}+b^2$
$x^2-2ax+a^2-b^2=0$
$\boxed{x^2-2ax+(a^2-b^2)=0}$ $\boxed{1°\ coeff.=1;\ \ 2°\ coeff.=-2a;\ \ 3°\ coeff.=a^2-b^2}$

$$x_{1,2}\underset{\text{con la RIDOTTA}}{=}a\pm\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}=a\pm\sqrt{\cancel{a^2}\cancel{-a^2}+b^2}=a\pm b=\begin{cases}\boxed{a-b}\\ \boxed{a+b}\end{cases}$$

NOTA
♥ In un'equazione di 2° grado letterale, in generale occorre
1) svolgere i calcoli
2) portare tutto a 1° membro
3) ordinare (termini con x^2; termini con x; costanti)
4) raccogliere x^2
fra tutti i termini che contengono x^2
(in questo caso, però, ce n'è uno solo)
5) raccogliere x
fra tutti i termini che contengono x
6) … e a questo punto applicare la formula.

3) $x^2+3(x+2m^2)+2=m(5x+7)$

(NOTA)

$x^2+3x+6m^2+2=5mx+7m$
$x^2+3x-5mx+6m^2-7m+2=0$
$\boxed{x^2+(3-5m)x+(6m^2-7m+2)=0}$

$$x_{1,2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{(3-5m)^2-4(6m^2-7m+2)}}{2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{9-30m+25m^2-24m^2+28m-8}}{2}=$$

$$=\frac{-3+5m\pm\sqrt{m^2-2m+1}}{2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{(m-1)^2}}{2}=\frac{-3+5m\pm(m-1)}{2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-3+5m-m+1}{2}=\dfrac{4m-2}{2}=\dfrac{\cancel{2}(2m-1)}{\cancel{2}}=\boxed{2m-1}\\[2ex]\dfrac{-3+5m+m-1}{2}=\dfrac{6m-4}{2}=\dfrac{\cancel{2}(3m-2)}{\cancel{2}}=\boxed{3m-2}\end{cases}$$

EQUAZIONI … CON LA "CODA"



4)

$(x+1)\left[a(x-2)+3\right]+2a=2x(x+2)$

$(x+1)\left[ax-2a+3\right]+2a=2x^2+4x \qquad ax^2\underline{-2ax}\ \underline{+3x}\ \underline{+ax}\ \cancel{-2a}+3\cancel{+2a}=2x^2\underline{+4x} \qquad ax^2-2x^2-ax-x+3=0$

$\boxed{(a-2)x^2-(a+1)x+3=0}$

$x_{1,2}\underset{\boxed{a\neq 2}}{=}\dfrac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-12(a-2)}}{2(a-2)}$ NOTA: *nel calcolo del* $\Delta=b^2-4ac$, *per via dell'esponente* 2 *è indifferente usare* $-b$ *anziché* b! $b^2-4ac=(-b)^2-4ac$

L'applicazione della formula comporta in questo caso la divisione per la quantità $2(a-2)$.
Ma una divisione è effettuabile soltanto a patto che il numero per cui si intende dividere sia diverso da 0.
Pertanto, la catena $x_{1,2}=\ldots$ *vale a condizione che sia* $2(a-2)\neq 0$, *ossia* $a\neq 2$.
Il caso particolare $a=2$ *andrà valutato a parte; ce ne occuperemo in coda all'esercizio.*

$$x_{1,2}\underset{a\neq 2}{=}\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-12(a-2)}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm\sqrt{a^2+2a+1-12a+24}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm\sqrt{a^2-10a+25}}{2(a-2)}=$$

$$=\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a-5)^2}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm(a-5)}{2(a-2)}=\ldots\quad x_1=\boxed{\frac{3}{a-2}},\ x_2=\boxed{1}$$

CODA: COSA ACCADE NEL CASO $\boxed{a=2}$ PROVVISORIAMENTE LASCIATO DA PARTE ?

Con $a=2$ *non è possibile applicare la formula (si otterrebbe infatti una divisione per* 0, *che non ha senso*!).
Abbandoniamo dunque, per quanto riguarda il caso $a=2$, *l'uso della formula e chiediamoci direttamente cosa diventa l'equazione, quando al parametro a si attribuisce il valore* 2. *Essa diventa*

$\cancel{(2-2)x^2}-(2+1)x+3=0; \qquad -3x+3=0; \qquad -3x=-3; \qquad x=1$

Abbiamo quindi scoperto che nel caso particolare $a=2$ *l'equazione si abbassa di grado (non è più di secondo grado, ma di primo) e ammette una sola soluzione*: $x=1$.

Ricapitolando, l'equazione data possiede in generale due soluzioni, e precisamente $x_1=\dfrac{3}{a-2};\ x_2=1$
e soltanto nel caso particolare $a=2$ *si abbassa di grado,*
"perdendo" una soluzione e "conservando" come $\boxed{\text{unica soluzione } x=1}$.

5)

$$\underset{k(x+1)}{\frac{x}{kx+k}}+\underset{(x+1)(x+2)}{\frac{k}{x^2+3x+2}}=2\cdot\frac{1}{x+2}$$

$\dfrac{x(x+2)+k^2}{\cancel{k(x+1)(x+2)}}=\dfrac{2k(x+1)}{\cancel{k(x+1)(x+2)}}$ $\boxed{k\neq 0}$ COND. PRELIMINARE: questa equazione NON ha significato con $k=0$!

$\boxed{x\neq -1,\ x\neq -2}$ CONDIZIONI DI ACCETTABILITA'

$x^2+2x+k^2=2kx+2k; \qquad x^2+2x-2kx+k^2-2k=0$

$x^2-2(k-1)x+k^2-2k=0$

$$x_{1,2}=k-1\pm\sqrt{(k-1)^2-(k^2-2k)}=k-1\pm\sqrt{\cancel{k^2}-2k+1\cancel{-k^2}+2k}=k-1\pm 1=\begin{cases}\boxed{k-2} & (x_1)\\ \boxed{k} & (x_2)\end{cases}$$

CODA (ESISTONO VALORI DEL PARAMETRO PER CUI UNA SOLUZIONE RISULTA NON ACCETTABILE, IN QUANTO UGUALE A -1 OPPURE A -2 ?)

x_1: $k-2=-1$ *con* $\boxed{k=1}$; $k-2=-2$ *con* $k=0$ (*però con* $k=0$ *l'eq. perde significato*!);

x_2: $k=-1$, *banalmente, con* $\boxed{k=-1}$; $k=-2$, *banalmente, con* $\boxed{k=-2}$

In definitiva, i valori $k=0$, $k=1$, $k=-1$, $k=-2$ *sono notevoli in quanto*:

con $k=0$ *l'equazione è priva di significato*
con $k=1$ *non è accettabile la soluzione* $k-2$, *mentre l'altra* (k) *è accettabile e vale* 1
con $k=-1$ *non è accettabile la soluzione* k, *mentre l'altra* $(k-2)$ *è accettabile e vale* -3
con $k=-2$ *non è accettabile la soluzione* k, *mentre l'altra* $(k-2)$ *è accettabile e vale* -4

ESERCIZIO A

Riprendi dal principio l'es. 4 e sostituisci $a=2$ *nell'eq. iniziale, poi risolvi.*

ESERCIZIO B

Fai lo stesso nell'esempio 5, con $k=-2$.

ESERCIZIO C

Verifica che per l'equazione

$\dfrac{mx(mx-2)}{2x-1}=2x+1$

si hanno 4 casi nei quali la soluzione è unica:

$m=2\ (x=1/4)$,
$m=-2\ (x=-1/4)$,
$m=0\ (x=-1/2)$,
$m=4\ (x=1/6)$.

ESERCIZI (EQUAZIONI LETTERALI DI 2° GRADO) Correzione degli esercizi "dispari" ⇨

1) $x(x+b)=6b^2$ 2) $x^2+(a-b)^2=2x(a-b)+1$ 3) $(x+a)^2-4(x+a)+3=0$

4) $\frac{x^2+c^2}{2}=cx+2c-2x$ 5) $2ax\left(2\sqrt{3}-3\right)=(x-3a)^2$ 6) $\frac{3x^2+m^2}{m}=\frac{7}{2}x$

7) $(x+b)^2-a(a+4b)=4a(x-a)$ 8) $kx^2-\left(k^3+1\right)x+k^2=0$ 9) $(a+1)x^2-2(a+2)x+(a+3)=0$

10) $(a^2-1)(x^2+1)-2x=2a^2x$ 11) $(m-1)x^2-m^2=m^2(x-2)$ 12) $(-x+a)^2+9=6(a-x)$

13) $a(ax-2)\cdot\frac{x}{x+1}+1=x$ 14) $\frac{kx(x-3)+3x+2k}{x^2-1}=2$ 15) $(k-5)x+\frac{k-3}{x}=2(k-4)$ 16) $\frac{x^2+m(x^2+1)-1}{x}=m^2$

17) $\frac{x}{2x-3}+3\cdot\frac{h^2}{(x-2)(2x-3)}=2\cdot\frac{h}{x-2}$ 18) $\frac{k(x^2+1)}{2x-2}-k\frac{x}{x-1}+x=0$ 19) $\frac{x}{x-q}+\frac{q^2-3}{x^2-3qx+2q^2}=\frac{2}{2q-x}$

20) $\frac{x^2+5}{(x-a)(2x-a)}+\frac{6}{2x-a}+\frac{a}{a-x}=0$ 21) $1+\frac{3a+1}{a(x-3)}+\frac{2x^2(a-1)}{(x-3)^2}+\frac{4}{a(x-3)^2}=0$ 22) $mx^2=\frac{(2m+1)x-1}{m+1}$

23) $m+2\frac{m^2-x}{x-m}-\frac{m}{x}\cdot\frac{3x+m}{x-m}=0$ 24) $b\frac{x}{x-1}+\frac{3x+b}{(x-1)(x-b)}+2\frac{x+1}{x-b}=0$ 25) $p(p+1)\left(x^2-1\right)+(2p+1)x=0$
[*il Δ è un quadrato di trinomio*]

SOLUZIONI

1) $x=-3b,\ x=2b$ 2) $x=a-b-1,\ x=a-b+1$ 3) $x=1-a,\ x=3-a$ 4) $x=c-4,\ x=c$

5) $x=a\sqrt{3},\ x=3a\sqrt{3}$ 6) $x=\frac{1}{2}m,\ x=\frac{2}{3}m\ (m\neq 0)$ 7) $x=a-b,\ x=3a-b$

8) *Con* $k\neq 0$: $x=\frac{1}{k},\ x=k^2$; *con* $k=0$: $x=0$ 9) *Con* $a\neq -1$: $x=1,\ x=\frac{a+3}{a+1}$. *Con* $a=-1$: $x=1$

10) *Con* $a\neq\pm 1$: $x=\frac{a-1}{a+1},\ x=\frac{a+1}{a-1}$; *con* $a=1\vee a=-1$: $x=0$ 11) *Con* $m\neq 1$: $x=\frac{m}{m-1},\ x=m$; *con* $m=1$: $x=1$ 12) $x=a-3,\ x=a-3$ [*soluzioni coincidenti*]

13) *Con* $a\neq\pm 1,\ a\neq -2,\ a\neq 0$: $x=\frac{1}{a+1},\ x=\frac{1}{a-1}$ *Con* $a=1$: $x=1/2$; *con* $a=-1$: $x=-1/2$; *con* $a=-2$: $x=-1/3$; *con* $a=0$: $x=1$

14) *Con* $k\neq 2,\ k\neq\frac{1}{2}$: $x=\frac{k+1}{k-2},\ x=2$; *con* $k=2$: $x=2$; *con* $k=\frac{1}{2}$: $x=2$ 16) $m\neq\pm 1\to x=\frac{1}{m+1},\ x=m-1$

15) *Con* $k\neq 5,\ k\neq 3$: $x=1,\ x=\frac{k-3}{k-5}$; *con* $k=5$: $x=1$; *con* $k=3$: $x=1$ $m=-1\to x=-2;\ m=1\to x=\frac{1}{2}$

17) $h\neq 0, h\neq\pm\frac{1}{2}, h\neq\frac{2}{3}\to x=h+2,\ x=3h.\ \ h=0\to x=0;\ \ h=-\frac{1}{2}\to x=-\frac{3}{2};\ \ h=\frac{2}{3}\to x=\frac{8}{3};\ \ h=\frac{1}{2}\to x=\frac{5}{2}$

18) $k\neq -2\to x=\frac{k}{k+2}$
$k=-2\to$ *equaz. impossibile*

19) *Con* $q\neq -3,\ q\neq 1$: $x=q-3, x=q+1$
Sia con $q=-3$ *che con* $q=1$ *si ha la sola soluzione* $x=-2$

20) $a\neq 10, a\neq 2$: $x=a-5, x=a-1$
$a=10\to x=9;\ a=2\to x=-3$

21) $a\neq 0,\ a\neq\frac{1}{2},\ a\neq\frac{2}{3},\ a\neq\frac{1}{3}\to x=\frac{1}{2a-1},\ x=\frac{1}{a}$;
$a=0\to$ *equaz. priva di significato*; $a=\frac{1}{2}\to x=2;\ a=\frac{2}{3}\to x=\frac{3}{2};\ a=\frac{1}{3}\to x=-3$

22) *Con* $m\neq 0,\ m\neq -1$: $x=\frac{1}{m+1},\ x=\frac{1}{m}$; *con* $m=0$: $x=1$; *con* $m=-1$: *priva di significato*

23) *Con* $m\neq 0,\ m\neq 2,\ m\neq 3$: $x=-m,\ x=\frac{m}{m-2}$. *Con* $m=0$: *imposs.*; *con* $m=2$: $x=-2$; *con* $m=3$: $x=-3$

24) $b\neq -2,\ b\neq -1,\ b\neq -1-\sqrt{2},\ b\neq -1+\sqrt{2},\ b\neq 3$: $x=\frac{1}{b+2},\ x=b-2$;
$b=-2\to x=-4;\ \ b=-1\to x=-3;\ \ b=3\to x=1/5;$
$b=-1-\sqrt{2}\to x=-3-\sqrt{2}\ ;\ \ b=-1+\sqrt{2}\to x=-3+\sqrt{2}$

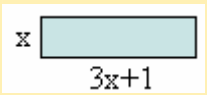
25) *Con* $p\neq 0,\ p\neq -1$: $x=-\frac{p+1}{p},\ x=\frac{p}{p+1}$; *con* $p=0$: $x=0$; *con* $p=-1$: $x=0$

APPROFONDIMENTO: DAL SITO INTERNET http://mathforum.org/dr.math/

Date: 03/07/97 at 20:49:53 From: Caitlin
Subject: SOLVING QUADRATIC EQUATIONS

A certain rectangle has an area of 80 square units. Its length is one more than three times its width. What are the dimensions of the rectangle? Draw a diagram, solve the problem, and write an equation.

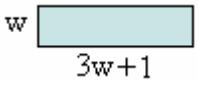
I drew and labeled the diagram with the length as 3x+1 and the width as x.
My equation is (3x+1)(x) = 80.
I am stuck on how to solve the equation. I got as far as 3x^2 + x = 80.
NOW WHAT DO I DO?



Date: 03/10/97 at 04:26:27 From: Doctor Mike
Re: Solving Quadratic Equations

Dear Caitlin,

You made a very good start on the problem.
My only suggestion so far is that
"x" does not always
have to be the unknown.
If you had used "w" for width,
and 3*w+1 for the length,
then it's easy to keep track of what the unknown means when you get to the end of the problem.



This is not an error, just something to think about when you do more and more complicated problems.

If you subtract 80 from both sides you get
3x^2 + x – 80 = 0,
which is a quadratic equation in standard form.

This kind of problem comes up a lot
and there are two main ways to solve it.

LA PRONUNCIA DI SEGNI E OPERAZIONI IN LINGUA INGLESE

+5	"positive five" o anche "plus five"
–5	"negative five" o anche "minus five"
–x	"the opposite of x" o anche "minus x"
10+2	"ten plus two" (pronuncia "plas")
10–2	"ten minus two" (pronuncia "mainəs")
10*2	"ten times two" , "ten multiplied by two"
10:2	"ten divided by two"
10^2	"ten raised to the 2nd power", "ten squared"
A*B=0	"A times B equals (is equal to) 0",
$\sqrt{10}$	"the square root of ten"
$\frac{x}{y}$	"x (pron. ecs) divided by y (pron. uai)" oppure "x over y"

1. If you can factor the equation into the product of 2 things,
then you can make good use of a well-known fact about numbers: if A*B = 0, then either A = 0 or B = 0.

Your equation is sort of tough to factor. The factored version is (3x+16)*(x–5) = 0.
Go ahead and multiply it out to see that it is the same.
Now we know that the width x must satisfy EITHER 3x+16 = 0 OR x–5 = 0
(the main reason anybody factors quadratic expressions is precisely because of that "A*B = 0" rule above).

2. It's time you should memorize **the quadratic formula**.
It says that if an equation is in the form A*x^2+B*x+C = 0, then the 2 **solutions** for that equation **(also called** zeros **because the right side is zero) are given by the formulas:**

$$x = \frac{-B - \text{sqrt}(B\,\hat{}\,2 - 4*A*C)}{2*A} \qquad x = \frac{-B + \text{sqrt}(B\,\hat{}\,2 - 4*A*C)}{2*A}$$

You should go ahead and try this method also.
It is very valuable because
factoring can often be difficult.
You will see again that
one x-value solution is positive and one is negative.
Only the positive one makes sense.
By the way, **"sqrt" means the square root function**.

Of course, you should make sure you get
the same answer by method 1 and by method 2,
and **after you get your answer,**
go back and check to make sure that it works.
In your problem that means
to multiply the width x by the length 3*x+1
and verify that you really get 80 square units.

I hope this helps.

Doctor Mike, The Math Forum

I SIMBOLI DI OPERAZIONE AL COMPUTER

Scrivendo alla tastiera del computer, e in particolare utilizzando del software matematico, si può indicare

- la **moltiplicazione** con l'**asterisco ***,
- la **divisione** con lo "slash" /,
- la **potenza** con l'**accento circonflesso** ^,
- e la **radice quadrata** con **sqrt** (*square root*)

In alternativa a sqrt, si può utilizzare
l'elevamento all'esponente ½: **sqrt(x) = x^(1/2)**
Occhio in quest'ultimo caso alle parentesi,
che sono tutte indispensabili.
Se infatti noi scrivessimo x^1/2, senza parentesi,
il software eleverebbe all'esponente 1 il valore di x
(= lo lascerebbe invariato), poi dividerebbe per 2.
L'effetto sarebbe dunque una divisione per 2
e non una radice quadrata!

3. PROBLEMI DI 2° GRADO

- *Trovare due numeri tali che la loro somma sia 20, e la somma dei loro quadrati sia 328.*

  I numeri richiesti si possono indicare con x e $20-x$ rispettivamente.
  L'equazione risolvente è

  $$x^2+(20-x)^2=328$$
  $$x^2+400-40x+x^2=328$$
  $$2x^2-40x+72=0$$
  $$x^2-20x+36=0$$
  $$x_{1,2}=10\pm\sqrt{100-36}=10\pm\sqrt{64}=10\pm 8=\begin{cases}2\\18\end{cases}$$

  Se $x=2$, allora $20-x=18$; e se $x=18$, allora $20-x=2$.

  I numeri cercati sono perciò $\boxed{2 \text{ e } 18}$ (non ha importanza, è evidente, l'ordine nel quale li si considera).

- *Sia Anna che Bruno partono dalla stessa località*
  per raggiungerne un'altra distante 600 km, e guidano a velocità costante;
  tuttavia Anna, che è più prudente, parte un'ora in anticipo rispetto a Bruno,
  e viaggia ad una velocità di 20 km/h inferiore.
  Di quanti km/h sono le loro due velocità, se giungono a destinazione simultaneamente?

  Nel moto a velocità costante, detti s lo spazio percorso, t il tempo impiegato, v la velocità, valgono le formule

  $$\boxed{v=\frac{s}{t}\quad s=v\cdot t\quad t=\frac{s}{v}}.$$

  Allora, se indichiamo con v la velocità di Anna (in pratica, v è la nostra "x"), e con $v+20$ la velocità di Bruno, avremo

  $$\frac{600}{v}=\frac{600}{v+20}+1 \quad \text{(Anna ci mette 1 ora in più ...)}$$

  $$\frac{600(v+20)}{\cancel{v(v+20)}}=\frac{600v+v(v+20)}{\cancel{v(v+20)}}$$

  NOTA:
  le condizioni di non annullamento del denominatore
  sono superflue, perché in ogni caso
  se alla fine trovassimo $v=0$ oppure $v<0$
  un tale valore sarebbe ovviamente da scartare

  $$\cancel{600v}+12000=\cancel{600v}+v^2+20v$$
  $$v^2+20v-12000=0$$
  $$v_{1,2}=-10\pm\sqrt{100+12000}=-10\pm\sqrt{12100}=-10\pm 110=\begin{cases}\cancel{-120} & \textit{non ha senso, in questo contesto, una velocità negativa!}\\ \boxed{100}\end{cases}$$

  $\boxed{\text{Anna}}$ viaggia perciò a $\boxed{100 \text{ km/h}}$,

  $\boxed{\text{Bruno}}$ a 100+20 = $\boxed{120 \text{ km/h}}$.

  Facciamo una verifica:
  Anna, viaggiando a 100 km/h, quanto ci mette a fare 600 km?
  $\frac{600}{100}$ = 6 ore.
  E Bruno, viaggiando a 120 km/h, quanto ci mette a fare 600 km?
  $\frac{600}{120}$ = 5 ore, cioè proprio 1 ora in meno, OK.

- *La differenza fra due numeri è 3, e il loro prodotto è 550. Quali sono i due numeri?*

  Detti x e $x+3$ i numeri richiesti, sarà
  $x(x+3)=550;\ \ x^2+3x=550;\ \ x^2+3x-550=0;\ \ x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+2200}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{2209}}{2}=\frac{-3\pm 47}{2}=\begin{cases}-25\\22\end{cases}$
  Se $x=-25$, allora $x+3=-25+3=-22;$ e se $x=22$, allora $x+3=25$.
  I numeri cercati possono perciò essere $\boxed{-25\ e\ -22}$, oppure $\boxed{22\ e\ 25}$.

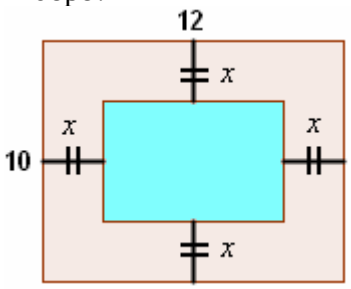
- *Quale numero è inferiore di 12 unità al suo quadrato?*

  Indicato con x il numero cercato, avremo
  $$x=x^2-12$$
  $x^2-x-12=0$ (OSSERVAZIONE)
  $(x-4)(x+3)=0;\ \ \boxed{x=4\vee x=-3}$
  Anche questo problema, dunque, ha DUE soluzioni.
  Tanto il numero 4 che il numero -3 hanno la proprietà di essere inferiori di 12 unità al proprio quadrato:
  $4^2=16\ \ e\ \ 16-12=4;$
  ma anche $(-3)^2=9$ e $9-12=-3$.

OSSERVAZIONE
Capita frequentemente di notare che, qualora si portasse tutto a PRIMO MEMBRO, si otterrebbe un COEFFICIENTE DI x^2 NEGATIVO.
In questi casi , piuttosto che portare a primo membro e poi cambiare tutti i segni, conviene immaginare di
PORTARE TUTTO A SECONDO MEMBRO e simultaneamente SCRIVERE DA DESTRA A SINISTRA, SCAMBIANDO I DUE MEMBRI FRA LORO.
In questo modo, si fa un passaggio in meno!

ESERCIZI (PROBLEMI DI SECONDO GRADO) - *Clicca sulla freccia per la correzione*

1) Due numeri positivi, reciproci fra loro, differiscono di 7/12. Quali sono?
2) Trova due numeri naturali pari consecutivi, tali che la somma dei loro quadrati sia 1060.
3) I termini di una frazione minore di 1 sono due interi positivi consecutivi. Se si aggiunge 3 sia al numeratore che al denominatore, il valore della frazione aumenta di 1/6. Di che frazione si tratta?
4) Trova due numeri sapendo che differiscono di 10 unità e che se si aggiunge alla loro somma il loro prodotto, si ottiene come risultato 815.
5) In una sala cinematografica, originariamente il numero delle file era uguale al numero delle poltrone presenti in ciascuna fila. Per via di una ristrutturazione, si è poi dovuto ridurre di 4 il numero delle poltrone in ogni fila, ma in compenso si è aumentato di 4 il numero delle file.
   In tal modo il locale ha perso 1/16 della sua capienza.
   Quanti spettatori poteva ospitare il cinema prima della ristrutturazione? E dopo?
6) Un cortile ha forma rettangolare, coi lati di 12 metri e 10 metri.
   Al centro del cortile è stata ricavata una vasca, anch'essa rettangolare (vedi figura), in modo che tutti i bordi della vasca hanno ugual distanza x dal contorno del cortile.
   Determinare questa distanza costante, sapendo che l'area della vasca è di 48 metri quadrati.



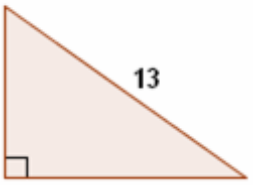
7) L'autobus per la gita scolastica di una classe ha un costo globale di 600 euro. Purtroppo al momento della gita 5 allievi devono rinunciare perché a letto con l'influenza e i restanti decidono di tassarsi per non far pagare gli ammalati, spendendo in questo modo ciascuno 10 euro in più del previsto. Quanti sono gli allievi che vanno in gita? ⇨
8) Se una distanza di 225 km viene percorsa "andata e ritorno", con una velocità al ritorno maggiore di 10 km/h rispetto all'andata, e il tempo totale del viaggio è di 4 ore e ¾, quali sono le due velocità? ⇨
9) L'età di un padre 2 anni fa era uguale al quadrato dell'età del figlio, mentre fra 2 anni il padre si ritroverà ad avere il quadruplo dell'età del figlio. Quanti anni hanno ora padre e figlio?
10) a) Se il lato di un quadrato aumentasse di 5 cm, l'area del quadrato raddoppierebbe. Quanto vale il lato?
    b) Se il raggio di un cerchio aumentasse di 5 cm, l'area del cerchio raddoppierebbe. Quanto vale il raggio?
11) Tanti anni fa, quando ero al massimo della forma, nella corsa di resistenza riuscivo a mantenere un'andatura di ben 4 km/h più veloce, e ci mettevo 30 minuti in meno ad ultimare il mio tragitto di allenamento di 24 km. A quanti km all'ora sto correndo? ⇨

12) Due rubinetti A e B permettono, se aperti simultaneamente, di riempire l'intera vasca in 2 ore. Il rubinetto A, se aperto da solo, riempirebbe la vasca in x ore, mentre il rubinetto B, se aperto da solo, ci metterebbe 3 ore in più del rubinetto A. Quanto vale x? ⇨

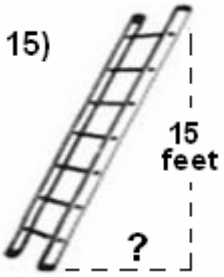
13) Il motore di un barcone gli farebbe assumere, in assenza di corrente, una velocità di 2 m/s. Se il barcone naviga su di un fiume nel quale la corrente ha una velocità di x metri al secondo, prima nella direzione della corrente poi all'incontrario, e ci mette in totale 2 ore e 8 minuti a percorrere "andata e ritorno" un tratto di fiume lungo 7 km e 200 metri, quanto vale x? ⇨

14) Un orto ha forma di triangolo rettangolo, e il suo contorno ha una lunghezza totale di 30 metri. Il lato più lungo misura metri 13. Di quanti metri quadrati è l'area dell'orto? (*Pitagora per l'equazione risolvente!*) ⇨

14)



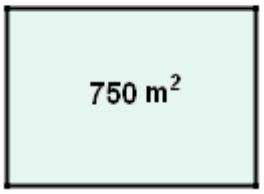
15)



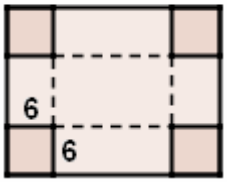
15) Da http://academic.cuesta.edu
A ladder is resting against a wall. The top of the ladder touches the wall at a height of 15 feet. Find the distance from the wall to the bottom of the ladder if the length of the ladder is one foot more than twice its distance from the wall.

16) Da www.vitutor.com
To fence a rectangular farm of $750\ m^2$, 110 m of fence has been used. Calculate the dimensions of the farm.

16)



17)



17) A rectangular piece of cardboard is 4 cm longer than wide. A box of $840\ cm^3$ is constructed by using this piece of cardboard. A square of 6 cm is cut out in every corner and the rims are folded upwards to create the box. Find the dimensions of the box.

18) Da http://www1.broward.edu
Two cars leave an intersection. One car travels north; the other travels east. When the car traveling north had gone 24 miles, the distance between the cars was four miles more than three times the distance traveled by the car heading east. Find the distance between the cars at that time.

Problemi geometrici con eq. risolvente di 2° grado alle pagg. 246 … 251

I quattro problemi che seguono sono tratti da "Elementi di Algebra" (pubblicato intorno all'anno 1765), del grande Leonhard Euler (Euléro).

19) Determina due numeri, di segno qualsiasi, il cui rapporto sia 2, e tali che se si addiziona la loro somma al loro prodotto, il risultato dell'operazione sia 90.

20) Una persona acquistò diverse pezze di tessuto per 180 corone; e se avesse ottenuto per la stessa somma di denaro 3 pezze in più, vorrebbe dire che ogni pezza gli sarebbe costata 3 corone in meno. Quante pezze comprò? E a che prezzo?

21) *Psst … Conosci la formula di Gauss per la somma dei primi n interi positivi*? $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Un tale compra un certo numero di pezze di tessuto: per la prima paga 2 corone, per la seconda 4, per la terza 6, e allo stesso modo sempre 2 corone in più per ciascuna delle pezze successive; inoltre, tutte le pezze insieme gli costano 110 corone: quante sono queste pezze? E se la spesa fosse di 2260512 corone?

22) Due ragazze hanno portato 100 uova al mercato; una aveva più uova dell'altra, e tuttavia entrambe hanno ricavato la stessa somma dalla vendita. La prima dice alla seconda: "Se avessi avuto io il numero di uova che avevi tu, avrei guadagnato 15 penny". E l'altra replica: Se invece avessi avuto io le tue uova, il mio guadagno sarebbe stato di 6 penny e 2/3 di penny". Con quante uova è andata al mercato ciascuna delle due?

SOLUZIONI

1) 4/3 e 3/4 2) 22 e 24 3) 2/3 4) –35 e –25 oppure 23 e 33 5) 256, 240 6) 2 m
7) Gli allievi in gita sono 15, la classe in totale ha 20 allievi 8) 90 e 100 km/h 9) 8 anni, 38 anni
10) Tanto il lato del quadrato quanto il raggio del cerchio misurano cm $5\left(1+\sqrt{2}\right)$ 11) A 12 km/h
12) $x = 3$ ore (rubinetto B: 6 ore) 13) $x = 0{,}5$ m/s = 1,8 km/h 14) 30 m^2 15) 8 feet 16) 30 m, 25 m
17) 14, 10, 6 cm 18) 25 miles 19) 12 e 6 oppure –15 e –15/2 20) Comprò 12 pezze, a 15 corone l'una
21) 10; 1503 22) 40 uova la prima, che le ha vendute a ¼ di penny, 60 la seconda (1/6 di penny per uovo)

NUMERI COMPLESSI

1. “IMPOSSIBILE”? UAH, UAH!

Com'è noto, la **radice quadrata** è **l'operazione inversa** rispetto all'**elevamento al quadrato**; vale a dire, la radice quadrata di un numero *x* è quel numero *y* il quale, se elevato al quadrato, dà come risultato *x* (con la convenzione che, in caso di risultato “doppio”, si prende solo quello positivo: $\sqrt{9}=3$ e NON $\sqrt{9}=\pm 3$).

Ora, poiché elevando un numero al quadrato si ottiene sempre risultato positivo (o, al più, nullo), ne deriva che **l'estrazione di radice quadrata di un numero negativo è impossibile**.

In particolare, è dunque impossibile l'operazione $\sqrt{-1}$ **.**

$\mathbb{R}$ = *insieme dei numeri reali relativi* (*quelli che stanno sulla "number line"*)

$\mathbb{Q}$ = *insieme dei numeri razionali relativi* (*quelli che sono esprimibili sotto forma di frazione, ossia di rapporto fra due interi*). *Sono razionali tutti gli interi* ($5=5/1$) *e tutti quei numeri con la virgola che sono o finiti, o periodici.*

$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ = *insieme dei numeri irrazionali relativi. Sono irrazionali tutti i numeri con la virgola che sono illimitati non periodici.*

$\mathbb{Z}$ = *insieme dei numeri interi relativi* (*è un sottoinsieme di* $\mathbb{Q}$, *che a sua volta è un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$)

D'altra parte, se provi a ripercorrere, per un istante, la tua "carriera" scolastica, ti verranno in mente **diversi casi di operazioni che in un primo tempo ritenevi impossibili, e che invece poi, con l'ampliarsi delle tue conoscenze, sono risultate possibili.**

a) Ad esempio:
quando frequentavi le elementari,
e non avevi ancora sentito parlare né di frazioni, né di numeri con la virgola,
ma ti limitavi a lavorare esclusivamente coi numeri interi,
di fronte all'operazione $23:4$ (divisione, ossia operazione inversa della moltiplicazione) avresti detto:
è un'operazione impossibile, se si cerca il risultato esatto!
Infatti non esiste alcun numero intero il quale, moltiplicato per 4, dia come risultato 23.

Se la stessa operazione 23:4 ti fosse stata, invece, proposta ai tempi della scuola media, avresti tratto una conclusione differente, affermando che l'operazione 23:4 dà come risultato la frazione $\frac{23}{4}$ (o, il che è lo stesso, il numero $5{,}75$).

Ricapitolando e schematizzando:
l'operazione 23:4 coinvolge due numeri interi,
ma nell'ambito degli interi essa è priva di risultato (= impossibile).
Nell'insieme, più vasto, dei numeri razionali (di cui gli interi sono casi particolari),
l'operazione diventa invece possibile ed ha come risultato il numero 23/4 (= 5,75).

b) Anche per un'operazione come
$5-7$
accade qualcosa di simile.
Il bambino delle scuole elementari lavora esclusivamente coi numeri assoluti (= senza segno);
egli non ha mai sentito parlare di numeri positivi e negativi.
Se, dunque, gli viene proposta l'operazione $5-7$, egli dirà che è impossibile.
Quando, alla fine della scuola media, lo stesso alunno avrà ampliato l'insieme dei numeri assoluti, affiancando ad essi i numeri negativi, e pervenendo così all'insieme più ampio dei numeri relativi, dirà invece che l'operazione è possibile e dà come risultato -2.

c) E ancora: abbiamo dimostrato (pagg. 10-11) che non esiste alcun numero razionale che elevato al quadrato dia come risultato 2. Pertanto,
l'operazione $\sqrt{2}$ è impossibile nell'ambito dei numeri razionali;
diventa possibile solo uscendo da tale insieme.
Se l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali viene ampliato, con l'aggiunta degli irrazionali, così da pervenire all'insieme più vasto $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali), allora all'operazione $\sqrt{2}$ si potrà attribuire un risultato.
Bisognerà però, per forza, USCIRE da $\mathbb{Q}$.

2. NUMERI IMMAGINARI, NUMERI COMPLESSI

RIASSUNTO

- La divisione fra i due interi 23 e 4 (cioè, l'operazione $23:4$) è impossibile (a meno che non ci si accontenti di un risultato approssimato) nell'insieme degli interi. Tuttavia, USCENDO da tale insieme si riesce a trovarne il risultato: è la frazione $23/4$, che appartiene NON all'insieme degli interi, ma al suo AMPLIAMENTO $\mathbb{Q}$.
- La differenza fra i due numeri assoluti 5 e 7 presi in quest'ordine (vale a dire, l'operazione $5-7$) è impossibile nell'insieme dei numeri assoluti. Diventa però possibile se si ESCE da tale insieme, passando all'insieme, PIU' AMPIO, dei numeri relativi. In esso si trova finalmente il risultato: -2.
- La radice quadrata del numero razionale 2 (ossia, $\sqrt{2}$) è un operazione impossibile in $\mathbb{Q}$. Essa diventa possibile solo a patto di USCIRE da $\mathbb{Q}$. Il risultato di tale operazione non appartiene a $\mathbb{Q}$ ma al suo AMPLIAMENTO $\mathbb{R}$.

In tutti e tre i casi, il risultato di una certa operazione fra numeri di un dato insieme è stato trovato uscendo dall'insieme considerato e passando ad un insieme più vasto; ampliando, insomma, la famiglia dei numeri con cui si lavorava.

Per l'operazione $\boxed{\sqrt{-1}}$ in Algebra si percorre una strada analoga.

Tale operazione coinvolge un numero reale, ma non ha risultato nell'insieme $\mathbb{R}$.
Allora **AMPLIEREMO** l'insieme $\mathbb{R}$,
passando ad un insieme più vasto nel quale l'operazione sia possibile.

Procediamo.
Indicheremo col simbolo $\boxed{i}$ il risultato dell'operazione $\sqrt{-1}$.

Il numero i verrà detto "unità immaginaria". La sua proprietà fondamentale sarà dunque $\boxed{i^2=-1}$.
i non appartiene, non può appartenere, all'insieme $\mathbb{R}$;
i è invece il "capostipite" di una nuova famiglia di numeri, **ESTERNI AL "RECINTO" $\mathbb{R}$**.

Moltiplicando l'unità immaginaria i per i numeri reali si ottengono nuove entità numeriche, che vengono dette **NUMERI IMMAGINARI**.

Esempi: $3i \quad -5i \quad \frac{2}{9}i \quad \sqrt{3}i$

Sottolineiamo subito che le operazioni con queste nuove entità numeriche vengono definite in modo tale che restino valide tutte le proprietà di cui le analoghe operazioni godono in $\mathbb{R}$.
Se noi ora prendiamo, ad esempio, il numero $3i$ e lo eleviamo al quadrato, avremo

$$(3i)^2 = 3^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

Quindi il numero $3i$ risolve il problema di trovare un risultato per la radice quadrata del numero negativo -9!
Anzi, è pure

$$(-3i)^2 = (-3)^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

e quindi, nell'insieme dei numeri immaginari,
il numero negativo -9 si trova ad avere ben DUE radici quadrate:
il numero immaginario $3i$ e il numero immaginario $-3i$.
A ben guardare, la stessa operazione dalla quale avevamo preso le mosse, ossia $\sqrt{-1}$,
si ritrova ad avere DUE risultati: i e $-1 \cdot i$ (che si abbrevia in $-i$):

$$\sqrt{-1} = \pm i \quad \text{(NOTA)}$$

NOTA: *quando il simbolo di radice è utilizzato con l'intesa di poter uscire dal campo dei numeri reali per trovare il risultato dell'operazione, allora non si "scarta" più nessun risultato, e si parla di "radici" (al plurale) del numero considerato.*

Generalizzando,
i numeri immaginari sono caratterizzati dal fatto che il loro quadrato è sempre un numero reale <0;
essi risolvono perciò il problema di estrarre la radice quadrata di un numero reale negativo qualsiasi:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} = \pm i \cdot 5 = \pm 5i$$

La somma indicata di un numero reale con un numero immaginario
prende il nome di NUMERO COMPLESSO.

Esempi di numeri complessi sono: $3+7i$ $\quad -\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot i$ $\quad \frac{3}{4}-\frac{2}{5}i$ $\quad 12{,}3-7{,}\overline{2}i$

RICAPITOLIAMO

Si dice **UNITA' IMMAGINARIA** un numero, indicato con il simbolo i,
il quale elevato al quadrato dà come risultato -1: $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

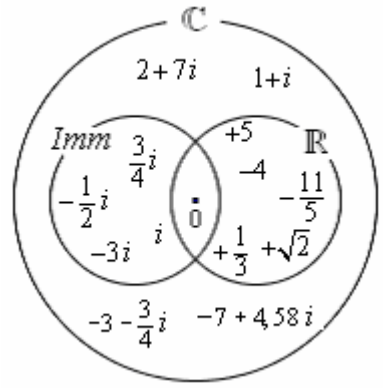
Si dicono **NUMERI IMMAGINARI**
i numeri ottenuti moltiplicando l'unità immaginaria i per un numero reale.

Si dicono **NUMERI COMPLESSI**
i numeri che sono una somma indicata di un numero reale con un numero immaginario,
ossia i numeri della forma $\boldsymbol{a+bi}$ (con a, b numeri reali; i unità immaginaria)

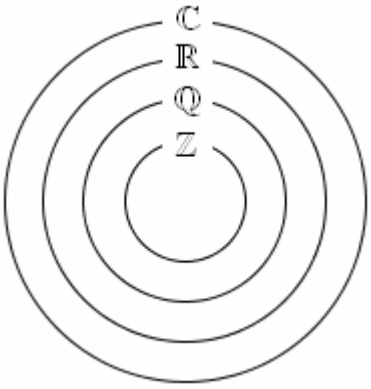
- a viene detta "**parte reale**";
- bi viene detta "**parte immaginaria**",
- b è chiamato il "**coefficiente dell'immaginario**".

L'insieme dei numeri complessi viene indicato col simbolo $\mathbb{C}$.

Per $a = 0$, l'espressione $a+bi$ diventa semplicemente bi;
dunque possiamo considerare i numeri immaginari come casi particolari di numeri complessi.
Ma per $b = 0$, l'espressione $a+bi$ diventa semplicemente a;
quindi, anche i numeri reali possono essere visti come particolari numeri complessi,
e in definitiva, dal punto di vista insiemistico, la situazione è la seguente:



Il numero 0 può essere anche scritto come $0 \cdot i$, quindi è l'unico numero reale ed immaginario al tempo stesso.



$\mathbb{C} = \{complessi\}$
$\mathbb{R} = \{reali\}$
$\mathbb{Q} = \{razionali\}$
$\mathbb{Z} = \{interi\ relativi\}$

Abbiamo anticipato che **le operazioni coi numeri complessi vengono definite**
in modo tale che si conservino tutte le proprietà valide in campo reale.
Di conseguenza, per svolgere una qualunque operazione coi numeri complessi,
basterà basarsi sulle ordinarie regole del calcolo algebrico e letterale, applicandole nel modo consueto
(tutto ciò che occorre è semplicemente di ricordarsi che $i^2 = -1$). Ad esempio:

$$(3+2i)+(-5+i) = 3+2i-5+i = -2+3i$$

$$(3+2i)-(-5+i) = 3+2i+5-i = 8+i$$

$$(3+2i)(-5+i) = -15+3i-10i+2i^2 = -15-7i+2\cdot(-1) = -15-7i-2 = -17-7i$$

$$(-5+i)^2 = 25-10i+i^2 = 25-10i-1 = 24-10i$$

Per quanto riguarda la divisione, essa può essere effettuata scrivendo la frazione corrispondente, e moltiplicandone i termini per un medesimo numero (proprietà invariantiva delle frazioni), scelto in modo tale da far sì che, dopo l'operazione, il denominatore "perda" l'unità immaginaria e diventi quindi un numero reale:

$$(2-i):(3+2i) = \frac{2-i}{3+2i} = \frac{2-i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{6-4i-3i+2i^2}{9-4i^2} = \frac{6-7i-2}{9+4} = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$$

3. A COSA *NON* SERVONO I NUMERI COMPLESSI

Il discorso fatto ti avrà certamente lasciato molto perplesso.
Ma insomma: cos'è questa storia, che di fronte ad una operazione impossibile si possono inventare nuovi numeri in modo che, nell'insieme numerico più ampio così ottenuto, l'operazione divenga possibile?
Questa procedura sa di "trucco", di "fregatura"; ci fa perdere fiducia nei matematici, che parrebbero tirare per il collo ogni questione fino a risolvere tutto e ad aver sempre ragione.
In tutta onestà, ti assicuro che le cose non stanno così.

Vorrei farti riflettere almeno sui due punti seguenti.

a) L'operazione $\frac{a}{0}$, con a numero reale non nullo,

NON può essere resa possibile tramite il passaggio ad un insieme numerico più vasto di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{C}$.

Infatti, indicato per assurdo con ∇ il risultato dell'operazione (tanto per fissare le idee) $\frac{1}{0}$, si avrebbe

$$\frac{1}{0} = \nabla$$

e quindi, essendo la divisione l'operazione inversa della moltiplicazione, $\nabla \cdot 0 = 1$.
Ora, se noi consideriamo le seguenti due espressioni:

i) $(\nabla \cdot 0) \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

ii) $\nabla \cdot (0 \cdot 0) = \nabla \cdot 0 = 1$

vediamo che ∇ sarebbe tale da distruggere, qualora venisse "accettato" come elemento di una famiglia di numeri, la validità della proprietà associativa della moltiplicazione, nell'ambito di quella famiglia.
Per questo fatto, ∇ NON ha il diritto di essere considerato un "numero".
L'operazione 1/0 è destinata a rimanere sempre e comunque IMPOSSIBILE, qualunque sia l'insieme numerico in cui si supponga di lavorare.

b) I numeri complessi hanno applicazione soltanto in ambiti molto particolari, ad esempio in Ingegneria Elettronica o in certe questioni avanzate di Fisica. Non ha alcun senso usarli per misurare lunghezze, intervalli di tempo, pesi, ecc.

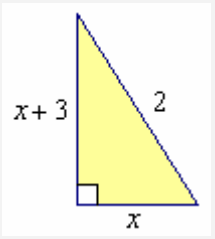
Se ti dico: vengo a trovarti fra 3 ore (3 è un numero intero), dico una cosa sensata.
Se ti dico che verrò fra 3/4 d'ora (3/4 è un numero razionale) dico pure una cosa sensata.
Se prometto che verrò fra $\sqrt{2}$ ore ($\sqrt{2}$ è un numero irrazionale) ti farò probabilmente sorridere, ma in linea di principio l'affermazione è sensata, perché $\sqrt{2} = 1{,}4142136...$
e, se faccio scattare il cronometro in questo momento (istante t = 0), ad un certo punto lo scorrere del tempo porterà all'attraversamento dell'istante $\sqrt{2}$ (supponendo di misurare il tempo in ore); ragionando in minuti, si tratterà di

$$\sqrt{2} \cdot 60 = 1{,}4142136... \cdot 60 = 84{,}8528137... = 1h + 24{,}8528137...$$ minuti.

Ma se ti dico che ci vedremo fra *i* ore, dico una cosa che è assolutamente priva di senso.

♪ Consideriamo, per chiarire ancor meglio il discorso, il problema seguente:
"*Trovare i cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa 2 cm, sapendo che uno dei cateti supera l'altro di 3 cm*".

Si riconosce immediatamente che tale problema è impossibile (non può esistere un triangolo siffatto, perché uno dei cateti sarebbe in ogni caso maggiore dell'ipotenusa).
E' pur vero che se noi indichiamo i cateti con x, x+3, e per curiosità proviamo ad impostare l'equazione risolvente, le soluzioni, formalmente, le troviamo! Però ……



$$x^2 + (x+3)^2 = 4$$

$$2x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-10}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{-3 \pm i}{2} = \begin{cases} \frac{-3-i}{2} \\ \frac{i-3}{2} \end{cases}$$

… però **le soluzioni così determinate sono puramente formali, "fittizie" !**
Non ha alcun senso utilizzare numeri complessi per misurare segmenti !!!
Il problema è e resta **IMPOSSIBILE**.

♫ Ancora: è noto dalla Fisica che se un corpo viene lanciato verticalmente verso l'alto, e si alza da terra all'istante $t_0 = 0$ con velocità v_0 (tempo misurato in secondi, velocità in metri al secondo), l'altezza cui si trova il corpo nel generico istante $t > 0$ è data dalla formula

$$\boxed{h = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t}$$

dove g indica l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, ed è, all'incirca,

$g = 9{,}8$ *metri al secondo per secondo* $\left(9{,}8\ m/s^2\right)$.

Consideriamo il caso particolare $v_0 = 10\ m/s$.

Dunque avremo: $h = -4{,}9t^2 + 10t$.

Problema 1): in quale istante *t* il corpo si troverà a 3 metri di altezza?

$$3 = -4{,}9t^2 + 10t$$

$$4{,}9t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 14{,}7}}{4{,}9} = \frac{5 \pm \sqrt{10{,}3}}{4{,}9} \approx \frac{5 \pm 3{,}2}{4{,}9} = \begin{cases} \frac{1{,}8}{4{,}9} \approx 0{,}37 \\ \frac{8{,}2}{4{,}9} \approx 1{,}67 \end{cases}$$

Pertanto: il corpo si troverà a 3 metri di altezza
dopo circa 0,37 secondi dall'istante del lancio (in fase di ascesa)
e dopo circa 1,67 secondi (in fase di discesa)

Problema 2): in quale istante *t* il corpo si troverà a 1 *km* = 1000 *m* di altezza?

$$1000 = -4{,}9t^2 + 10t$$

$$4{,}9t^2 - 10t + 1000 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4900}}{4{,}9} = \frac{5 \pm \sqrt{-4875}}{4{,}9} = \frac{5 \pm \sqrt{4875}\ i}{4{,}9} \approx \begin{cases} \frac{5 - 69{,}8\ i}{4{,}9} \\ \frac{5 + 69{,}8\ i}{4{,}9} \end{cases}$$

… **ma le soluzioni complesse dell'equazione risolvente del problema 2)**
non hanno alcuna interpretazione plausibile.
Il problema 2) è **IMPOSSIBILE**,
per il fatto che **con una velocità iniziale così bassa**
non si riesce a raggiungere un'altezza così elevata!!!

E' molto importante sottolineare che
NELL'INSIEME ℂ NON SONO STATE DEFINITE LE RELAZIONI ">" E "<",
per cui, *dati due numeri complessi, nessuno di essi può dirsi "maggiore" o "minore" dell'altro*.
Pertanto, OCCHIO!



SE CI SI STA OCCUPANDO DI DISUGUAGLIANZE O DISEQUAZIONI,
I NUMERI COMPLESSI NON C'ENTRANO ASSOLUTAMENTE.

(Semmai, si potranno confrontare i "**moduli**" (NOTA) di due numeri complessi,
dove per "modulo" si intende, con riferimento al generico numero complesso $a + bi$,
il numero reale non negativo $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ma questo è un altro discorso).

NOTA: *"modulo" è, per un numero complesso,*
l'analogo di quello che è il "modulo" o "valore assoluto" di un numero reale.

4. A COSA SERVONO I NUMERI COMPLESSI

Adesso che abbiamo ben chiarito in quali ambiti i numeri complessi sono inutilizzabili, andiamo a vedere invece dove ha senso (e utilità) impiegarli.

a) Impiego dei numeri complessi in matematica pura

In Matematica pura, trattare determinate questioni in campo complesso può essere estremamente conveniente, comodo, ed illuminante, nonché affascinante. A livello preuniversitario non è facile dare un'idea appropriata di questo fatto (bisognerebbe infatti poter parlare, tanto per fare un esempio, di equazioni differenziali).
Qui ci limitiamo a citare un risultato di estremo interesse, chiamato **Teorema Fondamentale dell'Algebra,** la cui prima dimostrazione è attribuita al tedesco Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855) e datata **1799**.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA (T. F. A.), ENUNCIATO I

Un'equazione algebrica (NOTA 1) **di grado n** (NOTA 2) **a coefficienti reali o complessi ammette sempre almeno una soluzione nell'insieme dei numeri complessi.**

NOTA 1 - Si dice "**equazione algebrica**" un'equazione della forma $P(x)=0$, con $P(x)$ *polinomio* a coefficienti in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$. Equazione *algebrica* = equazione *polinomiale*.

NOTA 2 - Si dice "**grado**" di un'equazione algebrica $P(x)=0$, il grado del polinomio $P(x)$.

Affermare che α *è soluzione dell'equazione* $P(x)=0$ *equivale ad affermare che* $P(\alpha)=0$.
Ma se $P(\alpha)=0$, *il Teorema del Resto (Volume 1, pag. 116),*
il quale si estende anche al caso in cui i coefficienti, e i valori che la variabile può assumere, siano complessi,
assicura che il resto della divisione $P(x):(x-\alpha)$ *è zero*
e quindi garantisce che il polinomio $P(x)$ *è divisibile per il binomio* $(x-\alpha)$
ovvero scomponibile in un prodotto $P(x)=(x-\alpha)\cdot P_1(x)$
dove $P_1(x)$ *è un nuovo polinomio, il cui grado è inferiore di un'unità rispetto al grado di* $P(x)$.
Applicando ora il Teorema Fondamentale dell'Algebra al polinomio $P_1(x)$,
avremo che esiste certamente, nell'insieme dei numeri complessi, un β *tale che* $P_1(\beta)=0$.
Ma allora il polinomio $P_1(x)$ *potrà essere scomposto in* $P_1(x)=(x-\beta)\cdot P_2(x)$
dove $P_2(x)$ *è un polinomio il cui grado è inferiore di un'unità rispetto al grado di* $P_1(x)$.
Se ne trae che per il polinomio di partenza si avrà la scomposizione $P(x)=(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot P_2(x)$.

E' evidente la possibilità di procedere allo stesso modo fino a scomporre $P(x)$ *in fattori tutti di 1° grado.*

In definitiva, il T. F. A. garantisce che ogni polinomio di grado n

$$\mathbf{P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \quad (a_i\in\mathbb{C}),}$$

a coefficienti complessi o in particolare reali, ammette una scomposizione della forma:

$$\mathbf{P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_n) \quad (x_i\in\mathbb{C})}$$

(anche se non indica in alcun modo se e come si possa *effettivamente* realizzare, nella pratica, tale scomposizione).

Ma da qui, tenendo conto della "legge di annullamento del prodotto"
(un prodotto di numeri complessi o in particolare reali è uguale a zero se e solo se è uguale a zero almeno uno dei fattori), si trae una conseguenza molto elegante e rilevante, ossia:

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA (T. F. A.), ENUNCIATO II

Un'equazione algebrica di grado n a coefficienti reali o complessi ammette ESATTAMENTE n soluzioni, purché si intenda di cercare le soluzioni in campo complesso e si conti ciascuna soluzione con la "molteplicità" (NOTA 3) che le compete.

NOTA 3
La definizione di "**molteplicità di una soluzione (= radice) di un'equazione algebrica**" può essere formulata in diversi modi equivalenti.
Ad esempio, possiamo dire che una soluzione α di un'equazione algebrica $P(x)=0$ ha molteplicità *k* se e solo se il polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x-\alpha)$ per esattamente *k* volte di seguito.
Oppure che una soluzione α di un'equazione algebrica $P(x)=0$ ha molteplicità *k* se e solo se il fattore $(x-\alpha)$ compare per esattamente *k* volte nella scomposizione di $P(x)$ in fattori di 1° grado (scomposizione la cui esistenza è garantita appunto dal Teorema, sebbene il Teorema stesso non dia alcuna indicazione su come effettivamente possa essere realizzata tale scomposizione).

Esempio. Prendiamo l'equazione di quarto grado $x^4 + 2x^2 + 8x + 5 = 0$.
Possiamo fattorizzare, ottenendo $(x+1)^2\left(x^2 - 2x + 5\right) = 0$. Dunque:

$(x+1)^2 = 0 \quad x = -1$ (*molteplicità* 2)

$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad x = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$

e abbiamo trovato **4 soluzioni, tante quant'è il grado dell'equazione**:

$x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1 + 2i,\ x_4 = 1 - 2i$.

Se invece ci fossimo confinati ad operare nel solo insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali,
avremmo individuato una sola soluzione ($x = -1$),
o, tenendo conto della molteplicità, 2 soluzioni ($x_1 = x_2 = -1$)

Facciamo un'ulteriore riflessione su quanto visto.

Consideriamo un'equazione algebrica (si dice anche "equazione polinomiale") P(*x*) = 0.
Supponiamo che i coefficienti di questa equazione siano tutti reali.
Può darsi ora che l'equazione non ammetta nessuna soluzione nell'ambito dei numeri reali;
però il Teorema Fondamentale dell'Algebra assicura che certamente una soluzione esiste,
quando la cerchiamo nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.
Si può dunque affermare che l' insieme $\mathbb{C}$ "completa", dal punto di vista algebrico, l'insieme $\mathbb{R}$.

Osserviamo ancora che, anche volendo restare esclusivamente nell'ambito dei numeri reali, nella teoria delle equazioni algebriche l'utilizzo dei numeri complessi sembra "imporsi per forza propria". Basti pensare che la formula generale per la risoluzione delle equazioni di 3° grado obbliga ad operare coi numeri complessi nei passaggi intermedi, anche in quei casi in cui le soluzioni sono poi tutte reali.
Questo fatto portò sconcerto negli algebristi del Cinquecento
che per primi ebbero a incontrarsi e "scontrarsi" coi numeri immaginari.

Su questi interessantissimi argomenti, vedi ad esempio, su Internet:

♪ ⇨
♫ ⇨

Limitandoci ora per un momento alle sole equazioni di 2° grado,
la conoscenza dei numeri complessi ci permette di affermare che

in campo complesso, ogni equazione di 2° grado
$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}$ o anche $a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$
ammette sempre ESATTAMENTE 2 SOLUZIONI (eventualmente coincidenti, nel caso $\Delta = 0$)

Esempi:

$\boxed{x^2 - 6x + 8 = 0}$ $\quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm \sqrt{\boxed{1}} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ $\quad \boxed{\Delta > 0}$, **due soluzioni reali distinte**

$\boxed{x^2 - 6x + 9 = 0}$ $\quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \pm \sqrt{\boxed{0}} = 3 \pm 0 = \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases}$ $\quad \boxed{\Delta = 0}$, **due soluzioni reali coincidenti**

$\boxed{x^2 - 6x + 10 = 0}$ $\quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm \sqrt{\boxed{-1}} = 3 \pm i = \begin{cases} 3-i \\ 3+i \end{cases}$ $\quad \boxed{\Delta < 0}$ **impossibilità in $\mathbb{R}$** ma **due soluzioni in $\mathbb{C}$**

,

Due numeri complessi si dicono "coniugati" se hanno
ugual parte reale, e coefficienti dell'immaginario opposti.

Ad esempio, una coppia di *complessi coniugati* è $5 + 8i,\ 5 - 8i$.
Se un numero reale viene pensato come elemento dell'insieme $\mathbb{C}$, risulta essere il coniugato di sé stesso.

Si può dimostrare che se un'equazione algebrica a coefficienti reali ammette una certa soluzione z, allora anche $\bar{z}$ (= il complesso coniugato di z) sarà senz'altro soluzione della stessa equazione. In breve, si può dunque dire che

"**in un'equazione algebrica a coefficienti reali,**
le soluzioni si presentano sempre in coppie di complessi coniugati".

Terminiamo qui il nostro discorso sulle equazioni algebriche, citando ancora, da ultimo,
l'interessante risultato seguente, facilmente giustificabile per via grafica:

"**un'equazione algebrica a coefficienti reali, di grado dispari, ammette sempre almeno una soluzione reale**".

b) Impiego dei numeri complessi In Fisica e in Ingegneria

Per quanto riguarda gli importantissimi settori di impiego dei numeri complessi in Fisica e in Ingegneria, ti propongo alcuni contributi scaricati da Internet.

❑ Dal sito www.guardian.co.uk

QUESTION:

WHAT USE ARE IMAGINARY NUMBERS IN THE REAL WORLD?
DO THEY HAVE PURPOSE OR IS IT JUST MATHEMATICIANS HAVING SOME FUN ?
[Bob Jones, Aberdeen Scotland]

ANSWERS:

- Introducing the square root(s) of –1 is convenient because
  i) all n-degree polynomials with real coefficients then have n roots, making algebra "complete";
  ii) it saves using matrix representations for objects that square to –1
  (such objects representing **an important part of the structure of linear equations which appear in quantum mechanics, heat diffusion, optics**, etc) (…) [M. Hall, Canberra Australia]

Traduzione:
Introdurre la radice quadrata, o le radici quadrate, di –1, è conveniente perché

i) (in tal modo) tutti i polinomi di grado n con coefficienti reali hanno n "zeri"
e così, quindi, l'algebra diventa "completa"

NOTA: in Inglese si parla di "radice" ("root") di un polinomio,
per indicare un valore che, assegnato alla variabile,
renda uguale a 0 il valore del polinomio.
In Italiano si preferisce parlare di "zeri" quando ci si riferisce ad un polinomio,
e di "radici" (o "soluzioni") con riferimento, invece, ad un'equazione.
Tuttavia, anche in lingua italiana, i termini "zero" e "radice" sovente
vengono impiegati indifferentemente sia per polinomi che per equazioni,
diventando quindi, nell'uso di parecchi autori, dei sinonimi.

ii) Permette di fare a meno dell'uso di matrici per rappresentare quegli oggetti il cui quadrato è –1
(oggetti che rappresentano una parte importante della struttura di equazioni lineari
che compaiono in meccanica quantistica, diffusione del calore, ottica, ecc.)

- They are of enormous use in applied maths and physics.
  Complex numbers (the sum of real and imaginary numbers)
  occur quite naturally in the study of quantum physics.
  They're useful for modelling periodic motions (such as water or light waves)
  as well as alternating currents.
  Understanding complex analysis, the study of functions of complex variables,
  has enabled mathematicians to solve **fluid dynamic problems**
  particularly for largely 2 dimensional problems where viscous effects are small.
  You can also understand their instability and progress to turbulence.
  All of the above are relevant in the real world, as they give insight into how to pump oil in oilrigs,
  how earthquakes shake buildings and how electronic devices (such as transistors and microchips)
  work on a quantum level (increasingly important as the devices shrink.) [Gareth Owen, Crewe UK]

Traduzione:
Sono enormemente utilizzati in matematica e fisica applicata.
I numeri complessi (somma di numeri reali e numeri immaginari)
si presentano in modo assai naturale nello studio della fisica quantistica.
Sono utili per modellizzare i moti periodici (ad esempio le onde nell'acqua o le onde luminose)
come pure le correnti alternate.
Comprendere l'analisi complessa, lo studio delle funzioni di variabile complessa,
ha reso i matematici capaci di risolvere problemi di fluidodinamica
in particolare per problemi sostanzialmente bidimensionali in cui gli effetti dovuti alla viscosità sono piccoli.
Si può anche comprendere l'instabilità di tali sistemi e il loro evolvere verso la turbolenza.
Tutte le questioni di cui sopra sono rilevanti nel mondo reale,
perché permettono di capire più chiaramente come pompare il petrolio negli impianti di trivellazione,
come i terremoti scuotono gli edifici e come i dispositivi elettronici (es. transistor e microchip)
funzionano a livello quantistico (il che è via via più importante al crescere della miniaturizzazione).

- Ask any phisical scientist or engineer (mechanical, civil or electrical)
  how they would get on without using the square root of minus one.
  They will tell you most of our technology depends on it.
  For example, without **using imaginary numbers to calculate various circuit theories**,
  you would not be reading this on a computer. [G. Baker, Ockendon UK]

Traduzione:
Domanda a qualsiasi fisico o ingegnere (meccanico, civile od elettrico)
come se la caverebbero senza utilizzare la radice quadrata di –1.
Ti diranno che la maggior parte della nostra tecnologia dipende da essa.
Per esempio, senza l'uso dei numeri immaginari per calcolare varie teorie sui circuiti,
non staresti leggendo queste righe su di un computer.

- Imaginary numbers can be very useful for solving engineering problems.
  An example is if you have a pendulum swinging, it starts to slow down and eventually stop.
  If you want to work out the motion of the pendulum over a certain time (i.e. derive a formula)
  then the best way to do it is to use complex numbers. [Aidan Randle-Conde, Crewe UK]

Traduzione:
I numeri immaginari possono essere molto utili per risolvere problemi ingegneristici.
Per esempio, se hai un pendolo che oscilla, comincerà a rallentare e prima o poi si fermerà.
Se vuoi fare una analisi quantitativa del moto del pendolo in un certo intervallo di tempo
(es. ricavare una formula) allora il miglior modo di farlo è usare i numeri complessi.

- Mathematicians have fun?!
  [Tim Campbell, Wigan UK]



❑ Tanto di cappello, poi, a Philip Spencer dell'Università di Toronto (Canada)
che si occupa splendidamente di numeri complessi e delle loro applicazioni sulla pagina web
www.math.toronto.edu/mathnet/questionCorner/complexinlife.html dalla quale riporto questo estratto:

- In electronics, the state of a circuit element is described by two real numbers
  (the voltage V across it and the current I flowing through it).
  A circuit element also may possess a capacitance C and an inductance L that
  (in simplistic terms) describe its tendency to resist changes in voltage and current respectively.
  Rather than the circuit element's state having to be described by two different real numbers V and I,
  it can be described by a single complex number z = V + i I.
  Similarly, inductance and capacitance can be thought of
  as the real and imaginary parts of another single complex number w = C + i L.
  The laws of electricity can be expressed using complex addition and multiplication.

  Another example is **electromagnetism.**
  Rather than trying to describe an electromagnetic field by two real quantities
  (electric field strength and magnetic field strength), it is best described as a single complex number,
  of which the electric and magnetic components are simply the real and imaginary parts.

In elettronica, lo stato di un elemento di circuito è descritto da due numeri reali
(la differenza di potenziale V fra le sue estremità e la corrente elettrica I che scorre in esso).
Un elemento di circuito può possedere anche una capacità C e un'induttanza L
che (parlando in modo semplice) descrivono la sua tendenza a resistere
ai cambiamenti di differenza di potenziale e di corrente rispettivamente.
L'elemento di circuito, invece di dover essere descritto da due diversi numeri reali V e I,
può essere descritto da un singolo numero complesso z = V + i I

[NOTA: a volte si usa, in questi contesti, il simbolo j al posto del simbolo i per indicare l'unità immaginaria,
proprio perché una I - maiuscola o anche minuscola - è già "impegnata" per indicare l'intensità della corrente].

Analogamente, l'induttanza e la capacità possono essere pensate
come la parte reale e [il coeff. della parte] immaginaria di un altro singolo numero complesso w = C + i L.
Le leggi dell'elettricità possono essere espresse usando l'addizione e moltiplicazione fra numeri complessi.

Un altro esempio è l'elettromagnetismo. Piuttosto che cercare di descrivere un campo elettromagnetico
tramite due quantità reali (l'intensità del campo elettrico e l'intensità del campo magnetico),
è meglio rappresentarla attraverso un singolo numero complesso,
di cui la componente elettrica e magnetica sono semplicemente le parti reale e immaginaria.

5. QUALCHE ESERCIZIO SUI NUMERI COMPLESSI

Premessa: le potenze successive dell'unità immaginaria

$i^0 = 1$ (*così come in* $\mathbb{R}$: "*un numero non nullo elevato a* 0 *dà, per definizione,* 1")

$i^1 = i$ (*così come in* $\mathbb{R}$: "*un numero elevato a* 1 *resta, per definizione, invariato*")

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$\boxed{i^4} = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = \boxed{+1}$

$i^5 = i^4 \cdot i = (+1)\cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (+1)\cdot i^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = (+1)\cdot i^3 = (+1)\cdot(-i) = -i$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (+1)\cdot i^4 = (+1)\cdot(+1) = +1$

$i^9 = i^8 \cdot i = (+1)\cdot i = i$

...

Le potenze successive dell'unità immaginaria i
hanno dunque un andamento "ciclico":
continuano a ripetere all'infinito sempre il medesimo ritornello $\boxed{1 \;\; i \;\; -1 \;\; -i}$



esponente n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
risultato i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	...

ESERCIZI

1) $\left(\frac{2}{3}i\right)^2$ 2) $\left(-\frac{2}{3}i\right)^2$ 3) $\left(\frac{1}{2}i\right)^3$ 4) $\left(\frac{1}{2}i\right)^4$ 5) $i(2+i)$ 6) $(7+5i)+(-9+4i)$ 7) $(7+5i)-(-9+4i)$

8) $(7+5i)\cdot(-9+4i)$ 9) $(3-2i)\cdot(3+2i)$ 10) $\frac{2+i}{3-i}$ 11) $\frac{3}{5+6i}$ 12) $(5+3i)^2$ 13) $\left(\frac{1}{2}-3i\right)^2$ 14) $\frac{(2+i)(3-i)}{i}$

15) i^{29} 16) $i^{371}+i^{372}+i^{373}+i^{374}$ 17) $(1+i)^3$ 18) $(1+i)^6$ 19) $i^{30}+i^{300}$ 20) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)^2$ 21) $\sqrt{-16}$

22) $\frac{1}{i^{23}}$ 23) $\sqrt{-7}$ 24) $6\left(\frac{2}{3}-i\right)-5(1-3i)$ 25) $\frac{1+i}{3-4i}$ 26) $\left(\sqrt{2}-i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)+\frac{1}{i^{14}}$ 27) $\frac{i^4+2i}{2i}$ 28) $\frac{1+i}{1-i}$ 29) $\frac{1}{\pi i}$

30) $(a+bi)^2$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 31) $(a+bi)(a-bi)$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 32) $i\cdot[(1+i)(2+i)-(1-i)(3-i)]$ 33) $(2-i)^4$

34) Quale fra le seguenti uguaglianze è FALSA?

(a) $i^{176}=1$ (b) $\frac{1}{i^3}=i^5$ c) $\frac{1}{i}+i^3=0$ d) $\frac{1}{i^{10}}=i^2$

Da www.cliffsnotes.com:

35) The values of a and b (with $b>0$) which satisfy $(a+bi)^2=5+12i$ are:
(a) $a=3, b=-2$ (b) $a=3, b=2$ (c) $a=2, b=3$ (d) $a=2, b=-3$

36) The solution of the equation $(3-i)(z+4-2i)=10+20i$ is:
(a) $z=1-3i$ (b) $z=-3+9i$ (c) $z=46-52i$ (d) $z=5+5i$

37) Trova per tentativi i due numeri complessi $a+bi$ il cui quadrato è $2i$

38) Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni di 2° grado:
a) $x^2-4x+13=0$
b) $2x^2+2x+3=0$
c) $9x^2+1=0$

RISULTATI

1) $-\frac{4}{9}$ 2) $-\frac{4}{9}$ 3) $-\frac{1}{8}i$ 4) $\frac{1}{16}$ 5) $-1+2i$ 6) $-2+9i$ 7) $16+i$ 8) $-83-17i$ 9) 13 10) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 11) $\frac{15}{61}-\frac{18}{61}i$

12) $16+30i$ 13) $-\frac{35}{4}-3i$ 14) $1-7i$ 15) i 16) 0 17) $-2+2i$ 18) $-8i$ 19) 0 20) $-1+2i\sqrt{6}$ 21) $\pm 4i$ 22) i

23) $\pm i\sqrt{7}$ 24) $-1+9i$ 25) $-\frac{1}{25}+\frac{7}{25}i$ 26) 2 27) $1-\frac{1}{2}i$ 28) i 29) $-\frac{1}{\pi}i$ 30) a^2-b^2+2abi 31) a^2+b^2

32) $-7-i$ 33) $-7-24i$ 34) c 35) b 36) b 37) $\begin{matrix}1+i,\\ -1-i\end{matrix}$ 38) a) $x=2\pm 3i$ b) $x=\frac{-1\pm i\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$ c) $x=\pm\frac{1}{3}i$

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - SECONDA PARTE

NOTA - *Preliminare a questi argomenti, è la conoscenza dei "numeri complessi"* (*capitolo precedente*)

a) RELAZIONI FRA SOLUZIONI E COEFFICIENTI IN UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO

In ogni equazione di 2° grado

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

la somma e il prodotto delle soluzioni sono legati ai coefficienti dalle formule:

$$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1x_2=\frac{c}{a}}$$

$$ax^2+bx+c=0; \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$\boxed{x_1+x_2=} \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\cancel{-\sqrt{\Delta}}\cancel{-b+\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-2b}{2a}\boxed{=-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1\cdot x_2=} \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}\cancel{-b^2}+4ac}{\cancel{4}a\cancel{^2}}\boxed{=\frac{c}{a}}$$

Esempio 1. Le soluzioni dell'equazione $2x^2-5x-3=0$ hanno per somma $-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ e per prodotto $\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}$

Risolvi l'equazione e verificalo direttamente!

Esempio 2. Le soluzioni dell'equazione $x^2+4x+5=0$ non esistono in campo reale;

sono due numeri complessi, la cui somma è $-\frac{b}{a}=-4$ e il cui prodotto è $\frac{c}{a}=5$

b) TROVARE DUE NUMERI CONOSCENDONE LA SOMMA s E IL PRODOTTO p

Il problema si può risolvere in più modi (vedi ⇨); tuttavia,

basta scrivere l'equazione di 2° grado $\boxed{x^2-sx+p=0}$ **e risolverla.**

Le soluzioni di questa equazione saranno i due numeri cercati!

Infatti, tali due soluzioni avranno per somma $-\frac{b}{a}=-\frac{-s}{1}=s$ e per prodotto $\frac{c}{a}=\frac{p}{1}=p$.

Esempio: trovare due numeri sapendo che la loro somma è $s=4\sqrt{3}$ e il loro prodotto è $p=11$.

$$x^2-4\sqrt{3}\cdot x+11=0; \qquad x_{1,2}=2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-11}=\begin{cases}2\sqrt{3}-1\\2\sqrt{3}+1\end{cases}$$

NOTA Se nell'equazione $x^2-sx+p=0$ è $\Delta=0$, allora i due numeri sono uguali;
se è $\Delta<0$, i due numeri sono complessi: in $\mathbb{R}$, non esistono.

ESERCIZI (trovare due numeri conoscendone somma e prodotto)

1) $s=134,\ p=1353$ 2) $s=4,\ p=1$ 3) $s=2,\ p=-575$ 4) $s=54,\ p=729$

5) $s=\frac{7}{6},\ p=\frac{1}{3}$ 6) $s=-\frac{5}{6},\ p=-1$ 7) $s=0,\ p=-5$ 8) $s=5,\ p=5$

9) $s=2\sqrt{3},\ p=1$ 10) $s=-4\sqrt{3},\ p=12$ 11) $s=4k\sqrt{2},\ p=6k^2$ 12) $s=a^2+2,\ p=a^3+1$

RISULTATI

1) 11, 123 2) $2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$ 3) −23, 25 4) 27, 27

5) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}$ 6) $-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$ 7) $\sqrt{5},\ -\sqrt{5}$ 8) $\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

9) $\sqrt{3}+\sqrt{2},\ \sqrt{3}-\sqrt{2}$ 10) $-2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3}$ 11) $k\sqrt{2},\ 3k\sqrt{2}$ 12) $a+1,\ a^2-a+1$

c) FORMULA GENERALE PER SCOMPORRE IN FATTORI UN TRINOMIO DI 2° GRADO

Indicato con ax^2+bx+c il trinomio da scomporre, per effettuare la scomposizione basterà scrivere l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ("equazione associata" al trinomio considerato), e risolverla. Dette x_1, x_2 le soluzioni di questa (NOTE)**, si avrà:**

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

NOTE

♪ Se le due soluzioni coincidono ($\Delta=0$: $x_1=x_2$) la formula rimane pienamente valida, e può essere riscritta come $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_1)=a(x-x_1)^2$

Quindi (IMPORTANTE!): **se $\Delta=0$, il trinomio ax^2+bx+c è uguale al QUADRATO DI UN BINOMIO, moltiplicato eventualmente per una costante.**



♫ **Se $\Delta<0$, il trinomio non è scomponibile in campo reale** (= utilizzando solo coefficienti reali); **tuttavia, volendo, si può pensare alle due soluzioni complesse x_1, x_2 dell'equazione associata, e allora la formula rimane pienamente valida.**

DIMOSTRAZIONE, o meglio: "costruzione" della formula

$$\boxed{ax^2+bx+c}=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=$$

$$=a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right)=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=\boxed{a(x-x_1)(x-x_2)}\quad \text{C.V.D.}$$

Esempio 1. Scomporre in fattori il trinomio $6x^2+x-1$.

Equazione associata :

$$6x^2+x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{-1\pm5}{12}=\begin{cases}\boxed{-1/2}\\ \boxed{1/3}\end{cases}$$

$$6x^2+x-1=6\cdot\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left(x-\frac{1}{3}\right)=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\cancel{6}\cdot\frac{2x+1}{\cancel{2}}\cdot\frac{3x-1}{\cancel{3}}=(2x+1)(3x-1)$$

Esempio 2. Fattorizzare $y^2-4y\sqrt{3}+12$. *Immagino nella mia mente* l'equazione associata e la risolvo:

$$y_{1,2}=2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-12}=2\sqrt{3}\pm0=\boxed{2\sqrt{3}}$$

$$y^2-4y\sqrt{3}+12=\left(y-2\sqrt{3}\right)\left(y-2\sqrt{3}\right)=\left(y-2\sqrt{3}\right)^2$$

ESERCIZI (fattorizzazione di un trinomio di 2° grado)

1) $8x^2-6x+1$
2) $3x^2+10x-8$
3) $6x^2-5x\sqrt{2}+2$
4) x^2-2x-1
5) $x^2-2x\sqrt{5}+5$
6) $12x^2-16mx-3m^2$
7) $x^2+2ax\sqrt{2}-16a^2$
8) x^2-6x+1
9) $2y^2+3y\sqrt{3}-6$
10) $24a^2+10a-25$
11) $z^2+z\left(1-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-2$
12) $d^2-2d\left(3-\sqrt{2}\right)+\left(11-6\sqrt{2}\right)$
13) $6x^2-13ax+6a^2$
14) $3y^2+4ty-4t^2$
15) $a^2+4ab-12b^2$

RISULTATI

1) $(2x-1)(4x-1)$
2) $(3x-2)(x+4)$
3) $\left(2x-\sqrt{2}\right)\left(3x-\sqrt{2}\right)$
4) $\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right)$
5) $\left(x-\sqrt{5}\right)^2$
6) $(6x+m)(2x-3m)$
7) $\left(x-2a\sqrt{2}\right)\left(x+4a\sqrt{2}\right)$
8) $\left(x-3+2\sqrt{2}\right)\left(x-3-2\sqrt{2}\right)$
9) $\left(2y-\sqrt{3}\right)\left(y+2\sqrt{3}\right)$
10) $(4a+5)(6a-5)$
11) $(z-1)\left(z+2-\sqrt{2}\right)$
12) $\left(d+\sqrt{2}-3\right)^2$
13) $(2x-3a)(3x-2a)$
14) $(3y-2t)(y+2t)$
15) $(a-2b)(a+6b)$

d) REGOLA DI CARTESIO

Questa regola

permette di stabilire qual è il segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado assegnata (vale a dire: di stabilire se sono entrambe positive, oppure entrambe negative, oppure discordi) senza risolvere l'equazione stessa.

Premessa

In un'equazione di 2° grado, diciamo
che vi è una "**permanenza**" se due coefficienti consecutivi hanno lo stesso segno;
che vi è una "**variazione**" se due coefficienti consecutivi hanno segni opposti.

Esempio: $x^2 - 5x - 6 = 0$
$+ \quad - \quad -$
V P

REGOLA DI CARTESIO
In un'equazione di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$,
- **ad ogni PERMANENZA corrisponde una soluzione NEGATIVA,**
- **e a ogni VARIAZIONE corrisponde una soluzione POSITIVA;**

nel caso, poi, che si abbia
una permanenza e poi una variazione, oppure una variazione seguita da una permanenza,
la soluzione di valore assoluto maggiore è:
quella negativa, se viene prima la permanenza, quella positiva se viene prima la variazione.

NOTA: naturalmente, **la regola di Cartesio vale soltanto a condizione che sia $\Delta \geq 0$,**
perché se $\Delta < 0$ non si hanno soluzioni in $\mathbb{R}$; volendo, le soluzioni esistono in $\mathbb{C}$,
ma quando ci riferiamo a numeri complessi non ha senso parlare di "positività" o "negatività".

Specchietto per la dimostrazione della regola di Cartesio

a	b	c	Situazione permanenze e variazioni	x_1x_2 $\frac{c}{a}$	$x_1 + x_2$ $-\frac{b}{a}$	x_1	x_2	Soluzione di valore assoluto maggiore (in caso di soluzioni discordi)
+	+	+	2 permanenze	+	−	−	−	
+	+	−	1 permanenza e poi 1 variazione	−	−	−	+	quella negativa
+	−	+	2 variazioni	+	+	+	+	
+	−	−	1 variazione e poi 1 permanenza	−	+	−	+	quella positiva

NOTA allo specchietto

Nello specchietto si suppone sempre che il 1° coefficiente sia positivo, perché questa ipotesi *non è restrittiva*: se, infatti, il 1° coefficiente fosse negativo, potremmo sempre cambiare tutti i segni, riconducendoci ad un 1° coefficiente positivo; … e così facendo, le permanenze resterebbero permanenze, le variazioni resterebbero variazioni, e le soluzioni non cambierebbero.

ESEMPI

a) $45x^2 - 18x + 1 = 0$
$+ \quad - \quad +$
V V

2 Variazioni, quindi: 2 soluzioni positive.

b) $x^2 + 2x - 48 = 0$
$+ \quad + \quad -$
P V

1 Permanenza seguita da 1 Variazione: quindi, soluzioni discordi, e la soluzione "prevalente" (= di valore assoluto maggiore) è quella negativa, perché viene prima la permanenza.

c) $x^2 - 6x + 10 = 0$

ATTENZIONE: **qui la regola non è applicabile**, perché è $\Delta < 0$



ESERCIZIO. Stabilisci quante sono le soluzioni *reali positive* dell'equazione di 2° grado $x^2 - 4x + k = 0$
a) Se $k = 12$ b) Se $k = -12$ c) Se $k = 1$ Risposte: nell'ordine, le 3 cifre dopo la virgola del numero decimale che corrisponde alla frazione 3/250

e) QUESITI SULLE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI 2° GRADO

E' data l'equazione

$$(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0$$

Si chiede di determinare il parametro *m* in modo che:

i) la somma delle soluzioni valga 4
ii) il prodotto delle soluzioni valga 2
iii) le soluzioni siano coincidenti
iv) una soluzione sia uguale a 2
v) la somma dei quadrati delle soluzioni sia 10
vi) le soluzioni siano reciproche l'una dell'altra
vii) le soluzioni siano antireciproche
viii) le soluzioni siano opposte

i)

$\boxed{?m/\ \ x_1+x_2=4}$

$-\frac{b}{a}=4$

$\frac{m+5}{m-1}=4$

$m+5=4m-4 \quad (m\neq 1)$

$-3m=-9$

$m=3$

Sappiamo che in ogni equazione di 2° grado la somma delle soluzioni è sempre uguale a $-\frac{b}{a}$ (opposto del rapporto fra il secondo e il primo coefficiente).
Porremo perciò la condizione $-\frac{b}{a}=4$, per poi cercare i valori del parametro che la soddisfano.

Abbiamo trovato m=3. Facciamo la verifica!
Andiamo a vedere cosa diventa la nostra equazione nel caso m=3,
e risolviamola, per controllare che la somma delle soluzioni valga proprio 4:

$(3-1)x^2-(3+5)x+2\cdot 3=0; \quad 2x^2-8x+6=0; \quad (x-1)(x-3)=0; \quad x=1\vee x=3\rightarrow 1+3=4,\ OK!$

ii)

$\boxed{?m/\ \ x_1x_2=2}$

$\frac{c}{a}=2$

$\frac{2m}{m-1}=2$

$2m=2m-2 \quad (m\neq 1)$

$0=-2$ IMPOSSIBILE

Sappiamo che in ogni equazione di 2° grado il prodotto delle soluzioni è sempre uguale a $\frac{c}{a}$ (rapporto fra il termine noto e il primo coefficiente)
Porremo perciò la condizione $\frac{c}{a}=2$, per poi cercare i valori del parametro che la soddisfano.

Abbiamo trovato un'equazione, nell'incognita m, impossibile.
Ciò significa che non esiste alcun valore di m per cui il prodotto delle soluzioni valga 2.
Insomma, nella famiglia delle infinite equazioni $(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0$,
non ne esiste nemmeno una nella quale il prodotto delle soluzioni valga 2.

iii)

$\boxed{?m/\ \ x_1=x_2}$

$\Delta=0 \quad (b^2-4ac=0)$

$(m+5)^2-8m(m-1)=0$

$m^2+10m+25-8m^2+8m=0$

$-7m^2+18m+25=0$

$7m^2-18m-25=0$



MOLTO IMPORTANTE !!!
In un'equazione di 2° grado
le **SOLUZIONI** sono **COINCIDENTI** se e solo se **$\Delta = 0$**

Nel caso poi in cui b sia pari, converrà rimpiazzare questa condizione con **$\Delta/4 = 0$** (equivalente ma più comoda).
Ad esempio, l'equazione $x^2+2(2-k)x-(2+9k)=0$
ha soluzioni coincidenti quando $\frac{\Delta}{4}=(2-k)^2+(2+9k)=0$ ossia
$4-4k+k^2+2+9k=0; \ \ k^2+5k+6=0; \ \ \ldots \ \ k=-3\vee k=-2$

$m_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+175}}{7}=\frac{9\pm\sqrt{256}}{7}=\frac{9\pm 16}{7}=\begin{cases}-1\\ 25/7\end{cases}$

Verifica nel caso $m=-1$

$(-1-1)x^2-(-1+5)x+2(-1)=0$
$-2x^2-4x-2=0; \quad x^2+2x+1=0; \quad (x+1)^2=0;$
$x_1=x_2=-1 \rightarrow$ *soluzioni coincidenti, OK*

Fai tu, caro studente, la verifica con m = 25/7.

… Certo, sarebbe pure possibile:
1) risolvere l'equazione, trovando x_1 e x_2 che sarebbero espressioni con *m* sotto radice
2) uguagliare le due espressioni, ottenendo *in questo modo* l'equazione finalizzata a determinare *m*.

Tale procedimento sarebbe però inutilmente lungo e ingombrante!

iv)

$\boxed{?m/\ x=2}$

Sostituiamo...

$$(m-1)\cdot 2^2-(m+5)\cdot 2+2m=0$$
$$4m-4\cancel{-2m}-10\cancel{+2m}=0$$
$$4m=14$$
$$m=7/2$$

BANALE, MA IMPORTANTE:
una data equazione ammette come soluzione un determinato numero se e solo se, sostituendo quel numero al posto dell'incognita, si ottiene un'uguaglianza vera.

Verifica tu, caro lettore, che con m=7/2 l'equazione ammette le due soluzioni x=7/5 e, appunto, x=2.

v)

$\boxed{?m\ /\ x_1^2+x_2^2=10}$

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$$
$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=10$$
$$\left(\frac{m+5}{m-1}\right)^2-2\frac{2m}{m-1}=10$$
$$(m+5)^2-4m(m-1)=10(m-1)^2 \qquad (m\neq 1)$$
$$\dots\ 13m^2-34m-15=0$$
$$m_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289+195}}{13}=\frac{17\pm 22}{13}=\begin{cases}-\frac{5}{13}\\ \frac{39}{13}=3\end{cases}$$

La verifica, in ciascuno dei due casi, è lasciata allo studente.

Con $m=-\frac{5}{13}$

le due soluzioni sono irrazionali; tuttavia, come si constata col calcolo, la somma dei loro quadrati dà proprio 10.

♥ LE FORMULE DI WARING

Vale l'identità $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$
che ci permette di ricondurre la somma dei quadrati alla somma e al prodotto delle basi.

Abbiamo, in pratica, utilizzato la prima di una sequenza di formule, chiamate **formule di Waring**, le quali **permettono di esprimere una somma di due potenze di ugual grado** (quadrati, cubi, …) **in funzione della somma delle basi e del loro prodotto.**

$$\boxed{x^2+y^2}=x^2+2xy+y^2-2xy=\boxed{(x+y)^2-2xy}$$

$$\boxed{x^3+y^3}=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2=$$
$$=\boxed{(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

$$\boxed{x^4+y^4}=(x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3=$$
$$=(x+y)^4-4xy(x^2+y^2)-6x^2y^2=$$
$$=(x+y)^4-4xy\left[(x+y)^2-2xy\right]-6x^2y^2=$$
$$=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+8x^2y^2-6x^2y^2=$$
$$=\boxed{(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2}$$

...

vi)

$\boxed{?m\ /\ x_1=\frac{1}{x_2}}$

$$x_1x_2=1$$
$$\frac{c}{a}=1$$
$$\frac{2m}{m-1}=1$$
$$\dots\ m=-1$$

Ricordiamo che due numeri si dicono "reciproci" se il loro prodotto è 1 quindi se ognuno di essi è uguale a "1 fratto l'altro". Ad esempio, sono reciproci i numeri 4 e $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{5}$ e $-\frac{5}{3}$

vii)

$\boxed{?m\ /\ x_1=-\frac{1}{x_2}}$

$$x_1x_2=-1$$
$$\frac{c}{a}=-1$$
$$\frac{2m}{m-1}=-1$$
$$\dots\ m=1/3$$

"Antireciproco" significa "l'opposto del reciproco". Ad es., sono antireciproci i due numeri $\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{2}$.

Due numeri sono antireciproci se e solo se hanno per prodotto -1.

viii)

$\boxed{?m/x_1=-x_2}$

$$x_1+x_2=0$$
$$-\frac{b}{a}=0$$
$$\frac{m+5}{m-1}=0$$
$$\dots\ m=-5$$

Molto semplice: due numeri sono opposti se e solo se la loro somma è 0.

Verifica. La nostra equazione $(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0$ *diventa, con* $m=-5$,
$$(-5-1)x^2-(-5+5)x+2(-5)=0;\quad -6x^2-10=0;\quad 3x^2+5=0$$

Ora, in campo reale questa equazione NON ha soluzioni opposte, come si desiderava, bensì è impossibile; tuttavia, sconfinando in campo complesso si può scrivere:

$x^2=-\frac{5}{3}$; $x=\pm\sqrt{-\frac{5}{3}}=\pm i\sqrt{\frac{5}{3}}$ *quindi si ottengono due soluzioni effettivamente opposte.*

Ricapitolando, il valore richiesto di m

- *non esiste se intendiamo che le soluz. debbano obbligatoriamente appartenere a* $\mathbb{R}$,
- *esiste ed è m=–5 se ammettiamo che le soluzioni possano essere cercate in tutto* $\mathbb{C}$.

ESERCIZI (quesiti sulle equazioni parametriche di 2° grado)

E' richiesto, in ciascun esercizio, dopo aver determinato il valore desiderato del parametro, di calcolare pure qual è il valore delle soluzioni nel caso specifico. Ciò servirà anche da verifica.

Nell'equazione …	determinare il parametro (o i parametri) in modo che …
1) $x^2+2ax+a+6=0$	le soluzioni coincidano
2) $(b-1)x^2+bx+(1-b)=0$	$\sqrt{2}$ sia soluzione
3) $x^2-4mx+m-1=0$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano reciproche 3. le soluzioni siano antireciproche 4. una soluzione sia nulla
4) $(2-a)x^2+2(3-a)x+4=0$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano uguali 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche
5) $q(x^2+1)=4x$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano reciproche 3. le soluzioni siano uguali 4. le soluzioni abbiano per somma 4
6) $x^2-(3a+2b+1)x+a+b+1=0$	le soluzioni siano i numeri 1 e 2
7) $(a-1)x^2+ax+(a-1)=0$	1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$ 2. l'equazione data abbia una soluzione in comune con l'equazione $x^2-4x+3=0$
8) $kx^2+(5k-1)x+4=0$	1. $x_1\equiv x_2$ 2. $x_1{}^2+x_2{}^2=65/4$ 3. una soluzione sia -4
9) $x^2=\frac{4ax-3}{a}$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. una soluzione sia 3 4. la somma delle soluzioni sia 4 5. la somma delle soluzioni sia -4 6. $x_1\cdot x_2=3$ 7. il prodotto delle soluzioni sia 6 8. le soluzioni siano reciproche
10) $kx^2+(2k+1)x+k=0$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche
11) $kx^2+2(k+1)x+(k+2)=0$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche 5. la somma dei quadrati delle soluzioni sia 10
12) $(m+4)x^2+(m-1)x-1=0$	1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$ 2. $\frac{1}{x_1{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2}=10$
13) $cx^2-cx+2=0$	1. $x_1{}^3+x_2{}^3=7$ 2. $x_1{}^4+x_2{}^4=\frac{1}{8}$
14) Per quali valori dei parametri a, b le due equazioni $2x^2+7x=4$ e $(a+3b)x^2+2ax-(a+b+2)=0$ hanno le stesse soluzioni?	
15) Scrivi un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni i due numeri -8 e 3.	
16) Nell'equazione $x^2-(k+5)x+2(2k+1)=0$ determina k in modo che le soluzioni siano una doppia dell'altra INDICAZIONE: si potrebbe risolvere, ottenendo le soluzioni come espressioni contenenti k, poi cercare i valori di k per cui risulti $x_1=2x_2$ oppure $x_2=2x_1$; tuttavia, le equazioni nell'incognita k ottenute in questo modo conterrebbero k sotto radice e sarebbero, dunque, equazioni "irrazionali"; ora, il discorso su tali tipi di equazioni, risolvendo le quali è possibile imbattersi in soluzioni "non accettabili", non è stato ancora trattato. C'è d'altra parte un metodo molto migliore: il sistema $\begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_1+x_2=k+5 \\ x_1\cdot x_2=2(2k+1) \end{cases}$ porta a determinare x_1, x_2, k. Pur essendo il sistema di 2° grado, ci puoi provare: non è difficile.	
17) Nell'equazione $(h+1)x^2+3hx-2h=0$ determina h in modo che il rapporto delle soluzioni sia -4	
18) Nell'equazione $x^2-2(m+1)x+4m+3=0$ determina m in modo che $x_2-x_1=2$ (vedi esercizio 16)	
19) Nell'equazione $x^2-2(m+1)x+4m+3=0$ determina m in modo che $\lvert x_1+x_2\rvert=10$	
20) Nell'equazione $rx^2-2rx-24=0$ determina r in modo che le soluzioni: 1. siano uguali 2. siano opposte 3. siano reciproche 4. abbiano prodotto 3 5. abbiano rapporto 3	

RISPOSTE

1) $a=-2$ (in questo caso $x_1=x_2=2$) oppure $a=3$ (in questo caso $x_1=x_2=-3$)
Ricorda che la condizione da porre è, per le soluzioni coincidenti, $\Delta=0$; qui è meglio, dato che il "b" è pari, $\frac{\Delta}{4}=0$

2) $b=\sqrt{2}-1$
L'altra soluzione è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) 1. $m=0$ $(x=\pm 1)$
2. $m=2$. In questo caso si ha $x_{1,2}=4\pm\sqrt{15}$, e questi numeri sono fra loro reciproci in quanto
- moltiplicandoli, si ottiene 1 (verificalo!)
- oppure, facendo ad es. il calcolo $1/x_1$, si ottiene, dopo razionalizzazione, x_2

3. $m=0$ $(x=\pm 1)$ 4. $m=1$ (l'altra soluz. vale 4)

4) 1. $a=3$ 2. $a=1$ 3. $a=-2$ 4. $a=6$

5) 1. Impossibile, nessun valore di q 2. Qualsiasi valore di q eccetto 0 3. $q=\pm 2$ 4. $q=1$

6) $a=0,\ b=1$ Sostituendo al posto di x prima il valore 1, poi 2, si hanno due condizioni, di cui si fa il sistema.

7) 1. $a=2/3$. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}$ ...
2. $a=2/3,\ a=10/13$

8) 1. $k=1\ (x_{1,2}=-2)\ \vee\ k=1/25\ (x_{1,2}=10)$
2. $k=2\left(x_1=-4,\ x_2=-\frac{1}{2}\right)\ \vee\ k=\frac{2}{35}\left(x_{1,2}=\frac{25\pm 3i\sqrt{55}}{4}\right)$
3. $k=2$ (l'altra soluzione è $-1/2$)

9) 1. $a=3/4$ 2. nessun valore di a 3. $a=1$ 4. qualsiasi valore di a, tranne 0 5. nessun valore di a 6. $a=1$
7. $a=1/2$. In questo caso le soluz. sono due numeri complessi, $2-i\sqrt{2}$ e $2+i\sqrt{2}$, il cui prodotto è appunto 6.
8. $a=3$. In questo caso le soluzioni sono due numeri irrazionali, $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$, appunto reciproci fra loro: puoi constatarlo
- ♪ moltiplicandoli (otterrai 1, e due numeri sono reciproci se e solo se il loro prodotto è 1)
- ♫ oppure eseguendo per esempio il calcolo $\boxed{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}\ \boxed{=2+\sqrt{3}}$

10) 1. $k=-1/4$ 2. $k=-1/2$ (ma in questo caso le soluzioni sono complesse; in $\mathbb{R}$, il problema è impossibile)
3. Qualsiasi valore di k, tranne 0 4. Impossibile, nessun valore di k

11) 1. Impossibile
2. $k=-1$
3. Impossibile
4. $k=-1$
5. $k=1,\ k=-1/2$

12) 1. $m=2$
2. $m=\pm 1$
Denom. comune, innanzitutto …

13) 1. $c=-1$
2. $c=8\left(x_1=x_2=\frac{1}{2}\right)\ \vee\ c=\frac{8}{7}$ (soluz. complesse)
Si utilizzano le formule di Waring, pag. 65.

14) $a=7,\ b=-1$

15) Si potrebbe pensare alla generica equazione $ax^2+bx+c=0$ e imporre che $-8, 3$ ne siano soluzioni; si otterrebbe così il sistema $\begin{cases}64a-8b+c=0\\9a+3b+c=0\end{cases}$ che non ha una sola soluzione, bensì ne ha infinite, perché è verificato da tutte le terne a, b, c per le quali $b=5a,\ c=-24a$, con a qualsiasi.
Ad esempio, una terna che "va bene" è $a=1, b=5, c=-24$; un'altra è $a=-3, b=-15, c=72$ …
Moltiplicando tutti i coefficienti di un'equazione per uno stesso numero, le soluzioni non cambiano!
Tuttavia, c'è un modo molto veloce ed efficace per scrivere un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni due numeri assegnati: nel nostro caso, l'equazione cercata è semplicemente $(x+8)(x-3)=0$
(anche tutte le equazioni ottenibili moltiplicando quella per una costante risolverebbero il problema).

♥ *In generale*: un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni due valori assegnati r, s è semplicemente la $(x-r)(x-s)=0$.
Altro es.: un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni $-\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ è $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=0$ che si può riscrivere come $(3x+2)(4x-3)=0$.

16) $k=4$ 17) $h=1$ (perché $h=0$ non va bene?) 18) $m=-1,\ m=3$ 19) $m=4,\ m=-6$
20) 1. $r=-24$ 2. nessun valore di r 3. $r=-24$ 4. $r=-8$ (però con soluzioni complesse) 5. $r=-32$

Puoi andare a vedere come sono spiegate le equazioni di 2° grado sul bel sito www.themathpage.com di Lawrence Spector

TheMathPage Lawrence Spector

Di equazioni di 2° grado si parla anche nel capitolo su "Grafici e risoluzioni grafiche" (da pag. 106 a pag. 113)

OLTRE LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1. EQUAZIONI ALGEBRICHE, LORO SOLUZIONI E RISOLUBILITA'

Definizioni

Un'equazione si dice "**algebrica**" se è riconducibile alla forma **P(*x*) = 0 , con P(*x*) polinomio**

Dicesi "**grado**" di un'equazione algebrica P(*x*) = 0 , il grado del polinomio P(*x*)

❑ QUANTE SOLUZIONI HA UN'EQUAZIONE ALGEBRICA ?

Alla domanda risponde il "Teorema Fondamentale dell'Algebra",
di cui abbiamo già parlato a pag. 56, nel capitolo sui Numeri Complessi.

La prima dimostrazione del T.F.A. viene attribuita al tedesco Gauss (1777-1855) e datata 1799, anche se tale dimostrazione, non esente da pecche, dovette essere successivamente perfezionata ad opera del francese Jean Robert Argand (1768-1822) e dello stesso Friedrich Gauss.

Teorema Fondamentale dell'Algebra (T.F.A.)

♥ **Un'equazione algebrica di grado *n* a coefficienti reali o complessi ammette esattamente *n* soluzioni, purché si intenda di cercare le soluzioni in campo complesso e si conti ciascuna soluzione con la "molteplicità" (NOTA) che le compete.**

NOTA
La definizione di **molteplicità di una soluzione di un'equazione algebrica** (sinonimo di "soluzione" è "radice") può essere formulata in diversi modi equivalenti.
Ad esempio, possiamo dire che
una soluzione α *di un'equazione algebrica* $P(x)=0$ *ha molteplicità k se e solo se il fattore* $(x-\alpha)$ *compare per esattamente k volte nella scomposizione del polinomio P in fattori di 1° grado.*
Si può dimostrare (vedi pag. 56) che una scomposizione in fattori "lineari" (= di 1° grado) esiste certamente per *ogni* polinomio a coefficienti reali o complessi, anche se non è possibile costruire alcun algoritmo di carattere generale che permetta di effettuarla, "nella pratica", per un polinomio arbitrario.

- Esempio 1

$x^4+2x^3-15x^2=0$
$x^2(x^2+2x-15)=0$
$x^2=0 \;\; (x\cdot x=0) \rightarrow \;\; x_1=x_2=0, \;\; o\ anche: "x=0\ soluzione\ di\ molteplicità\ 2"$
$x^2+2x-15=0 \rightarrow \;\; x_3=-5, \;\; x_4=3 \;\; (con\ la\ formula\ oppure\ per\ scomposizione)$

Dunque abbiamo trovato **4 soluzioni, tante quant'è il grado**, a patto di tener conto che la soluzione $x = 0$ "va contata 2 volte", "è soluzione doppia", "è soluzione di molteplicità 2".

- Esempio 2

$x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8=0$
Scomponiamo con Ruffini ottenendo:
$(x-2)^3(x^2+1)=0$
da cui:
$(x-2)^3=0 \;\rightarrow\; x=2 \quad (molteplicità\ 3)$
$x^2+1=0 \;\rightarrow\; nessuna\ soluzione\ in\ \mathbb{R},\ ma\ in\ \mathbb{C}:\ x^2=-1,\ da\ cui\ \ x=\pm i$
Anche:
$(x-2)(x-2)(x-2)(x+i)(x-i)=0$ in quanto $(x+i)(x-i)=x^2-i^2=x^2-(-1)=x^2+1$
In definitiva, le soluzioni sono: $\begin{cases} x=2 & (molteplicità\ 3) \\ x=-i & (molteplicità\ 1) \\ x=i & (molteplicità\ 1) \end{cases}$
Volendo si può scrivere: $x_1=2 \quad x_2=2 \quad x_3=2 \quad x_4=-i \quad x_5=i$
Le soluzioni risultano quindi essere 5, cioè esattamente tante quant'è il grado dell'equazione.
Se invece avessimo lavorato esclusivamente in campo reale, avremmo trovato una sola soluzione ($x=2$) o, tenendo conto della molteplicità, 3 soluzioni $x_1=x_2=x_3=2$.

❑ ESISTONO FORMULE PER LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO SUPERIORE AL 2°?

Abbiamo visto che **le equazioni di 2° grado** $ax^2+bx+c=0$ **ammettono una formula risolutiva**:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$ FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI 2° GRADO

Anche le equazioni di 1° grado $ax+b=0$
ammettono un procedimento risolutivo, che, volendo, si può sintetizzare in una formula:

$ax+b=0;\ \ ax=-b;\ \ \boxed{x=-\frac{b}{a}}$ FORMULA RISOLUTIVA DELL' EQUAZIONE DI 1° GRADO

Già 4000 anni fa circa, i babilonesi sapevano affrontare un'equazione di 2° grado
(purché avesse almeno una soluzione positiva),
con procedimenti che sostanzialmente equivalevano all'applicazione della formula da noi attualmente usata.

Bene!

♥ **Pure le equazioni di 3° e di 4° grado ammettono la loro formula risolutiva**;
tali formule furono scoperte nel XVI secolo
(apparvero per la prima volta in un testo del **1545**, l' "Ars Magna" dell'italiano **Girolamo Cardano**).

♥ **E' stato invece dimostrato che le equazioni di 5° grado e di grado superiore al 5° non ammettono formula risolutiva**; cioè, che non può esistere alcuna formula
la quale permetta di calcolare, mediante un numero finito di operazioni sui coefficienti,
le soluzioni di una *generica* equazione di 5° grado, o di 6° grado, ecc.
Tale dimostrazione di impossibilità si deve ai due studiosi

- Niels Henrik **Abel** (norvegese, 1802-1829)
- ed Évariste **Galois** (francese, 1811-1832, ritenuto uno dei matematici più geniali di tutti i tempi).

Purtuttavia, per le equazioni di 5° grado o di grado superiore al 5°
esistono metodi che consentono di *approssimare* le soluzioni
(vale a dire, di calcolarle non proprio esattamente, ma comunque con la precisione desiderata).
Tali metodi, la cui applicazione al giorno d'oggi è facilitata dall'uso dei computer,
fanno parte di quella branca della Matematica che prende il nome di "**calcolo numerico**".

Per approfondimenti sulla storia delle equazioni algebriche
puoi ad esempio consultare un bell'articolo del professor Dario Palladino ⇨

In queste pagine non presenteremo le formule risolutive delle equazioni di 3° e di 4° grado,
e neppure i metodi di "calcolo numerico" cui accennavo prima; tuttavia

- *vedremo rapidamente alcuni metodi per la risoluzione di certe equazioni algebriche che costituiscono "**casi particolari**" (eq."binomie", "trinomie", risolubili "per fattorizzazione" o "con artifici")*
- *riprenderemo il **metodo grafico**, già presentato nel Volume 1, che permette di visualizzare e di approssimare le soluzioni di un'equazione qualsiasi (anche non algebrica!). Bisogna innanzitutto imparare a tracciare bene questi grafici con carta e matita; volendoli poi realizzare al computer, ci si può servire ad esempio dell'ottimo freeware GeoGebra.*

TERMINOLOGIA

❑ **Quando si parla di equazioni, talvolta al posto di "SOLUZIONE" si usa il sinonimo "RADICE".**
Per fare un esempio, l'equazione $3x-7=0$ ha una sola *radice*: il numero $7/3$.
Ancora: l'equazione $x^2-4x-5=0$ ha due radici, che sono -1 e 5.

❑ **Si dice "ZERO" di un polinomio ogni numero che, sostituito al posto della variabile del polinomio, rende quest'ultimo uguale a 0**.
Ad esempio, gli "zeri" del polinomio x^3-x sono i numeri $x=0,\ x=1,\ x=-1$.
Insomma, schematicamente: α è uno zero del polinomio $P(x)$ se e solo se risulta $P(\alpha)=0$.
Ovviamente, dato un polinomio $P(x)$, i suoi zeri non sono altro che le soluzioni o radici dell'equazione $P(x)=0$ (quest'ultima si dice "l'equazione associata al polinomio P").
Insomma, **gli zeri di un polinomio sono le soluzioni (= "radici") dell'equazione associata**.
E' lecito comunque, anche se un tantino improprio, parlare di "radici" (inglese: *roots*) pure con riferimento a un polinomio, anziché impiegare il termine "zeri".

Dal sito www.und.nodak.edu (Università del Nord Dakota)

Fundamental Theorem of Algebra

The fundamental theorem of algebra (FTA) states:
"Every polynomial of degree *n* with complex coefficients has *n* roots in the complex numbers".

Early work with equations only considered positive real **roots** so the FTA was not relevant.

Root = "radice" (anche in botanica!)
In matematica, "root" può significare
- "radice" nel senso di "radice quadrata, cubica …"

o anche, **parlando di equazioni**,
- "radice" nel senso di "**soluzione**"

e, **parlando di polinomi**,
- "radice" nel senso di "**zero**"

Cardan realized that one could work with numbers outside of the reals while studying a formula for the roots of a cubic equation. While solving $x^3 = 15x + 4$ using the formula he got an answer involving the square root of -121. He manipulated this to obtain the correct answer, $x = 4$, even though he did not understand exactly what he was doing with these "complex numbers" .

Girolamo **Cardano**, italiano (1501-1576)

In 1572 **Bombelli** created rules for these "complex numbers" .

Rafael **Bombelli**, italiano (1526-1572)

In 1637 **Descartes** said that one can "imagine" for every equation of degree *n*, *n* roots, but these imagined roots do not correspond to any real quantity.

René **Descartes o "Cartesio"**, filosofo e matematico francese (1596-1650)

Albert Girard, a Flemish mathematician, was the first to claim that there are always *n* solutions to a polynomial of degree *n* in 1629 in "L'invention en algèbre". He does not say that the solutions are of the form a + b*i*, a, b real. Many mathematicians accepted Girard's claim that a polynomial equation must have *n* roots, and proceeded to try to show that these roots were of the form a + b*i*, a, b real, instead of first showing that they actually existed.

Albert **Girard**, fiammingo (1595-1632)

This was the *downfall* of many attempts to prove the FTA. Various people tried to disprove and prove the FTA.

downfall = caduta, crollo

Leibniz gave a "proof" that the FTA was false in 1702 by saying $x^4 + t^4$ couldn't be written as the product of 2 real quadratic factors. He did not realize that the square root of *i* could be written in the form a + b*i* , a, b real. In 1742 **Euler** showed Leibniz's *counterexample* was incorrect.

Gottfried **Leibniz,** filosofo e matematico tedesco (1646-1716)
Leonhard **Euler (Euléro)**, svizzero (1707-1783)

counterexample = controesempio

D'Alembert in 1746 and Euler in 1749 attempted proofs of the FTA. **Lagrange** and **Laplace** attempted proofs, but also failed, as they were assuming the existence of roots.

Jean **d'Alembert** (1717-1783) filosofo, scienziato e matematico francese

Joseph-Louis **Lagrange** (1736-1813) scienziato e matematico franco-italiano

Pierre-Simon de **Laplace** (1749-1827) scienziato e matematico francese

Gauss is credited with the first proof of the FTA in his doctoral thesis of 1799. He *spotted* the error in the others' proofs, that they were assuming the roots existed and then trying to deduce properties of them. This proof has some gaps in it and is not considered rigorous by today's standards.

Carl Friedrich **Gauss**, tedesco (1777-1855)

to spot = (in questo caso) individuare, riconoscere, scoprire

In 1814 the Swiss accountant **Jean Robert Argand** published a proof of the FTA and two years later Gauss published a second proof.

Jean Robert **Argand**, svizzero (1768-1822)

This time Gauss's proof was complete and correct. He did a third proof the same year, and in 1849 a fourth proof was completed.

Queste brevi note storiche sul Teorema Fondamentale dell'Algebra ci hanno portato, in particolare, ad incontrare
- alcuni fra i più importanti **filosofi** di tutti i tempi come Cartesio e Leibniz,
- alcuni fra i sommi **matematici** di tutti i tempi come Eulero e Gauss,
- e alcuni fra i massimi **protagonisti della cultura e della scienza** come D'Alembert, Lagrange e Laplace.

2. LE "SOLUZIONI TROVATE PER STRADA"

Quando, in un'equazione,
càpita di poter semplificare per un'espressione contenente l'incognita,
la semplificazione si può effettuare, ma a patto di tener conto che
i valori dell'incognita, i quali annullano l'espressione per cui si semplifica,
sono soluzioni dell'equazione!
(infatti, se sostituiti in essa, la trasformerebbero nell'uguaglianza vera $0 = 0$)

Quindi occorrerà annotare a margine tali valori,
che mi piace chiamare, come faceva il mio caro insegnante di Liceo prof. Giampaolo Bandi,
"**soluzioni trovate per strada**".

Esempio:

$$(3x-6)(x^2-x+1)=x^2-4$$

$$3\cancel{(x-2)}(x^2-x+1)=(x+2)\cancel{(x-2)}$$

$\boxed{x=2 \text{ soluzione "trovata per strada"!!!}}$

$$3x^2-3x+3=x+2$$

$$3x^2-4x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\begin{cases}\boxed{1/3}\\ \boxed{1}\end{cases}$$

$\boxed{\text{Riepilogo soluzioni : } x=2,\ x=1/3,\ x=1}$

Si poteva anche procedere così:

$$3(x-2)(x^2-x+1)=(x+2)(x-2)$$

$$3(x-2)(x^2-x+1)-(x+2)(x-2)=0$$

$$(x-2)(3x^2-3x+3-x-2)=0$$

$$(x-2)(3x^2-4x+1)=0$$

$$x-2=0 \quad \vee \quad 3x^2-4x+1=0$$

$$x=2 \quad \vee \quad x=1/3 \vee x=1$$



Arturo Gibellino di Gattinara,
Strada che porta al mare ed oltre (1971)

IN GENERALE:

- $\boxed{A(x)\cdot B(x)=A(x)\cdot C(x)}$

  $\cancel{A(x)}\cdot B(x)=\cancel{A(x)}\cdot C(x)$ semplifico, ma risolvo la $\boxed{A(x)=0}$ e tengo conto che le sue soluzioni sono soluzioni anche dell'equazione data

  Proseguo poi con la $\boxed{B(x)=C(x)}$ alla ricerca di altre soluzioni

  OPPURE:

- $\boxed{A(x)\cdot B(x)=A(x)\cdot C(x)}$

  $A(x)\cdot B(x)-A(x)\cdot C(x)=0$

  $A(x)\left[B(x)-C(x)\right]=0$

  $\boxed{A(x)=0} \quad \vee \quad B(x)-C(x)=0$

  $\Updownarrow$

  $\boxed{B(x)=C(x)}$

  Resta confermato anche in questo modo "alternativo" che le soluzioni della $A(x)\cdot B(x)=A(x)\cdot C(x)$ sono

  $\begin{cases}\text{tutte le soluzioni della } A(x)=0\\ \text{più tutte le soluzioni dell'equazione "semplificata" } B(x)=C(x)\end{cases}$

3. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO: PRINCIPALI TIPOLOGIE

A) Equazioni risolubili per SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

1) $\boxed{x^3-4x=0}$

$x\left(x^2-4\right)=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$x=0 \ \vee \ x=-2 \ \vee \ x=2$

equazione di 3° *grado* $\rightarrow$ 3 *soluzioni* : $x_1=0,\ x_2=-2,\ x_3=2$

2) $\boxed{x^4+x^2-12=0}$

$\left(x^2-3\right)\left(x^2+4\right)=0$

$x^2-3=0 \quad x^2=3 \quad x=\pm\sqrt{3}$

$x^2+4=0 \quad x^2=-4$ *impossibile in* $\mathbb{R}$; *in* $\mathbb{C}$, $x=\pm 2i$

equazione di 4° *grado* $\rightarrow$ *in* $\mathbb{C}$, 4 *soluzioni* : $x_1=-\sqrt{3},\quad x_2=\sqrt{3},\quad x_3=-2i,\quad x_4=2i$

3) $\boxed{4x^3-8x^2-11x-3=0}$

Scomponendo con Ruffini si ottiene :

$(x-3)(2x+1)^2=0$

$x=3 \ \vee \ x=-\frac{1}{2}$ (*soluz. di molteplicità* 2)

equazione di 3° *grado* $\rightarrow$ *tenendo conto della molteplicità*, 3 *soluzioni* : $x_1=3,\ x_2=x_3=-\frac{1}{2}$

4) $\boxed{6x^5-3x^4-2x^3+x^2=0}$

$x^2\left(6x^3-3x^2-2x+1\right)=0$

$x^2\left[3x^2(2x-1)-(2x-1)\right]=0$

$x^2(2x-1)\left(3x^2-1\right)=0$

$x^2=0 \rightarrow x=0$ (*molt.* 2)

$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

$3x^2-1=0 \rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\boxed{x^2\left(x^2-1\right)=1-2x}$

$x^4-x^2=1-2x$

$x^4-x^2+2x-1=0$

$x^4-(x-1)^2=0$

$\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)=0$

$x^2+x-1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x^2-x+1=0$ *imposs. in* $\mathbb{R}$ $(\Delta<0)$; *in* $\mathbb{C}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

B) Equazioni BINOMIE $\boxed{ax^n+b=0}$

1)

$\boxed{8x^3-125=0}$

$8x^3=125$

$x^3=\frac{125}{8}$

$x=\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\frac{5}{2}$

Risolvendo per scomposizione in fattori, si troverebbero anche le soluzioni complesse:

$8x^3-125=0$

$(2x-5)(4x^2+10x+25)=0$

$x=\frac{5}{2}; \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-100}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{-75}}{4}=$

$=\frac{-5\pm i\sqrt{75}}{4}=\frac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{4}$

2)

$\boxed{128x^3+6=0}$

Semplifico innanzitutto per 2 e ottengo

$64x^3+3=0$

$64x^3=-3$

$x^3=-\frac{3}{64}$

$x=\sqrt[3]{-\frac{3}{64}}=-\sqrt[3]{\frac{3}{64}}=-\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

3)

$\boxed{81x^4-16=0}$

$81x^4=16$

$x^4=\frac{16}{81}$

$x=\pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\pm\frac{2}{3}$

Scomponendo in fattori:

$81x^4-16=0$

$(9x^2+4)(9x^2-4)=0$

$9x^2+4=0; \quad x^2=-\frac{4}{9}$ *impossibile in* $\mathbb{R}$; *in* $\mathbb{C}$, $x=\pm\frac{2}{3}i$

$9x^2-4=0; \quad x^2=\frac{4}{9} \quad x=\pm\frac{2}{3}$

4) $\boxed{81x^4+16=0}$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

5)

$\boxed{x^5-32=0}$

$x^5=32$

$x=\sqrt[5]{32}=2$

6)

$\boxed{x^5+32=0}$

$x^5=-32$

$x=\sqrt[5]{-32}=-2$

7)

$\boxed{x^6-1=0}$

$x^6=1$

$x=\pm\sqrt[6]{1}=\pm 1$

8)

$\boxed{x^6+1=0}$

$x^6=-1$

impossibile in $\mathbb{R}$

9)

$\boxed{x^7+5x^4=0}$

$x^4(x^3+5)=0$

$x^4=0\rightarrow x=0$

$x^3+5=0\rightarrow x^3=-5\rightarrow x=\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$

Uno SCHEMA GENERALE per le equazioni binomie

Se p è una costante positiva (p > 0)

- *esponente pari*: $\begin{cases} x^{2n}=p & \rightarrow x=\pm\sqrt[2n]{p} \text{ (2 soluzioni opposte in } \mathbb{R}) \\ x^{2n}=-p & \rightarrow \text{impossibile in } \mathbb{R} \end{cases}$
- *esponente dispari*: $\begin{cases} x^{2n+1}=p & \rightarrow x=\sqrt[2n+1]{p} \text{ (1 soluzione in } \mathbb{R}) \\ x^{2n+1}=-p & \rightarrow x=\sqrt[2n+1]{-p}=-\sqrt[2n+1]{p} \text{ (1 soluzione in } \mathbb{R}) \end{cases}$

C) Eq. TRINOMIE $\boxed{ax^{2n}+bx^{n}+c=0}$ e, in particolare, BIQUADRATICHE $\boxed{ax^{4}+bx^{2}+c=0}$

1)

$\boxed{\underset{(x^3)^2}{8\ x^6}-7x^3-1=0}$

$x^3=t$

$8t^2-7t-1=0$

$$t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{7\pm9}{16}=\begin{cases}-\frac{1}{8}\\1\end{cases}$$

$t=-\frac{1}{8}\ \vee\ t=1,$ *da cui*:

$$x^3=-\frac{1}{8}\rightarrow\boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

$$x^3=1\rightarrow\boxed{x=1}$$

♥ La posizione $x^3=t$ si può evitare: basta "operare come se al posto di x ci fosse il blocco x^3"

$$\left(x^3\right)_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{7\pm9}{16}=\begin{cases}-\frac{1}{8}\\1\end{cases}$$

$$x^3=-\frac{1}{8}\rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$x^3=1\rightarrow x=1$$

2)

$\boxed{\underset{(x^2)^2}{4\ x^4}-11x^2-3=0}$ EQUAZIONE BIQUADRATICA (cioè, trinomia con n = 2)

$$\left(x^2\right)_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121+48}}{8}=\frac{11\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{11\pm13}{8}=\begin{cases}-\frac{1}{4}\\3\end{cases}$$

$x^2=-\frac{1}{4}$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

$x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

3)

$\boxed{x^4-11x^2+18=0}$

Come prima, oppure per scomposizione in fattori:

$\left(x^2-9\right)\left(x^2-2\right)=0$

$x^2-9=0\ \rightarrow\ x^2=9;\ x=\pm3$

$x^2-2=0\ \rightarrow\ x^2=2;\ x=\pm\sqrt{2}$

Uno SCHEMA GENERALE per le equazioni biquadratiche

$ax^4+bx^2+c=0$

Se $\Delta<0$, *non si ha nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$

Se $\Delta\geq0$: $\left(x^2\right)_{1,2}=\ldots=\begin{cases}h\\k\end{cases}$

Ora,

se $h>0,\ k>0$	*se* $h<0,\ k<0$	*se* h, k *discordi*
4 *soluzioni in* $\mathbb{R}$	*nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$	2 *soluzioni in* $\mathbb{R}$

Nel caso particolare $h=k\ (\Delta=0)$,

se $h=k>0$	*se* $h=k<0$
4 *soluzioni*, *a due a due coincidenti, in* $\mathbb{R}$	*nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$

D) Equazioni risolubili con ARTIFICI (= posizioni)

1) $\boxed{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=2}$

$\boxed{\frac{x-1}{x-2}=t}$

$t^4+t^2=2;\quad t^4+t^2-2=0;\quad \left(t^2\right)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}-2\\1\end{cases}$

$t^2=-2$ *imposs. in* $\mathbb{R}$; $\quad t^2=1\rightarrow \boxed{t=\pm1}$

$\frac{x-1}{x-2}=\boxed{-1}\ \rightarrow\ x-1=-x+2\ (x\neq2);\ 2x=3;\ \boxed{x=3/2}$

$\frac{x-1}{x-2}=\boxed{1}\ \rightarrow\ \cancel{x}-1=\cancel{x}-2\ (x\neq2)$ *impossibile*

2) $\boxed{\left(x^2+3x+1\right)^3=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x}$

Converrà addizionare 1 *ad ambo i membri, per ottenere* :

$\left(x^2+3x+1\right)^3+1=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x+1$

dopodiché :

$x^2+3x+1=z$

$z^3+1=z^2+z;\quad z^3-z^2-z+1=0;\quad z^2(z-1)-(z-1)=0;$

$(z-1)\left(z^2-1\right)=0;\quad (z-1)(z+1)(z-1)=0;\quad (z-1)^2(z+1)=0;\quad z=1\ \vee\ z=-1$

$x^2+3x\cancel{+1}=\cancel{1}\ ;\ x(x+3)=0;\ x=0\vee x=-3$

$x^2+3x+1=-1\ ;\ x^2+3x+2=0;\ \ldots\ x=-1\vee x=-2$

Le soluzioni sono, in definitiva :

$\boxed{x=-3,\ x=-2,\ x=-1,\ x=0}$

In alternativa:

$\left(x^2+3x+1\right)^3=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x+1-1$

$x^2+3x+1=z$, ecc.

3) $\boxed{x^6-5x^2+2=0}$

Lasciando così, non si riesce a scomporre; *ponendo invece* $x^2=t$ *si ha* $t^3-5t+2=0$ *ed è possibile scomporre con Ruffini in quanto si osserva che* $P(2)=0$. *Si ottiene* :

$(t-2)\left(t^2+2t-1\right)=0$

$t=2\rightarrow x^2=2;\ \boxed{x=\pm\sqrt{2}}$

$t=-1-\sqrt{2}\rightarrow x^2=-1-\sqrt{2}<0$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

$t=-1+\sqrt{2}\rightarrow x^2=-1+\sqrt{2};\ \boxed{x=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

ALTRI ESEMPI DI QUESTO TIPO

4) $\left(\frac{x}{1-x}\right)^3+7\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+14\cdot\frac{x}{1-x}+8=0$ $\qquad \begin{bmatrix}x=2,\\ x=\frac{4}{3}\end{bmatrix}$

5) $\left(x\sqrt{2}+1\right)^{-3}-\left(x\sqrt{2}+1\right)^{-2}-3\left(\frac{1}{x\sqrt{2}+1}-1\right)-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{2}+1}-1\right)=0$ $\qquad \begin{bmatrix}x=0,\\ x=-1,\\ x=1-\sqrt{2}\end{bmatrix}$

uh, qui si può trovare una soluzione "per strada", semplificando!

6) $\left(x^2-2x-3\right)^2-2\left(x^2-2x\right)+3=0$ $\qquad \begin{bmatrix}x=1\pm\sqrt{3},\\ x=1\pm\sqrt{7}\end{bmatrix}$

4. ESERCIZI SULLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO SUPERIORE AL 2°

(soluzioni a pagina 79)

(è richiesto di **determinare le sole soluzioni reali**)



BINOMIE

1) $16x^4-1=0$ 2) $27x^3-1=0$ 3) $16x^4+1=0$

4) $27x^3+1=0$ 5) $x^6-1=0$ 6) $x^6+1=0$

7) $x^5-1=0$ 8) $x^5+1=0$ 9) $x^3-2=0$

10) $32x^5+3=0$ 11) $9x^4=1$ 12) $x^5=x$

13) $(x^3+4)(x^3-1)=3x^3+1$ 14) $x^6+3x^2=0$ 15) $5x^3+8=0$

BIQUADRATICHE E TRINOMIE IN GENERE

16) $4x^4-9x^2+2=0$ 17) $2x^4-5x^2-3=0$ 18) $x^4-5x^2-36=0$ 19) $x^4-6x^2+9=0$

20) $x^4-10x^2\sqrt{2}+18=0$ 21) $x^6+2x^3-3=0$ 22) $3x^8-10x^4=8$ 23) $x^4+5x^2+4=0$

24) $9x^6-28x^4+3x^2=0$ 25) $16x^4+1=8x^2$ 26) $x^7+9x^4+14x=0$ 27) $x^3(x^3-4)=12$

28) $x^8-18x^4+81=0$ 29) $x^{18}+4x^{12}+3x^6=0$ 30) $x^{10}=2^3\cdot x^5+3^2$ 31) $x^2=\dfrac{x^4+1}{6}$

32) $x^4+2(2-\sqrt{3})x^2-2(2\sqrt{3}-3)=0$ 33) $(abx^2)^2+1=(a^2+b^2)x^2$

34) $x^4-2(a^2+b^2)x^2+a^4+b^4-2a^2b^2=0$ 35) $\left(\dfrac{x^2}{m-1}\right)^2+m^2=\dfrac{2m}{m-1}x^2+\left(\dfrac{x}{m-1}\right)^2$

36) $kx^2-\dfrac{1}{x^2}=1-k$ 37) $x^2(x^2+1)=a^2(a^2-1)$ 38) $x^2+4\dfrac{b^2}{x^2}=(b-2)^2+4b$

RISOLUBILI PER SCOMPOSIZIONE COL METODO DI RUFFINI

39) $45x^3+6x^2-13x+2=0$ 40) $3x^3+5x^2=7x+10$ 41) $x^4-7x^3+17x^2-17x+6=0$

42) $7b^3+b+8=0$ 43) $6a^3-7a^2-21a-6=0$ 44) $24\alpha^3+26\alpha^2+9\alpha+1=0$

45) $y^6-3y^5+10y^4-24y^3+32y^2-48y+32=0$ 46) $x^5=27x^2(x+2)$

RISOLUBILI PER SCOMPOSIZIONE CON RACCOGLIMENTI PARZIALI

47) $9x^5-x^3+45x^2-5=0$ 48) $12a^3+20a^2+27a+45=0$ 49) $8b^3-6b^2-36b+27=0$

RISOLUBILI CON SCOMPOSIZIONI DI VARIO TIPO

50) $9y^4+12y^3-11y^2+2y=0$ 51) $x^4-4x^2-1=4x$ 52) $16x^9+16x^8+15x^5+15x^4-x-1=0$

53) $b^7+2b^5+8b^4+5b^3=0$ 54) $9x^5+25x^3=30x^4$ 55) $16a^8-16a^6+6a^5-6a^3=a^2-1$

RISOLUBILI CON ARTIFICI (= POSIZIONI)

56) $(x^2-x)^2+(x^2-x)-6=0$ 57) $(x^2-2x-3)^4-13(x^2-2x-3)^2+36=0$ 58) $x^6=13x^2-12$ $(x^2=t)$

59) $(y^2-13)^3+7(y^2-13)^2-6=0$ 60) $(x-x^{-1})^4=3(x-x^{-1})^2+4$ 61) $x^6-7x^4+11x^2+3=0$ $(x^2=t)$

$(5x-4)^3=27$ si potrebbe affrontare ponendo $5x-4=t$, ma non è il caso: direttamente, potremo scrivere

$$(5x-4)^3=27 \leftrightarrow 5x-4=3 \leftrightarrow 5x=7 \leftrightarrow x=7/5$$

E in modo simile, ma con attenzione al doppio segno:

$(5x+2)^4=81 \leftrightarrow 5x+2=\pm 3 \leftrightarrow 5x+2=3\ (x=1/5) \vee 5x+2=-3\ (x=-1)$

62) $(8x-1)^3=8$ 63) $(8x-1)^4=16$ 64) $x^4(x+5)^4=1296$ 65) $2-(x+1)^6=0$ 66) $(2x-x^2)^3+512=0$

RISOLUBILI TENENDO CONTO DELLE "SOLUZIONI TROVATE PER STRADA"

67) $x^5=2x^3$ 68) $x^2-36=x^3-6x^2$

69) $(x^2-9)(3x-5)=(9-x^2)(x-1)$ 70) $x^4(x+1)=6x^3$

71) $(x-1)(x^2+x+2)+(x^2+x-2)(x-1)=0$ 72) $x^4+2x^3+x^2=(x+1)^3$

ESERCIZI VARI (risposte a pagina 79)

1) Quali fra le seguenti equazioni:
a) $x^8+x^2+1=0$ b) $x^4+2\sqrt{3}=4$ c) $x^4-1234x^2-2345=0$ d) $x^3+9876543x^2+8765432=0$
ammettono almeno una soluzione reale?

2) Si può dire che a) l'equazione $x^9+x^3=30$ è una "trinomia"? b) $x^3+\sqrt{3}=\sqrt{2}$ è una "binomia"?

3) Cosa afferma il Teorema Fondamentale dell'Algebra?
Spiega perché la risoluzione delle due equazioni
a) $x^4=2\left(x^2+12\right)$ b) $x^5+30x^4+300x^3+1000x^2=0$
ne conferma la validità.

4) Spiega perché NON è corretto affermare che l'equazione $x^3=1000$ ha una soluzione di molteplicità 3

5) Metti una croce su "Vero" o su "Falso":

a) L'equazione di 4° grado ammette formula risolutiva	Vero	Falso
b) L'equazione di 5° grado ammette formula risolutiva	Vero	Falso
c) 0 è uno zero del polinomio $2x^3-x^2-3x$, e anche -1 lo è	Vero	Falso
d) L'equazione $x^{123}+x^{125}=0$ ha fra le sue soluzioni l'unità immaginaria i	Vero	Falso
e) L'equazione $x^6-8x^4+16x^2=0$ ha tre radici di molteplicità 2	Vero	Falso

Risolvi le equazioni binomie che seguono:

6) $81x^4-4=0$ 7) $\frac{1}{x^{18}}=9^9$ 8) $5x^6=5^{-2}$ 9) $x^5+5^{\frac{1}{2}}=0$

10) $x^4-2\sqrt{2}=3$ 11) $x^3+\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)=0$ 12) $x^4+2\sqrt{5}=4$

Per le seguenti equazioni occorre tener presente il discorso su "radicali e valori assoluti" di pag. 31 quindi introdurre, se necessario, qualche stanghetta di valore assoluto,
oppure riconoscere quando l'equazione è impossibile in $\mathbb{R}$, eventualmente distinguendo più casi.
In tutti gli esercizi, si suppone che NON sia noto il segno dei parametri a, b, c.

13) $x^4-1296a^4=0$ 14) $8x^3-343a^9=0$ 15) $a^2x^4-b^8=0$ 16) $64x^6-a^2=0$ 17) $x^8-a^{10}=0$
18) $x^3+a^6b^3c=0$ 19) $x^6-a^7=0$ 20) $x^4-a^4b^3=0$ 21) $x^4+a^2b^4c^6=0$

Risolvi le equazioni trinomie che seguono:

22) $256x^8=1+60x^4$ 23) $256x^6=1+60x^3$ 24) $x^3=\frac{64000}{x^3+936}$ 25) $\frac{x^2}{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}=2\sqrt{2}$

26) $x^8(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=2\left(x^8+2\right)$ 27) $\frac{5}{2^{-1}x^2+3}=\frac{2}{2^{-2}x^2+3}+2^{-1}$ 28) $\frac{x^4}{2}+2^{-1}=x^2\sqrt{2}$

29) $x^2\left(x^2+2\sqrt{2}\right)=6$ 30) $x^2\left(x^2-2\sqrt{5}\right)+13=6\left(\sqrt{5}-x^2\right)$ 31) $x^4+b^2+\left(b^2+1\right)\left(b^2-2x^2\right)=0$

32) $x^3+4\frac{a^3}{x^3}=a^3+4$ 33) $x^4+(m-x)(m+x)=m^4$ 34) $x^4+k^3=k(k+1)x^2$ 35) $x^6+k^4=k\left(k^2+1\right)x^3$

Risolvi effettuando opportune "posizioni":

36) $\frac{13x+3}{3x-2}=30\cdot\frac{3x-2}{13x+3}+1$ 37) $\left(x^2-3x-7\right)^2=x^2-3x-1$ 38) $\frac{x+998}{x+997}+\frac{x+1000}{x+1001}=\frac{14}{5}$

39) $\frac{x}{x+11}+8\cdot\left(\frac{x+11}{x}\right)^2=2\left(1+2\cdot\frac{x+11}{x}\right)$ 40) $(2x+882)^2=x+441$ 41) $x^6+4=3x^4$

42) $(288y+143)^3+1=144(2y+1)(288y+143)$

Risolvi per fattorizzazione:

43) $\frac{(1+x)(x-1)}{60}=x^{-1}+15x^{-2}$ 44) $x^4-3x^2+7=\frac{21}{x^2}$ 45) $2x^2\left(10x^3+1\right)=8x^4+5x^3$

Risolvi tenendo conto delle soluzioni "trovate per strada":

46) $(2x+3)^2(2x-3)^4=(2x-3)^2(2x+3)^4$ 47) $\frac{x^6-4}{3x}=x^3+2$ 48) $\left(x^4-2\right)\left(2x^2+x-30\right)+2x^2=x^6$

49) Scrivi un'equazione che abbia come soluzioni i numeri: $-3, -1, +1, +2$

50) Scrivi un'equazione che abbia come soluzioni i numeri: $0, 1/2, 1/3, 1/4$

51) Scrivi un'equazione che abbia come soluzioni: $x = -1$ con molteplicità 3; $x = 0$ con molteplicità 2.

52) Inventa un'equazione di 4° grado che abbia due soluzioni reali e due complesse, ma non sia una biquadratica.

53) Inventa un'equazione di 6° grado che abbia $x = 0$ come soluzione di molteplicità 4, ma non abbia altre soluzioni reali.

54) Per quale valore del parametro k l'equazione $kx^3 + x^2 + x + k = 0$ ammette come radice $x = -3$?

55) Per quali valori dei parametri a, b l'eq. $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ è verificata sia da $x = 1$ che da $x = 2$?

56) Per quali valori dell'esponente intero m l'equazione $x^m + x^3 = 1 + x^2$ ammette come soluzione $x = 1$?

57) Scrivi un esempio di equazione di 8° grado, che non abbia soluzioni reali.

58) Scrivi un esempio di equazione che contenga tre termini, di cui uno con x^6, e un altro con x^3, ma sia priva di soluzioni reali.

59) Solve the equation $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

60) Find the roots of the equation $x^4 = 29x^2 - 100$

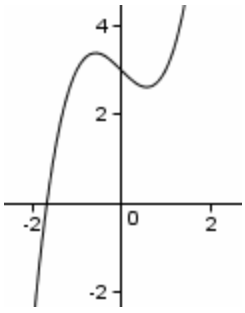
61) Find the zeroes of the function $P(x) = x^5 - 12x^3 + 32x$

62) A medical research lab is testing a new drug on a patient.
The amount of the drug remaining in the patient's bloodstream
t hours after the drug is administered can be modelled by the equation
$P(t) = -2t^3 + 6t^2 - 8t + 8$
Using a graph, find out how many hours after administration
the drug will be totally eliminated from the patient's bloodstream.

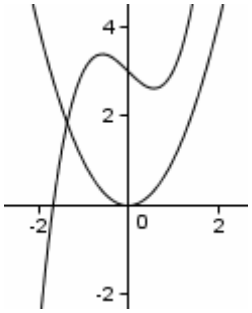
Da www.regentsprep.org
Practice with
Polynomial Equations
of Higher Degree



63) Il grafico sottostante è finalizzato a risolvere l'equazione $x^3 - x + 3 = 0$.
Quante sono le soluzioni reali?
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3



64) Il grafico sottostante è finalizzato a risolvere l'equazione $x^3 - x + 3 = x^2$.
Quante sono le soluzioni reali?
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3



65) Dov'è l'errore?
$x^5 - 3x^3 - 4x = 0$
Semplifico: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
Pongo $x^2 = w$ *e ottengo* $w^2 - 3w - 4 = 0$ $(w-4)(w+1) = 0$
$w = 4 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$; $w = -1 \to x^2 = -1$ *impossibile in* $\mathbb{R}$
Le soluzioni reali sono perciò $x = -2$ *e* $x = 2$

66) Dov'è l'errore?
$\sqrt{12} + x^6 = 4$
$x^6 = 4 - \sqrt{12}$; $x^6 = 4 - 2\sqrt{3}$
$x^6 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$; $x^3 = \sqrt{3} - 1$;
$x = \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}$

67) Risolvi utilizzando per i vari calcoli un foglio elettronico. Arrotonda le soluzioni a 3 cifre decimali.
a) $1{,}357x^4 - 4{,}321x^2 - 7{,}531 = 0$ b) $x^6 + 0{,}111x^3 = 9{,}877$

68) Per le seguenti equazioni, determina anche le soluzioni complesse.
A tale scopo, può essere necessaria una scomposizione in fattori.
a) $x^4 = 1$ b) $4\left(3x^2 + 16\right) = x^4$ c) $x^3 = 1000$ d) $16x^4 + 8x^2 + 1 = 0$ e) $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$

69) Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni a coeff. complessi: a) $ix^2 + 7x - 10i = 0$ b) $x^2 - (2+4i)x + 6 + 4i = 0$

70) Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni a coefficienti complessi:
a) $2x^3 - (4+i)x^2 + (20+2i)x - 10i = 0$ b) $x^4 + 8(x+i) = (ix)^3$

RISPOSTE

Pag. 76 1) $\pm\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) *impross.* 4) $-\frac{1}{3}$ 5) ±1 6) *impross.* 7) 1 8) -1 9) $\sqrt[3]{2}$ 10) $-\frac{\sqrt[5]{3}}{2}$ 11) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
12) $0,\ \pm1$ 13) $\pm\sqrt[6]{5}$ 14) 0 15) $-2/\sqrt[3]{5}$ 16) $\pm1/2, \pm\sqrt{2}$ 17) $\pm\sqrt{3}$ 18) ±3 19) $\pm\sqrt{3}$ 20) $\pm\sqrt[4]{2}, \pm3\sqrt[4]{2}$
21) $1,\ -\sqrt[3]{3}$ 22) $\pm\sqrt{2}$ 23) *impross.* 24) $0, \pm1/3, \pm\sqrt{3}$ 25) $\pm1/2$ 26) $0, -\sqrt[3]{7}, -\sqrt[3]{2}$ 27) $-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{6}$
28) $\pm\sqrt{3}$ 29) 0 30) $-1, \sqrt[5]{9}$ 31) $\pm\left(\sqrt{2}-1\right), \pm\left(\sqrt{2}+1\right)$ 32) $\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}$ 33) Con $\begin{matrix}a\neq0\\ b\neq0\end{matrix}$: $\pm\frac{1}{a}, \pm\frac{1}{b}$ …
34) $\pm(a+b), \pm(a-b)$ 35) $m\neq1$: $\pm m, \pm(m-1)$ 36) *Se* $k>0$: $\pm\sqrt{1/k}$. *Se* $k\leq0$: *nessuna sol. reale*
37) *Se* $a<-1\vee a>1$: $\pm\sqrt{a^2-1}$; *se* $a=-1\vee a=1$: 0; *se* $-1<a<1,\ a\neq0$: *nessuna sol. reale*; *se* $a=0$: 0
38) *Se* $b\neq0$: $\pm b, \pm2$; *se* $b=0$: ±2 39) $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{5}$ 40) $-2,\ \frac{1\pm\sqrt{61}}{6}$ 41) $1, 2, 3$ 42) -1 43) $-\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{57}}{4}$
44) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ 45) $1, 2$ 46) $0, -3, 6$ 47) $\pm\frac{1}{3}, -\sqrt[3]{5}$ 48) $-\frac{5}{3}$ 49) $\frac{3}{4}, \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$
50) $0, -2, \frac{1}{3}$ 51) $-1, 1\pm\sqrt{2}$ 52) $-1, \pm\frac{1}{2}$ 53) $0, -1$ 54) $0, \frac{5}{3}$ 55) $\pm1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
56) $2, -1$ 57) $1\pm\sqrt{7}, 1\pm\sqrt{6}, 1\pm\sqrt{2}, 0, 2$ 58) $\pm1, \pm\sqrt{3}$ 59) $\pm2\sqrt{3}, \pm\sqrt{10-\sqrt{15}}, \pm\sqrt{10+\sqrt{15}}$
60) $1\pm\sqrt{2}, -1\pm\sqrt{2}$ 61) $\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 62) $\frac{3}{8}$ 63) $-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$ 64) $-6, -3, -2, 1$ 65) $\pm\sqrt[6]{2}-1$ 66) $-2, 4$
67) $0, \pm\sqrt{2}$ 68) $6, 3, -2$ 69) $-3,\ 3,\ \frac{3}{2}$ 70) $0, -3,\ 2$ 71) $1,\ 0, -1$ 72) $-1, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Pagg. 77-78 1) b), c), d) 2) a) No (per via degli esp.) b) Sì 4) Avrebbe soluz. di molt. 3 la $(x-10)^3=0$
5) VFVVV 6) $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ 7) $x=\pm\frac{1}{3}$ 8) $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ 9) $x=-\sqrt[10]{5}$ 10) $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 11) $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}=$
$=-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$
12) *imp.* $\left(4-2\sqrt{5}<0\right)$ 13) $\pm6|a|$ (*) 14) $\frac{7}{2}a^3$ 15) $\pm\frac{b^2}{\sqrt{|a|}}$ $(a\neq0)$ 16) $\pm\frac{\sqrt[3]{|a|}}{2}$ (*) 17) $\pm|a|\sqrt[4]{|a|}$ 18) $-a^2b\sqrt[3]{c}$
19) $x=a\sqrt[6]{a}$ *se* $a\geq0$; *imp. in* $\mathbb{R}$ *se* $a<0$ 20) $x=\pm|a|\sqrt[4]{b^3}$ (*) *se* $b\geq0$; *imp. in* $\mathbb{R}$ *se* $b<0,\ a\neq0$; 0 *se* $a=0$
(*) *Qui compare il simbolo di valore assoluto anche se il* $\pm$ *lo renderebbe, a ben guardare, non "obbligatorio"*
21) *generalmente imposs. in* $\mathbb{R}$; $x=0$ *se almeno uno fra* a, b, c *vale* 0 22) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 23) $-\frac{1}{4}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$
24) $-10, 4$ 25) $\pm2, \pm\sqrt{2\sqrt{2}}=\pm\sqrt[4]{8}$ 26) $\pm\sqrt[4]{2}$ 27) ±2 28) $\pm\sqrt{\sqrt{2}+1}, \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 29) $\pm\sqrt[4]{2}$ 30) $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$
31) $\pm b, \pm\sqrt{b^2+2}$ (per via del doppio segno davanti, è indifferente scrivere $\pm b$ o $\pm|b|$) 32) $a, \sqrt[3]{4}$
33) *Se* $-1\leq m\leq1$: $\pm m, \pm\sqrt{1-m^2}$, *altrimenti* $\pm m$ 34) *Se* $k\geq0$: $\pm\sqrt{k}, \pm k$; *se* $k<0$: $\pm k$ 35) $\sqrt[3]{k}, k$
36) $3, \frac{1}{4}$ 37) $-2, 5, \frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$ 38) $-996, -1002$ $(x+997=y)$ 39) $-22, -\frac{22}{3}$ 40) $-441, -\frac{1763}{4}$ 41) $\pm\sqrt{2}$
42) $-\frac{1}{2}, -\frac{71}{144}$ 43) $6, -5$ 44) $\pm\sqrt{3}$ 45) $0, \frac{2}{5}, \pm\frac{1}{2}$ 46) $0, \pm\frac{3}{2}$ 47) $-\sqrt[3]{2}, -1, 2$ 48) $\pm\sqrt[4]{2}, -6, 5$
49) La più semplice è $(x+3)(x+1)(x-1)(x-2)=0$ 50) $x(2x-1)(3x-1)(4x-1)=0$ 51) $x^2(x+1)^3=0$
52) Basta moltiplicare e uguagliare a 0 due trinomi di 2° grado, uno con $\Delta<0$ l'altro con $\Delta>0$
53) Ad esempio, $x^4(x^2+1)=0$ 54) Dopo aver sostituito -3 al posto di x: $k=3/13$
55) $a=-5/2, b=1/2$ 56) Per tutti 57) Potrebbe essere $x^8+1=0$, o $x^8+x^6+1=0$, o $(x^2+1)^4=0$ …
58) Basta inventare un trinomio di 2° grado con $\Delta<0$, e sostituire x^3 al posto di x
59) Metodo più svelto: $(x^2-4)(x^2-16)=0$; $x^2=4\vee x^2=16$; $x=\pm2\vee x=\pm4$
60) $\pm2, \pm5$ 61) $0, \pm2, \pm2\sqrt{2}$ 62) Dopo 2 ore 63) 1 64) 1
65) All'atto della semplificazione, bisognava segnare la "soluzione trovata per strada" $x=0$
66) $x^6=\left(\sqrt{3}-1\right)^2\rightarrow x^3=\pm\left(\sqrt{3}-1\right)$ 67) a) $\pm2{,}106$ b) $-1{,}473; +1{,}456$
68) a) $\pm1, \pm i$ b) $\pm4, \pm2i$ c) $10, -5\pm5i\sqrt{3}$ d) $\pm\frac{1}{2}i$ e) $x^4+10x^2+25-4x^2=0$ … $\rightarrow 1\pm2i, -1\pm2i$
69) a) $x=2i, x=5i$ b) $x=1-i, x=1+5i$ 70) a) $x=i/2, x=1\pm3i$ b) $x=-2, x=-i, x=1\pm i\sqrt{3}$

5. EQUAZIONI IRRAZIONALI

Vengon dette "**irrazionali**"
quelle equazioni nelle quali l'incognita compare almeno una volta sotto il segno di radice.

Ad esempio, sono equazioni irrazionali le seguenti:

$$\sqrt{2x+1} = x-7; \qquad \sqrt[5]{x} + x - 2 = 0; \qquad \sqrt[3]{x-1} + 1 = \sqrt{x}$$

NOTA. Osserviamo che invece un'equazione come la $x^2 - x\sqrt{2} - 4 = 0$
NON rientra nella categoria delle "equazioni irrazionali":
è, semmai, una equazione *a COEFFICIENTI irrazionali*.

Quando si deve risolvere un'equazione irrazionale,
generalmente si procede eliminando i radicali sotto i quali compare l'incognita.
E tale obiettivo si raggiunge elevando, una o più volte,
entrambi i membri dell'equazione data, ad un'opportuna potenza.

C'è però una "**sorpresa**" che occorre prepararsi a fronteggiare:

Quando si prende un'equazione e si elevano ambo i membri ad uno stesso esponente,
l'equazione cui si perviene alla fine *non sempre è equivalente* all'equazione iniziale,
cioè: *non sempre ha le stesse soluzioni* dell'equazione iniziale.

Precisamente:

- Quando ambo i membri di un'equazione vengono elevati al cubo,
  o comunque ad esponente **DISPARI**,
  tutto "fila liscio" perché l'equazione "di arrivo" è sempre equivalente a quella "di partenza"

MENTRE

- quando ambo i membri di un'equazione vengono elevati al quadrato,
  o comunque ad esponente **PARI**,
  PUO' DARSI che l'equazione "di arrivo" abbia
  QUALCHE SOLUZIONE IN PIU' RISPETTO A QUELLA DI PARTENZA.

L'elevamento ad esponente PARI di un'equazione è dunque un passaggio "insidioso",
perché potrebbe (uso il condizionale: non sempre ciò succede, ma *è possibile che* succeda)
avere l'effetto di introdurre delle "false soluzioni", delle "soluzioni non accettabili".

Prendiamo ad esempio l'equazione

(1) $\sqrt{2x+1} = x-7$

Se la eleviamo al quadrato, otteniamo

(2) $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = (x-7)^2$

Risolviamo dunque la (2): avremo

$$2x+1 = x^2 - 14x + 49; \qquad x^2 - 16x + 48 = 0$$

e troveremo due soluzioni: $x = 4$ e $x = 12$.

Sennonché, andando a riprendere l'equazione iniziale (1), potremo constatare che,
mentre $x = 12$ ne è, effettivamente, soluzione (prova a sostituire e vedrai), invece $x = 4$ NON lo è:

$$\left[1° \, membro\right]_{x=4} = \left[\sqrt{2x+1}\right]_{x=4} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$
$$\left[2° \, membro\right]_{x=4} = \left[x-7\right]_{x=4} = 4 - 7 = -3$$

Insomma, il valore $x = 4$ "va bene" per l'equazione DI ARRIVO (2),
ma "NON va bene" per l'equazione DI PARTENZA (1),
perché non rende i due membri della (1) UGUALI, bensì li rende OPPOSTI !!!

La spiegazione di tutto ciò sta in una considerazione molto elementare.

- **Se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro quadrati (questo è ovvio!):**
  $\mathbf{a = b \Rightarrow a^2 = b^2}$
  … MA NON VALE IL VICEVERSA, cioè:
- **se i quadrati di due numeri sono uguali, allora non è detto che siano uguali anche i due numeri iniziali:**
  questi potrebbero essere uguali, ma potrebbero anche essere opposti.
  $\mathbf{a^2 = b^2 \quad \underset{\text{"NON IMPLICA"}}{\not\Rightarrow} \quad a = b;}$
  l'implicazione valida è invece quest'altra: $\mathbf{a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \text{ VEL } a = -b}$

Dunque se noi prendiamo un'equazione

$$(1) \quad A(x) = B(x)$$

e la eleviamo al quadrato, ottenendo:

$$(2) \quad \left[A(x)\right]^2 = \left[B(x)\right]^2$$

è garantito che ogni soluzione della (1) sia anche soluzione della (2),
ma non è detto invece che avvenga anche il viceversa!
Se un certo valore di x è soluzione della (2),
vuol dire che quel valore di x rende uguali i QUADRATI delle due espressioni $A(x)$ e $B(x)$;
ma riguardo alle espressioni $A(x)$ e $B(x)$, potrebbe renderle UGUALI oppure renderle OPPOSTE.
E in quest'ultimo caso, il valore di x in questione sarebbe soluzione della (2), ma NON della (1).

Ricapitolando schematicamente:

Date le due equazioni

$$\mathbf{(1)} \qquad A(x) = B(x)$$

$$\mathbf{(2)} \qquad \left[A(x)\right]^2 = \left[B(x)\right]^2$$

si ha che

$(1) \Rightarrow (2)$

quindi ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2);
passando dalla (1) alla (2) non perdiamo soluzioni;
però

$(2) \not\Rightarrow (1)$

quindi, presa una soluzione di (2), non è certo che questa sia pure soluzione di (1):
potrebbe esserlo, ma anche non esserlo.
Passando dalla (1) alla (2), può darsi che si acquistino indesiderate "false soluzioni".

Come fare, allora, di fronte ad un'equazione irrazionale la cui risoluzione abbia comportato almeno una volta l'elevamento al quadrato, o comunque ad esponente pari?

Semplice!

Abbiamo visto che elevando ad esponente pari, non perdiamo nessuna soluzione, ma potremmo disgraziatamente "acquistare" una o più "false soluzioni", "soluzioni non accettabili".
Allora …

… basterà ricordarsi, alla fine, di prendere ciascuna soluzione trovata
e sostituirla nell'equazione iniziale.
Se l'uguaglianza risulterà verificata, tutto OK,
mentre se l'uguaglianza non risulterà verificata,
vorrà dire che quella soluzione non è accettabile e la scarteremo.

Osserviamo che
questo problema dell'eventuale "non accettabilità" non si presenta invece quando l'eliminazione dei radicali richiede soltanto elevamenti ad esponente DISPARI.

Infatti (riferendoci, per fissare le idee, all'esponente 3):

- se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro cubi,

E VICEVERSA:

- se i cubi di due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i due numeri iniziali.

Insomma,

$a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$

Perciò

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow \left[A(x)\right]^3 = \left[B(x)\right]^3$$

e il fatto che valga la DOPPIA implicazione ci assicura che

i) ogni soluzione di $A(x) = B(x)$ è anche soluzione di $\left[A(x)\right]^3 = \left[B(x)\right]^3$ (implicazione $\Rightarrow$)

ii) ogni soluzione di $\left[A(x)\right]^3 = \left[B(x)\right]^3$ è anche soluzione di $A(x) = B(x)$ (implicazione $\Leftarrow$)

ovvero le due equazioni

$$A(x) = B(x), \quad \left[A(x)\right]^3 = \left[B(x)\right]^3$$

hanno LE STESSE soluzioni, sono "**EQUIVALENTI**".

Per completare il discorso, occorre dire che c'è anche UN ALTRO MOTIVO per cui,
elevando ad esponente PARI ambo i membri di un'equazione,
può capitare che si pervenga ad un'equazione non equivalente a quella di partenza.

Consideriamo l'equazione seguente: $\sqrt{2x-13} = \sqrt{x-7}$
Elevando al quadrato, si ottiene $2x-13 = x-7$ con la soluzione $x = 6$.
Però a questo punto si vede che il valore trovato $x = 6$ NON è soluzione dell'equazione iniziale,
perché, sostituendo in essa, si ottengono **radici quadrate di numeri negativi**.
Ora, se - come di norma avviene - si vuol restare rigorosamente nel campo dei numeri reali,
se ne conclude che le operazioni in gioco non sono eseguibili
e che quindi $x = 6$ è "soluzione non accettabile".

La ragione per cui

$$2x-13 = x-7 \underset{\text{NON IMPLICA}}{\not\Rightarrow} \sqrt{2x-13} = \sqrt{x-7}$$

NON sta questa volta nel fatto che quadrati uguali $\underset{\text{NON IMPLICA}}{\not\Rightarrow}$ basi uguali

(un'espressione contenente x può essere pensata - nell'ambito dei numeri reali -
come il quadrato di un'altra, soltanto limitatamente a quei valori di x che la rendono positiva!)

Qui siamo invece di fronte alla circostanza per cui
se un certo valore di x verifica un'equazione $C(x) = D(x)$,
ma ne rende i due membri entrambi negativi,
quel valore di x NON sarà soluzione della $\sqrt{C(x)} = \sqrt{D(x)}$,
per il fatto che non ne renderà i due membri uguali, bensì entrambi privi di significato (in $\mathbb{R}$).

Osserviamo che, anche relativamente a quest'ultima questione,
se i radicali in gioco hanno indice dispari il problema non si presenta:
una radice con indice dispari è eseguibile in campo reale anche se il radicando è negativo.

ESEMPI SVOLTI

- $2\sqrt{8-x}+x=5$

  Isolo innanzitutto il radicale, ottenendo

  $2\sqrt{8-x}=5-x$

  ... e ora elevo al quadrato, per sbarazzarmi della radice quadrata :

  $\left(2\sqrt{8-x}\right)^2=(5-x)^2$

  $4(8-x)=25-10x+x^2$

  $32-4x=25-10x+x^2$

  $x^2-6x-7=0$

  $(x+1)(x-7)=0$

  $\boxed{x=-1} \vee \cancel{x=7}$ *non accettabile*

  Verifica tu stesso, sostituendo nell'equazione iniziale
  o comunque nel passaggio che precede l'elevamento al quadrato,
  che una delle soluzioni trovate è accettabile e l'altra no.

- $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt{6-x}=0$

  Se elevassi al quadrato ora, a primo membro avrei il quadrato di un trinomio
  e svolgendolo otterrei – nei doppi prodotti – altre tre radici quadrate!!!
  Conviene invece dapprima ripartire le radici in modo più equilibrato fra i due membri
  (due da una parte e una dall'altra)
  perché così, elevando successivamente al quadrato, il numero delle radici diminuirà.

  $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{6-x}$

  $\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)^2=\left(2\sqrt{6-x}\right)^2$

  $\cancel{x+4}+\cancel{x-4}+2\sqrt{(x+4)(x-4)}=4(6-x)$

  $2x+2\sqrt{x^2-16}=24-4x$

  $\cancel{2}\sqrt{x^2-16}=\cancel{24}^{12}-\cancel{6}^{3}x$

  $\left(\sqrt{x^2-16}\right)^2=(12-3x)^2$

  $x^2-16=144-72x+9x^2$

  $\cancel{8}x^2-\cancel{72}^{9}x+\cancel{160}^{20}=0$

  $(x-4)(x-5)=0 \quad \boxed{x=4} \vee \cancel{x=5}$ *non accettabile*

- $\sqrt[3]{x^3-4x}+2=x$

  $\sqrt[3]{x^3-4x}=x-2$

  $\left(\sqrt[3]{x^3-4x}\right)^3=(x-2)^3$

  $\cancel{x^3}-4x=\cancel{x^3}-6x^2+12x-8$

  $6x^2-16x+8=0$

  $3x^2-8x+4=0$

  $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{3}=\dfrac{4\pm2}{3}=\left\langle\begin{matrix}\boxed{2/3}\\ \boxed{2}\end{matrix}\right.$

  Se ora vuoi fare la verifica sostituendo, falla pure, ma a dire il vero è ***superflua****!*
  Infatti abbiamo elevato al cubo (***esponente dispari*** *) e non al quadrato,*
  quindi le soluzioni trovate saranno senz'altro accettabili.

♥ RIASSUNTO DELLA TEORIA

a) Se si elevano al quadrato, o comunque ad **ESPONENTE PARI**, ambo i membri di un'equazione, si perviene a una nuova equazione, che *conserva tutte le soluzioni dell'equazione di partenza*, ma *potrebbe anche ammettere soluzioni* estranee all'equazione di partenza, e quindi *non accettabili*. Occorrerà, perciò, alla fine, "**FARE LA VERIFICA**", ossia prendere ogni soluzione trovata e sostituirla nell'equazione iniziale per vedere se è accettabile o no (NOTA).

b) Invece se si elevano al cubo (o, più in generale, ad un **ESPONENTE DISPARI**) ambo i membri di un'equazione, si perviene sempre ad un'equazione equivalente a quella data. In questo caso, dunque, LA **VERIFICA** FINALE DI ACCETTABILITA' **NON E' NECESSARIA**.

NOTA - *E' possibile (ma noi in questo volume non ce ne occuperemo) impostare dei metodi, basati sulle disequazioni, che permettono di trovare le "condizioni a priori di accettabilità" e quindi di evitare la verifica finale per sostituzione.*

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI IRRAZIONALI (clicca sulla freccia per la correzione)

1) $\sqrt{2x+3}-x=0$ 2) $\sqrt{12x-2}=6x-1$ 3) $2\sqrt{20+x}+x=4$ 4) $\sqrt{3x-5}+1=x$

5) $\sqrt{5x-1}+2x=1$ 6) $2\sqrt{x+3}=x$ 7) $2\sqrt{x}+3=x$ 8) $4\sqrt{5x-4,76}=3,2$

9) $\dfrac{2\sqrt{3-x}+1}{x}=3$ ⇨ 10) $2\left(2\sqrt{x-1}+1\right)=x$ ⇨ 11) $\dfrac{x+3}{2}=\sqrt{x(x+1)-3}$ 12) $\sqrt[3]{x^3-4}+2=x$ ⇨

13) $\sqrt[3]{3x-5}=x-1$ 14) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}=0$ 15) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}-5=0$ 16) $\sqrt{1-3x}-\sqrt{3-x}=4$

17) $\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x-5}}{2}=2$ 18) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x}$ ⇨ 19) $2\sqrt{\dfrac{x}{2}+2}+\sqrt{x-3}=5$ 20) $\sqrt{\dfrac{x+9}{2}}+1=\sqrt{8-x}$

21) $\sqrt{x+3}-3\sqrt{x}+5=0$ 22) $2\sqrt{x-5}-\sqrt{x-8}-\sqrt{x}=0$ 23) $2\sqrt{7+x}-\sqrt{2-x}=6$

24) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$ 25) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}$ 26) $1+3\sqrt{x^2+1}=2\sqrt{3x^2+1}$ ⇨

27) $2\sqrt[3]{x}=x$ 28) $\sqrt[5]{2x-3}=2$ 29) $\sqrt[6]{-x}=\sqrt{-x}$

30) $\sqrt[3]{x^4+6x^2}=3$ ⇨ 31) $\sqrt[3]{x^4-1}=2$ 32) $\sqrt[4]{x}-\sqrt{2x-1}=0$ ⇨

33) $\sqrt[6]{x}=10-\sqrt{x}$ Poni $\sqrt[6]{x}=t$ da cui $\sqrt{x}=\ldots$ ⇨ 34) $\sqrt[8]{x}+\sqrt{x}=2\sqrt[4]{x}$ ⇨

35) Da cosa si riconosce immediatamente che l'equazione $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{3}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}+1=0$ è impossibile?

36) Risolvi l'equazione $x-6\sqrt{x}-135=0$ ponendo $\sqrt{x}=y$

37) Risolvi $x^2-22=\sqrt{x^2-16}$ con la posizione $\sqrt{x^2-16}=y$

38) Risolvi $1,2345x-3,4567\sqrt{x}+2,3456=0$
I) ponendo dapprima $\sqrt{x}=y$ II) determinando i valori di y con l'aiuto di un foglio elettronico
III) e servendoti sempre del foglio elettronico per risalire ai valori di x, da arrotondare a 4 cifre decimali

Problemi geometrici con equazione risolvente irrazionale si trovano alle pagine 254-255 e 257

39) Risolvi $\sqrt{x+10,2}=x-1,8$ ponendo $x+0,2=y$

40) $x+\sqrt{1-x^2}=5^{-1}$ 41) $x=3\left(\sqrt{x+1}-1\right)$ 42) $\sqrt{3^{-1}(x-1)(x+1)}+3=x$

43) $2\left(x^2-x-2\right)^{\frac{1}{2}}=x^2-x-2$ 44) $\sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}=2+3\sqrt{\dfrac{x+3}{x-4}}$ 45) $\dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{x}{2x-1}}=\dfrac{2x-1}{x}$

46) $\sqrt{\dfrac{x-13}{x-7}}+\sqrt{\dfrac{x-13}{x-7}+12}=\sqrt{\dfrac{x-13}{x-7}+32}$ 47) $\sqrt{\dfrac{x-\sqrt{x}}{2}}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{2}$ 48) $\sqrt{x(x-2)}=\dfrac{2^2-\left(2+2^{-1}x\right)+1}{\sqrt{2}}$

49) $\sqrt[3]{3+(x-1)^{\frac{1}{2}}+6(x-1)^{-\frac{1}{2}}}=2$ 50) $\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt{1+x}}}=2$ 51) $\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}=2$

52) $\sqrt[4]{2x-2\sqrt[3]{x-2}}=\sqrt{2}$ 53) $2\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)=x+1$ 54) $\sqrt{0,5x+0,75}=0,25x+0,75$

55) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{5\sqrt{x}+1}{x-1}$ ⇨ 56) $x+2\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}=0$ 57) $\sqrt{2-\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-\sqrt{2+\sqrt{x-1}}$

58) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{4x-1}}=\dfrac{1}{x}$ 59) $\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}+\sqrt{\dfrac{x}{2}+3}=2$ 60) $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}=\dfrac{10}{3}$

61) $\sqrt{\frac{1-x}{2}}+\sqrt{\frac{2-x}{3}}=\sqrt{\frac{5(4-x)-1}{6}}$ 62) $\sqrt{\frac{x+5}{x}}+\frac{x+14}{x}=3$ 63) $16\cdot\left(1{,}25\sqrt{x+1}+\frac{0{,}75}{\sqrt{x+1}}\right)=31$

64) $\frac{2}{3-\sqrt{x}}+\frac{1}{9-x}=2+\frac{1}{3+\sqrt{x}}$ 65) $\sqrt[4]{3-2\sqrt{x^2-3}}=\sqrt{\frac{x}{2}}$ 66) $\left(\frac{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+22}}\right)^2=25$

67) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt[4]{x^2+6x+8}+\sqrt[8]{x^2+x-2}+\sqrt[10]{x^3+6x^2+12x+8}=0$ 68) $\left(\sqrt{x}-x+6\right)\left(\sqrt{x}-2x+1\right)=0$

69) Da www.classzone.com:
Marcy began solving $x^{2/3}=5$ by cubing each side.
What will she have to do next? What could she have done to solve the equation in just one step?

70) In un rettangolo l'altezza è di 20 cm, e misura 2 metri la somma della base con la diagonale.
Determina il perimetro del rettangolo.

71) Determina un intero sapendo che sommandogli 20 e sottraendogli 20 si ottengono due numeri, le cui radici quadrate differiscono di 4 unità.

72) Determina due numeri sapendo che sommandoli si ottiene 80, e sommandone le radici quadrate si ottiene invece 12.

Le seguenti tre equazioni sono un po' "particolari": per risolverle, occorre a un certo punto effettuare un raccoglimento a fattor comune e … sfruttare nuovamente l'uguaglianza iniziale!

73) $\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}=3$ ⇨ 74) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-12}=1$ 75) $\frac{\sqrt[3]{9+x}+\sqrt[3]{9-x}}{3}=\sqrt[3]{2}$

SOLUZIONI (le eventuali soluzioni non accettabili sono fra parentesi quadre)

1) 3 [−1] 2) $\frac{1}{6};\frac{1}{2}$ 3) −4 [16] 4) 2; 3 5) $\frac{1}{4}$ [2] 6) 6 [−2] 7) 9 [1] 8) 1,08 9) $\frac{11}{9}$ [−1]

10) $10+4\sqrt{5}$ $\left[10-4\sqrt{5}\right]$ 11) $-\frac{7}{3};3$ 12) $\frac{3-\sqrt{3}}{3};\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ 13) −1; 2 14) 1 [−1] 15) 3

16) −33 [−1] 17) $\frac{49}{9}$; 9 18) impossibile 19) 4 [124] 20) $-1\left[\frac{47}{9}\right]$ 21) $\frac{121}{16}$ [1] 22) 9

23) 2 [−94/25] 24) 1 25) 49/24 26) $-2\sqrt{2};2\sqrt{2}$ [0] 27) $0;-2\sqrt{2};2\sqrt{2}$ 28) 35/2

29) −1; 0 [1] 30) $-\sqrt{3};\sqrt{3}$ 31) $-\sqrt{3};\sqrt{3}$ 32) 1 [1/4] 33) 64 34) $0;1;\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8$

35) Un radicale con indice pari non può assumere valore negativo quindi la somma a 1° m. non potrà …

36) 225 37) ±5 38) 1,3339; 2,7065 39) 5,8 40) −3/5 [4/5] 41) 0; 3 42) 7 [2] 43) −2, −1, 2, 3

44) $-\frac{31}{8}$ 45) $\frac{4}{7}$ 46) 5 47) 0; 1; 4 48) $-2;\frac{18}{7}$ 49) 5; 10 50) 11383875 51) $\frac{342}{343}$ 52) 1; 2; 3

53) $-1;-\frac{1}{5}$ 54) −1; 3 55) $\frac{1}{4}$ [1] 56) 0; −4 [1] 57) 5 [1] 58) $1;\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ $\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right]$ 59) 2 60) $\frac{1}{4};-\frac{9}{4}$

61) −1 [4] 62) $\frac{49}{3}$ [4] 63) $-\frac{9}{25};-\frac{7}{16}$ 64) 4 $\left[\frac{49}{4}\right]$ 65) 2 $\left[-2;\pm 2\sqrt{21}\right]$ 66) 5; −30 ($y^2=25\Leftrightarrow y=\pm 5$)

67) −2 (una somma di quantità non negative può annullarsi solo se si annulla ciascuna delle quantità … e tutti i radicali presenti si annullano per uno stesso valore di *x*, che è −2)

68) 9; 1 [4; 1/4] ($a\cdot b=0\Leftrightarrow a=0\vee b=0$ quindi l'equazione equivale a $\sqrt{x}-x+6=0\vee\sqrt{x}-2x+1=0$)

69) $x^{2/3}=5;\ \left(x^{2/3}\right)^3=5^3;\ x^2=125;\ x=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$
(quando l'esponente è frazionario si intende che la base non possa essere negativa!);
oppure: $x^{2/3}=5;\ \left(x^{2/3}\right)^{3/2}=5^{3/2};\ x=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

70) 238 cm 71) 29 72) 16 e 64 73) −5; 2 : vedi (*) qui sotto 74) 20; −15 75) ±7

(*) $\left(\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}\right)^3=3^3$
$6+x+3\sqrt[3]{(6+x)^2}\cdot\sqrt[3]{3-x}+3\sqrt[3]{6+x}\cdot\sqrt[3]{(3-x)^2}+3-x=27$ $9+3\sqrt[3]{(6+x)(3-x)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}\right)}_{=3}=27$ …

Matematica e Problemi della Realtà

EQUAZIONI IRRAZIONALI E SITUAZIONI REALI

IL POZZO

Lasciando cadere un sasso in un pozzo profondo, il suono dello "splash" si sente dopo 3,2 secondi. Qual è la profondità *s* del pozzo?

Sarebbe sbagliato, di fronte a questo problema, utilizzare unicamente la formula $s = \frac{1}{2}gt^2$ che mette in relazione lo spazio e il tempo in un moto sotto l'azione della sola forza di gravità. Infatti, a parte la questione della resistenza dell'aria al moto del sasso che comunque si può ritenere trascurabile, se si applicasse questa formula per trovare s a partire da $t = 3,2$ non si terrebbe conto del fatto che quei $3,2$ secondi sono la somma di DUE intervalli di tempo:

1) il tempo t_1 che ci mette il SASSO per arrivare a toccare l'acqua in fondo al pozzo;
2) il tempo t_2 che impiega il SUONO per risalire dalla superficie dell'acqua alle orecchie dell'osservatore.

Per quanto riguarda t_1, abbiamo la relazione

$$s = \frac{1}{2}gt_1^2 \approx \frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot t_1^2 = 4,9t_1^2$$

quindi $t_1 \approx \sqrt{\frac{s}{4,9}}$

mentre t_2 è legato a s dalla relazione

$$s = v_S \cdot t_2$$

dove v_S è la velocità del suono nell'aria.
Ora, tale velocità dipende dalla temperatura: a 21 °C è di circa 344 m/s, ma nel nostro pozzo fa decisamente freddino (5 °C pressappoco), e in queste condizioni la velocità del suono nell'aria si abbassa a circa 334,5 m/s. Dunque

$$s = v_S \cdot t_2 \approx 334,5\cdot t_2\,; \quad t_2 \approx \frac{s}{334,5}$$

A questo punto, sapendo che $t_1 + t_2 = 3,2$ possiamo scrivere l'equazione irrazionale

$$\sqrt{\frac{s}{4,9}} + \frac{s}{334,5} = 3,2$$

che ora risolveremo, armandoci di macchinetta calcolatrice perché i calcoli si preannunciano piuttosto impegnativi; in alternativa, potremmo utilizzare un foglio elettronico.



$$\sqrt{\frac{s}{4,9}} = 3,2 - \frac{s}{334,5} \quad (*)$$

$$\frac{s}{4,9} = 10,24 - \frac{6,4s}{334,5} + \frac{s^2}{334,5^2}$$

$$334,5^2\cdot s = 4,9\cdot 334,5^2\cdot 10,24 - 4,9\cdot 334,5\cdot 6,4\cdot s + 4,9\cdot s^2$$

...

$$4,9\cdot s^2 - 334,5\cdot 365,86\cdot s + 4,9\cdot 334,5^2\cdot 10,24 = 0$$

Converrà a questo punto dividere per 4,9 (tanto, se non dividiamo ora, comunque quel 4,9 andrebbe a finire a denominatore nella formula risolutiva); arrotondando all'intero il 2° e il 3° coefficiente, avremo

$$s^2 - 24976s + 1145756 = 0$$

e con la formula ridotta

$$s_{1,2} = 12488 \pm \sqrt{155950144 - 1145756} = 12488 \pm \sqrt{154804388} \approx 12488 \pm 12442 = \begin{cases} 46 \\ \cancel{24930} \end{cases}$$

La seconda soluzione dell'equazione di 2° grado va evidentemente scartata, e d'altronde ci rendiamo conto che, sostituendola nell'equazione irrazionale al passaggio (*) che precede immediatamente l'elevamento al quadrato, essa renderebbe negativo il 2° membro … ma il 1° membro di (*) è un radicale quadratico, che *non può* assumere valore negativo, da cui la non accettabilità di tale soluzione.

Il nostro pozzo ha una profondità (dall'esterno alla superficie dell'acqua) di circa 46 metri.

ESERCIZI (risposte a pag. 88)

1) **IL PENDOLO**



Il periodo di un pendolo (ossia, l'intervallo di tempo affinché il pendolo compia un'oscillazione completa) è dato dalla formula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

dove T è il periodo in secondi, ℓ la lunghezza del pendolo in metri, g è l'accelerazione di gravità, che sulla superficie terrestre vale circa 9,8 metri al secondo per secondo.

Se in un lontano pianeta un pendolo lungo 1 metro e 80 cm oscilla con un periodo di 2 secondi e ¼ di secondo, quanto vale l'accelerazione di gravità g su quel pianeta?

2) **VISIBILITA'**



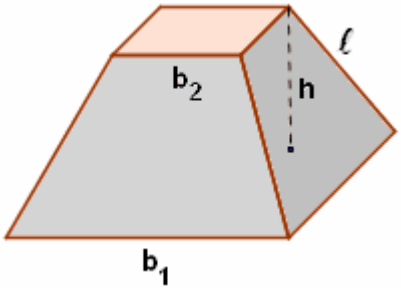
Si legge su parecchi siti anglosassoni che la distanza, sulla superficie terrestre, fino a cui si può vedere in una giornata limpida, può essere suppergiù approssimata dalla seguente formula:

$$v = \frac{1225\sqrt{a}}{1000},$$

dove v è la visibilità in miglia e a l'altezza dell'osservatore, espressa in piedi.
1 miglio è uguale a circa 1609 metri, e un piede a circa 30,5 cm.
Se la distanza massima cui si riesce a vedere è di circa 220 km, sulla cima di quale delle seguenti montagne ci si potrebbe trovare?

a) Mount Watson, Alaska, 3809 m
b) Mount Whitney, California, 4421 m
c) Mount Saint Elias, Alaska, 5489 m
d) Mount McKinley, Alaska, 6194 m

3) **ANTICHE VESTIGIA**



In una remota regione tropicale, è stata rinvenuta una costruzione a forma di tronco di piramide, con $b_1 = \text{m}30$, $b_2 = \text{m}20$, $\ell = \text{m}25$ (ℓ è uno degli spigoli).

Sapendo che sussiste la formula $\ell = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}(b_1 - b_2)^2}$

- determina l'altezza h della costruzione
- e stabilisci anche quanto misura l'apotema del tronco

4) **CONO**

La superficie laterale di un cono è data da $S_L = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, se r è il raggio di base e h l'altezza.

- Supponi nota la superficie laterale e il raggio, e inverti la formula per determinare l'altezza h.
- Supponi $S_L = 5\ \text{m}^2$ e $h = 1\ \text{m}$; determina il raggio r in metri con la precisione di 2 cifre decimali

5) **BALENE** (da *Intermediate Algebra* di Ron Larson e Kimberly Nolting)



The weight w (in pounds) of a killer whale can be modeled by

$$w = 280 + 325\sqrt{t},\ 0 \le t \le 144$$

where t represents the age (in months) of the killer whale.
What age did the killer whale weigh about 3400 pounds?

6) **TSUNAMI** (da www.regentsprep.org)



The speed that a tsunami can travel is modeled by the equation

$$S = 356\sqrt{d}$$

where S is the speed in km per hour and d is the average depth of the water in km

a) What is the speed of the tsunami when the average water depth is 0.512 km?
b) Solve the equation for d
c) A tsunami is found to be traveling at 120 km per hour. What is the average depth of the water?

7) **SOFFIA IL VENTO** (da *Intermediate Algebra* di Ron Larson e Kimberly Nolting)

The Beaufort wind scale was devised to measure wind speed.

Beaufort number	Force of wind	Effects of wind
0	Calm	Smoke rises vertically
1	Light air	Direction shown by smoke
2	Light breeze	Leaves rustle; wind felt on face
3	Gentle breeze	Leaves move; flags extend
4	Moderate breeze	Small branches sway; paper blown about
5	Fresh breeze	Small trees sway
6	Strong breeze	Large branches sway; umbrellas difficult to use
7	Moderate gale	Large trees sway; walking difficult
8	Fresh gale	Twigs break; walking hindered.
9	Strong gale	Branches scattered about; slight damage to buildings
10	Whole gale	Trees uprooted; severe damage to buildings
11	Storm	Widespread damage
12	Hurricane	Devastation

The Beaufort numbers B, which range from 0 to 12, can be modeled by

$B = 1,69\sqrt{s + 4,45} - 3,49$ where s is the speed (in miles per hour) of the wind.

Find the wind speed that corresponds to the Beaufort number $B = 11$.

8) **CHIODI**

The length ℓ (in inches) of a standard nail can be modeled by $\ell = 54d^{3/2}$ where d is the diameter (in inches) of the nail. What is the diameter of a standard nail that is 3 inches long?

9) **BRRR …**

Un indicatore che viene utilizzato per quantificare in qualche modo il disagio dovuto alla combinazione di freddo e di vento, è il cosiddetto "wind chill" (*wind = vento, chill = freddo, gelo*).
Esso indica la temperatura percepita, quando oltre al freddo c'è anche il vento che complica le cose.
Del "wind chill" si tiene conto nelle nazioni molto fredde per prendere decisioni sulla eventuale chiusura delle scuole, sulla raccolta dell'immondizia …

In un sito dello Yukon (Canada), troviamo la seguente formula lì utilizzata per il calcolo del *wind chill (abbiamo arrotondato i coefficienti, che sono più complicati nella formula originaria)*:

$$W = \left(12 + 6\sqrt{v} - 0,3v\right)\left(33 - T\right)$$

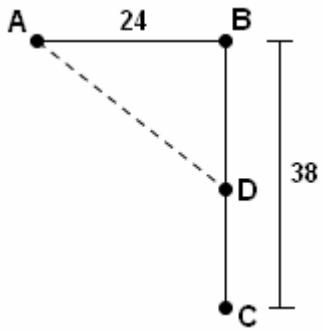


Qui W è appunto l'indice *wind chill*,
v la velocità del vento in km/h,
T la temperatura in gradi centigradi.

Supponiamo ora che la temperatura sia di 22 sotto zero e che la televisione abbia comunicato che il *wind chill* vale 2310.
Risali, tramite la formula, alla velocità del vento.

10) **NEL DESERTO E SULLA STRADA**

A una traversata del deserto, da A fino a D, alla velocità costante di 25 km all'ora, fa seguito la comoda tappa da D a C sulla strada statale ai 100 km orari.
Tutto il viaggio richiede in totale 1 ora e 24 minuti.
L'angolo di vertice B in figura è retto.
Ora, A dista da B 24 km, B dista da C 38 km …
Ma quale sarà la distanza fra D e C?
(*Armati di macchinetta perché i calcoli sono piuttosto impegnativi, anche se il risultato è intero*)





RISPOSTE

1) Circa 14 m al secondo per secondo 2) a 3) ≈ 24 m; $\approx 24,5$ m 4) $h = \sqrt{\frac{S_L^{\,2}}{\pi^2 r^2} - r^2}$; m 1,08 5) ≈ 92 mesi
6) a) ≈ 255 km/h b) $d = (S/356)^2$ c) ≈ 114 m 7) About 69 miles per hour 8) $\approx 0,15$ inches 9) 100 km/h
10) DC = x; $\frac{\sqrt{576 + (38 - x)^2}}{25} + \frac{x}{100} = 1,4$ ... $15x^2 - 936x + 12720 = 0$ ... ; $x = 20$ km

GRAFICI E RISOLUZIONI GRAFICHE

1. PRESENTAZIONE

Ci siamo già occupati di grafici e di risoluzioni grafiche nel **Volume 1** di questo corso.

Abbiamo spiegato

- cos'è un "**riferimento cartesiano**"
- cos'è una "**funzione**" (vedi NOTA) e cosa si intende per "**dominio**"
- cos'è e come si traccia il "**grafico**" **di una funzione** in un riferimento cartesiano

Abbiamo descritto

- i grafici delle **funzioni** "**lineari**" (= di 1° grado), evidenziando che si tratta di **RETTE**
- i grafici delle **funzioni** "**quadratiche**" (= di 2° grado), evidenziando che si tratta di **PARABOLE**
- i grafici delle **funzioni** legate a una "**proporzionalità inversa**", che risultano essere **IPERBOLI**

Per terminare, abbiamo visto come si possa

- **risolvere graficamente un'equazione**
- **risolvere graficamente un sistema** di due equazioni in due incognite.

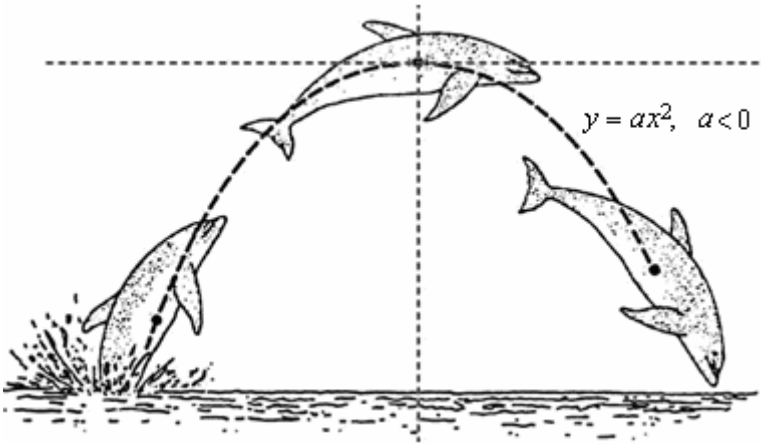
NOTA
Queste pagine del Volume 1 introducono il discorso "funzioni"
con riferimento alle funzioni "reali di variabile reale",
ossia a quelle corrispondenze che da un *numero reale*
fanno passare ad uno e un solo altro *numero reale*;
una *visione più generale del concetto di funzione*
è poi esposta nel successivo capitolo "Relazioni e funzioni"

Nel presente **Volume 2** riprenderemo il discorso

- riportando, per comodità del lettore, alcune pagine del volume 1 sulle
  - **funzioni lineari**
  - **funzioni quadratiche**
  - **funzioni della proporzionalità inversa**
- introducendo in modo elementare il simbolo di "**limite**"
- menzionando con un rapidissimo cenno la cosiddetta "**Geometria Analitica**"
- parlando brevemente delle meravigliose "**coniche**"
- occupandoci di **grafici di potenze e radici**, e del **grafico della funzione** $y = |x|$
- dando **qualche altro esempio di risoluzione grafica**
- indicando le "**manipolazioni**" che ci consentono,
  a partire dal grafico di una funzione "madre", di tracciarne rapidamente altri con esso correlati.

MOLTO interessante!

Grazie a Jill Britton,
Camosun College,
Victoria BC (Canada),
autrice del sito
http://britton.disted.camosun.bc.ca/home.htm,
pieno di ottime e divertenti idee,
per l'autorizzazione
ad utilizzare l'immagine qui a fianco.



Il baricentro del delfino
descrive un arco di parabola.

2. FUNZIONI LINEARI: RETTE

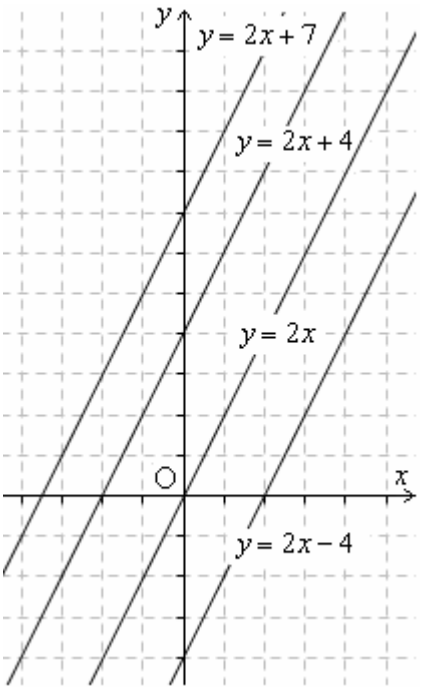
Prova a disegnare, sul tuo quaderno, il grafico di una funzione della forma

$\boxed{y = mx + q}$, **essendo *m, q* due numeri fissati**

(ad esempio, potresti prendere $y = 3x + 4$, $y = x - 1$, $y = -2x$ …)

Le funzioni della forma $y = mx + q$ sono anche dette "**funzioni di 1° grado**" o "**funzioni lineari**".

Bene! Ti accorgerai che
una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una RETTA
(*ecco* perché i matematici utilizzano con lo stesso significato
la locuzione "di 1° grado" e l'aggettivo "lineare"!)



Quelli qui sopra sono i grafici delle rette

$y = 2x + 7$
$y = 2x + 4$
$y = 2x$
$y = 2x - 4$

Come vediamo, tali rette sono fra loro *parallele*.

Da qui possiamo intuire che se due rette

$y = mx + q$, $y = m'x + q'$

hanno $m = m'$, allora sono parallele fra loro.

La costante ***m*** dell'equazione $y = mx + q$
viene detta "**coefficiente angolare**".

Ricordalo, è importante:

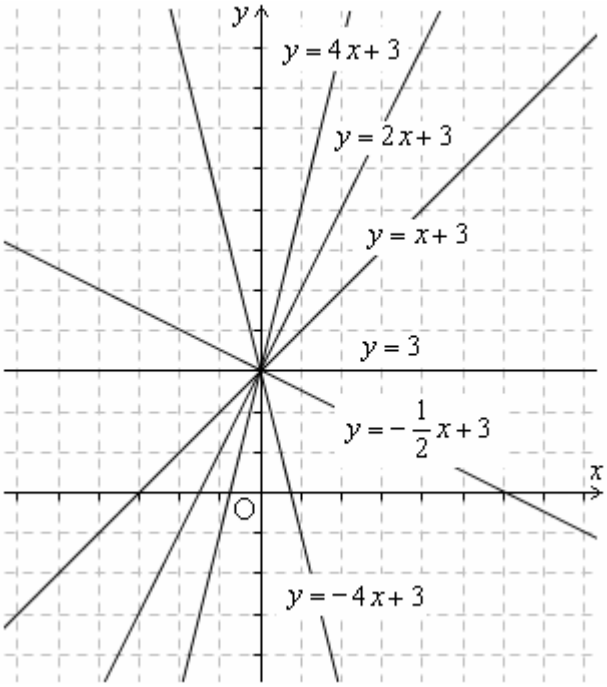
♥ "**Se due rette hanno lo stesso coeff. angolare *m*, allora sono parallele**".

Dalle figure emerge pure il significato della costante *q*.

♥ **La costante *q* esprime l'ordinata del punto nel quale la retta taglia l'asse verticale**.

In effetti, data l'equazione $y = mx + q$,
se si pone $x = 0$ si ottiene $y = q$
per cui la retta in questione passerà per $(0,\ q)$.

La costante ***q*** viene detta "l'**ordinata all'origine**",
per il fatto che **indica l'ordinata del punto della retta che sta sopra (o sotto) l'origine**.



Questi altri grafici corrispondono alle rette

$y = 4x + 3$ $\quad y = 3$
$y = 2x + 3$ $\quad y = -\frac{1}{2}x + 3$
$y = x + 3$ $\quad y = -4x + 3$

accomunate dalla stessa "ordinata all'origine" q
(mentre i coeff. angolari sono fra loro differenti).

Si vede chiaramente che

♥ **quando il coeff. angolare è positivo** ($m > 0$) **la retta è in salita,**

♥ **quando il coeff. angolare è negativo** ($m < 0$) **la retta è in discesa**,

♥ **quando il coeff. angolare è nullo** ($m = 0$) **la retta è in orizzontale**.

Il caso del coefficiente angolare nullo è quello della "funzione costante", ad esempio

$y = 3$,

che potrebbe anche essere scritta come

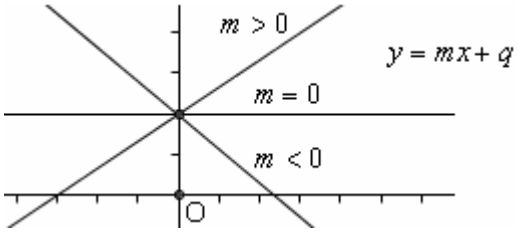
$y = 0 \cdot x + 3$

e assume sempre il valore $y = 3$ per qualsiasi valore di x.

Inoltre,

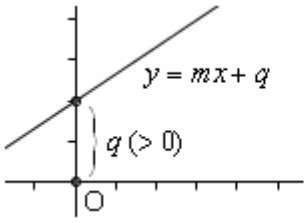
♥ **quanto più è grande il valore assoluto** $|m|$ del coefficiente angolare, tanto più la retta **è inclinata nella sua salita o discesa.**

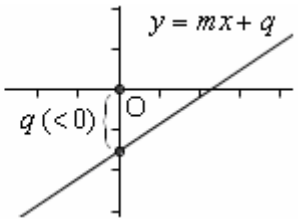
RIASSUNTO SCHEMATICO



m = coefficiente angolare

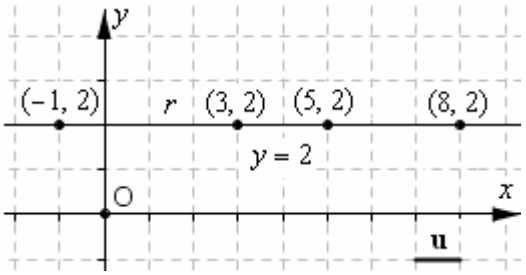
m > 0 salita
m < 0 discesa
m = 0 orizzontalità





q = "ordinata all'origine"
= ordinata del punto che ha x = 0
= ordinata del punto di intersezione con l'asse y

RETTE ORIZZONTALI



Sappiamo che **una retta orizzontale** (**= parallela all'asse *x***) **ha coefficiente angolare nullo** ($m = 0$) .
Riflettiamo ancora un attimo su questo fatto.

In effetti, una retta orizzontale
è il luogo dei punti del piano cartesiano,
con la proprietà di avere una certa ordinata fissata *k*
(ad esempio, nella figura qui a fianco è rappresentata
la retta formata da tutti e soli i punti di ordinata uguale a 2).
L'equazione "gemellata" a tale retta, ossia l'uguaglianza indicante la proprietà che è caratteristica di tutti i suoi punti e di essi soltanto, è perciò della forma $y = k$ (per la retta in figura, $y = 2$).
Un'uguaglianza del tipo $y = k$ può anche essere riscritta come $y = 0 \cdot x + k$;
vediamo che qualunque valore si attribuisca a *x*, la *y* corrispondente vale sempre *k*,
e il moltiplicatore di *x*, ossia il coefficiente angolare, è appunto 0.

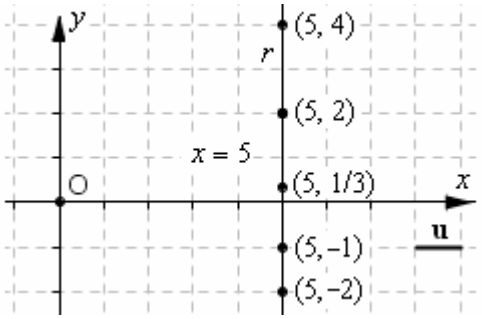
Riassumendo: **il coefficiente angolare $m = 0$ è associato all'orizzontalità**;
♥ **una retta orizzontale** (NOTA) **ha** dunque **equazione della forma $y = k$ (*k* costante)**

NOTA: spesso in queste pagine ci prendiamo la licenza, per brevità, di scrivere "retta *orizzontale/verticale*" quando invece dovremmo parlare di "retta *parallela all'asse delle ascisse/ordinate*". Di norma, in effetti, l'asse delle ascisse è disposto orizzontalmente rispetto all'osservatore, e quello delle ordinate verticalmente.

RETTE VERTICALI

♥ **Per una retta "verticale" (= parallela all'asse delle *y*) il coefficiente angolare non esiste, non è definito.**

Infatti si intende per "coefficiente angolare" la costante che moltiplica *x* in un'equazione della forma $y = mx + q$;
ma una retta verticale *non ha* un'equazione di tal forma.
L'equazione di una retta (o, più in generale, di una data curva sul piano cartesiano) esprime una proprietà "caratteristica" dei punti di quella retta, ossia una proprietà che è posseduta dalle coordinate *x*, *y* di tutti i punti di quella retta, e di essi soltanto.
Ora, prendiamo la retta verticale della figura a destra.
Qual è la proprietà che caratterizza i suoi punti?
E' facile riconoscere che i suoi punti sono tutti e soli i punti del piano cartesiano, la cui ascissa è 5.
Pertanto tale retta sarà associata all'equazione $x = 5$.
… Impossibile riscriverla sotto la forma $y = mx + q$!



♥ **Una retta verticale ha equazione della forma $x = k$.**

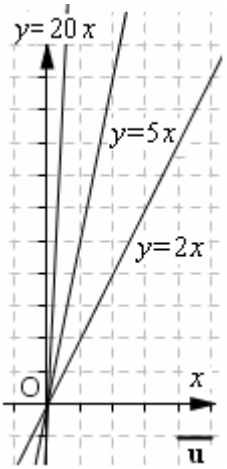
Osserviamo che tale equazione
- NON indica una funzione in cui *x* sia var. indipendente
- NON può essere portata sotto la forma $y = mx + q$.

♥ **DA UN CERTO PUNTO DI VISTA, si può però dire che "una retta verticale ha coefficiente angolare INFINITO".**

Questa affermazione va interpretata nel senso che
"se una retta ha inclinazione altissima, quasi verticale, il suo coefficiente angolare sarà grandissimo, tendendo all'infinito all'aumentare dell'inclinazione".

♥ Anche **l'asse delle *y*** è una particolare retta verticale: la sua equazione è **$x = 0$** .
♥ E **l'asse *x*** è una particolare retta orizzontale, di equazione **$y = 0$** .

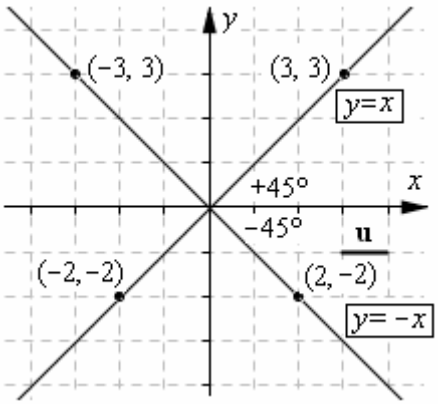
Osserva la figura qui a fianco. E immagina che inclinazione avrebbe una retta con coefficiente angolare uguale a 1.000.000.000 !!!



BISETTRICI DEI QUADRANTI E RETTE INCLINATE DI 45°

- ♥ **La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano la cui ordinata è uguale all'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = 1$** contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale, sono inclinate di **45° in salita (+ 45°)**.

- ♥ **La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano la cui ordinata è uguale all'opposto dell'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = -1$** contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale, sono inclinate di **45° in discesa (− 45°)**.



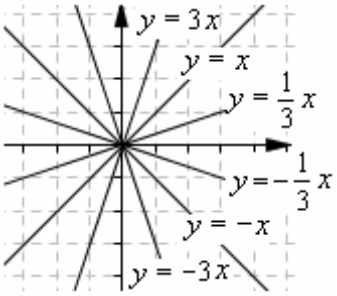
Le bisettrici dei quadranti

RETTE CON INCLINAZIONE MAGGIORE, O MINORE, DI 45°

- **Una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) > 45°, ha $|m| > 1$; una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) < 45°, ha $0 \le |m| < 1$**

- **Due rette, che siano ugualmente inclinate, ma una in salita e l'altra in discesa, hanno coefficienti angolari fra loro OPPOSTI.**

- ♥ **Si può dimostrare che due rette PERPENDICOLARI hanno coefficienti angolari fra loro ANTIRECIPROCI (si dice "antireciproco" l'opposto del reciproco).**



LA PROPRIETA' FONDAMENTALE DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Prendi una retta qualsiasi: che so, la $y = 2x + 3$. Adesso, assegna a x due valori, per calcolare i corrispondenti valori di y e determinare dunque due punti della retta stessa. Ad esempio,

- puoi porre $x = 1$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ e di conseguenza un primo punto A(1, 5) ;
- poi puoi porre $x = 4$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ da cui un secondo punto B(4, 11) .

Ora vai a calcolare il rapporto (= quoziente) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti ottenuti:

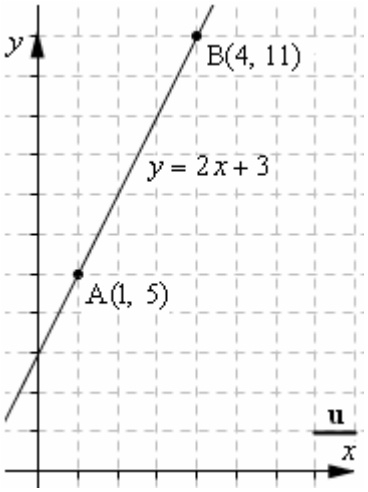
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

Come hai potuto vedere, il risultato di questo calcolo coincide col coefficiente angolare m della retta.

Prova con un'altra coppia di punti, fai nuovamente il calcolo: otterrai ancora lo stesso valore, il valore del coefficiente angolare. Prendi un'altra retta, considera una coppia di suoi punti: vedrai che il calcolo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

darà sempre il coefficiente angolare m di quella retta.



Ecco una retta $y = 2x + 3$, *e due suoi punti* A(1, 5); B(4, 11) .

Calcoliamo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

avremo $\frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$.

Ma 2 è il coeff. angolare!!!

Vale dunque (lo si potrebbe dimostrare in generale) la **formula**

♥ $\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m}$ (importantissima!)

Data una retta di equazione $y = mx + q$, il suo coefficiente angolare m è uguale al rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualsiasi della retta stessa.

NOTA - Il simbolo Δ è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età $\Delta e = 47 - 15 = 32$.
Presi, in Fisica, due istanti di tempo successivi t_1 e t_2, nei quali la velocità di un corpo è risp. v_1 e v_2, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'incremento di velocità (>, < o = 0) è dato da $\Delta v = v_2 - v_1$.

E' utile ed importante osservare (vedi figura) che

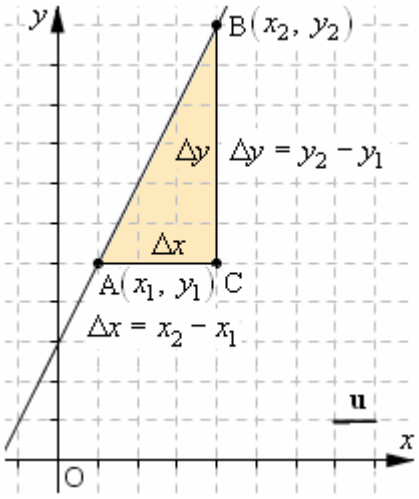
♥ **le due quantità Δx e Δy**
corrispondono alle due misure (con segno)
dei due segmenti orizzontale (Δx) e verticale (Δy)
che occorre percorrere per passare dal primo punto al secondo

… **misure CON SEGNO**, nel senso che

il segmento orizzontale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso da sinistra verso destra,
- negativo se viene percorso da destra verso sinistra;

e allo stesso modo

il segmento verticale andrà preso col segno
- positivo se viene percorso dal basso verso l'alto,
- negativo se viene percorso dall'alto verso il basso.



Quanto sopra ci dice che in una funzione "lineare", ossia della forma $y = mx + q$, l'incremento di x è proporzionale all'incremento corrispondente di y: il rapporto fra questi due incrementi è costante.
Si può dimostrare che VALE ANCHE IL VICEVERSA:
se due grandezze x, y sono legate fra loro in modo tale che l'incremento di x è proporzionale all'incremento corrispondente di y (se raddoppia uno, raddoppia anche l'altro …)
allora la relazione tra le due grandezze è della forma $y = mx + q$.

Segnaliamo infine che molti testi chiamano "**AFFINE**" una funzione della forma $y = ax + b$, riservando il termine "**LINEARE**" solo, o prevalentemente, al caso in cui $b = 0$ ($y = ax$).

ENGLISH
- coefficiente angolare = **slope** (lett.: *pendenza*), o **gradient**
- ordinata all'origine = **y-intercept**
- $\Delta y / \Delta x$ = "**rise over run**" = spostamento *verticale fratto spostamento laterale*

DISEGNARE UNA RETTA CONOSCENDONE UN PUNTO E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Se noi sappiamo che una retta passa per un dato punto P_0,
e conosciamo il coefficiente angolare m di quella retta,
potremo disegnare la retta con precisione
anche senza aver determinato la costante q dell'equazione $\boldsymbol{y = mx + q}$.

Infatti, poiché sappiamo che per il coefficiente angolare vale la formula $\boldsymbol{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$,

ci basterà fare il disegno in modo che la retta passi per P_0
e per un altro punto P_1 per ottenere il quale partiremo da P_0 e ci sposteremo
- ♪ prima orizzontalmente di un segmento orientato Δx
- ♫ poi verticalmente di un altro segmento orientato Δy,

dopo aver scelto Δx e Δy in modo tale che il loro quoziente sia uguale a quel valore m che ci interessa.

- Ad esempio (figura 1), per disegnare la retta passante per $P_0(3,3)$ e avente coefficiente angolare $m = 2$, possiamo partire da P_0 e poi spostarci di 1 verso destra ($\Delta x = 1$) e di 2 verso l'alto ($\Delta y = 2$).
  Troveremo così il nuovo punto P_1, tale che la retta P_0P_1 avrà $m = \Delta y / \Delta x = 2$
  e sarà perciò la retta desiderata.
- Facciamo un altro esempio (fig. 2). Per disegnare la retta passante per $A(1,5)$ e di coeff. ang. $m = -3/4$, possiamo partire da A e spostarci di 4 verso destra ($\Delta x = 4$) poi di 3 verso il basso ($\Delta y = -3$).
  Raggiungeremo così un nuovo punto B e congiungendo A con B il gioco sarà fatto.

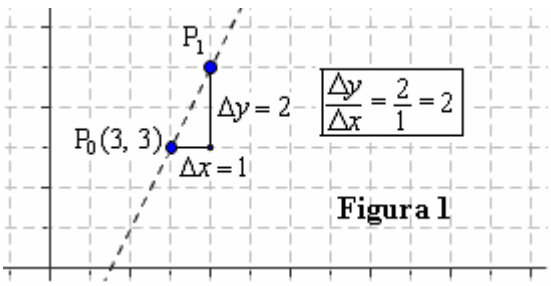


Figura 1

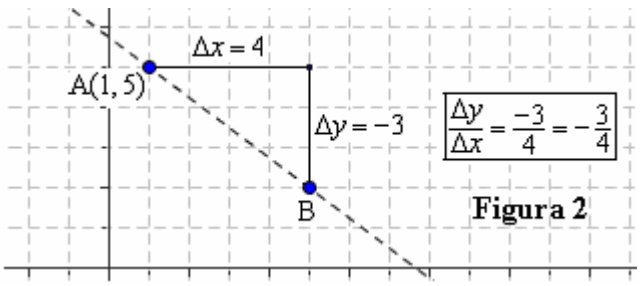


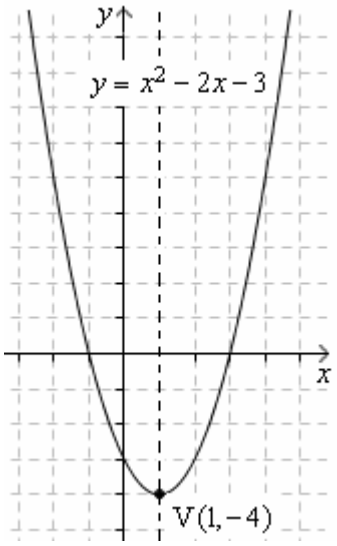
Figura 2

Queste pagine sulla retta sono state riportate pari pari dal volume 1 per comodità del lettore.
Per gli ESERCIZI, si rimanda a quel volume.

3. FUNZIONI QUADRATICHE: PARABOLE

Parliamo ora delle funzioni **"di 2° grado", o "quadratiche",** la cui equazione è della forma $y = ax^2 + bx + c$

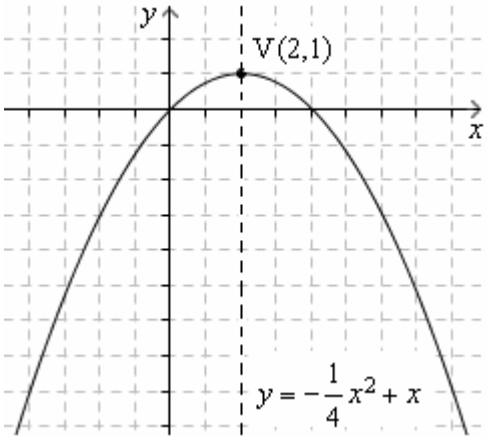
x	$y = x^2 - 2x - 3$
–3	12
–2	5
–1	0
0	–3
$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$
1	– 4
$\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$
2	–3
3	0
4	5
5	12



Disegnando questa curva per punti, ci si rende conto che essa presenta una simmetria "assiale", cioè una simmetria rispetto a una retta (tratteggiata nella figura). La presenza di un asse di simmetria consente di tracciare il grafico con più facilità: calcolate le coordinate di un punto, dopo averlo disegnato possiamo immediatamente disegnare anche un altro punto, quello che è simmetrico del primo rispetto all'asse.

Abbiamo indicato con V ("V" di "vertice") il punto di ordinata minima del grafico.

x	$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$
–2	–3
–1	–1,25
0	0
1	0,75
2	1
3	0,75
4	0
5	–1,25
6	–3



Questa seconda curva è "capovolta" rispetto alla precedente; inoltre la sua "curvatura" è meno accentuata. Entrambe le circostanze sono legate al coefficiente del termine di 2° grado nelle rispettive equazioni, come è spiegato più avanti.

Il vertice in questo caso è il punto di ordinata massima.

Una funzione di 2° grado $y = ax^2 + bx + c$ ha come grafico una "parabola".

♥ Il **segno del coefficiente a** determina l'orientamento della "**concavità**" ovvero della "parte cava":
- **$a > 0$: concavità rivolta verso l'alto** ∪
- **$a < 0$: concavità rivolta verso il basso** ∩

♥ Il **valore assoluto di a** si dice "**apertura**" perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola
- sia più "dolce" (valori di $|a|$ piccoli)
- o sia più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Si dimostra che l'**ascissa del** "**vertice**" (che possiamo provvisoriamente descrivere come il punto della parabola avente ordinata minima oppure massima, o anche come l'intersezione della parabola col proprio asse di simmetria) è calcolabile tramite la formula

♥ $x_V = -\frac{b}{2a}$.

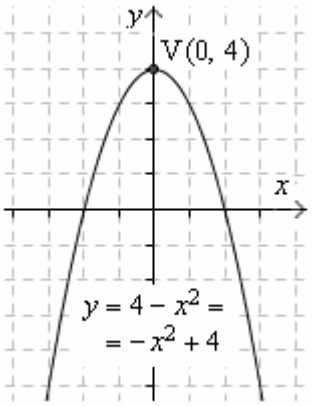
Trovata con questo calcolo l'ascissa del vertice, la rispettiva ordinata si potrà determinare facilmente: basterà semplicemente sostituire, nell'equazione della parabola, al posto di x il valore trovato.

Ad esempio, nel caso della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$,

il calcolo fornisce: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ da cui successivamente $y_V = x_V{}^2 - 2x_V - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

L'*individuazione del vertice* è *la prima cosa* che conviene fare, quando si vuole disegnare una parabola, come d'altronde il tracciamento dell'**asse di simmetria**, che è poi la retta verticale passante per il vertice, ossia la retta formata dai punti di ascissa $x = -\frac{b}{2a}$ (brevemente: la retta di equazione $x = -\frac{b}{2a}$).

x	$y = 4 - x^2$
–3	–5
–2	0
–1	3
$-\frac{1}{2}$	$4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$
0	4
1/2	15/4
1	3
2	0
3	–5



Un ultimo esempio.

$y = 4 - x^2$ si può riscrivere come $y = -x^2 + 4$.

E' dunque $b = 0$, quindi anche $x_V = -\frac{b}{2a} = 0$.

Ma se il vertice ha ascissa 0, esso si troverà sull'asse delle *y*, che sarà perciò l'asse di simmetria per la curva.

D'altronde, che la curva fosse simmetrica rispetto all'asse *y* lo si poteva capire pure dal fatto che,
non essendoci il termine contenente *x*
ma solo il termine con x^2 e il termine noto,
dando a *x* due valori opposti
si ottiene sempre lo stesso valore di *y*!

4. FUNZIONI DELLA PROPORZIONALITA' INVERSA: IPERBOLI

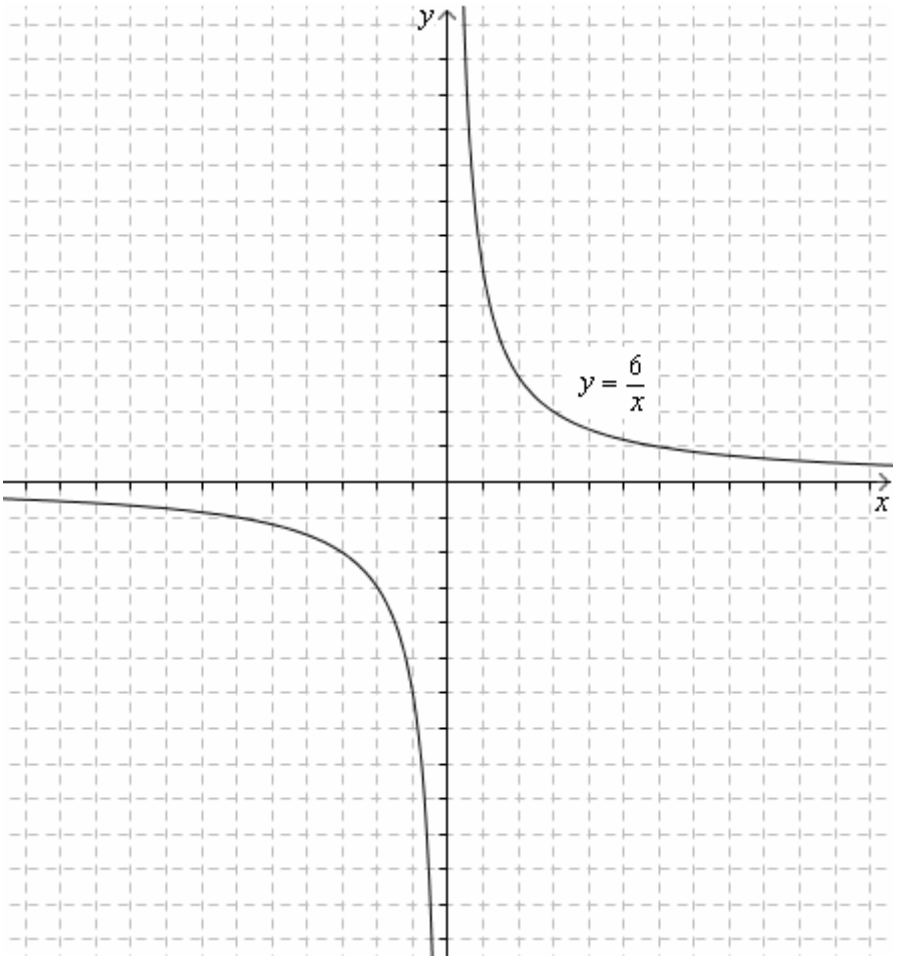
Una funzione della forma $y = k / x$, con *k* costante, è detta "**funzione della proporzionalità inversa**", perché **le due variabili in gioco, *x* e *y*, sono inversamente proporzionali**:
se *x* raddoppia, *y* si dimezza; se *x* triplica, *y* si riduce alla terza parte; ecc. ecc.

Tracciamo ad esempio il grafico della funzione $y = 6/x$.

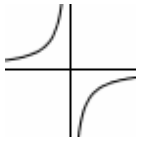
Otterremo un'armoniosa curva in due rami, della quale una caratteristica che balza subito in evidenza è la simmetria "centrale", dove il centro di simmetria è l'origine del riferimento cartesiano.

*Si potrebbe dimostrare che si tratta di una "**iperbole**".*

x	$y = \frac{6}{x}$
–1000	–0,006
–12	–0,5
–6	–1
–5	–1,2
–4	–1,5
–3	–2
–2	–3
–1	–6
–0,5	–12
–0,1	–60
–0,001	–6000
0,001	6000
0,1	60
0,5	12
1	6
2	3
3	2
4	1,5
5	1,2
6	1
12	0,5
1000	0,006
1000000	0,000006



In questo esempio è $k>0$ e la curva sta nel 1° e 3° quadrante; se invece fosse $k<0$, come nei casi $y = -\frac{2}{x} = \frac{-2}{x}$ oppure $y = -\frac{7}{4x} = \frac{-\frac{7}{4}}{x}$, la curva andrebbe ad occupare il 2° e 4° quadrante:



- Quando *x* diventa *grande grande* ($x = 1000, x = 1000000, \ldots$), *y* diventa *piccola piccola*, "si schiaccia a zero"
- Quando *x* si avvicina a 0 da destra, ossia "per valori positivi", la *y* corrispondente tende a $+\infty$
- Quando *x* si avvicina a 0 da sinistra, ossia "per valori negativi", la *y* corrispondente tende a $-\infty$
- Quando *x* tende a $-\infty$, la *y* corrispondente tende a 0 dal basso, per valori negativi

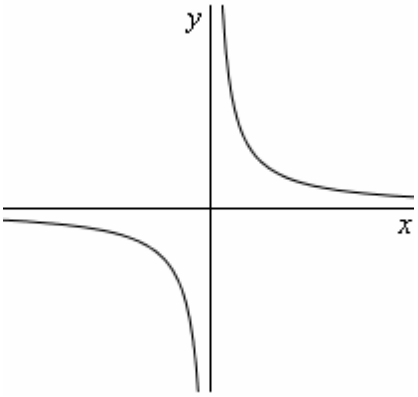
Le **definizioni** rigorose di "**parabola**" e "**iperbole**" sono riportate alla pagina 98 di questo volume.

ESERCIZI Traccia i grafici di: a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - x - 6$ e) $y = \frac{1}{10}x^2$ f) $y = \frac{4}{x}$ g) $y = -\frac{2}{x}$ h) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = -x^2$ d) $y = 3x^2 - 9$

5. IL SIMBOLO DI "LIMITE" (INTRODUZIONE ELEMENTARE)

Dunque nella funzione $y = \frac{6}{x}$

quando *x* diventa *grande grande*
($x = 1000,\ x = 1000000\ \ldots$),
la *y* corrispondente
diventa *piccola piccola*,
"si schiaccia a zero".



Ciò può essere espresso,
in simboli, con la scrittura

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x} = 0$$

che si legge:

"il limite, per *x* che tende a $+\infty$, della quantità $\frac{6}{x}$, è zero".

Anzi, volendo essere ancora più precisi, potremmo scrivere

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x} = 0^+$$

dove il + accanto allo 0 indica che l'avvicinamento a 0 di y avviene "per valori positivi", "dall'alto".

IL SIMBOLO DI "LIMITE"

$$\lim_{x \to \square} \quad = \quad$$

- $x \to \square$: "*per x che tende a ...*" — qui scrivo a cosa tende *x*
- qui scrivo l'espressione della funzione
- qui scrivo a cosa tende *y*

"tende" = "si avvicina"

Il concetto di limite
è a dire il vero problematico e complesso;
viene trattato ad un livello
più avanzato della matematica;
qui ci limitiamo
a introdurre il simbolo di limite
per schematizzare
quelle situazioni nelle quali,
quando la *x* si avvicina a un certo valore,
la *y* corrispondente
si avvicina ad un certo altro valore.

- Quando *x* si avvicina a 0 da destra, ossia "per valori positivi", la *y* corrispondente tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{6}{x} = +\infty$$

- Quando *x* si avvicina a 0 da sinistra, ossia "per valori negativi", la *y* corrispondente tende a $-\infty$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{6}{x} = -\infty$$

- Quando *x* tende a $-\infty$, la *y* corrispondente tende a 0 dal basso, per valori negativi:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x} = 0^-$$.

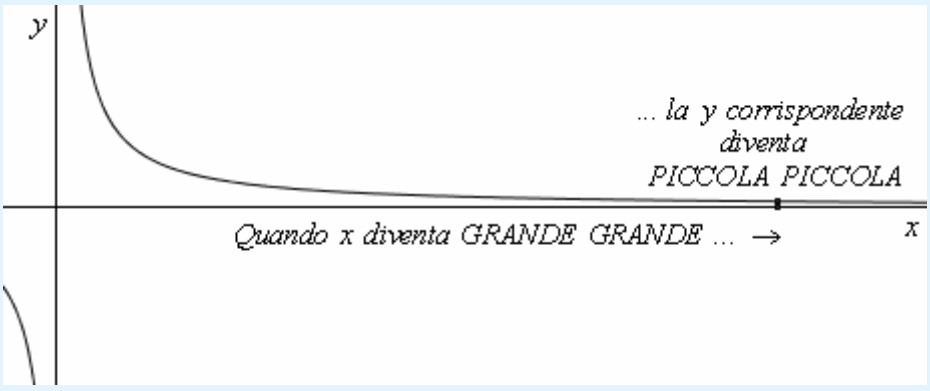
Cosa devo guardare, intuitivamente, per determinare un limite?
Facciamo riferimento al primo esempio proposto.

Posso guardare il grafico …

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x} = ?$$

Faccio tendere *x* a $+\infty$,
ossia mi sposto, sull'asse *x*,
molto, ma molto a destra …
… e vedo cosa fa la *y*.

In questo caso,
la *y* corrispondente
diventa piccola piccola!
Tende a 0! Il limite è 0.



Oppure, anche senza grafico,
faccio assumere alla *x* valori molto molto grandi
e mi chiedo quali valori assume la *y* corrispondente.
Tali valori della *y* sono piccolissimi! Il limite è dunque 0.

$$x = 1000 \ \rightarrow \ y = \frac{6}{1000} = 0{,}006$$

$$x = 1000000 \ \rightarrow \ y = \frac{6}{1000000} = 0{,}000006$$

Qualche esercizietto sui limiti è proposto in fondo a pagina 103.

6. QUALCHE CENNO ALLA "GEOMETRIA ANALITICA"

Abbiamo visto nelle pagine precedenti che le rette verticali fanno eccezione rispetto alle altre rette, perché non vengono associate ad un'equazione della forma $y = mx + q$, bensì della forma $x = k$.

Come insegna quella branca della matematica che è chiamata "Geometria Analitica",
si possono far rientrare tutte le rette, verticali e non, nella categoria delle curve individuate da un'equaz. di 1° grado in *x* e *y*, ossia da un'equazione della forma $ax + by + c = 0$, con a, b, c costanti non tutte nulle.

Voglio dire: si può dimostrare che l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano, le cui coordinate soddisfano ad un'equazione di tal forma, è sempre una retta, e che, viceversa, data una qualsiasi retta nel piano cartesiano, essa può essere associata ad un'equazione della forma $ax + by + c = 0$, nel senso che si può sempre trovare un'equazione di tal forma la quale sia verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti della retta in questione.
E nella famiglia delle rette $ax + by + c = 0$ le verticali saranno tutte, e sole, quelle per le quali è $b = 0$.

Osserviamo che, data un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$, i suoi coefficienti non sono determinati in modo unico, bensì lo sono "a meno di una costante moltiplicativa".
Intendo con ciò che, se una data equazione $ax + by + c = 0$ individua una certa retta r, allora individueranno r anche tutte (e sole) le equazioni $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$, con λ costante arbitraria non nulla.
Per esempio:

- l'equazione $4x + 2y - 3 = 0$ individua una retta, che potrà essere disegnata più agevolmente se si porta l'equazione stessa in "forma esplicita", quella che presenta y isolata al primo membro:

  $4x + 2y - 3 = 0; \quad 2y = -4x + 3; \quad y = -2x + \frac{3}{2}$

  … ma anche $40x + 20y - 30 = 0$, ottenuta moltiplicando per $\lambda = 10$, individua la medesima retta.

- Ancora: tanto l'equazione $x - 3 = 0$ quanto la $2x - 6 = 0$ o la $3x - 9 = 0$ o la $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ o la $-x\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0$ individuano sempre la stessa retta verticale $x = 3$, luogo dei punti di ascissa 3.

♥ **La Geometria Analitica sviluppa l'idea secondo la quale, così come un punto del piano cartesiano è individuato, ossia è localizzato in modo univoco, dalla coppia delle sue coordinate (x, y), altrettanto una linea (curva o retta) sul piano cartesiano, se è sufficientemente regolare, può essere individuata da un'equazione nelle due variabili *x* e *y*, nel senso che può essere associata a un'opportuna equazione nelle due variabili *x*, *y* la quale sia verificata dalla coppia (x, y) delle coordinate di tutti i punti della curva, e di essi soltanto.**

Non sempre tale equazione sarà tale da definire una *funzione* di *x* in *y*, cioè un legame che a partire da un valore di *x* permetta di determinare *un solo* valore di *y*.

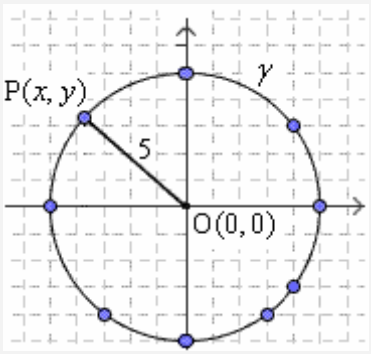
Ad es., prendiamo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 5.
Per determinare l'equazione di questa curva, cerchiamo di stabilire quale sia la condizione alla quale deve soddisfare un punto (x, y) del piano cartesiano, per appartenervi.
γ è il luogo dei punti del piano cartesiano, la cui distanza dall'origine è uguale a 5 unità di misura.
Quindi un punto $P(x, y)$ del piano cartesiano apparterrà a γ se e soltanto se risulterà $PO = 5$.
Ma per quali valori della coppia (x, y) è verificata la relazione $PO = 5$?
Se noi traduciamo in coordinate la relazione $PO = 5$, otterremo (vedi figura qui a fianco)

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$$

che è perciò l'equazione cercata.
Un punto del piano cartesiano fa parte della circonferenza γ se e solo se la coppia (x, y) delle sue coordinate soddisfa a tale equazione.
Osserviamo che l'equazione in esame non definisce una funzione: se infatti provassimo a portare in forma esplicita, isolando *y*, otterremmo un doppio segno

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

che ci confermerebbe ciò che è già geometricamente evidente: non è vero che a un valore di *x* corrisponda un solo valore di *y*.



Nel Volume 1 avevamo visto che la distanza fra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) nel piano cartesiano è data dalla formula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dunque

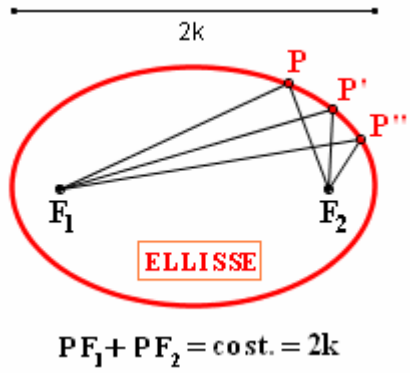
$$PO = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

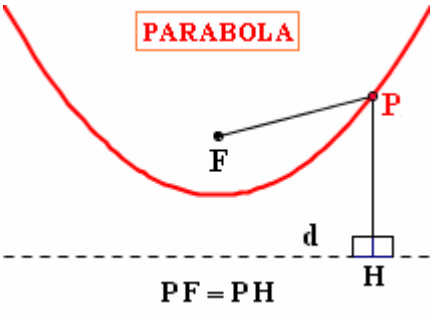
per cui si avrà $PO = 5$ se e solo se $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$ o anche $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$

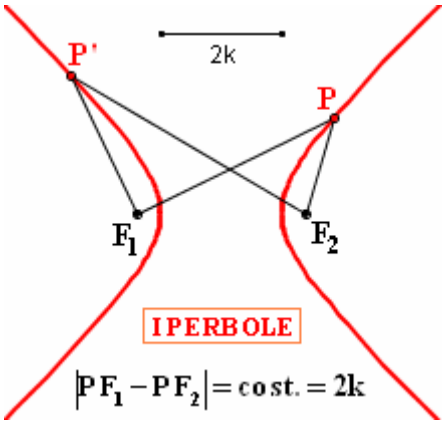
7. SIGNORI, LE CONICHE !!!

Si dicono "*coniche*" tre particolari *curve*
- o meglio: *tipologie* di curve -
chiamate, rispettivamente, *ellisse*, *parabola* e *iperbole*.

Eccone le definizioni.



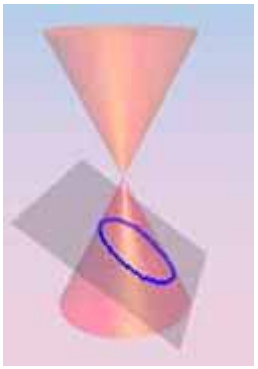




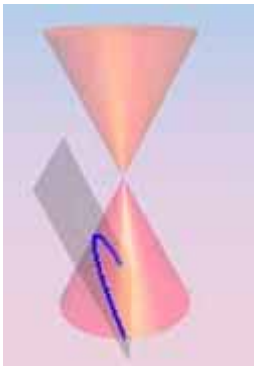
Si dice "ellisse" il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti "fuochi"	**Si dice "parabola" il luogo dei punti del piano, equidistanti da un punto fisso F (detto "fuoco") e da una retta fissa d (detta "direttrice")**	**Si dice "iperbole" il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi, detti "fuochi"**

Ma cosa possono avere in comune
tre curve apparentemente così diverse fra loro?
E perché mai vengono chiamate "*coniche*"?

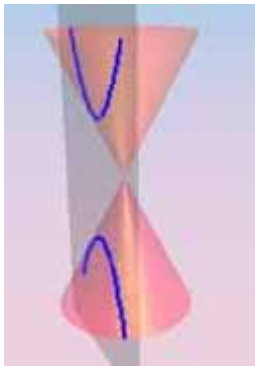
Bene:
sezionando con un piano una doppia superficie conica
(illimitata da entrambe le parti)
si può ottenere,
a seconda dell'inclinazione del piano secante rispetto all'asse del cono:



una curva chiusa…



oppure una curva aperta, ad un solo ramo …



oppure una curva aperta, a due rami

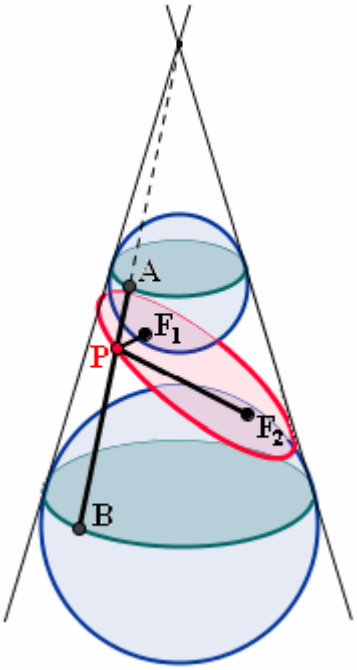
Figure tratte dal sito btc.montana.edu/ceres/ (Montana State University)

Si può ora dimostrare che queste tre tipologie di curve, definite "tridimensionalmente", corrispondono proprio alle tre definizioni di "ellisse", "parabola" e "iperbole" viste all'inizio, definizioni le quali erano basate esclusivamente su considerazioni di "geometria piana" !!!

Ad esempio, per quanto riguarda l'ellisse,
vale il seguente teorema (Dandelin, 1822):

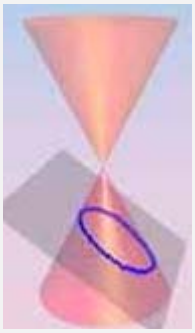
Quando l'intersezione fra una superficie conica e un piano
è una linea chiusa,
questa linea può essere pensata
come il luogo dei punti P del piano secante per i quali si ha
$PF_1+PF_2 = costante$,
dove:

F_1, F_2 sono i punti di contatto fra il piano secante e le due sfere della figura
(ciascuna delle quali è tangente al piano secante e alla superficie conica)
mentre la costante è la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze lungo le quali le sfere toccano la superficie conica.



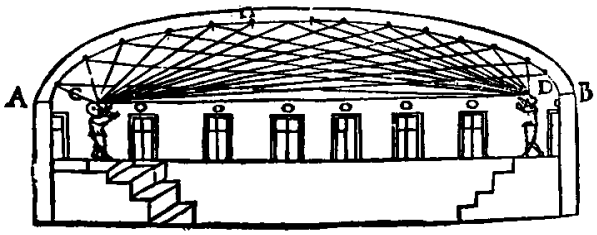
DIMOSTRAZIONE
(*senza approfondire i dettagli …*)

P, il generico punto della linea di cui ci stiamo occupando, è tale che $PF_1 = PA$ e $PF_2 = PB$
(tangenti alla sfera da uno stesso punto esterno!), per cui
$PF_1+PF_2 = PA+PB = AB = costante$
(costante perché AB ha sempre la stessa lunghezza:
la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze, è sempre la medesima,
dovunque venga misurata).



Le coniche abbondano di sorprendenti e meravigliose PROPRIETA'

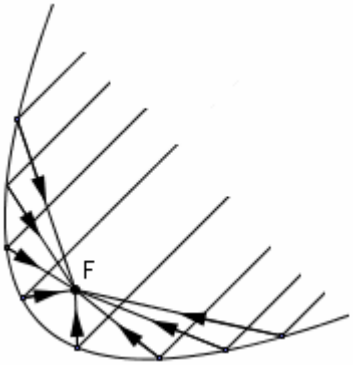
Citiamone una riguardante l'**ellisse**: si può dimostrare che
se un raggio - ad esempio di luce - uscente da un fuoco impatta sulla curva,
il raggio riflesso passerà per l'altro fuoco!



La volta di questa camera è un ellissoide di rotazione.
Se una persona bisbiglia piano piano
con la bocca in corrispondenza di uno dei fuochi,
un amico con l'orecchio nell'altro fuoco
potrà udire chiaramente ogni sua parola,
mentre tutti gli altri presenti nella stanza
non sentiranno nulla.

Una variante consiste
nel piazzare due fiammiferi nei due fuochi:
fregando uno di essi per accenderlo,
ecco che si accenderà istantaneamente pure quell'altro.

Anche la **parabola** gode di una proprietà notevole per quanto riguarda la riflessione.
Un raggio che viaggi parallelamente all'asse di simmetria della parabola,
quando impatta sulla curva, viene riflesso nel fuoco.



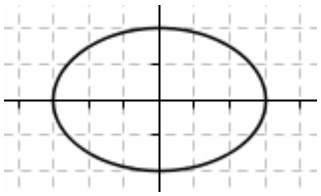
Questo fatto ha un'applicazione notevolissima in tecnologia:
le antenne paraboliche sono infatti caratterizzate
da una forma a paraboloide di rotazione;
le onde elettromagnetiche
provenienti da lontano
vengono concentrate nel fuoco,
dove è collocato il dispositivo di ricezione.

Le coniche sono le curve "associate a relazioni algebriche di secondo grado".

La Geometria Analitica insegna che un'equazione della forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, ossia **un'equazione di secondo grado in due variabili**, **rappresenta sempre, nel piano cartesiano, una conica (eventualmente degenere)**,
e precisamente:

- una conica di tipo **ellittico** se $b^2-4ac<0$
- una conica di tipo **parabolico** se $b^2-4ac=0$
- una conica di tipo **iperbolico** se $b^2-4ac>0$

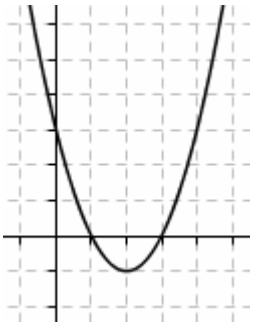
Esempi:



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ellisse,
con centro di simmetria nell'origine
e fuochi sull'asse delle *x*.

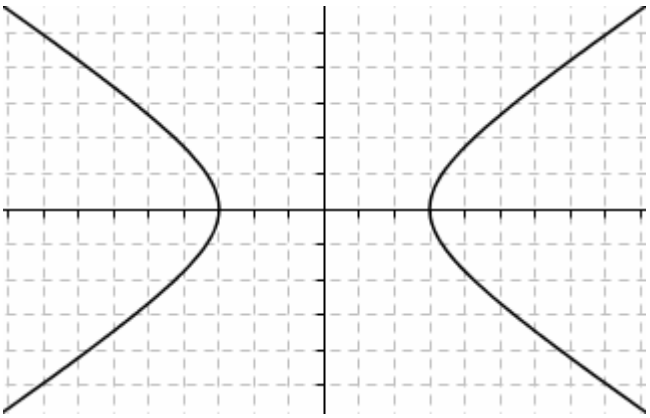
Forma implicita dell'equazione:
$4x^2+9y^2-36=0$
$a=4,\ b=0,\ c=9,\ d=0,\ e=0,\ f=-36$
$b^2-4ac=-144<0 \rightarrow$ *tipo ellittico*



$$y=x^2-4x+3$$

Parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse *y*.

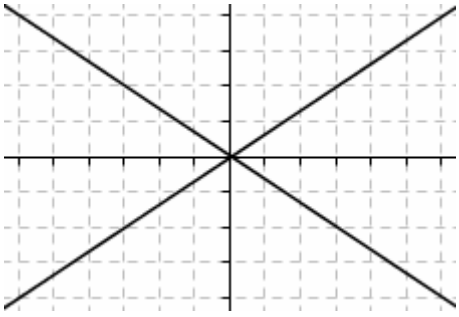
Forma implicita dell'equazione:
$x^2-4x-y+3=0$
$a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=-4,\ e=-1,\ f=3$
$b^2-4ac=0 \rightarrow$ *tipo parabolico*



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

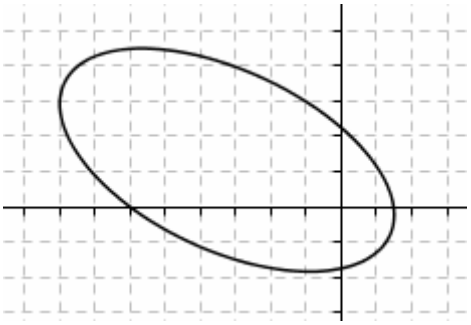
Iperbole,
con centro di simmetria nell'origine
e fuochi sull'asse delle *x*.

Forma implicita dell'equazione:
$4x^2-9y^2-36=0$
$a=4,\ b=0,\ c=-9,\ d=0,\ e=0,\ f=-36$
$b^2-4ac=144>0 \rightarrow$ *tipo iperbolico*



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \quad \left(4x^2-9y^2=0\right)$$

Iperbole degenere in una coppia di rette



$$\frac{x^2}{9}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$$

$$\left(8x^2+12xy+18y^2+36x-9y-72=0\right)$$

Ellisse
"traslata
e ruotata"

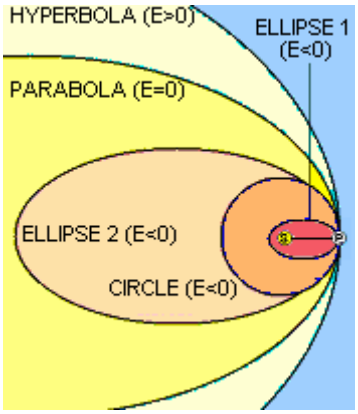
Le coniche hanno un'importanza straordinaria nel mondo fisico.

Ogniqualvolta un corpo celeste orbita intorno ad un altro
(la Luna intorno alla Terra,
i Pianeti intorno al Sole,
le Comete intorno al Sole …)
la traiettoria dell'orbita sarà sempre una conica !!!

Di norma si tratta di un'ellisse
(ad es., le orbite dei pianeti intorno al sole sono delle ellissi,
di cui il sole occupa sempre uno dei fuochi),
ma nel caso di una cometa potrebbe trattarsi
(se la cometa non è "periodica") anche di un ramo di iperbole:
la cometa passa in prossimità del sole una sola volta,
poi si allontana verso gli spazi stellari
e non si avvicinerà mai più.

**Il tipo di orbita dipende dall' "energia totale"
(cinetica+potenziale) del corpo orbitante**:

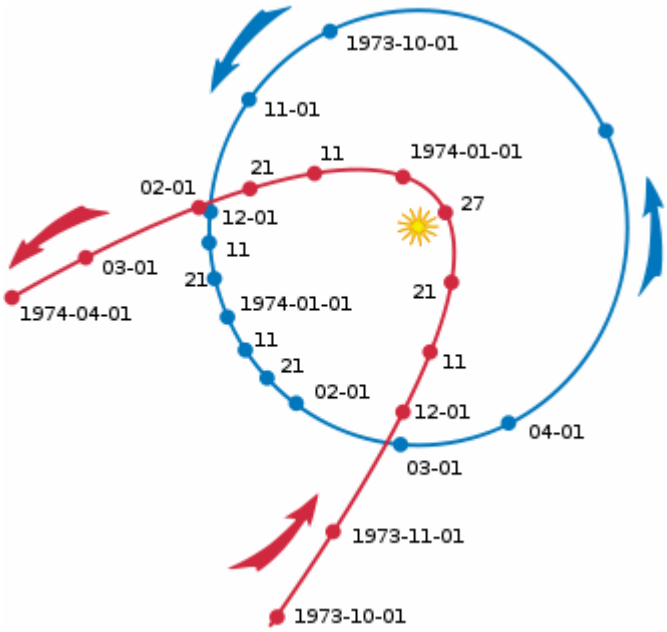
E < 0 → orbita ellittica
E = 0 → orbita parabolica
E > 0 → orbita iperbolica



La figura sopra riportata è tratta dal sito "The Celestial Sphere" di Vik Dhillon, Sheffield University, UK

Qui a fianco: l'orbita della cometa Kohoutek e l'orbita della Terra.

Questa cometa percorre un tragitto ellittico facendo un giro completo ogni circa 75.000 anni.





La cometa di Hale-Bopp fotografata da Philipp Salzgeber il 29 marzo 1997

**Il fatto che l'attrazione gravitazionale generi traiettorie
a forma di conica, è legato alla proprietà
della forza F di attrazione gravitazionale
di essere inversamente proporzionale al quadrato
della distanza d delle due masse m_1, m_2 che si attraggono**:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$ (G = "costante di gravitazione universale")

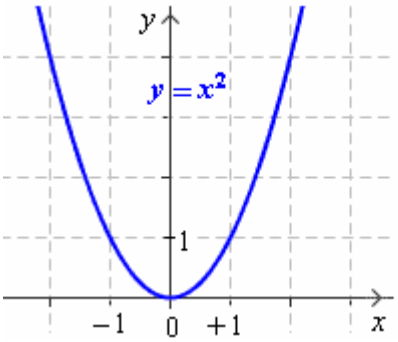
**Se la forza responsabile del moto ha questa espressione,
si può far vedere che le possibili traiettorie del moto
sono esclusivamente le curve associate ad equazioni
di 2° grado, ossia, come abbiamo visto, le coniche**.

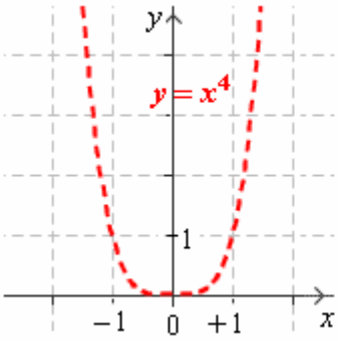
**Se lanciamo un oggetto
verso l'alto
(non verticalmente)
la forza di gravità
lo porterà a muoversi
lungo un arco di parabola.**

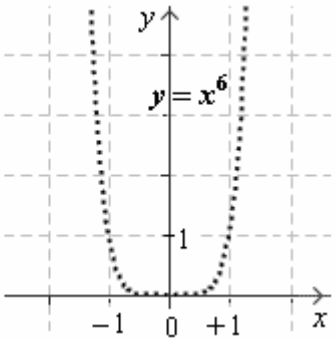


Un ultimo spunto, fra i tanti possibili, sulle coniche in Fisica:
si può osservare (e dimostrare) che
la figura d'interferenza ⇨, nel caso di due sorgenti d'onda puntiformi, è un'iperbole.
Guarda la bellissima animazione ⇨ !!! *(Ed Zobel, Zona Land)*

8. GRAFICI DI POTENZE E RADICI, e della funzione "VALORE ASSOLUTO" FUNZIONI PARI, DISPARI, NE' PARI NE' DISPARI







Nelle figure qui sopra riportate vediamo i grafici delle tre funzioni

$y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$.

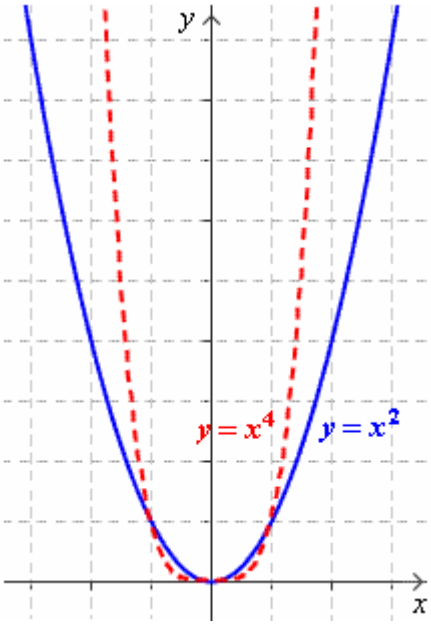
E' importante osservare un fatto piuttosto curioso:

♥ **quando è $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ $(0 < |x| < 1)$, si ha $x^6 < x^4 < x^2$.**

Ad esempio, con $x = \frac{1}{2}$, è $x^2 = \frac{1}{4}$, $x^4 = \frac{1}{16}$, $x^6 = \frac{1}{64}$.

Un numero compreso fra 0 e 1,
quando viene moltiplicato per sé stesso, diminuisce,
e se viene moltiplicato per sé stesso più volte,
produce un risultato che è tanto più piccolo
quanto più alto è il numero delle moltiplicazioni effettuate.

La figura qui a destra, ad esempio, confronta $y = x^2$ con $y = x^4$



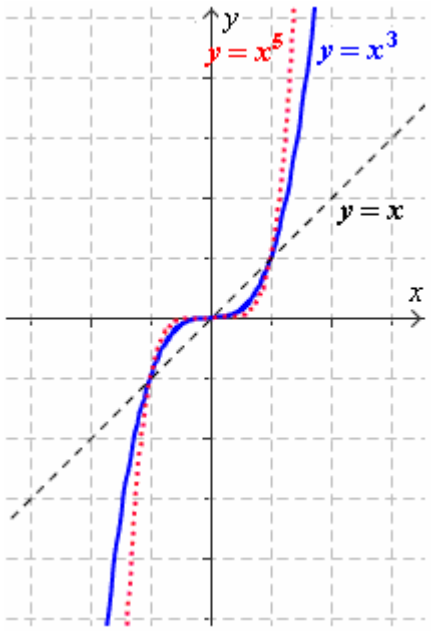
Le funzioni della forma $y = x^{2n}$,
ossia le potenze ad esponente pari,
sono caratterizzate dal fatto che, dando a x due valori opposti,
si ottiene il medesimo valore di y:
insomma, **per ogni x**, è $\boxed{f(-x) = f(x)}$.

Le funzioni dotate di questa proprietà sono dette "funzioni PARI".

Le funzioni pari sono tutte e sole quelle
il cui **grafico** è **simmetrico rispetto all'asse delle ordinate**.
Un altro esempio di funzione pari è $y = |x|$.

La figura qui a fianco mostra i grafici delle tre funzioni

$y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$.



Le funzioni della forma $y = x^{2n+1}$,
ossia le potenze ad esponente dispari,
sono caratterizzate dal fatto che, dando a x due valori opposti,
si ottengono valori di y opposti:
insomma, **per ogni x**, è $\boxed{f(-x) = -f(x)}$.

Le funz. dotate di questa proprietà sono dette "funzioni DISPARI".

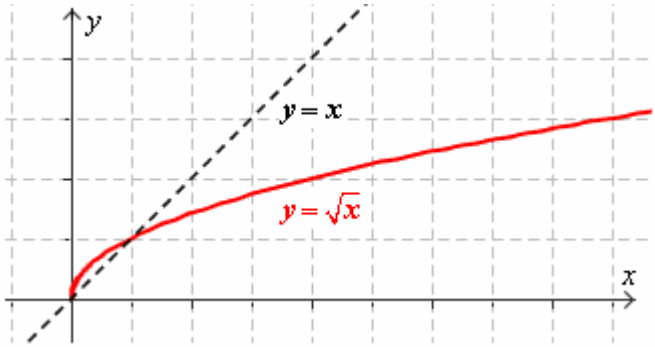
Le funzioni dispari sono tutte e sole quelle
il cui **grafico** è **simmetrico rispetto all'origine**.
Altri esempi di funzioni dispari: $y = 1/x$, $y = \sqrt[3]{x}$

Data una funzione $y = f(x)$, per stabilire se è PARI o DISPARI o NE' L'UNA NE' L'ALTRA COSA,
si va a calcolare $f(-x)$ come negli esempi che seguono:

$f(x) = \frac{1}{x^4} - 3$ $\quad f(-x) = \frac{1}{(-x)^4} - 3 = \frac{1}{x^4} - 3 = f(x)$ *PARI*

$f(x) = x^3 + 2x$ $\quad f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x)$ *DISPARI*

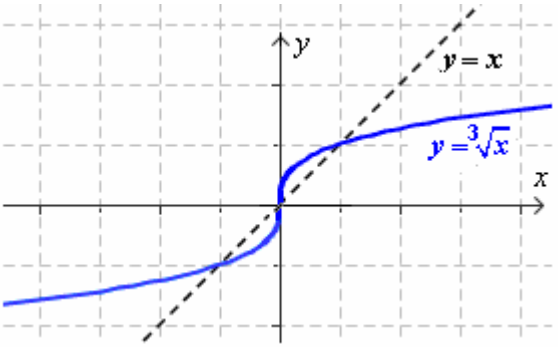
$f(x) = x^2 + x$ $\quad f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$ *e* $\neq -f(x)$ *NE' PARI NE' DISPARI*



Ecco il grafico della funzione $y=\sqrt{x}$,
che è definita solo per $x \geq 0$.

E' notevole il comportamento
fra l'ascissa 0 e l'ascissa 1:
se $0<x<1$, è $\sqrt{x}>x$
Più in dettaglio: $0<x<1 \rightarrow 0<x<\sqrt{x}<1$

♥ **La radice quadrata di un numero compreso fra 0 e 1 è maggiore del numero stesso!**



Ed ecco il grafico della funzione $y=\sqrt[3]{x}$,
il cui dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Il grafico è simmetrico rispetto all'origine;
in effetti, in questo caso, la funzione è "dispari":
$f(-x)=-f(x)$.

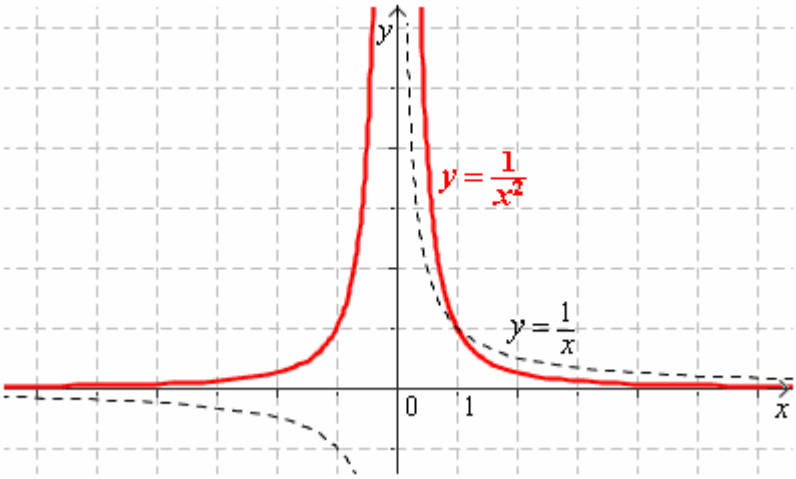
Vale ancora quanto detto per la radice quadrata:
la radice cubica di un numero compreso fra 0 e 1 è maggiore del numero stesso.

Qui a fianco è rappresentata la funzione

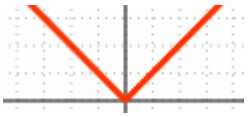
$$y=\frac{1}{x^2}$$

che abbiamo voluto confrontare
con la funzione tratteggiata $y=1/x$,
per evidenziare che:

quando è $x>1$
si ha $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x}$ (essendo $x^2>x$)
mentre quando è $0<x<1$
si ha $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x}$ (essendo $x^2<x$)



Ed ecco infine il grafico , dalla caratteristica forma a "V", della $y=|x|$.
Si tratta di una funzione PARI perché $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$;
in effetti, il grafico è simmetrico rispetto all'asse *y*.



$y=|x|$
In GeoGebra:
$y=abs(x)$

♥ La funzione "**VALORE ASSOLUTO**"!!!

ESERCIZI

a) Utilizzando una macchinetta calcolatrice, compila la seguente tabella, finalizzata ad evidenziare che **quando un numero è compreso fra 0 e 1**,
- la sua radice quadrata, la sua radice cubica ecc. sono maggiori del numero stesso
- mentre il suo quadrato, il suo cubo ecc. sono minori del numero stesso

e invece **quando un numero è maggiore di 1**, avviene il viceversa.

$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{a}$	a	a^2	a^3	a^4
			0,5			
			2			

b) Fra le seguenti funzioni, stabilisci quali sono pari, quali dispari, quali né pari né dispari:

1) $y=x^3+\frac{1}{x}$ 2) $y=2x^2+1$ 3) $y=x^3+x^2$ 4) $y=2x^4+3|x|$ 5) $y=\sqrt[5]{x}+1$ 6) $y=\sqrt{x}$

c) Determina il valore dei seguenti limiti: 7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=$ 8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=$ 9) $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}=$ 10) $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^2}=$

11) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=$ 12) $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=$ 13) $\lim_{x\to 1+}\frac{x-2}{x-1}=$ 14) $\lim_{x\to 1-}\frac{x-2}{x-1}=$ 15) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x-1}=$

RISPOSTE 1 d 2 p 3 né… 4 p 5 né… 6 non ha senso chiederselo: il dominio non è simmetrico rispetto all'ascissa 0.
7 0^+ 8 0^+ 9 $+\infty$ 10 $+\infty$ 11 $+\infty$
12 0^+ 13 $-\infty$ 14 $+\infty$ 15 1

9. RISOLUZIONE GRAFICA DI UN'EQUAZIONE

Per risolvere graficamente un'equazione $\boxed{f(x)=g(x)}$

si rappresentano, in uno stesso riferimento cartesiano, le due funzioni $y=f(x)$; $y=g(x)$
e si vanno a ricercare quei valori di x per i quali la y corrispondente è la medesima.

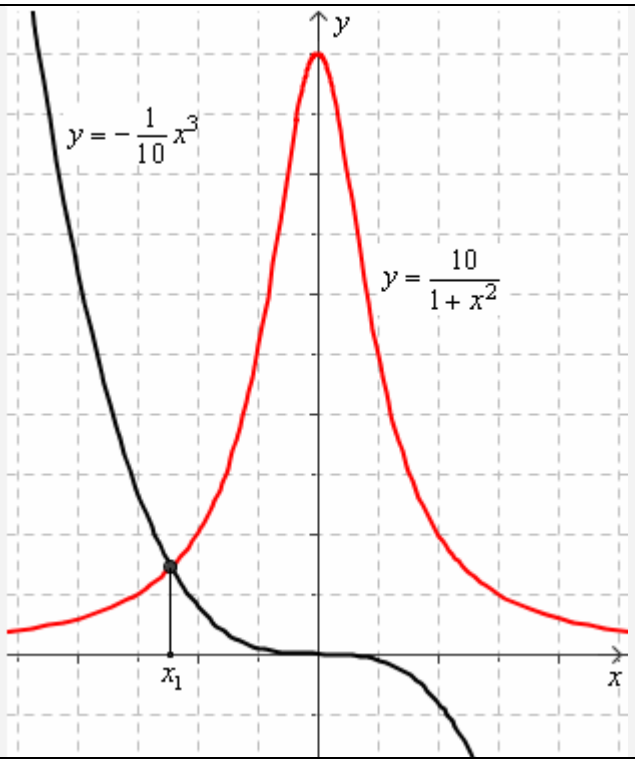
In altre parole,

- ♥ **si vanno a individuare i punti di intersezione fra le due curve $y=f(x)$, $y=g(x)$, e si prendono le ASCISSE di questi punti.**
  Tali ascisse sono le soluzioni dell'equazione data.

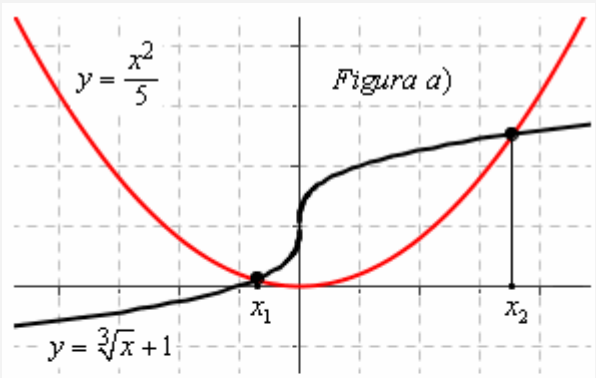
Di norma, la risoluzione grafica consente di determinare le soluzioni soltanto **in modo approssimato**.

$\boxed{\dfrac{10}{1+x^2}=-\dfrac{1}{10}x^3}$

La curva "a campana"
è il grafico della funzione
$y=\dfrac{10}{1+x^2}$
mentre l'altra curva,
quella "a serpentina",
è il grafico della funzione
$y=-\dfrac{1}{10}x^3$.
La rappresentazione grafica
mostra che l'equazione
ha una e una sola soluzione:
$-3<x_1<-2$
Un grafico più preciso,
tracciato magari
su carta millimetrata,
porterebbe a stabilire,
più precisamente, che
$-2{,}5<x_1<-2{,}4$



x	1° membro y	2° membro y
–6	0,27	21,6
–5	0,38	12,5
–4	0,59	6,4
–3	1,00	2,7
–2	2,00	0,8
–1	5,00	0,1
0	10,00	0
1	5,00	0,1
2	2,00	0,8
3	1,00	2,7
4	0,59	6,4
5	0,38	12,5
6	0,27	21,6



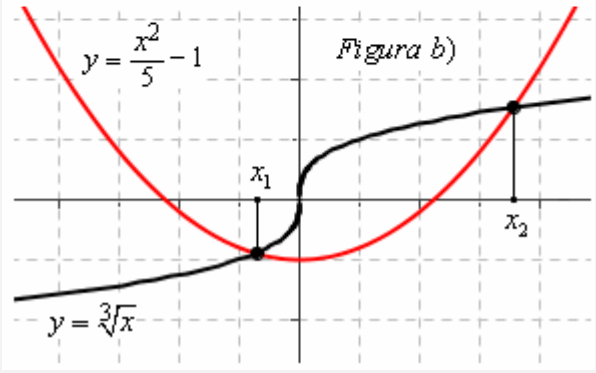
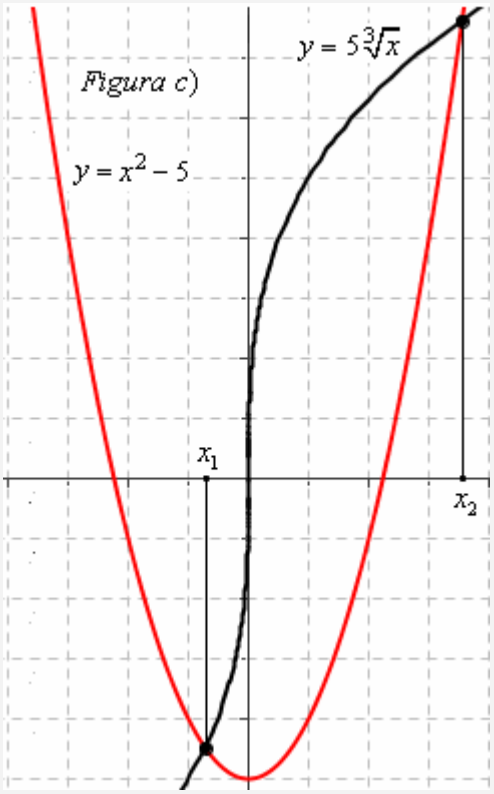


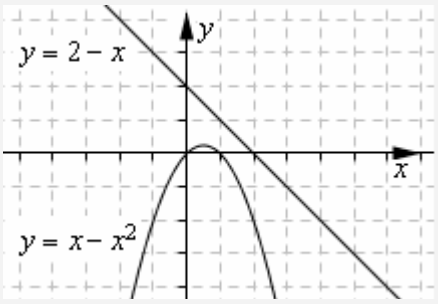
Figura a):
$\boxed{\dfrac{x^2}{5}=\sqrt[3]{x}+1}$

Figura b):
$\boxed{\dfrac{x^2}{5}-1=\sqrt[3]{x}}$

Figura c):
$\boxed{x^2-5=5\sqrt[3]{x}}$

Queste tre
equazioni
sono
equivalenti:
ciascuna ha
le due
soluzioni
$-1<x_1<0$
$3<x_2<4$





$x - x^2 = 2 - x$

Le due curve non si intersecano:
l'equazione è IMPOSSIBILE.

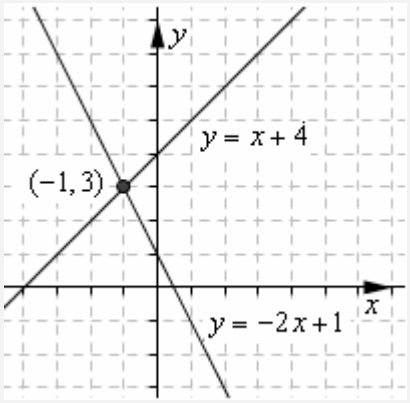
Questa figura risolve il SISTEMA IN DUE INCOGNITE

$\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Lo si scrive nella forma

$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

e si tracciano i grafici delle due rette. La soluzione del sistema è la coppia (x, y) delle coordinate del punto di intersezione.



ESERCIZI

1) Risolvi graficamente l'equazione $\sqrt{x} = (x-2)^2$
tracciando sullo stesso riferimento cartesiano i grafici delle due funzioni $y = \sqrt{x}$, $y = (x-2)^2$

Assegna alla variabile indipendente i seguenti valori:
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4
In tal modo, determinerai le soluzioni "a meno di 0,5", cioè:
con un errore di approssimazione inferiore a 0,5.

2) Risolvi graficamente le seguenti equazioni, approssimando le soluzioni a meno di $0,5$:

a) $x^2 - x = x + 2$ b) $x^2 = 2x + 2$ c) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (NOTA)

Risolvi poi algebricamente le equazioni date
(che, come avrai notato, sono tutte equivalenti fra loro, quindi si riducono a una sola)
e verifica che le soluzioni determinate esattamente con la risoluzione algebrica
coincidono con quelle localizzate approssimativamente con la risoluzione grafica.

NOTA. Qui il 2° membro è 0, quindi la funzione corrispondente è la funzione costante $y = 0$,
il cui grafico coincide con l'asse delle ascisse

3) Risolvi graficamente le seguenti equazioni, approssimando le soluzioni a meno di un'unità:

a) $x^3 = x^2 + 1$ b) $\frac{1}{x} = 4 - x$ c) $1 - x^2 = \frac{4}{x}$ d) $x^3 = x^2 + 2x$ e) $-\frac{2}{x} = \sqrt{x} - 3$ f) $|x| = 2x + 3$

g) $|x| = \frac{1}{2}x + 4$ h) $\sqrt{x} = |x| - 1$ i) $x^4 = 5 - 2x$ l) $\frac{4}{x^2 + 1} = 1$ m) $\frac{1}{5}x + 1 = \sqrt{x}$ n) $2\sqrt{x} = 4x - x^2$

4) Risolvi graficamente le seguenti equazioni.
Confronta poi l'esito della risoluzione grafica, con la risoluzione algebrica.

a) $-\frac{1}{x} = 2x + 3$ b) $x^3 = 2x + 1$ c) $x^4 = x^2$ d) $x^2 = (x+1)^2$

e) $2x + 1 = 10 - x$ f) $2x + 1 = 2x + 3$ g) $\sqrt{x} = x$ h) $\sqrt[3]{x} = x$

i) $\frac{6}{x - 1} = -x$ j) $2\sqrt{x} = x - 1$ k) $\sqrt{x + 2} = x$ l) $\sqrt{x} + 2 = \frac{1}{x}$

5) Risolvi i seguenti sistemi di 1° grado in 2 incognite, isolando *y* in ciascuna equazione, disegnando le due rette su di uno stesso piano cartesiano, e individuando le coordinate del loro punto di intersezione.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 3 - x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x \\ x + y = 0 \end{cases}$

RISPOSTE

1) $x_1 = 1$; $3 < x_2 < 3,5$ 2) Graf.: $-1 < x_1 < -0,5$; $2,5 < x_2 < 3$. Alg.: $x_1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0,732$; $x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2,732$

3) a) 1 *soluzione*: $1 < x < 2$ b) $0 < x_1 < 1$, $3 < x_2 < 4$ c) $-2 < x < -1$ d) $-1, 0, 2$

e) $x_1 = 1$, $7 < x_2 < 8$ f) $x = -1$ g) $-3 < x_1 < -2$, $x_2 = 8$ h) $2 < x < 3$ i) $-2 < x_1 < -1$, $1 < x_2 < 2$

l) $-2 < x_1 < -1$, $1 < x_2 < 2$ m) $1 < x_1 < 2$, $13 < x_2 < 14$ n) $x_1 = 0$, $0 < x_2 < 1$, $2 < x_3 < 3$

4, 5) Vedi risoluzione algebrica. Per 4l): $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) - 4x(x-1) = (x-1)(x^2 - 3x + 1)$

10. FUNZIONI QUADRATICHE ED EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Abbiamo detto che prendono il nome di "**quadratiche**" le funzioni di 2° grado, quelle della forma

$$y = ax^2 + bx + c\,.$$

E abbiamo illustrato con esempi il fatto che una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una curva "scendi-e-poi-sali", oppure "sali-e-poi-scendi", chiamata "parabola" e disposta:

- **con la concavità verso l'alto** $\cup$ **quando il numero** a**, coefficiente di** x^2**, è** >0
- **con la concavità verso il basso** $\cap$ **quando il coefficiente di** x^2 **è** <0.

Abbiamo poi osservato che **il valore assoluto del coefficiente di** x^2 **si dice "apertura"** perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola sia

- più "dolce" (valori di $|a|$ piccoli)
- o più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Infine, abbiamo

- indicato la formula $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ per determinare l'ascissa del vertice a partire dai coeff. dell'equazione
- osservato che, nota l'ascissa, l'ordinata del vertice si può poi ottenere senza formule, semplicemente sostituendo x_V al posto di x nell'equazione della parabola per calcolare il valore corrispondente di y
- raccomandato, quando si deve disegnare una parabola, di individuare e segnare innanzitutto il vertice e la retta verticale per il vertice, per approfittare della simmetria della curva rispetto a questa retta.

Diciamo ora qualcosa in più.

Innanzitutto, l'equazione di una parabola dipende da 3 parametri (i coefficienti a, b, c) per cui la curva è individuata in modo unico quando sono date delle condizioni, a partire dalle quali si possano determinare in modo unico i valori di a, b e c. Ad esempio, se vengono dati tre punti, per cui la curva deve passare, ecco che, almeno in generale, ci sarà una e una sola parabola a soddisfare questa condizione.

Esempio: scrivere l'equazione della parabola passante per i tre punti $A(-1,4)$; $B(1,6)$; $C(3,0)$.
Poniamo le condizioni di appartenenza di ciascuno dei tre punti alla curva di equazione $y = ax^2 + bx + c$, e risolviamo il sistema:

$$\begin{matrix} A(-1,4) \\ B(1,6) \\ C(3,0) \end{matrix} \begin{cases} 4 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ 6 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ 0 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 6 \end{cases}$$

La nostra parabola ha dunque equazione

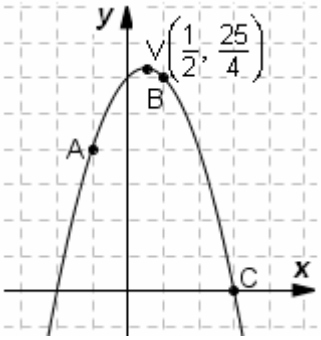
$$y = -x^2 + x + 6$$

da cui:

$$x_V = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y_V = -x_V{}^2 + x_V + 6 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$$

vale a dire $V\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$



ESERCIZI

Determina l'equazione della parabola che passa per i punti:

1) $(0,0)$; $(1,1)$; $(2,0)$ 2) $(0,5)$; $(2,1)$; $(3,2)$ 3) $(-2,0)$; $(1,-3)$; $(2,0)$ 4) $(0,8)$; $(1,2)$; $(5,18)$ 5) $(-1,1)$; $(0,2)$; $(1,5)$

RISPOSTE

1) $y = -x^2 + 2x$ 2) $y = x^2 - 4x + 5$ 3) $y = x^2 - 4$ 4) $y = 2x^2 - 8x + 8$ 5) $y = x^2 + 2x + 2$

LA PARABOLA E L'EQUAZIONE DI 2° GRADO

Un'equazione di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$
può essere risolta tracciando il grafico della parabola $y = ax^2 + bx + c$
e poi determinando le sue intersezioni con la retta di equazione $y = 0$ **(che coincide con l'asse delle** x**).**

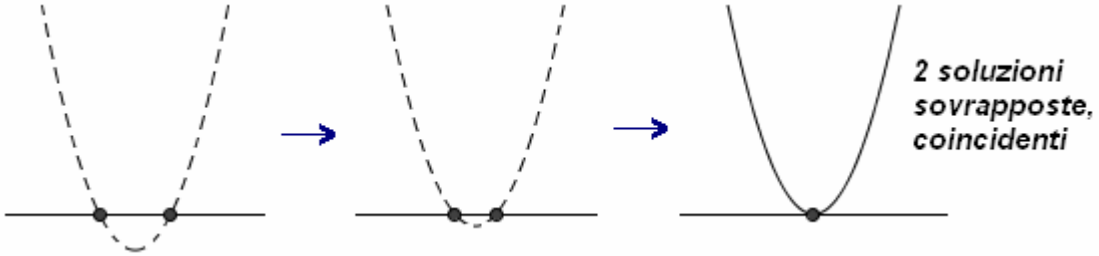
Consideriamo dapprima il caso $a > 0$.
Si potranno presentare tre possibili situazioni, e la nostra equazione potrà avere:

I) due soluzioni distinte (primo caso, parabola che taglia l'asse orizzontale):



2 soluzioni distinte

II) una sola soluzione, o anche: due soluzioni che hanno finito per sovrapporsi, per coincidere (secondo caso, parabola tangente all'asse orizzontale):



III) oppure nessuna soluzione (terzo caso, parabola priva di intersezioni con l'asse orizzontale):



nessuna soluzione

Tutto dipende quindi dall'*ordinata del vertice*:

- se questa è < 0 si ha il caso delle due soluzioni distinte,
- se è $= 0$ si hanno le soluzioni coincidenti,
- se è > 0 si ha l'impossibilità.

Ora, se noi partiamo dalla formula per l'*ascissa* del vertice $x_V = -\frac{b}{2a}$

potremo ricavare l'ordinata di V sostituendone il valore al posto di x nell'equazione della parabola:

$$y_V = \left[ax^2 + bx + c \right]_{x=-\frac{b}{2a}} =$$

$$= a \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4\cancel{a^2}} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Quindi, per quanto detto sopra,

$-\frac{\Delta}{4a} < 0 \leftrightarrow$ soluzioni *distinte*;

$-\frac{\Delta}{4a} = 0 \leftrightarrow$ soluzioni *coincidenti*;

$-\frac{\Delta}{4a} > 0 \leftrightarrow$ *nessuna* soluzione.

Ma le tre condizioni $\boxed{-\frac{\Delta}{4a} < 0,\ -\frac{\Delta}{4a} = 0,\ -\frac{\Delta}{4a} > 0}$, avendo noi supposto $\boxed{a > 0}$,

equivalgono rispettivamente a $\boxed{\Delta > 0,\ \Delta = 0,\ \Delta < 0}$ e ciò dunque conferma

il ben noto ruolo del Δ nel determinare il numero delle soluzioni di un'equazione di 2° grado.

Se poi fosse $a < 0$ potremmo ripercorrere tutte le considerazioni fatte, adattandole al nuovo caso, e perverremmo alle stesse conclusioni.

ESERCIZI

Risolvi graficamente le seguenti equazioni:

6) $x^2 - 6x + 8 = 0$ 7) $x^2 - 6x + 9 = 0$ 8) $x^2 - 6x + 10 = 0$ 9) $-x^2 + x = 0$ 10) $-2x^2 = 0$ 11) $-x^2 + x + 6 = 0$

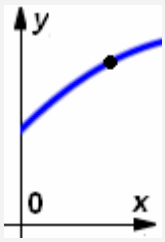
RISPOSTE

6) $x = 2,\ x = 4$ 7) $x = 3,\ x = 3$ 8) imposs. 9) $x = 0,\ x = 1$ 10) $x = 0,\ x = 0$ 11) $x = -2,\ x = 3$

Matematica e Problemi della Realtà

FUNZIONI QUADRATICHE E PROBLEMI REALI

DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA NOTE CERTE CONDIZIONI



Un atleta si cimenta nel **getto del peso**. Immaginiamo che, al momento del lancio, poggi i piedi sull'origine di un sistema di riferimento cartesiano, e che la sfera si stacchi dalla mano all'altezza di metri 1,5 dal suolo per raggiungere poi la sua altezza massima nel punto $(5;\,4)$.
Si domanda

a) che equazione avrà la curva descritta dalla sfera in movimento
b) e a che distanza dall'origine il peso toccherà terra.

a) Dunque: è noto che un "proiettile" (= un corpo lanciato) descrive una traiettoria parabolica.
La curva richiesta avrà perciò equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$,
dove dobbiamo determinare i tre parametri a, b, c quindi ci servono 3 condizioni.
Due di queste condizioni saranno il passaggio per il punto $(0;\,1,5)$ e quello per il punto $(5;\,4)$
e la condizione rimanente potrà essere quella sull'ascissa del vertice: $-\frac{b}{2a} = 5$.

Allora avremo: $\begin{cases} a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 1,5 \\ a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c = 4 \\ -\frac{b}{2a} = 5 \end{cases}$

Risolvi il sistema: troverai che l'equazione della curva in questione è $y = -0,1x^2 + x + 1,5$.

b) Rispondere al quesito b) è semplice: si tratta di stabilire qual è il valore di x per cui la y vale 0.

$0 = -0,1x^2 + x + 1,5$
$0,1x^2 - x - 1,5 = 0;\quad x^2 - 10x - 15 = 0;\quad x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25+15} = 5 \pm \sqrt{40} \approx 5 \pm 6,3$

e la soluzione che ci interessa è quella positiva: $\approx 11,3$. Il peso tocca terra a 11,3 metri circa dall'origine.

MASSIMO E MINIMO DI UNA QUANTITA' VARIABILE

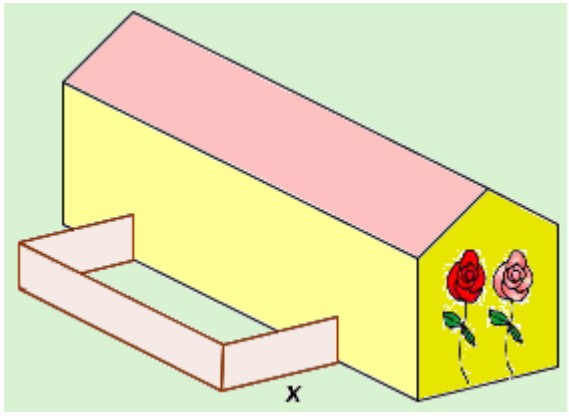
Una **compagnia aerea** cerca di rendere appetibile una destinazione poco frequentata: le Boring Islands.
L'obiettivo è di invogliare qualche grossa comitiva a scegliere quella località per un viaggio collettivo.
In quest'ottica, si ipotizza di offrire **uno sconto, per ogni partecipante, che sia calcolato in proporzione al numero dei partecipanti stessi.**
Il biglietto andata e ritorno a prezzo intero costerebbe 600 dollari a turista; bene, si può pensare di accordare a ciascuna persona un abbuono ottenibile moltiplicando la cifra fissa di 5 dollari per il numero totale dei viaggiatori.
Uno dei responsabili della compagnia, però, fa subito notare che **oltre una determinata quantità di adesioni, i ricavi in questo modo finirebbero per diminuire**; tant'è vero che **al di là di un certo numero ottimale di iscritti, non sarebbe più conveniente accettarne altri.**
Qual è questo numero ottimale? E qual è il ricavo massimo ottenibile con questo piano di sconti?



Riflettiamo.
Se $\begin{array}{l} \textit{prezzo ordinario per ogni persona} = 600\ \textit{dollari} \\ \textit{sconto per ogni persona} = 5\ \textit{dollari moltiplicato il numero di persone nel gruppo} \end{array}$
allora si avrà
$\textit{ricavo per } x \textit{ persone} = x(600 - 5x) = -5x^2 + 600x$

Si tratta ora di stabilire per quale valore di x questa quantità $-5x^2 + 600x$ va a toccare il suo massimo.
Ora, la curva di equazione $y = -5x^2 + 600x$ è una parabola
che, per via del coefficiente di x^2 negativo, ha la concavità rivolta verso il basso: $\cap$.
Il punto in cui si raggiunge la y più alta è dunque il vertice, e tale vertice ha ascissa $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{600}{-10} = 60$.
Il numero ottimale di iscritti, in relazione a questa offerta, è perciò 60.
Superare questo numero di iscrizioni sarebbe controproducente, perché il ricavo si ridurrebbe.
Con 60 iscritti, la compagnia andrebbe a incassare dollari $\left[-5x^2 + 600x\right]_{x=60} = 18000$

ESERCIZI (risposte a pag. 113)



1) Le galline di Bastiano sono libere di razzolare beate nel grande prato per tutto il giorno, ma di notte è bene che non escano da un recinto rettangolare, delimitato su tre lati da una rete lunga complessivamente 16 metri, e sul lato restante dalla parete della cascina.

   Quanto dovrebbe misurare il lato x perpendicolare al muro (vedi figura), se si desidera che la superficie a disposizione delle galline sia la più ampia possibile?

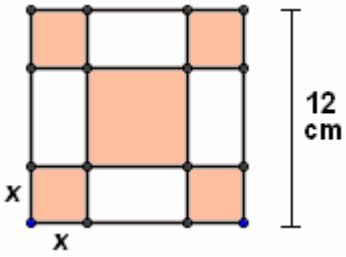
   E di quanti m^2 sarebbe questa superficie massima?

2) Il bagnino Arturo, in Riviera, dà in noleggio i suoi pedalò a 8 € all'ora. E mediamente ogni giorno riesce a impegnare le imbarcazioni per complessive 10 ore, incassando da questa attività 80 euro: non male! Riflettendo se sia il caso di aumentare i prezzi, si fa l'idea che pressappoco, qualora decidesse di ritoccare al rialzo la tariffa oraria, ad ogni aumento di 50 centesimi le ore richieste diminuirebbero, rispetto alla situazione attuale, del 10%. Cerca allora di stabilire, sotto questa ipotesi, quale incremento potrebbe apportare alla tariffa per riuscire a massimizzare i suoi guadagni, e a tale scopo sottopone il problema alla figlia Marina, che frequenta, con ottimo profitto in matematica, la classe seconda liceo scientifico. Tuttavia, quando Marina gli presenta i suoi calcoli, Arturo resta "spiazzato" dalle deduzioni della figliola. Come mai?

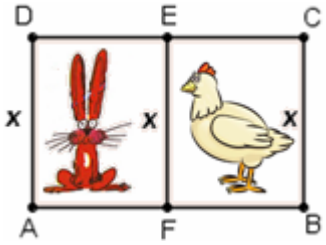
3) *Quali sono quei due numeri, la cui somma è uguale a 100, e il cui prodotto è massimo?*

4) *Dimostra che fra tutte le coppie di numeri che danno per somma un numero positivo fissato, quella che realizza il prodotto massimo ha i due elementi uguali fra loro, quindi uguali alla metà del numero dato.*

5) *Fra tutte le coppie di interi relativi x, y, che differiscono di 1000 unità, sapresti determinare quella per la quale il prodotto $x \cdot y$ è minimo?*



6) *Il quadrato più grande nella figura qui a fianco ha il lato di 12 cm.* →
   Per quale valore di x la superficie ombreggiata è minima?



7) Bertoldo dispone di una rete lunga 20 m e sta pensando di servirsene per delimitare una coppia di territori rettangolari affiancati (vedi figura): → in uno di questi ci metterà poi i conigli, in quello a fianco le galline. Ora, è razionale determinare la lunghezza indicata con x in maniera tale che la superficie disponibile per gli animali sia massima! Ti andrebbe di aiutarlo a risolvere il problema?

7') Se invece Bertoldo decidesse di tenere sia i conigli che le galline in un unico recinto rettangolare, senza la suddivisione intermedia, quali misure dovrebbe scegliere per le dimensioni del rettangolo col contorno di 20 metri, sempre per massimizzarne l'area?

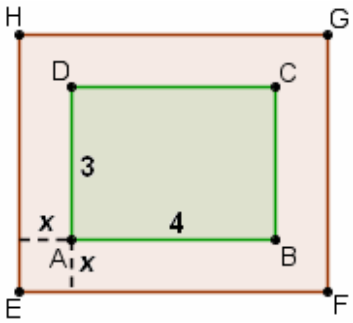
   In generale, fra tutti i rettangoli di perimetro $2p$ assegnato, qual è quello caratterizzato da area massima?

8) Intorno a una aiuola di un grande giardino, delle dimensioni di 3 m per 4, si costruisce uno spazio per passeggiare, che verrà lastricato con mattonelle quadrate (non spezzabili) di 25 cm di lato.

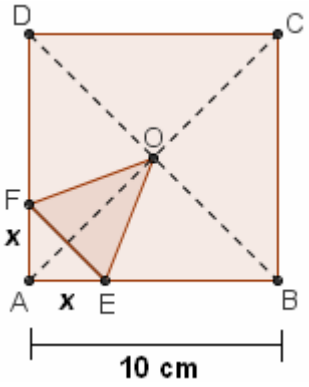
   a) Esprimi l'area M della superficie da ricoprire con le mattonelle, in funzione di x (x è una misura in metri)

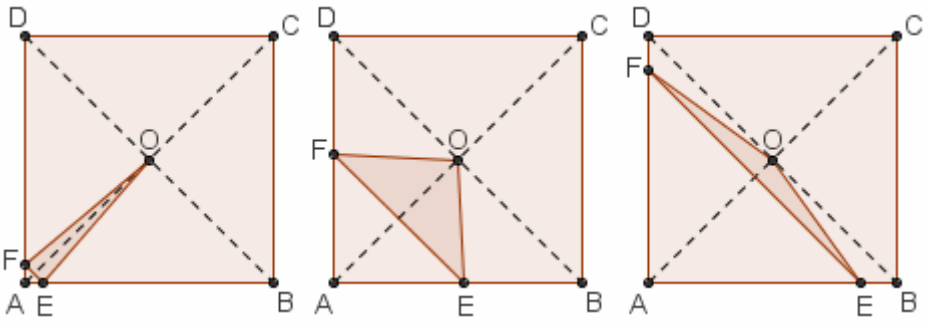
   b) Traccia, col software GEOGEBRA, la curva corrispondente $y = M(x)$

   c) Risolvi, prima graficamente poi algebricamente, l'equazione che porta a stabilire quale valore di x occorre scegliere se si hanno a disposizione 220 mattonelle di lato 25 cm e dì, in definitiva, se, dovendo realizzare la passeggiata con quella provvista di mattonelle, sceglieresti x di metri 0,75 oppure 1,00.

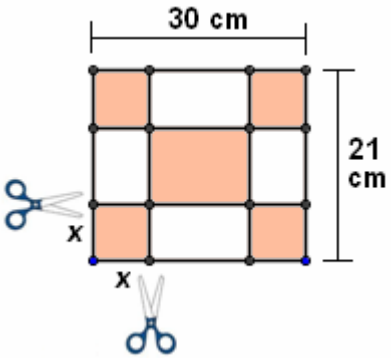


9) *La figura qui a destra mostra un quadrato ABCD di lato 10 cm con le sue diagonali AC e BD che si intersecano in O. Sui lati AB e AD sono stati presi due segmenti uguali fra loro* AE = AF = *x* *ed è stato poi disegnato il triangolo EFO. Ora, come mostra il "cartone animato" sottostante, se x cresce a partire da 0 l'area di questo triangolo fino a un certo punto aumenta, dopodiché comincia a diminuire. Essa toccherà quindi un valore massimo … Quanto varrà mai quest'area massima di EFO?*



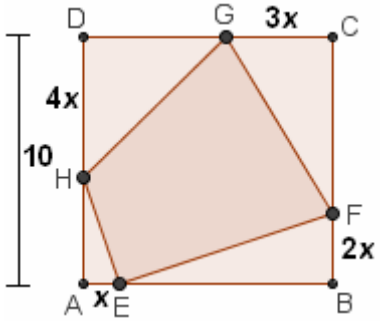


10) Simonetta, a partire da un rettangolo di cartoncino delle dimensioni di 30 cm e 21 cm, paragonabili quindi a quelle di un foglio A4, ritaglia, agli angoli, quattro quadrati fra loro uguali (vedi figura) → e ripiega poi il cartoncino in modo da formare una scatoletta, che desidera all'esterno decorare inaugurando i colori a olio ricevuti in regalo per il compleanno.
Si domanda perciò quanto dovrebbe misurare il lato *x* di ogni quadrato affinché la superficie esterna di questa scatola, tolta la base che non verrà pitturata, sia la massima possibile.
Vuoi essere così gentile da aiutarla?
E di stabilire anche il valore di questa superficie massima?



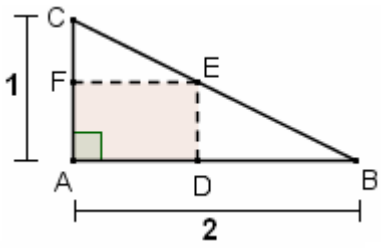
10') Stesso es. precedente, desiderando però massimizzare il *volume* anziché la superficie della scatola. L'espressione contenente *x* corrispondente al volume non sarà più di 2° grado ma di 3°, per cui è richiesto di *approssimare all'intero*, anziché calcolare esattamente, il valore di *x* per il quale il volume della scatola è massimo, facendo calcolare ad un foglio elettronico i valori di $V = V(x)$ per $x = 1, x = 2, \ldots, x = 10$.
Quanto vale, pressappoco, in cm^2 e in m^2, questo volume massimo?

11) *Sui lati AB, BC, CD, DA di un quadrato ABCD di lato 10 cm si prendono quattro segmenti AE, BF, CG, DH tali che* AE = *x*, BF = 2*x*, CG = 3*x*, DH = 4*x* *(figura a fianco)* →
Per quale valore di x l'area del quadrilatero EFGH sarà a) minima? b) massima?

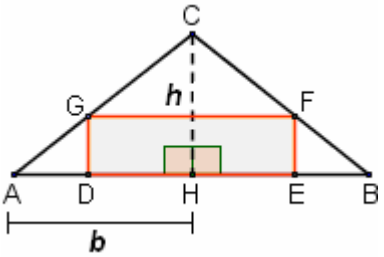


12) *(Richiede le similitudini fra triangoli) Fra tutti i rettangoli inscritti in un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 1 e 2, e con un vertice sovrapposto al vertice dell'angolo retto (vedi figura)* →
a) qual è quello di area massima?
b) qual è quello la cui diagonale è minima?

NOTA - Riguardo al quesito b), per il quale comunque c'è più di un possibile approccio, può essere utile tener presente che un segmento è minimo quando è minimo il suo quadrato …



13) *(Richiede le similitudini fra triangoli) In un triangolo isoscele di base 2b e altezza h si inscrive un rettangolo (vedi figura)* →
Dimostra che, affinché l'area del rettangolo risulti massima, quel rettangolo deve avere il lato sovrapposto alla base del triangolo isoscele, uguale a metà della base stessa.



14) Da www.beaconlearningcenter.com

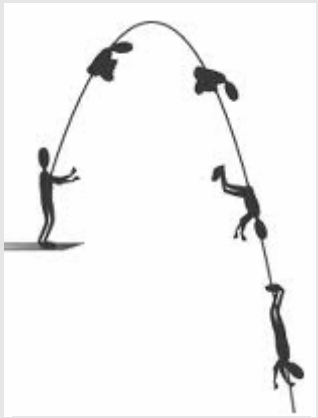
An auditorium has seats for 1200 people.
For the past several days, the auditorium has been filled to capacity for each show.
Tickets currently cost $5.00 and the owner wants to increase the ticket prices.
He estimates that for each $0.50 increase in price, 100 fewer people will attend.
What ticket price will maximize the profit?

15) Da www.beaconlearningcenter.com

A grocer sells 50 loaves of bread a day. The cost is $0.65 a loaf. The grocer estimates that for each $0.05 price increase, 2 fewer loaves of bread will be sold. What cost will maximize the profit?

16) Un'impresa di trasporti deve inviare il suo preventivo a un club milanese di appassionati di matematica, per un congresso scientifico a Roma. Il club ha comunicato che si prevedono non più di 50 viaggiatori: l'agenzia pensa dunque di impegnare un autobus da 50 posti, proponendo la sua offerta in un modo che possa risultare simpaticamente allettante per quel tipo particolare di clientela. Si decide per un costo-base di 20 € a persona, diminuito però di uno sconto, per ogni viaggiatore, calcolato in proporzione al numero di viaggiatori. Insomma, lo sconto da accordare a ogni partecipante sarà ottenuto moltiplicando una piccola cifra fissa *s* per il numero *x* dei partecipanti. Ora, in questo modo, come si è visto da esercizi precedenti, l'incasso sarebbe destinato a diminuire (anziché aumentare) se si oltrepassa un certo numero di adesioni; ma il responsabile commerciale della ditta, anch'egli appassionato di matematica, ha scelto *s* in modo che l'incasso totale, relativo a quella scelta di *s*, venga proprio a massimizzarsi con $x = 50$.
Qual è il valore di *s*? E quanto sarebbe in definitiva il costo individuale, in caso di autobus pieno?

MOTI SOTTO L'EFFETTO DELLA GRAVITA'



17) Quando si lancia un corpo verso l'alto da un "livello zero", la Fisica insegna che la sua altezza *h* dopo t secondi dal lancio è data da $\boxed{h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$,

dove v_0 è la velocità iniziale in metri al secondo,
mentre *g* è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre,
che vale circa 9,8 metri al secondo per secondo.

La formula può quindi essere riscritta come $\boxed{h \approx v_0 t - 4{,}9 t^2}$.

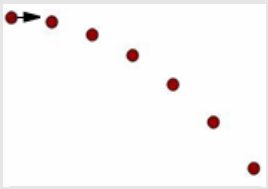
Trascurando gli effetti della resistenza dell'aria,

a) a che altezza si troverà, dopo 1 s dallo sparo, una pallottola che esce verticalmente dalla bocca di un fucile alla velocità iniziale di 300 m/s?

b) Quale altezza massima raggiungerà?

c) E dopo quanto tempo la pallottola ritornerà alla stessa altezza da cui era stata fatta partire?

18) Supponiamo di trovarci ad una data altezza *h* dal suolo, ad esempio sulla terrazza alla sommità di un edificio alto *h* metri, e di lanciare un oggetto in direzione *orizzontale*.
Allora, come è noto dalla Fisica, il nostro proiettile descriverà (se non si tiene conto, per semplicità, della resistenza dell'aria) una traiettoria risultante dalla sovrapposizione di due moti:



- uno orizzontale uniforme (= a velocità costante) $\boxed{x = v_0 t}$
- l'altro verticale uniformemente accelerato, secondo la legge $\boxed{y = h - \frac{1}{2} g t^2}$

Quale sarà la traiettoria del moto?
Già sappiamo trattarsi di una parabola, ma quale sarà l'equazione di questa parabola?
E' semplice ricavarla: basta isolare t nella prima equazione e sostituire nella seconda.

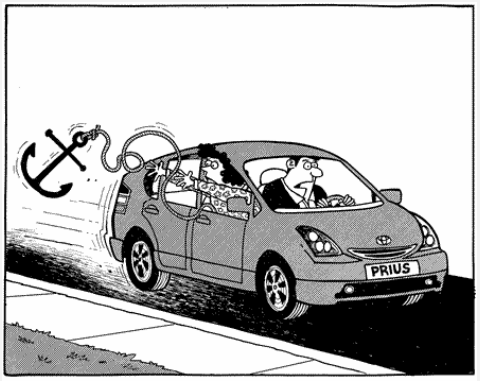
Avremo così $t = \frac{x}{v_0}$ dopodiché $y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2}$ ossia $\boxed{y = h - \frac{g}{2{v_0}^2} x^2}$ (ricorda che $g \approx 9{,}8\ m/s^2$)

a) Se un cretino spara orizzontalmente un proiettile con una pistola da un balcone a 15 metri dal suolo, e il colpo esce dalla canna a 300 m/s, a che distanza dall'edificio toccherà terra la pallottola?

b) E se invece una pallottola, sparata nelle medesime condizioni, tocca terra a metri 300 dall'edificio, qual era la velocità con cui era uscita dalla canna della pistola?

c) Sapresti, in generale, ricavare la formula della "gittata", ossia dello spazio orizzontale percorso, nel caso di un proiettile lanciato orizzontalmente dall'altezza *h* e con velocità iniziale v_0 ?

FRENA !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

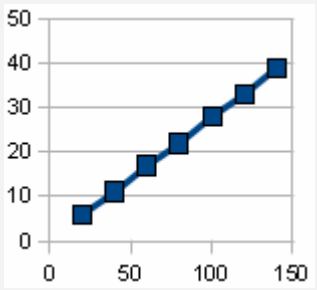


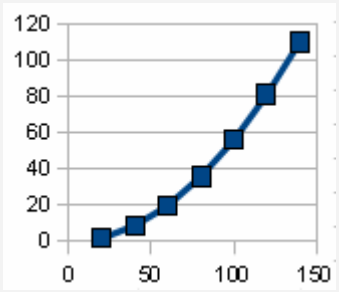
19) Immaginiamo un guidatore che, accorgendosi di un ostacolo sulla strada, freni per arrestare il veicolo.
Beh, innanzitutto, fra l'istante in cui il conducente percepisce il pericolo e quello in cui interviene sul pedale del freno, passa un intervallino di tempo, un "tempo di reazione", che grossomodo sarà dell'ordine del secondo per un guidatore sobrio e vigile.
E nel frattempo il veicolo procede, percorrendo una distanza che viene chiamata "spazio di reazione".
Lo "spazio di frenata" è invece quello che il veicolo percorre dal momento in cui inizia l'azione sui freni fino all'arresto; esso dipende dalla velocità e dalle condizioni del fondo stradale.
La somma fra lo "spazio di reazione" e lo "spazio di frenata" dà la "distanza di arresto".

In un sito Internet compare la seguente tabella, riferita ad un'automobile con un conducente "medio" in buone condizioni psicofisiche:

velocità (km/h)	**140**	**120**	**100**	**80**	**60**	**40**	**20**
spazio di reazione (m)	39	33	28	22	17	11	6
spazio di frenata (m)	110	81	56	36	20	9	2
distanza di arresto (m)	149	114	84	58	37	20	8

Se, con l'aiuto di un foglio elettronico, facciamo un grafico velocità-spazio di reazione e un altro grafico velocità-spazio di frenata, i due diagrammi ci appariranno pressappoco così:





♪ Il primo grafico ha una forma suppergiù rettilinea, e possiamo capire bene il perché: durante il tempo di reazione, il guidatore non interviene sui freni e l'auto continua a muoversi alla sua ordinaria velocità costante; per un dato tempo di reazione (uguale, poniamo a 1 secondo) gli spazi percorsi saranno proporzionali alla velocità dell'automobile.

a) Controlla: se l'auto procede ai 140 km/h, in 1 secondo percorrerà, arrotondando all'intero, m …

b) Anche gli altri valori sulla riga "spazio di reazione" vanno d'accordo con questa trasformazione da km/h a m/s e con un tempo di reazione ipotizzato di 1 secondo? …

c) Chi ha compilato la tabella ha fatto degli arrotondamenti? …

♫ Il secondo diagramma sembrerebbe invece avere l'aspetto di una parabola. In effetti, sul sito dell'ACI (Automobile Club Italiano) leggiamo che "la formula dello spazio di frenata è: spazio di frenata = velocità (*in metri al secondo*) al quadrato, diviso per il prodotto di 2 moltiplicato per l'accelerazione di gravità (circa 9,8 m al secondo per secondo) moltiplicato per il coeff. di attrito. Il coefficiente di attrito varia da 0,8 (strada asciutta e fondo ruvido) a 0,05 (strada ghiacciata)"

d) Verifica che la nostra tabella applica proprio questa formula, con un coeff. di attrito dato da …

e) Quindi il grafico più a destra corrisponde, pressappoco, alla parabola che ha equazione [indica le due variabili con s (spazio in metri) e v (velocità in metri al secondo)] …

f) Data questa proporzionalità dello spazio di reazione a v, e dello spazio di frenata a v^2, se la velocità raddoppia lo spazio di reazione … mentre lo spazio di frenata … e se la velocità triplica lo spazio di reazione … mentre lo spazio di frenata …

❑ La formula fornita dal Ministero dei Trasporti, per lo spazio di frenata, non è $s_F = \frac{v^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot f} \approx \frac{v^2}{20 \cdot f}$

con la velocità espressa in metri al secondo: è invece $s_F = \frac{v^2}{250 \cdot f}$ con la velocità in km/h.

g) Verifica che le due formule sono in buon accordo tra loro

h) Con la formula del Ministero, stabilisci la velocità cui presumibilmente procedeva un'auto che prima di fermarsi, su strada in buone condizioni (c.a. 0,8), ha lasciato un segno di frenata di 70 m

RISPOSTE

1) Il massimo dell'area $y = S(x) = x(16-2x) = -2x^2 + 16x$ si ha quando $x = 4\,\text{m} \to y = S_{MAX} = 32\,\text{m}^2$

2) x = numero di aumenti di 0,50 euro applicati. Se il prezzo di 8 euro venisse aumentato di 0,50 euro per x volte, si porterebbe a euro $8 + x \cdot 0{,}50$; le ore giornaliere in compenso passerebbero, in media (stando alle previsioni di Arturo), da 10 a $10 - x \cdot 1$ (1 è il 10% di 10) e il ricavo giornaliero ipotizzato sarebbe mediamente di euro

$$(8 + x \cdot 0{,}50)(10 - x \cdot 1) = \left(8 + \frac{1}{2}x\right)(10 - x) = 80 - 8x + 5x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 80$$

La parabola $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 80$ ha il suo massimo in corrispondenza dell'ascissa $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{-1} = -3$.
Arturo scopre quindi che per massimizzare i guadagni dovrebbe apportare non un rincaro, bensì uno *sconto* di $3 \cdot 0{,}50 = 1{,}50$ euro al prezzo dei suoi pedalò, fissandolo a euro $8 - 1{,}50 = 6{,}50$ all'ora …
Certo, tutto questo è basato su di un'ipotesi "tanto al chilo" quindi la previsione dell'efficacia dello sconto va presa con molta cautela … Tuttavia, forse per Arturo varrebbe la pena provare!

3) 50 e 50: la quantità $x(100-x)$ è massima quando $x = 50 \to 100 - x = 50$ (in questo caso il prodotto è 2500)

4) La quantità $x(s-x) = -x^2 + sx$ è massima quando $x = -b/2a = s/2 \to s - x = s - s/2 = s/2$

5) $x(x+1000) = x^2 + 1000x$ tocca il suo minimo quando $x = -500 \to x + 1000 = +500$. Il minimo è -250000.

6) *Area superficie ombreggiata* $= 4x^2 + (12-2x)^2 = 8x^2 - 48x + 144$; è minima per $x = 3$ cm

7) $\frac{20-3x}{2} \cdot x = -\frac{3}{2}x^2 + 10x \quad x_V = 3{,}333... = \text{m}\left(3 + \frac{1}{3}\right)$

7') 5 m per entrambe le dimensioni; il quadrato

8) $220 \cdot 25^2\ \text{cm}^2 = 137500\ \text{cm}^2 = 13{,}75\ \text{m}^2$ Area da piastrellare $= x^2 \cdot 4 + 4 \cdot x \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2 = 4x^2 + 14x \quad 4x^2 + 14x = 13{,}75$

$4x^2 + 14x - 13{,}75 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+55}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{104}}{4} \approx 0{,}80$ m. Fra le scelte prospettate, l'unica possibile è m 0,75.

9) $x = 5$ cm ; $S_{MAX} = \text{cm}^2\, 12{,}5$

10) Il ritaglio, se si vuole massimizzare la superficie esterna della scatola, dovrà essere di 6,375 cm.
L'ordinata corrispondente, ossia la superficie massima in questione, vale

$$\left[-8x^2 + 102x\right]_{x=\frac{51}{8}} = -8 \cdot \frac{2601}{64} + 102 \cdot \frac{51}{8} = \frac{-2601 + 5202}{8} = \frac{2601}{8} = 325{,}125\ \text{cm}^2$$

10') $V(x) = (30-2x) \cdot (21-2x) \cdot x = 4x^3 - 102x^2 + 630x$. Il vol. max si ha con $x \approx 4$ cm e vale circa $1144\,\text{cm}^3$

11) L'area minima per EFGH si ha con $x = \text{cm}\ 25/12 = \text{cm}\,(2 + 1/12)$ e vale $\text{cm}^2\ 575/12$
mentre l'area massima si ha con $x = 0$ e vale $100\ \text{cm}^2$

12) a) Posto CF $= x$, sarà FE $= 2x$ e $S(x) = 2x(1-x)$ … ; si ottiene $x_{MAX} = 1/2$ da cui $S_{MAX} = 1/2$.
b) $(2x)^2 + (1-x)^2$ è minimo con $x = 1/5$.
Il rettangolo con diagonale minima ha quindi dimensioni 4/5 (verticale), 2/5 (orizzontale).
L'alternativa, per determinarlo, era la seguente:
la diagonale AE è minima quando E è il punto, su BC, che ha la minima distanza da A.
Ma tale punto è allora la proiezione di A su BC …
AE è dunque minima quando coincide con l'altezza relativa all'ipotenusa.

13) Se AD $= x$, allora DG $= \frac{h}{b}x$, $S(x) = (2b - 2x) \cdot \frac{h}{b}x = 2hx - \frac{2h}{b}x^2$; $x_V = -\frac{2h}{2 \cdot (-2h/b)} = \frac{b}{2} \to \text{DE} = b$

14) The profit is maximized when the owner makes one \$0.50 increase. Maximum income = \$6050

15) The profit is maximized when the owner makes six \$0.05 increases. Maximum income = \$36.10

16) 0,20 €; 10 € a persona

17) a) A circa 295 metri di altezza sopra l'altezza iniziale della bocca del fucile
b) $\approx$ 4592 metri + l'altezza iniziale della bocca del fucile c) Dopo $\approx$ 1 min. e 1 secondo

18) a) Il calcolo dà 525 m circa b) Il calcolo dà $\approx$ 171 m/sec c) $\sqrt{\frac{2v_0{}^2 h}{g}} = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$

19) a) 39 circa b) Sì! c) Sì, ha arrotondato tutti i valori all'unità più vicina

d) La tabella applica la formula $s_F = \frac{v^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot f}$ (v velocità in m/s) con un coeff. di attrito dato da 0,7

e) Il grafico più a destra corrisponde, pressappoco, alla parabola di equazione $s_F = v^2/13{,}72$ (v in m/s)

f) Se la velocità raddoppia lo spazio di reazione raddoppia mentre lo spazio di frenata diventa il quadruplo e se la velocità triplica lo spazio di reazione triplica, lo spazio di frenatura diventa 9 volte tanto

h) Con $s_F = 70\,\text{m}$ e $f = 0{,}8$ la formula del Ministero porta a una velocità ipotizzata di circa 118 km/h

11. MANIPOLAZIONI DI GRAFICI

Partiamo dal grafico di una funzione fissata

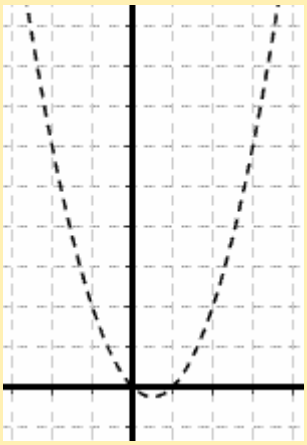
$\boxed{y = f(x)}$.

Per meglio fissare le idee,
le nostre figure si riferiranno
sempre allo stesso esempio
di funzione di partenza:
abbiamo scelto la

$$y = f(x) = x^2 - x$$

Vedremo come, semplicemente "manipolando"
il grafico della **funzione "madre"**,
è possibile ottenere i grafici
delle seguenti **funzioni "figlie"**
(essendo ***k*** una **costante positiva**):

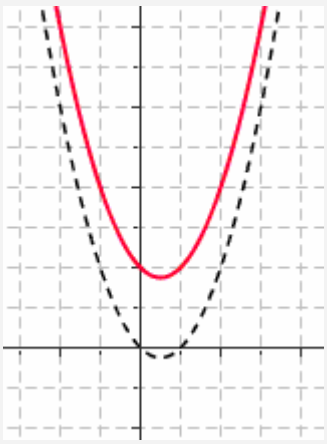
$f(x)+k$ $\quad f(x)-k$ $\quad kf(x)$ $\quad -f(x)$
$f(x+k)$ $\quad f(x-k)$ $\quad f(kx)$ $\quad f(-x)$
$|f(x)|$ $\quad f(|x|)$
$[f(x)]^2$ $\quad \sqrt{f(x)}$ $\quad \dfrac{1}{f(x)}$



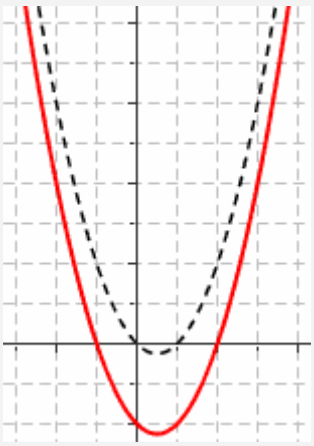
y = f(x) = x² − x
funzione "madre"

$\boxed{f(x) \to f(x) \pm k}$

traslazione verticale
di k unità
verso l'alto se c'è il $+$,
verso il basso se c'è il $-$



$y = f(x) + 2 = x^2 - x + 2$



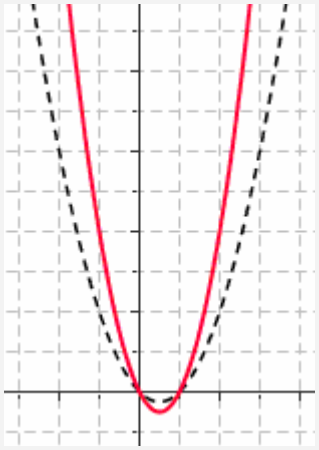
$y = f(x) - 2 = x^2 - x - 2$

$\boxed{f(x) \to kf(x)}$

dilatazione
$(k > 1)$
o contrazione
$(0 < k < 1)$
in senso
verticale,
coi punti
sull'asse x
che rimangono
fermi:

"effetto fisarmonica" verticale.

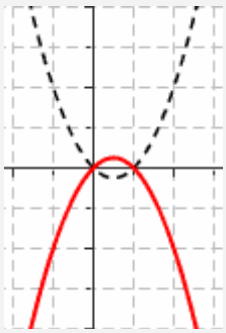




$y = 2f(x) = 2\left(x^2 - x\right)$



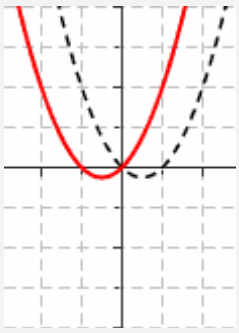
$y = \dfrac{1}{2} f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - x\right) = \dfrac{x^2 - x}{2}$



$y = -f(x) = -\left(x^2 - x\right) = -x^2 + x$

$\boxed{f(x) \to -f(x)}$

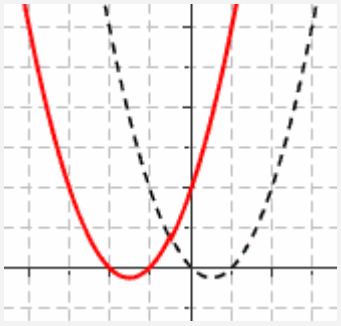
ribaltamento rispetto all'asse orizzontale



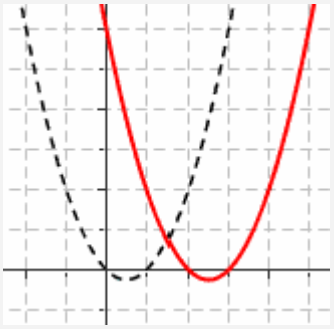
$y = f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$

$\boxed{f(x) \to f(-x)}$

simmetrizzazione rispetto all'asse verticale



$y = f(x+2) = (x+2)^2 - (x+2)$

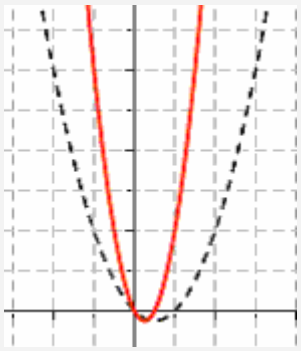


$y = f(x-2) = (x-2)^2 - (x-2)$

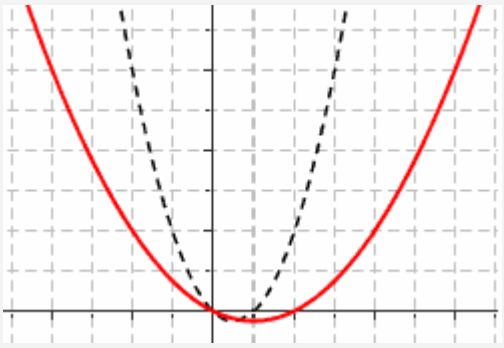
$\boxed{f(x) \to f(x \pm k)}$

traslazione orizzontale, con "EFFETTO BASTIAN CONTRARIO":
verso *sinistra* se c'è il $+$, verso *destra* se c'è il $-$

Perché mai questo "effetto bastian contrario"?
Consideriamo il caso della coppia $f(x)$ e $f(x+2)$, e riflettiamo.
Prendo la funzione $f(x)$, do un valore a x, ad es. $x = 3$, e calcolo la y corrispondente:
ottengo un certo numero $y = f(3)$.
Ora, se voglio ottenere la stessa ordinata con l'altra funzione $f(x+2)$, che valore dovrò dare a x?
Dovrò dare a x il valore 1, in modo da avere $f(1+2) = f(3)$.
Quindi, la $f(x+2)$ assume gli stessi valori della $f(x)$, ma … 2 unità più a *sinistra*!!!



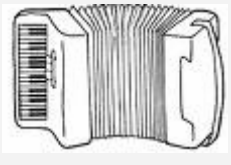
$y = f(2x) = (2x)^2 - 2x$



$y = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{2}x$

$\boxed{f(x) \to f(kx)}$

dilatazione o contrazione orizzontale, coi punti sull'asse y
che rimangono fermi: **"effetto fisarmonica"orizzontale**.
Attenzione, **anche qui c'è un "EFFETTO BASTIAN CONTRARIO":**
si ha una contrazione con $k > 1$, una dilatazione con $0 < k < 1$.





$$y = |f(x)| = |x^2 - x|$$

$$\boxed{f(x) \to |f(x)|}$$

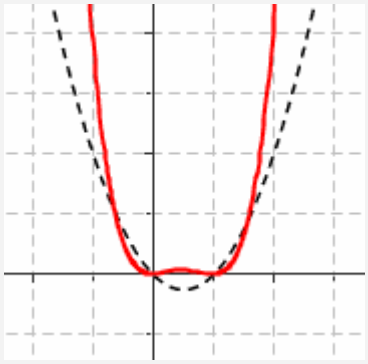
La parte del grafico della $f(x)$
che ha ordinate negative
viene sostituita
con la sua simmetrizzazione
rispetto all'asse orizzontale.



$$y = f(|x|) = |x|^2 - |x|$$

$$\boxed{f(x) \to f(|x|)}$$

La parte del grafico della $f(x)$
che ha ascisse negative
viene cancellata e buttata via.
La parte con ascisse positive viene riconfermata,
e completata con la sua simmetrica rispetto all'asse verticale.

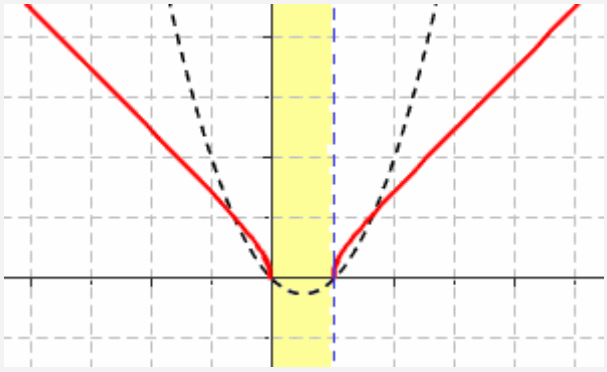


$$y = [f(x)]^2 = (x^2 - x)^2$$

$$\boxed{f(x) \to [f(x)]^2}$$

Per ogni ascissa,
l'ordinata corrispondente
viene elevata al quadrato.
Ora, occorre tener presente che
un numero compreso fra -1 e 1,
quando viene elevato alla seconda,
produce un numero positivo,
il cui valore assoluto
è MINORE
del valore assoluto
del numero di partenza.

Ad esempio,
elevando al quadrato
il numero 0,5
si ottiene 0,25
ed è 0,25<0,5.



$$y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - x}$$

$$\boxed{f(x) \to \sqrt{f(x)}}$$

La parte del grafico con ordinate negative
viene buttata via.
Ciascun punto con ordinata positiva
viene sostituito da un punto
che ha ordinata uguale alla radice quadrata di quella iniziale
(mentre, naturalmente, l'ascissa rimane la stessa).
In particolare:
i punti di ordinata 0 e di ordinata 1 rimangono fissi;
se un punto ha ordinata maggiore di 1, si abbassa:

$$y > 1 \;\to\; \sqrt{y} < y$$

se un punto ha ordinata compresa fra 0 e 1,
si alza leggermente
(pur restando sempre al di sotto dell'ordinata 1):

$$0 < y < 1 \;\to\; 0 < y < \sqrt{y} < 1$$

$$f(x) \to \frac{1}{f(x)}$$

Per ogni ascissa, si prende l'ordinata corrispondente e se ne fa il reciproco.

Ma se un'ordinata è nulla, il suo reciproco non esiste!
Quindi con $x=0$, $x=1$ (valori per cui si annulla il denominatore)

la funzione $y=\frac{1}{x^2-x}$ non esiste.

Inoltre, le ordinate vicine a 0, quando se ne fa il reciproco, si mutano in ordinate molto grandi in valore assoluto .

Invece le ordinate molto grandi, facendone il reciproco, si mutano in ordinate molto piccole.

Le ordinate uguali a $+1$ oppure a -1, quando se ne fa il reciproco, restano invariate.

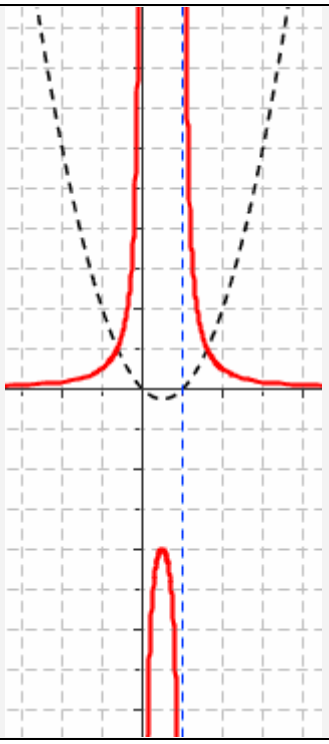
$$y=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2-x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2-x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2-x}=0^+ \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2-x}=0^+$$

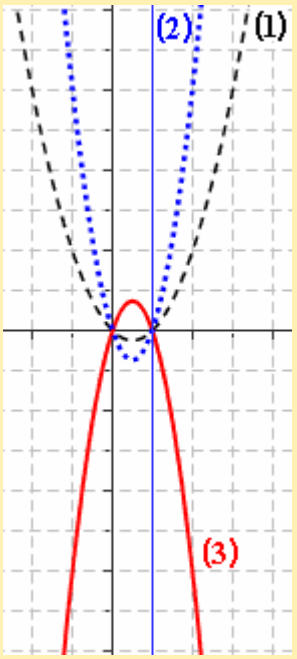
Le due rette verticali $x=0$ e $x=1$, e la retta orizzontale $y=0$, sono dette "asintoti" per la funzione



ALTRE MANIPOLAZIONI possono effettuarsi SPEZZANDO IL PROCEDIMENTO GRAFICO IN PIÙ FASI.

Ad esempio, il passaggio dal grafico di $y=f(x)$ a quello di $y=-3f(x)$ può essere organizzato secondo le "tappe" (vedi figura qui a destra):

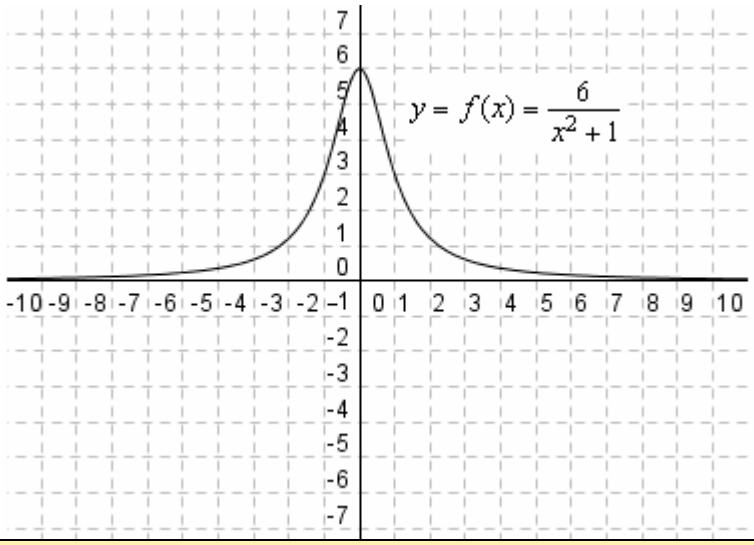
$$\underbrace{f(x)}_{(1)} \to \underbrace{3f(x)}_{(2)} \to \underbrace{-3f(x)}_{(3)}.$$



ESERCIZI (consigliabile però svolgere prima quelli alle pagine successive)
Clicca sulla freccia ⇨ per le correzioni degli esercizi di questa pagina

1) Dal grafico di $y=f(x)=\frac{6}{x^2+1}$, qui rappresentato, ricava i seguenti:

a) $1-f(x)$ b) $|f(x)-2|$ (fallo tratteggiato, questo!)



Risolvi prima graficamente, poi algebricamente, le seguenti equazioni:

2) $x^3+1=(x+1)^2$ 3) $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{2x}$ 4) $x^2=\frac{1}{x+2}$

5) $-x/2=(x^2+1)^{-1}$ 6) $\sqrt[3]{4x}=x$ 7) $\sqrt{x}+3=x\sqrt{3}$

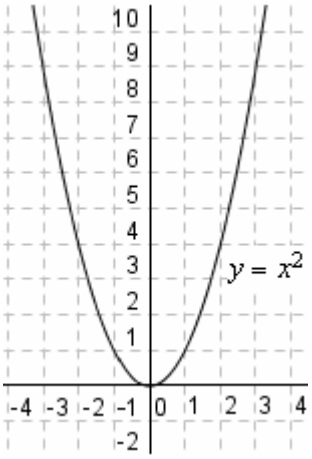
Per controllare la correttezza dei grafici tracciati, puoi servirti di **GEOGEBRA.**

Ma **occhio alle parentesi**!

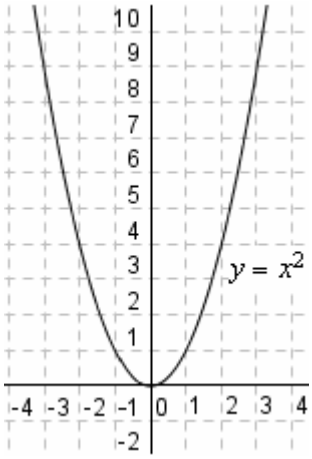
Ad es. $\frac{\sqrt[4]{x}}{2x^2+1}$ si scrive $x\,\wedge\,(1/4)/(2x\,\wedge\,2+1)$

8) Verifica che l'equazione $|x-4|=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ha tre soluzioni: $0<x_1<1$, $3<x_2<4$, $4<x_3<5$

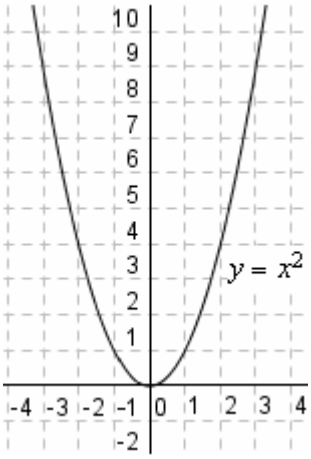
ESERCIZI: su ciascuna delle funzioni rappresentate, esegui le manipolazioni indicate.



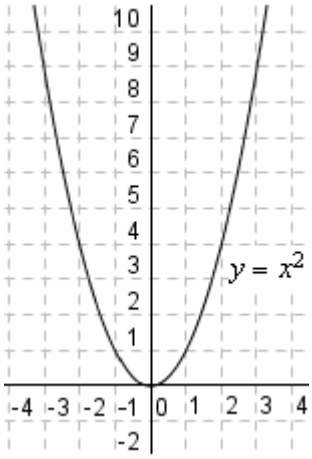
$f(x) \to f(x) - 1$



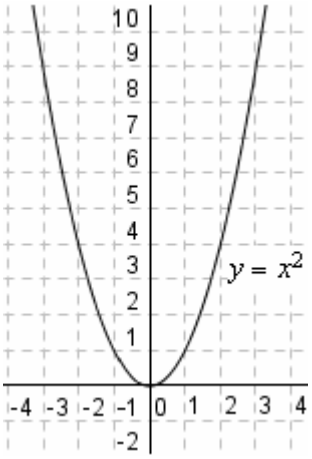
$f(x) \to f(x-1)$



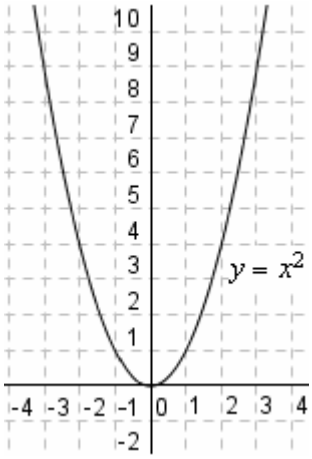
$f(x) \to 2f(x)$



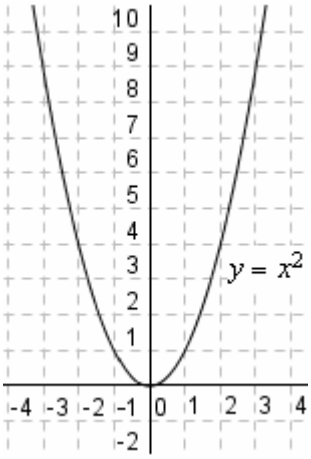
$f(x) \to f(2x)$



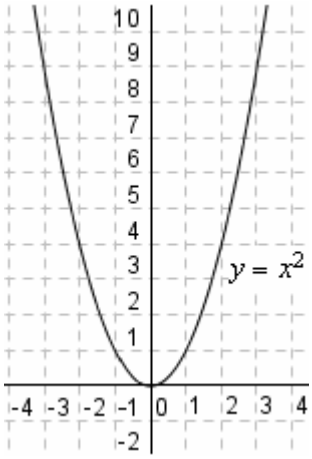
$f(x) \to \dfrac{1}{f(x)}$



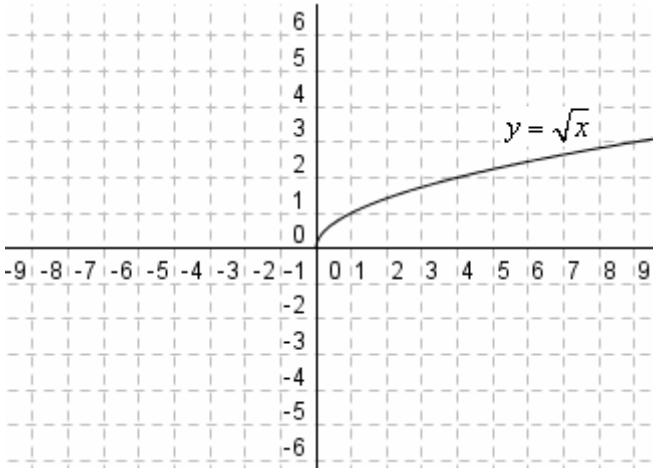
$f(x) \to \sqrt{f(x)}$



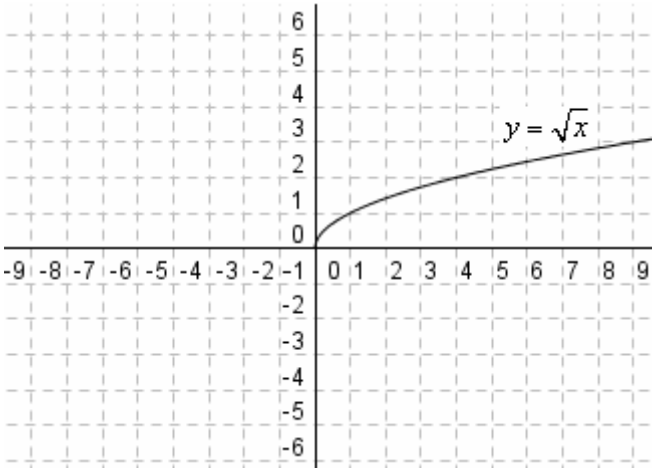
$f(x) \to [f(x)]^2$



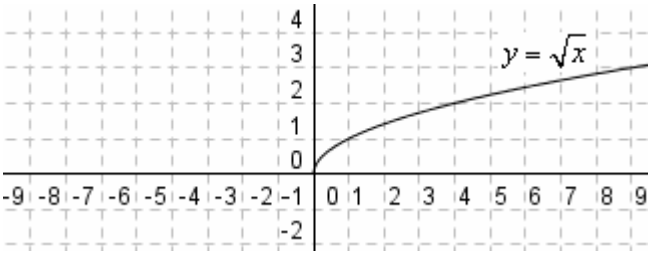
$f(x) \to f(x+2)$



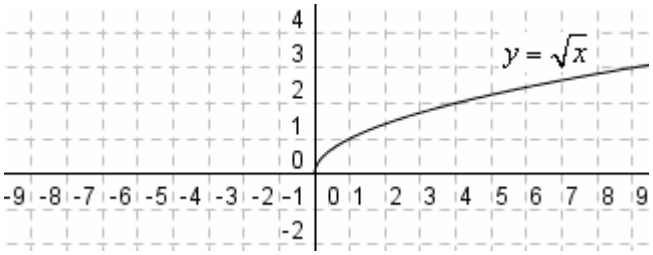
$f(x) \to f(x) + 3$ e $f(x) \to f(x+3)$



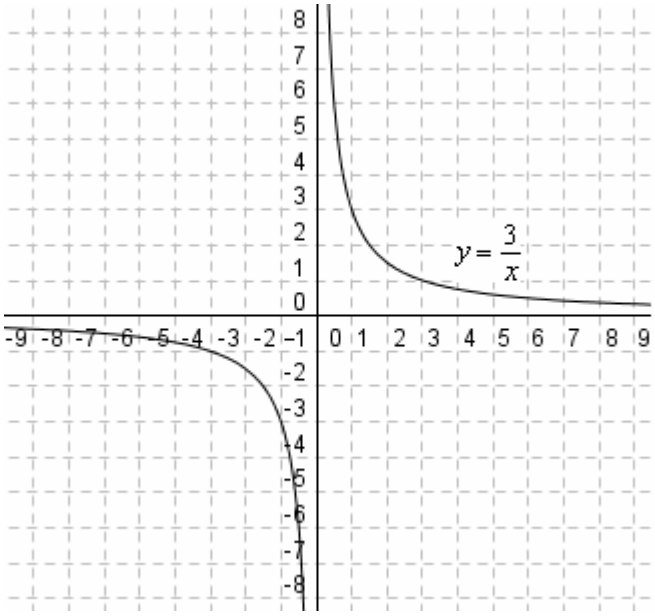
$f(x) \to -f(x)$ e $f(x) \to f(-x)$



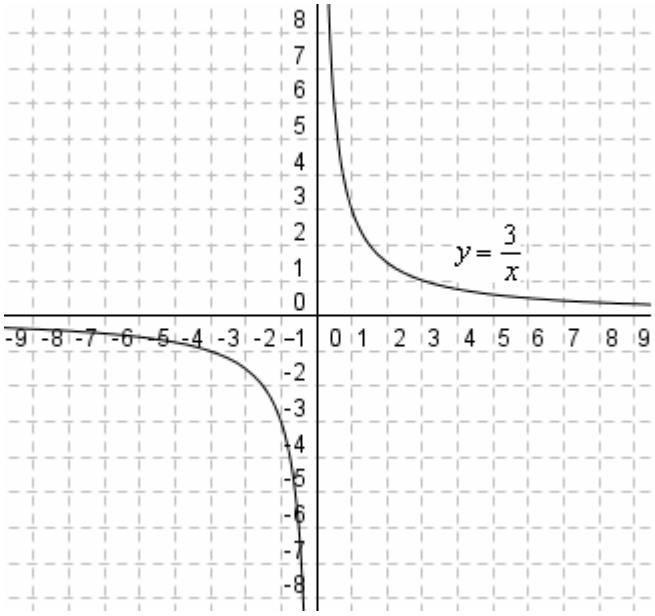
$f(x) \to \dfrac{1}{f(x)}$ e $f(x) \to f(x-1)$



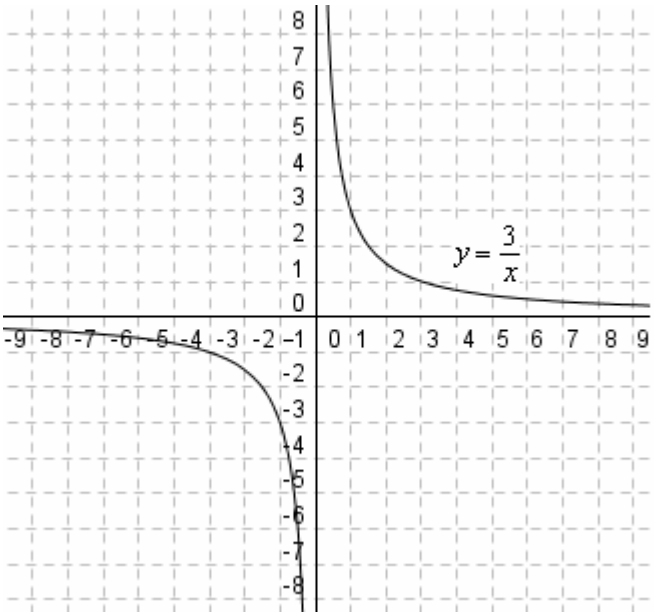
$f(x) \to \dfrac{1}{2} f(x)$ e $f(x) \to f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$



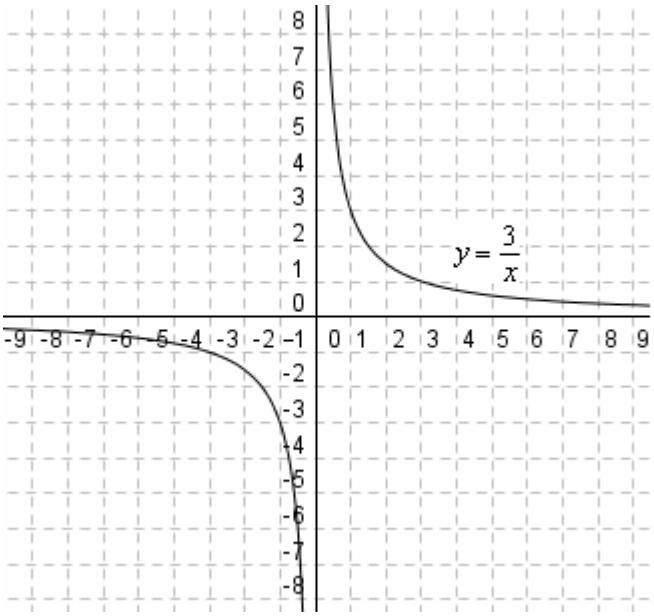
$f(x)\to f(x)-1$ e $f(x)\to f(x)+2$



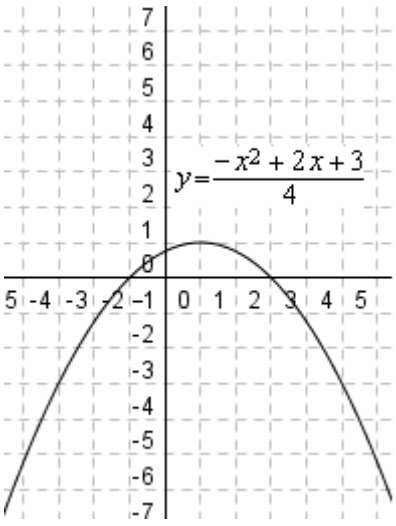
$f(x)\to f(x-1)$ e $f(x)\to f(x+2)$



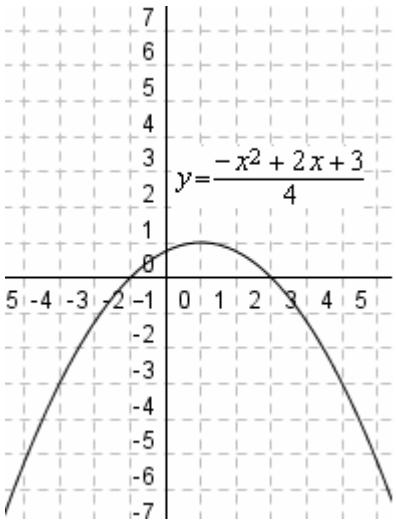
$f(x)\to \frac{1}{f(x)}$ e $f(x)\to [f(x)]^2$



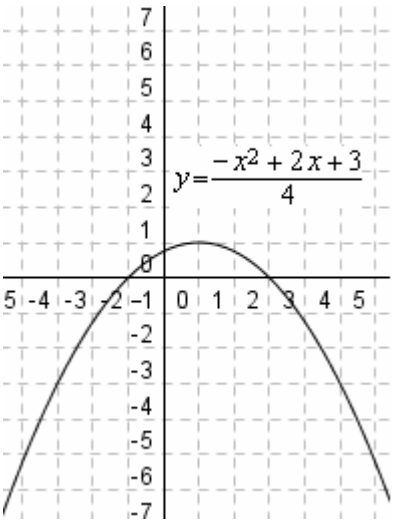
$f(x)\to |f(x)|$ e $f(x)\to \sqrt{f(x)}$



$f(x)\to |f(x)|$



$f(x)\to 1/f(x)$



$f(x)\to f(-x)$

CORREZIONI degli esercizi ⇨

12. INVERSIONE DI UNA FUNZIONE NUMERICA

Consideriamo la funzione $y = x^3 + 1 = f(x)$.
Ci domandiamo:
è possibile ora, se si sceglie un valore di *y*, risalire al valore di *x* che ha generato quell' *y*?
Proviamoci.

$$y = x^3 + 1; \quad x^3 + 1 = y; \quad x^3 = y - 1; \quad x = \sqrt[3]{y-1}$$

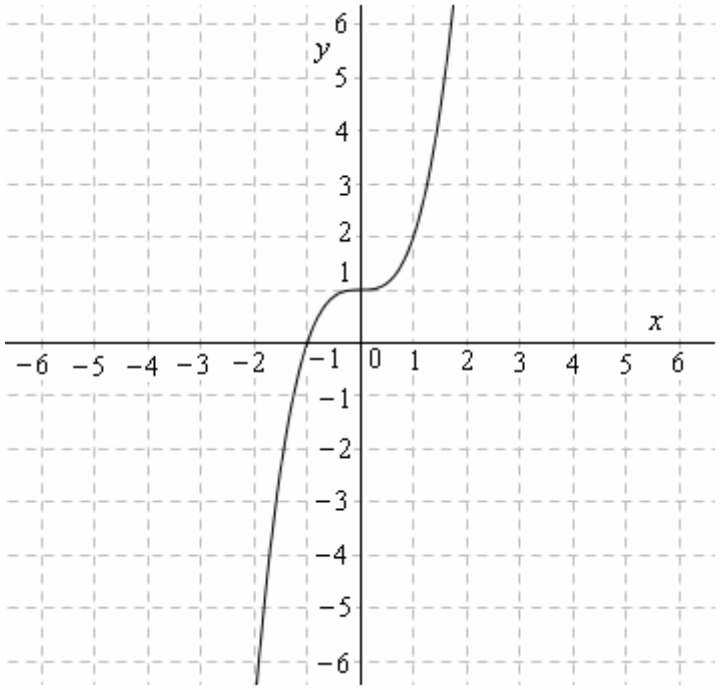
Ecco fatto: la legge $x = \sqrt[3]{y-1}$ è chiamata "**funzione inversa**" della $y = x^3 + 1$ e indicata col simbolo $f^{-1}(y)$.

Questa legge, questa "funzione inversa", permette di "tornare indietro":
a partire da *y*, si può risalire a quella che era la sua controimmagine *x* nella funzione diretta. Dunque:

$$y = x^3 + 1 = f(x)$$
$$x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y) \quad \textit{funzione inversa della } f$$

Supponiamo ora di voler rappresentare la funzione inversa appena ricavata, su di un riferimento cartesiano.
Tutto sommato, la rappresentazione ce l'abbiamo già, se abbiamo tracciato il grafico della funzione diretta!
Sì, perché se noi anziché guardare il grafico dal solito punto di vista, ruotiamo il foglio di 90° in senso antiorario, avremo la *y* in orizzontale e la *x* in verticale, quindi potremo seguire, al variare di *y*, come varia *x*, col solo fastidio che, contrariamente alle nostre abitudini, la variabile indipendente (che qui è *y*) assume valori crescenti allorquando ci spostiamo con lo sguardo verso sinistra e non verso destra.

Se guardo da qui, vedo sostanzialmente il grafico della funzione inversa $x = \sqrt[3]{y-1}$ *col solo inconveniente che la variabile indipendente y cresce quando muovo lo sguardo nel verso opposto a quello al quale sono abituato.*



Se guardo da qui, vedo normalmente la funzione diretta $y = x^3 + 1$

D'altra parte, potremmo anche decidere di considerare la funzione inversa come funzione "a sé stante", svincolata dalla funzione "diretta" dalla quale eravamo partiti.
In questo caso, poiché la consuetudine è di indicare la variabile indipendente col simbolo *x* e la variabile dipendente con *y*, procederemo ad uno **scambio di variabili**.

Vediamo di spiegarci meglio. Nel nostro esempio, eravamo partiti dalla funzione diretta $y = x^3 + 1 = f(x)$ e approdati alla funzione inversa $x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y)$.

Bene! La f^{-1} è dunque quella "macchinetta" che, quando "ingoia" un numero,
poi "sputa fuori" il numero ottenuto sottraendo 1 al numero di partenza ed estraendo una radice cubica.
Se ora, anziché indicare il numero di partenza con *y* e quello di arrivo con *x*,
indichiamo il numero di partenza con *x* e quello di arrivo con *y*, e scriviamo dunque $y = \sqrt[3]{x-1} = f^{-1}(x)$,
la macchinetta resta sempre la stessa, la legge che fa passare
dalla variabile indipendente alla variabile dipendente non cambia affatto!

In una funzione, è essenziale soltanto il LEGAME fra variabile indipendente e dipendente, non hanno importanza i NOMI coi quali le due variabili sono indicate!

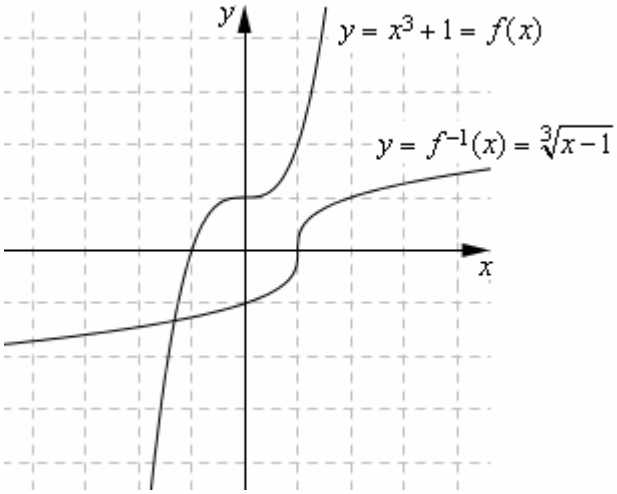
Ad esempio, le uguaglianze $x = \sqrt[3]{y-1}$, $y = \sqrt[3]{x-1}$, $z = \sqrt[3]{t-1}$ ecc. ecc. ...

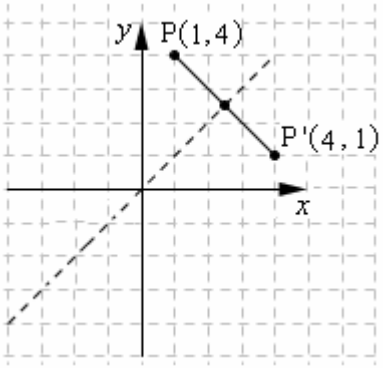
DEFINISCONO TUTTE LA STESSA FUNZIONE !!!

Pertanto, dopo esser partiti dall'uguaglianza $y = f(x)$ e averla "invertita",
isolando x a primo membro e ricavando così l'equazione della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$,
se lo riteniamo opportuno (a volte la convenienza c'è, altre volte no)
possiamo *scambiare i nomi delle due variabili*
riscrivendo la stessa funzione inversa sotto la forma equivalente $y = f^{-1}(x)$.

Se la funzione inversa f^{-1} è stata scritta sotto la forma $y = f^{-1}(x)$,
allora, rappresentandola sullo stesso riferimento cartesiano nel quale
avevamo tracciato il grafico della funzione diretta $y = f(x)$,
potremo notare una cosa interessante e curiosa:

i due grafici, quello della funzione diretta f
e quello dell'inversa f^{-1} "scritta a variabili scambiate",
sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante !!!





Ciò è dovuto al fatto che un certo punto (a, b) appartiene al grafico della $y = f^{-1}(x)$
se e solo se la coppia (a, b) è tale che $b = f^{-1}(a)$;
ma ciò avviene se e solo se $a = f(b)$ e perciò
se e solo se il punto (b, a) appartiene al grafico della $y = f(x)$.
Pertanto i singoli punti della curva grafico di $y = f^{-1}(x)$ si possono ottenere partendo
da ciascun punto del grafico della $y = f(x)$, e scambiandone le coordinate; il che equivale
(vedi la figura a destra) a simmetrizzare quel punto rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Naturalmente, una funzione può essere invertita solo se è iniettiva
(= a valori diversi di x, corrispondono sempre valori diversi di y =
= non c'è nessun valore di y che abbia più di una controimmagine =
= non c'è nessuna retta parallela all'asse delle x, che intersechi il grafico in più di un punto).

**Spesso una funzione $f(x)$ non è iniettiva considerandola su tutto il suo dominio,
ma è "iniettiva su di un intervallo" (vedi, per gli intervalli, pagina 127);
allora, si finisce per invertirla soltanto su tale intervallo.**

Es.: $y = f(x) = \dfrac{6}{1+x^2}$ non è iniettiva sul suo dominio $\mathbb{R}$ (basta osservare che a due valori di x opposti
corrisponde lo stesso valore di y); ma lo è su $[0,+\infty)$. Si può perciò invertire su $[0,+\infty)$ ottenendo:

$$y=\frac{6}{1+x^2}\ (x\geq 0);\quad \frac{1+x^2}{6}=\frac{1}{y};\quad 1+x^2=\frac{6}{y};\quad x^2=\frac{6}{y}-1;\quad x^2=\frac{6-y}{y};\quad x=\sqrt{\frac{6-y}{y}}$$

non cè il ± davanti alla radice proprio per la condizione $x \geq 0$

NOTA:
**se una funzione è strettamente monotòna (= strettamente crescente, oppure strettamente decrescente)
su tutto un intervallo, allora è iniettiva (e quindi invertibile) su quell'intervallo.**

Le funzioni strettamente crescenti (rispettivamente: decrescenti)
sono quelle che presentano un grafico "in salita" (rispettivamente: "in discesa"),
ossia un grafico che, quando lo si guarda da sinistra verso destra,
"va sempre verso l'alto" (o, rispettivamente, "verso il basso"),
come illustrato dalle definizioni e dalle figure nel riquadro della pagina successiva.

FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI (= MONOTÒNE) SU DI UN INTERVALLO

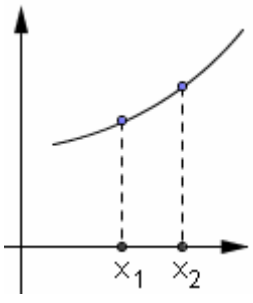
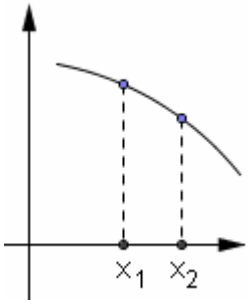
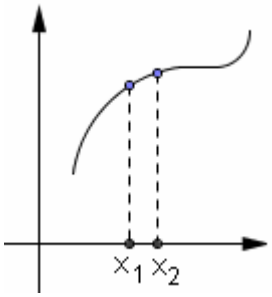
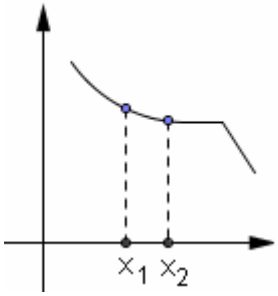
Sia f una funzione reale di variabile reale (vale a dire, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$);
indichiamone il dominio con D.
Sia poi I un intervallo o comunque un insieme, incluso nel dominio della funzione: $I \subseteq D$.
Si pongono allora le seguenti definizioni:

f *strettamente crescente su* I $\xleftrightarrow{def.}$ $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$

f *strettamente decrescente su* I $\xleftrightarrow{def.}$ $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$

f *crescente in senso lato* (= *non decrescente*) *su* I $\xleftrightarrow{def.}$ $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) \le f(x_2)$

f *decrescente in senso lato* (= *non crescente*) *su* I $\xleftrightarrow{def.}$ $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) \ge f(x_2)$

f strettamente crescente	f strettamente decrescente	f crescente in senso lato	f decrescente in senso lato
			
grafico saliente	grafico discendente	grafico saliente con eventuali tratti orizzontali	grafico discendente con eventuali tratti orizzontali

OSSERVAZIONI

Le funzioni aventi carattere crescente o decrescente su di un intervallo
si dicono "**monotòne**" (osserva che l'accento è sull'ultima "o") su quell'intervallo.

Se si trova scritto solamente "crescente", o "decrescente", o "monotòna", senza altra specificazione,
allora di norma si deve intendere "in senso STRETTO".

Una funzione, che sia strettamente monotòna su di un intervallo,
è certamente iniettiva (e, quindi, invertibile) su quell'intervallo
(iniettiva = valori della variabile indipendente distinti hanno sempre immagini distinte).

Si può anche dire:
"condizione sufficiente (sebbene non necessaria)
affinché una funzione sia iniettiva su di un intervallo,
è che sia ivi monotòna in senso stretto".

ESERCIZI (risposte a pag. 126)

Per ciascuna delle funzioni 1) … 8) :

a) ricava l'espressione della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$

b) scambia i nomi delle variabili pervenendo alla forma equivalente $y = f^{-1}(x)$

c) servendoti di GeoGebra, rappresenta f ed f^{-1} su di uno stesso riferimento cartesiano, per constatare la simmetria delle due curve rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

1) $y = f(x) = x+2$

2) $y = f(x) = 2x-3$

3) $y = f(x) = x^2$ *su* $[0,+\infty)$

4) $y = f(x) = x^2 - 2x$ *su* $[1,+\infty)$

5) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

6) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$ *su* $[0,+\infty)$

7) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}+1$

8) $y = f(x) = \sqrt{x}+1$

13. COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Quando abbiamo considerato, alle pagine 114 … 117, i grafici di $y = f(x)+2$, $y = f(2x)$, $y = \sqrt{f(x)}$ … abbiamo trafficato con funzioni, frutto della "composizione" di altre funzioni.

Per "**composizione**" (si dice anche "prodotto") di due funzioni, si intende la loro "**applicazione successiva**".

Vediamo un esempio.

La funzione "TRIPLO" prende un numero e me lo triplica;
la funzione "QUADRATO" prende un numero e me lo eleva al quadrato.

Se parto da un numero *x* e applico successivamente prima la funzione "TRIPLO" poi, *al numero ottenuto*, la funzione "QUADRATO", così facendo ho "composto" le due funzioni considerate.

$$x \xrightarrow{3(\bullet)} 3x \xrightarrow{(\bullet)^2} (3x)^2 = 9x^2$$

Osserviamo subito che **la composizione di due funzioni non è commutativa**: se, ad esempio, a partire dal numero *x*, applicassi prima la funzione "QUADRATO" e poi la funzione "TRIPLO", otterrei:

$$x \xrightarrow{(\bullet)^2} x^2 \xrightarrow{3(\bullet)} 3x^2$$

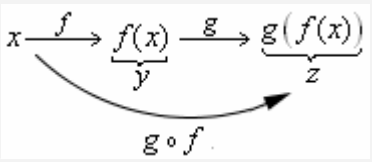
che è un risultato diverso dal precedente. In generale:

se ho una funzione $f : A \to B$ e una seconda funzione $g : B \to C$
posso, preso un oggetto (NOTA) $x \in A$, applicargli dapprima la funzione *f*, ottenendo l'oggetto $f(x) \in B$, poi a questo oggetto $f(x)$ applicare la funzione *g*, pervenendo all'oggetto definitivo $g(f(x))$

$$f : A \to B \quad g : B \to C \quad x \xrightarrow{f} \underbrace{f(x)}_{y} \xrightarrow{g} \underbrace{g(f(x))}_{z}$$

la funzione composta $g \circ f$ è quella che fa passare direttamente da x a z

La funzione composta, quella che fa saltare direttamente da x a $z = g(f(x))$, viene di solito indicata col simbolo $g \circ f$:
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$



$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

E' molto importante osservare che viene scritta per prima la funzione che viene applicata per ultima.

NOTA - Usiamo qui la parola "oggetto" anziché "numero" per sottolineare che questo discorso si può riferire non solo alle funzioni numeriche, ma più in generale a *tutte* le funzioni.

- Esempio: $f : x \to x-1$; $g : x \to x^3$
  - Se applico successivamente prima la f poi la g, ottengo: $x \xrightarrow{f} x-1 \xrightarrow{g} (x-1)^3$
    La funzione composta $g \circ f$ prende dunque "in input" x e restituisce "in output" il numero $(x-1)^3$; vale a dire, $g \circ f$ è la funzione tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^3$
  - Se applico successivamente prima la g poi la f, ottengo: $x \xrightarrow{g} x^3 \xrightarrow{f} x^3-1$
    La funzione composta $f \circ g$ prende dunque "in input" x e restituisce "in output" il numero x^3-1; vale a dire, $f \circ g$ è la funzione tale che $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^3-1$
- Altro esempio: $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ $\quad g(x) = 3x$ $\quad g \circ f = ?$ $\quad f \circ g = ?$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 3 \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x+3}{x+2} \quad \text{mentre} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = \frac{3x+1}{3x+2}$$

OSSERVAZIONE:
componendo una funzione f con la sua inversa f^{-1}, si ottiene la cosiddetta "funzione identica" $i(x) = x$.

ESERCIZI (risposte a pag. 127)

1) $f(x) = 3x$ $\quad g(x) = x+2$ $\quad g \circ f = ?$ $\quad f \circ g = ?$
2) $f(x) = x-1$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad g \circ f = ?$ $\quad f \circ g = ?$
3) $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x-1$ $\quad g \circ f = ?$ $\quad f \circ g = ?$
4) $f(x) = x^3$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad g \circ f = ?$ $\quad f \circ g = ?$
5) $f(x) = x^3 + x$ $\quad g(x) = x^2 + x$ $\quad g \circ f = ?$ $\quad f \circ g = ?$
6) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad g(x) = x+3$ $\quad g \circ f = ?$ $\quad f \circ g = ?$

14. DETERMINAZIONE DEL DOMINIO E DEL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE

(NOTA: questo paragrafo fa parte del capitolo su "grafici e risoluzioni grafiche" perché ne costituisce un naturale completamento, e tuttavia in esso compaiono semplici DISEQUAZIONI e SISTEMI DI DISEQUAZIONI, e vi si parla di "INTERVALLI" … Il discorso dovrebbe essere comprensibile perché le situazioni proposte sono elementari, in ogni caso tali argomenti sono trattati estensivamente in un capitolo successivo. Riguardo agli "intervalli", per comodità del lettore ne riportiamo una breve descrizione a pagina 127).

DOMINIO

Il dominio di una funzione reale di variabile reale, individuata da un'equazione della forma

$y =$ *espressione contenente* x ,

si determina andando a vedere per quali valori di *x*
sono effettuabili i calcoli che permettono di ricavare la *y* corrispondente.

Ad esempio:

- se *x* compare a denominatore, dobbiamo tener presente che la *y* sarà calcolabile solo a condizione che il denominatore stesso sia diverso da zero;
- se *x* compare sotto radice quadrata, affinché la *y* sia calcolabile il radicando dovrà essere ≥ 0

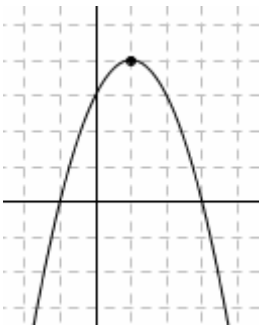
Funzione	$y = \dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}$	$y = \sqrt{10-x}$	$\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{x-2}}{x-5}$	$\sqrt[3]{x-4}$
Condizione per la calcolabilità della y	$x \neq 2 \wedge x \neq 3$	$10-x \geq 0$ cioè $x \leq 10$	$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$ cioè $x \geq 2$ ma $x \neq 5$	Nessuna condizione
Dominio	$\mathbb{R} - \{2, 3\}$	$(-\infty, 10]$	$[2, +\infty) - \{5\}$	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

CODOMINIO

Supponiamo ora che sia assegnata una funzione e che sia richiesto di determinarne il **codominio** (**= l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla variabile dipendente**).
Spesso si può rispondere ad un quesito di questo tipo semplicemente tracciando un grafico della funzione in esame.

ESEMPIO 1: trovare il codominio della funzione $y = -x^2 + 2x + 3$.

Poiché sappiamo (essendo il secondo membro un'espressione di II° grado) che il grafico è una parabola, potremmo disegnare questa parabola, tenendo conto che:



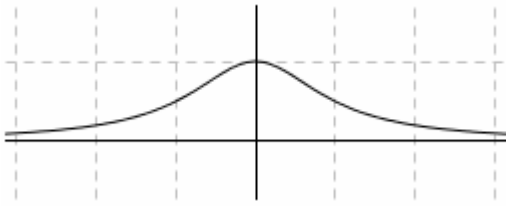
- $x_V = -\dfrac{b}{2a} = 1 \rightarrow \quad y_V = y(1) = -1+2+3 = 4$
- la concavità è rivolta verso il basso (essendo <0 il coefficiente di x^2)

e andare a vedere quali sono i valori effettivamente assunti dalla *y*:
si tratta dei valori $y \leq 4$, ossia il codominio risulta essere l'intervallo $C = (-\infty, 4]$

ESEMPIO 2: determinare il codominio della funzione $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Facile tracciare il grafico di questa funzione:

- il dominio è tutto $\mathbb{R}$ (infatti il denominatore non si può mai annullare);
- con $x = 0$ abbiamo $y = 1$;
- per valori opposti di *x* abbiamo lo stesso valore di *y*, cioè, per ogni *x*, $f(-x) = f(x)$, ad es. $f(-2) = f(2)$ … quindi il grafico sarà simmetrico rispetto all'asse verticale;
- quando *x*, a partire da 0, cresce, la quantità $1+x^2$ cresce e quindi il suo reciproco decresce, schiacciandosi verso lo zero per valori positivi.



Il grafico è dunque quello rappresentato in figura, da cui emerge che l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla *y*, ossia il codominio, è l'intervallo $(0, 1]$

Un altro metodo per determinare il codominio
è basato su passaggi algebrici anziché sul tracciamento di grafici.

Il codominio è l'insieme dei valori di *y* che hanno almeno una controimmagine;
quindi prenderemo l'equazione che definisce la funzione
e cercheremo di risolverla rispetto a *x*,
per trovare la legge che permetta di ritornare da *y* a *x* …
insomma, proveremo ad INVERTIRE la funzione …
fatti i vari passaggi, ad un certo punto risulterà chiaro
quali sono i valori di *y* per i quali si può risalire a *x*,
insomma: ad un certo punto si capirà quali sono i valori di *y* che hanno almeno una controimmagine.
L'insieme di questi valori di *y* costituirà il codominio della funzione.

Beninteso: se troveremo che qualche valore di *y* ha PIU' DI UNA controimmagine, allora ne dedurremo che la funzione non è invertibile non essendo iniettiva (perlomeno, sul dominio considerato);
ma il nostro scopo non è qui di stabilire se la funzione sia invertibile o no,
il nostro scopo è di determinare il codominio!

Vediamo qualche esempio.

- Individuare il codominio della funzione $y = \frac{x-2}{x-7}$.

  $y = \frac{x-2}{x-7} \;\rightarrow\; xy - 7y = x - 2 \;\; (x \neq 7) \;\rightarrow\; xy - x = 7y - 2;$ $\boxed{x(y-1) = 7y - 2}$

  Ora, quest'ultima equazione si può risolvere rispetto a *x* solo per $\boxed{y \neq 1}$; in tal caso, si ottiene

  $x = \frac{7y-2}{y-1}$

  Abbiamo stabilito così che il codominio della funzione (= l'insieme dei valori effettivamente assunti da y = l'insieme dei valori di y che hanno almeno una controimmagine) è $\boxed{\mathbb{R} - \{1\}}$

- Altro esempio (già trattato graficamente): determinare il codominio della funzione $y = \frac{1}{1+x^2}$

  $y = \frac{1}{1+x^2} \;\rightarrow\; 1 + x^2 = \frac{1}{y} \;\; (y \neq 0) \;\rightarrow\; x^2 = \frac{1}{y} - 1;$ $\boxed{x^2 = \frac{1-y}{y}}$

  A questo punto, possiamo risalire a *x* soltanto se il 2° membro è maggiore o uguale a 0, ossia $\boxed{\frac{1-y}{y} \geq 0}$.

  Risolvendo la disequazione, si ottiene $\boxed{0 < y \leq 1}$:
  perciò sono dotati di controimmagine tutti e soli i valori di *y* tali che $0 < y \leq 1$,
  e ciò significa che il codominio della nostra funzione è l'intervallo $\boxed{C = (0, 1]}$.

  Osserviamo che ogni valore di *y* appartenente a *C* ha DUE controimmagini: $x^2 = \frac{1-y}{y} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$

  Questo ci dice che la funzione considerata non è iniettiva, quindi non è invertibile …
  … Ma a noi non interessava la questione se la funzione in esame fosse o non fosse invertibile:
  ci interessava soltanto trovare i valori di *y* che avevano almeno una controimmagine,
  e ormai abbiamo riconosciuto trattarsi dell'intervallo $C = (0, 1]$.

  Se poi fossimo interessati anche all'*inversione* della funzione,
  potremmo dire che è invertibile soltanto qualora si vada a *restringere l'insieme di partenza*
  ad un intervallo nel quale ogni *y* del codominio abbia UNA SOLA controimmagine.
  Ad esempio, se imponiamo a *x* di essere positiva, ossia se assumiamo come insieme di partenza soltanto l'intervallo $[0, +\infty)$ anziché tutto $\mathbb{R}$, il doppio segno davanti alla radice se ne andrà, e avremo

  $x \in [0, +\infty) \quad x^2 = \frac{1-y}{y} \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$.

  Ogni *y* del codominio $C = (0, 1]$ avrà così UNA SOLA controimmagine, e la funzione risulterà invertibile.
  Perciò possiamo dire che la funzione $y = \frac{1}{1+x^2}$
  stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $[0, +\infty)$ e l'insieme $(0, 1]$.

ESERCIZIO (risposte a pag. 127)

Determina sia il dominio che il codominio delle funzioni che seguono:

a) $y = x + 7$ b) $y = x^2$ c) $y = x^3$ d) $y = \sqrt{x}$ e) $y = \sqrt[3]{x}$ f) $y = x^2 - x$

g) $y = (x-2)^4 + 3$ h) $y = \frac{1}{x}$ i) $y = \frac{1}{x-3}$ j) $y = \frac{1}{x^2}$ k) $y = x^4 + x^2 + 1$

l) $y = -4x^2 + 16x$. Come va ristretto l'insieme di partenza, se si vuole che la funzione sia invertibile?

m) $y = \frac{x+4}{x}$ n) $y = \frac{x+2}{2x+1}$ o) $y = x^4 - 2x^2$

15. RISPOSTE AGLI ESERCIZI DELL'ULTIMA PARTE

RISPOSTE agli esercizi di pag. 122

1) $y = f(x) = x+2 \quad x = y-2 = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = x-2 = f^{-1}(x)}$

2) $y = f(x) = 2x-3 \quad x = \frac{y+3}{2} = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = \frac{x+3}{2} = f^{-1}(x)}$

3) $y = f(x) = x^2$ *su* $[0,+\infty) \quad x = \sqrt{y} = f^{-1}(y) \quad \left[x = \sqrt{y} \text{ } e \text{ } NON \text{ } x = \pm\sqrt{y} \text{ } \begin{matrix} perché\ x \in [0,+\infty) \\ quindi\ x \geq 0 \end{matrix} \right] \quad \boxed{y = \sqrt{x} = f^{-1}(x)}$

4) $y = f(x) = x^2 - 2x$ *su* $[1,+\infty) \quad x^2 - 2x - y = 0 \quad x = 1 \pm \sqrt{1+y}$ *da cui* $x = 1 + \sqrt{1+y}$ *perché deve essere* $x \geq 1$

$x = 1 + \sqrt{1+y} = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = 1 + \sqrt{1+x} = f^{-1}(x)}$

5) $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad xy - y = 2x+1 \quad xy - 2x = y+1 \quad (y-2)x = y+1$

$x = \frac{y+1}{y-2} = f^{-1}(y) \quad \begin{matrix} y \neq 2: \text{ma si potrebbe dimostrare che} \\ \text{non c'è nessun valore di } x \text{ per cui} \\ \text{la } y \text{ possa assumere il valore } 2 \end{matrix} \quad \boxed{y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)}$

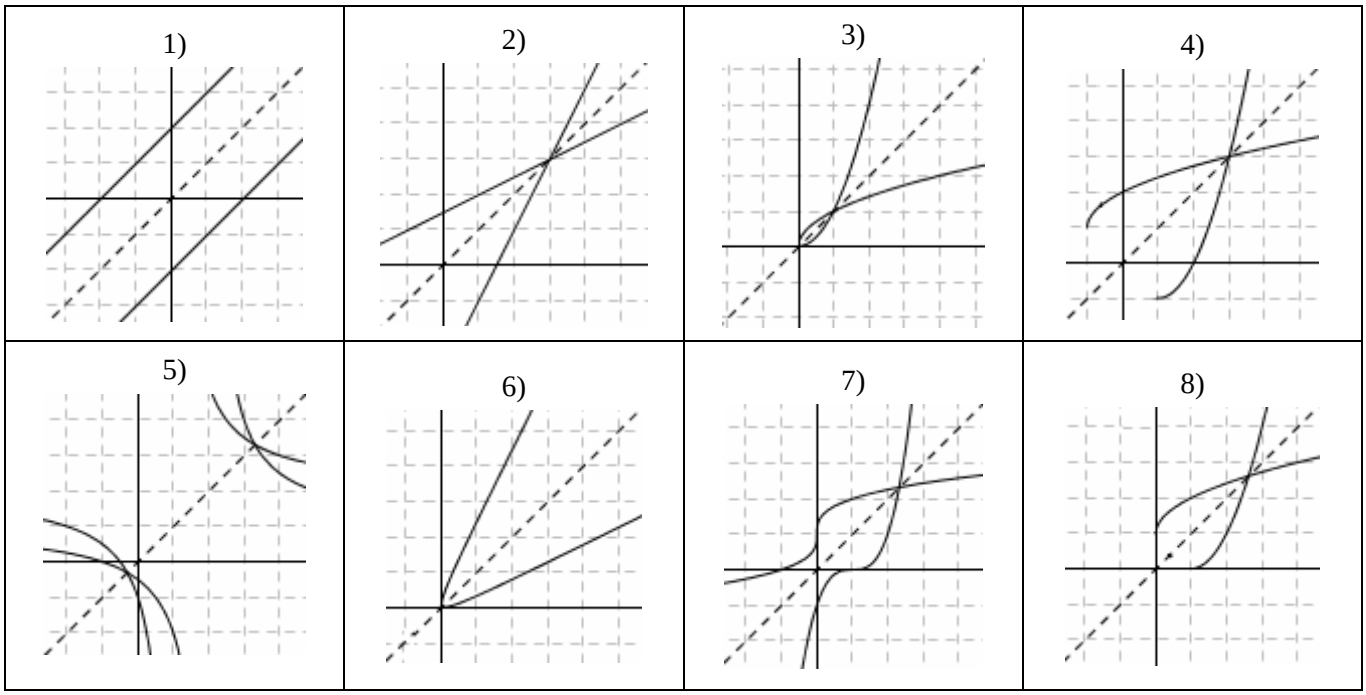
6) $y = f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ *su* $[0,+\infty)$ (*) $\quad 2xy + y = x^2 \quad x^2 - 2xy - y = 0 \quad x = y \pm \sqrt{y^2+y}$ *da cui* $x = y + \sqrt{y^2+y}$ [*condiz.* $x \geq 0$]

(*) *Osserviamo che essendo* $x \geq 0$ *anche* $y \geq 0 \quad x = y + \sqrt{y^2+y} = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = x + \sqrt{x^2+x} = f^{-1}(x)}$ [*con* $x \geq 0$]

7) $y = f(x) = \sqrt[3]{x} + 1 \quad \sqrt[3]{x} = y - 1 \quad x = (y-1)^3 = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = (x-1)^3 = f^{-1}(x)}$

8) $y = f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad \sqrt{x} = y - 1 \; (x \geq 0,\ y \geq 1) \quad x = (y-1)^2 = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = (x-1)^2 = f^{-1}(x)}$ [$x \geq 1$]

Ecco qui sotto i grafici relativi agli esercizi precedenti:



RISPOSTE agli esercizi di pag. 123

1) $f(x)=3x$ $g(x)=x+2$ $(g\circ f)(x)=3x+2$ $(f\circ g)(x)=3(x+2)$

2) $f(x)=x-1$ $g(x)=\frac{1}{x}$ $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x-1}$ $(f\circ g)(x)=\frac{1}{x}-1$

3) $f(x)=x^2$ $g(x)=x-1$ $(g\circ f)(x)=x^2-1$ $(f\circ g)(x)=(x-1)^2$

4) $f(x)=x^3$ $g(x)=x^2$ $(g\circ f)(x)=x^6$ $(f\circ g)(x)=x^6$

5) $f(x)=x^3+x$ $g(x)=x^2+x$ $(g\circ f)(x)=x^6+2x^4+x^3+x^2+x$ $(f\circ g)(x)=x^6+3x^5+3x^4+x^3+x^2+x$

6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $g(x)=x+3$ $(g\circ f)(x)=\sqrt[3]{x}+3$ $(f\circ g)(x)=\sqrt[3]{x+3}$

INTERVALLI

Si chiamano "**intervalli**" **particolari insiemi numerici**. Un intervallo è l'insieme di tutti i numeri reali compresi fra il "primo estremo" e il "secondo estremo" dell'intervallo stesso.

Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$:



- contiene il 4 (la parentesi quadra sta a indicare che quell'estremo è compreso);
- contiene TUTTI i numeri, **NON SOLO** interi **MA ANCHE** "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- NON contiene l'8 (la parentesi tonda sta a indicare che quell'estremo è escluso).

Un intervallo può anche essere "illimitato", se uno dei suoi estremi è "$+$infinito" $(+\infty)$ o "$-$infinito" $(-\infty)$ … e in questo caso corrisponde, sulla *number line*, a una semiretta anziché ad un segmento.
Ad esempio, $(-\infty, 5)$ è l'insieme di tutti i numeri reali relativi che, sulla *number line*, si trovano a sinistra del 5 (il 5 non fa parte dell'intervallo, per via della tonda).

$(-\infty, 0)$ è l'insieme dei numeri reali <0 ("strettamente negativi", negativi *in senso stretto*)
$(-\infty, 0]$ è l'insieme dei numeri reali ≤ 0 (negativi o nulli, negativi *in senso lato*)
$(0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali >0 ("strettamente positivi", positivi *in senso stretto*)
$[0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali ≥ 0 (positivi o nulli, positivi *in senso lato*)
$(-\infty, +\infty)=\mathbb{R}$ (questo intervallo riempie tutta la *number line*)

RISPOSTE all'esercizio di pag. 126

a) $D=\mathbb{R}$; $C=\mathbb{R}$ b) $D=\mathbb{R}$; $C=[0,+\infty)$ c) $D=\mathbb{R}$; $C=\mathbb{R}$ d) $D=[0,+\infty)$; $C=[0,+\infty)$

e) $D=\mathbb{R}$; $C=\mathbb{R}$ f) $D=\mathbb{R}$; $C=\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$ g) $D=\mathbb{R}$; $C=[3,+\infty)$ h) $D=\mathbb{R}-\{0\}$; $C=\mathbb{R}-\{0\}$

i) $D=\mathbb{R}-\{3\}$; $C=\mathbb{R}-\{0\}$ j) $D=\mathbb{R}-\{0\}$; $C=(0,+\infty)$ k) $D=\mathbb{R}$; $C=[1,+\infty)$

l) $D=\mathbb{R}$; $C=(-\infty,16]$. Deve diventare l'intervallo $[2,+\infty)$ o, in alternativa, l'intervallo $(-\infty,2]$

m) $D=\mathbb{R}-\{0\}$; $C=\mathbb{R}-\{1\}$ n) $D=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; $C=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ o) $D=\mathbb{R}$; $C=[-1,+\infty)$

Da www.purplemath.com:

Finding the Inverse of a Function

Find the inverse of $y = 3x - 2$

Here's how the process works:

Here's my original function:	$y=3x-2$
Now I'll try to solve for "x =":	$y+2=3x$ $x=\frac{y+2}{3}$
Once I have "x =", I'll switch x and y; the "y =" is the inverse.	$y=\frac{x+2}{3}$

Then **the inverse is** $y=\frac{x+2}{3}$

Composition of Functions

Given $f(x) = 2x + 3$ and $g(x) = -x^2 + 5$, find $(f \circ g)(x)$

In this case, I am not trying to find a certain numerical value.
Instead, I am trying to find the formula that results from plugging the formula for $g(x)$ into the formula for $f(x)$.
I will write the formulas at each step, using parentheses to indicate where the inputs should go:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(-x^2 + 5)$
$= 2(\quad) + 3$
... setting up to insert the input formula
$= 2(-x^2 + 5) + 3$
$= -2x^2 + 10 + 3$
$= \mathbf{-2x^2 + 13}$

SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1°

1. GRADO DI UN SISTEMA. METODI GENERALI DI RISOLUZIONE

Si dice "grado" di un sistema il prodotto fra i gradi delle sue equazioni.

- $\begin{cases} 4x^3 + y^3 = 3 & (3° \; grado) \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 & (2° \; grado) \end{cases} \rightarrow$ *sistema di* 6° *grado*
- $\begin{cases} x - y = 7 & (1° \; grado) \\ 2x + z = 11 & (1° \; grado) \\ xz = -6 & (2° \; grado) \end{cases} \rightarrow$ *sistema di* 2° *grado*

Va detto che a volte un sistema "appare" di grado n, mentre in realtà il "vero" grado è inferiore.

Ad esempio, il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

appare di 2° grado, ma un semplice passaggio mostra che è invece sostanzialmente di 1° grado.

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 48 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12(x-y) = 48 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

La problematicità, dato un sistema, di stabilire a priori quale sia il suo grado effettivo,
rende ardua l'enunciazione, per i sistemi, di un teorema analogo a quello che è,
per le equazioni, il "Teorema Fondamentale dell'Algebra".

E' possibile, comunque, affermare che
un sistema di grado n non può avere più di n soluzioni
(eccettuati i casi in cui il sistema risulti indeterminato).
E' chiaro che questo discorso sul "grado" si può riferire esclusivamente a quei sistemi
nei quali le equazioni in gioco sono tutte algebriche (ossia, della forma "polinomio = 0").

♥ Importante tener presente che,
quando si dice "**SOLUZIONE**" con riferimento a un sistema, si intende:

- una **COPPIA ORDINATA** di numeri, **se il sistema ha due incognite**;
- una **TERNA ORDINATA** di numeri, **se il sistema ha tre incognite**;
- ecc.

Il metodo più generale per la risoluzione di un sistema è quello di **sostituzione**;
è possibile comunque applicare anche "**riduzione**",
ossia rimpiazzare un'equazione, quando lo si ritenga conveniente,
con una **combinazione lineare** (NOTA) dell'equazione stessa con una o più fra le altre.

NOTA: "combinazione lineare" di due o più oggetti matematici (equazioni, vettori, …)
è ciò che si ottiene sommandoli algebricamente,
dopo aver eventualmente moltiplicato ciascuno di essi per una costante numerica.

Vedremo ora un paio di ESEMPI.

Comunque, lo vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO**? **DAVVERO UTILISSIMO**?
ALLA FINE della risoluzione di un sistema, **FAI SEMPRE LA VERIFICA**,
sostituendo, nel sistema iniziale, al posto delle singole incognite,
i valori rispettivamente trovati, per controllare se TUTTE le uguaglianze sono esatte.
Metodo comodo, rapido, efficace
per essere certi di aver fatto giusto, o per scoprire che c'è l'errore!!!



1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=3y+1; \quad x=\dfrac{3y+1}{2} \\ \left(\dfrac{3y+1}{2}\right)^2-y^2=3; \quad \dfrac{9y^2+6y+1}{4}-y^2=3; \quad 9y^2+6y+1-4y^2=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ 5y^2+6y-11=0; \quad y_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+55}}{5}=\dfrac{-3\pm\sqrt{64}}{5}=\dfrac{-3\pm 8}{5}=\left\langle \begin{matrix} -\dfrac{11}{5} \\ 1 \end{matrix} \right. \end{cases}$

$\begin{cases} y=1 \\ x=\dfrac{3y+1}{2}=\dfrac{3+1}{2}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\dfrac{11}{5} \\ x=\dfrac{3\left(-\dfrac{11}{5}\right)+1}{2}=\dfrac{-\dfrac{33}{5}+1}{2}=-\dfrac{28}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{14}{5} \end{cases}$

Il sistema assegnato, che era di 2° grado, ammette dunque le 2 soluzioni: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x=-14/5 \\ y=-11/5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=11 \\ xy=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \quad (x\neq 0) \\ 2x^2+\left(-\dfrac{3}{x}\right)^2=11; \quad 2x^2+\dfrac{9}{x^2}=11; \quad 2x^4+9=11x^2; \quad 2x^4-11x^2+9=0; \end{cases}$

Il passaggio in cui si isola y è effettuabile solo supponendo $x\neq 0$; d'altra parte, una coppia (x, y) con $x=0$ non potrebbe verificare la condizione $xy=-3$ quindi non potrebbe essere soluz. del sistema

$\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \\ \left(x^2\right)_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-72}}{4}=\dfrac{11\pm\sqrt{49}}{4}=\dfrac{11\pm 7}{4}=\left\langle \begin{matrix} 1 \\ \dfrac{9}{2} \end{matrix} \right. \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2=1\rightarrow x=\pm 1 \\ x^2=\dfrac{9}{2}\rightarrow x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{1}=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{-1}=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{3}{x}=\sqrt{2} \end{cases}$

ESERCIZI (sistemi di grado superiore al 1°) Vai alle correzioni dei n. 3, 4, 9, 12, 14 ⇨

3) $\begin{cases} 3x-y=8 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ xy+4=0 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x^2+y^2=27 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} y+1=2x \\ x^2-y+3=0 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} y^2+x+y=88 \\ 5x-y=0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{x+y}{5} \\ (x-1)(x+1)=14-xy \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x^2+y^2-6x-2y=0 \\ x^2+y^2-8x-4y+16=0 \end{cases}$ (sottrarre innanzitutto membro a membro) **10)** $\begin{cases} x+2y+x^2+y^2=5 \\ 2x+y-x^2-y^2=1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x^2+2y^2=1 \\ x^2+y^2+2x-y=1 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy=a(2a-1) \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x^2-y^2=4k \\ x+y=2k \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} bx+ay=2ab \\ x^2+y^2=a^2+b^2 \end{cases}$

SOLUZIONI

3) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{9}{5} \\ y=-\dfrac{13}{5} \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\mp 3 \end{cases}$ **6)** Imp. (in $\mathbb{R}$)

7) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=44/25 \\ y=44/5 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3/2 \\ y=1/2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{10} \\ y=-\dfrac{7}{10} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x=a \\ y=a-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1-2a}{2} \\ y=-\dfrac{1+2a}{2} \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x=k+1 \\ y=k-1 \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{a\left(3b^2-a^2\right)}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{b\left(3a^2-b^2\right)}{a^2+b^2} \end{cases}$

2. SISTEMI SIMMETRICI

Un sistema della forma

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$

vien detto SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE.

Eccone un esempio:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-1 \end{cases}$$

Si potrebbe tranquillamente risolvere per sostituzione;
tuttavia, si osserva che
il sistema richiede di trovare due numeri conoscendone la somma e il prodotto ($s=2,\ p=-1$),
per cui, volendo, si può anche scegliere di determinare i due numeri in gioco impostando (vedi pag. 61)
l'equazione ausiliaria

$$t^2-st+p=0 \quad \text{(nella fattispecie, } t^2-2t-1=0\text{)}$$

e risolvendola.
Le due soluzioni che si troveranno saranno, appunto, i due numeri cercati.

Nel nostro caso avremo

$$t^2-2t-1=0$$

$$t_{1,2}=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$$

quindi le soluzioni del sistema saranno

$$\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{(con scrittura compatta: } \begin{cases} x=1\pm\sqrt{2} \\ y=1\mp\sqrt{2} \end{cases}\text{)}$$

Osservazione: il sistema è "simmetrico", nel senso che in esso x e y sono "intercambiabili".

Un sistema di 2 equazioni in 2 incognite si dice "simmetrico"
ogniqualvolta si constati che il sistema resta invariato, se si scambia formalmente la x con la y
(= se si rimpiazza ovunque x con y e y a sua volta con x).

Facciamo un altro esempio di sistema simmetrico. Prendiamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} 3x^2-7xy+3y^2=\dfrac{1}{4} \\ 2x+2y=3 \end{cases}$$

Se andiamo a scambiare formalmente x con y ($x \rightleftarrows y$)
il sistema si muta in

$$\begin{cases} 3y^2-7yx+3x^2=\dfrac{1}{4} \\ 2y+2x=3 \end{cases}$$

che coincide ancora col sistema di partenza!

E' evidente che, se un sistema simmetrico ammette una data soluzione
$x=\alpha,\ y=\beta$
allora necessariamente ammetterà anche la soluzione "gemella"
$x=\beta,\ y=\alpha$.

Altre tipologie di sistemi simmetrici "notevoli" sono illustrate dagli esempi seguenti.
Per ciascuna tipologia, viene presentata una tecnica di risoluzione specifica,
che risulta più rapida rispetto al (pur sempre applicabile) metodo di sostituzione.

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ *(trovare due numeri conoscendo la loro somma, e la somma dei loro quadrati)*

$$\begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^2-2xy=17 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ 5^2-2xy=17 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{x+y=5} \\ 25-2xy=17;\ -2xy=-8;\ \boxed{xy=4} \end{cases}$$

Dunque, applicando la più semplice fra le cosiddette "formule di Waring" (pag. 65), ci siamo ricondotti al sistema simmetrico fondamentale

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$$

che possiamo risolvere ad esempio con la tecnica appresa dell'equazione ausiliaria, oppure, data la semplicità dei numeri in gioco, anche "a mente":

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} xy=60 \\ x^2+y^2=169 \end{cases}$ *(trovare due numeri conoscendo il loro prodotto, e la somma dei loro quadrati)*

$$\begin{cases} xy=60 \\ (x+y)^2-2xy=169 \end{cases} \quad \begin{cases} xy=60 \\ (x+y)^2-120=169;\ (x+y)^2=289;\ x+y=\pm 17 \end{cases}$$

Ci siamo ricondotti dunque alla coppia di sistemi simmetrici fondamentali

$$\begin{cases} xy=60 \\ x+y=17 \end{cases} ; \begin{cases} xy=60 \\ x+y=-17 \end{cases}$$

che possiamo risolvere con la tecnica specifica, o anche "a mente", ottenendo

$$\begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases}, \begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}; \begin{cases} x=-5 \\ y=-12 \end{cases}, \begin{cases} x=-12 \\ y=-5 \end{cases}$$

ESERCIZI (sistemi simmetrici) Vai alle correzioni dei n. 5, 9, 11, 13, 15, 16 ⇨

3) $\begin{cases} x+y=15 \\ x^2+y^2=153 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x^2+y^2=80 \\ x+y=-4 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x+y=\frac{1}{6} \\ x^2+y^2=\frac{13}{36} \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x+y=2(2\sqrt{2}-1) \\ x^2+y^2=4(6-\sqrt{2}) \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=48 \\ x^2+y^2=580 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} xy=16 \\ x^2+y^2=32 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} 4xy+1=0 \\ 2x^2+2y^2=1 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} xy=3 \\ x^2+y^2=14 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{17}{64} \\ xy+\frac{1}{16}=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+y=2a \\ x^2+y^2=2(a^2+b^2) \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} xy=a-1 \\ x^2+y^2=a^2-2a+2 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x^3+y^3=14 \\ x+y=2 \end{cases}$ (formule di Waring, pag. 65 …) **16)** $\begin{cases} x^3+y^3=\frac{1}{4} \\ x+y=1 \end{cases}$

SOLUZIONI

3) $\begin{cases} x=12 \\ y=3 \end{cases} \begin{cases} x=3 \\ y=12 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=-8 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=-8 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ **6)** imp. (in $\mathbb{R}$) **7)** $\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2}-2 \end{cases} \begin{cases} x=\sqrt{2}-2 \\ y=3\sqrt{2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=2 \\ y=24 \end{cases} \begin{cases} x=24 \\ y=2 \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=-24 \end{cases} \begin{cases} x=-24 \\ y=-2 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

11) $\begin{cases} x=\sqrt{5}+\sqrt{2} \\ y=\sqrt{5}-\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=\sqrt{5}-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{5}+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\sqrt{5}-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{5}+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\sqrt{5}+\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{5}-\sqrt{2} \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x=-\frac{1}{8} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{8} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{8} \end{cases}$

13) $\begin{cases} x=a\pm b \\ y=a\mp b \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x=1 \\ y=a-1 \end{cases} \begin{cases} x=a-1 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=1-a \\ y=-1 \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=1-a \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \end{cases}$

3. SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1° CON TRE O PIU' INCOGNITE

1)

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-y-z=0 \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z \\ y+z+2y+z=5 \\ (y+z)y+(y+z)z+yz=5 \end{cases}$$ *isolo un'incognita dall'equazione più semplice, e vado poi a sostituire nelle altre due equazioni...*

$$\begin{cases} x=y+z \\ 3y+2z=5 \\ y^2+yz+yz+z^2+yz=5 \end{cases} \quad y^2+3yz+z^2=5$$ *... le quali formeranno un "sotto – sistema" con un'incognita in meno*

$$\begin{cases} x=y+z \\ z=\dfrac{5-3y}{2} \\ y^2+3y\cdot\dfrac{5-3y}{2}+\left(\dfrac{5-3y}{2}\right)^2=5 \end{cases}$$ *dopodiché risolvo, per sostituzione, il sotto – sistema*

$$\begin{cases} x=y+z \\ z=\dfrac{5-3y}{2} \\ y^2+\dfrac{15y-9y^2}{2}+\dfrac{25-30y+9y^2}{4}=5; \quad 4y^2\cancel{+30y}-18y^2+25\cancel{-30y}+9y^2=20; \quad -5y^2=-5; \quad y^2=1; \quad y=\pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ z=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5-3}{2}=1 \\ x=y+z=1+1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-1 \\ z=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5+3}{2}=4 \\ x=y+z=-1+4=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$$

Ma ecco una **variante più efficace** del procedimento risolutivo:



$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-y-z=0 \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z \\ y+z+2y+z=5 \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$ *isolo un'incognita da una delle equazioni più semplici e sostituisco nell'altra equazione semplice non toccando, per ora, l'equazione più complicata*

$$\begin{cases} x=y+z \\ 3y+2z=5 \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$ *... lavoro sempre sulle prime due equazioni, con l'obiettivo di esprimere due delle incognite in funzione dell'incognita rimanente...*

$$\begin{cases} x=y+z \\ z=\dfrac{5-3y}{2} \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{5-3y}{2} \\ x=y+z=y+\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{2y+5-3y}{2}=\dfrac{5-y}{2} \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{5-3y}{2} \\ x=\dfrac{5-y}{2} \\ \dfrac{5-y}{2}\cdot y+\dfrac{5-y}{2}\cdot\dfrac{5-3y}{2}+y\cdot\dfrac{5-3y}{2}=5; \quad \dfrac{5y-y^2}{2}+\dfrac{25-15y-5y+3y^2}{4}+\dfrac{5y-3y^2}{2}=5; \quad \dots \quad y=\pm 1 \end{cases}$$

e solo dopo aver raggiunto questo obiettivo, sostituisco nella terza equazione ottenendo direttamente un'equazione con una sola incognita

$$\begin{cases} y=1 \\ z=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5-3}{2}=1 \\ x=\dfrac{5-y}{2}=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-1 \\ z=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5+3}{2}=4 \\ x=\dfrac{5-y}{2}=\dfrac{5+1}{2}=3 \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$

Vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO**?
DAVVERO UTILISSIMO?
Alla fine della risoluzione di un sistema,
FAI SEMPRE LA VERIFICA,
sostituendo, nel sistema iniziale,
al posto delle singole incognite,
i valori rispettivamente trovati.
TUTTE le equazioni dovranno trasformarsi in uguaglianze vere, altrimenti c'è qualcosa che non va.



ESERCIZI Vai alle correzioni degli esercizi "dispari" fino al 13) ⇨

2) $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y-z+1=0 \\ xy+z^2=2 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x+y+t=2 \\ x-t=2 \\ x^2+t^2=y^2+6 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x+y+z=7 \\ z-x-y=3 \\ x^2+yz=16 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x-2y=0 \\ y-2z=0 \\ xyz=8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x-z=2y \\ x+z=1+y \\ x^2+z^2=3-y^2 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 0,3y-0,2z=\dfrac{2}{5} \\ xy+z^2=9 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} 2(z-1)=x \\ 2y-z=1 \\ (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=27 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ x-y-z+t=1 \\ x-y+z-t=-1 \\ xy+zt=3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y+z=7 \\ \dfrac{yz-xy}{6}=1 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}-\dfrac{4}{3}=0 \\ 2x+y+6z=13 \\ x^2+yz=2 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} 2x=1+y \\ \dfrac{3x-2y-t}{2}-1=0 \\ 2xt^2-y^3=1 \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{25}{9} \\ 5z-x-y=5/3 \\ xy=\dfrac{5}{3}z \end{cases}$

14) $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x+y+z=2 \\ x^2+yz+5=0 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x^2+y^2+2x=9 \\ z^2-4=z(z+1) \\ 2x^2+2y^2+y=11 \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} 2a-b=1 \\ a-2c+5=0 \\ a^2+b^2+c^2=11 \end{cases}$ **17)** $\begin{cases} 3x-y-t=1 \\ x+yz+t=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+y+t=4 \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} ab+cd+10=0 \\ a+b-c=0 \\ a-b+c=2 \\ a-b-d=3 \end{cases}$

SOLUZIONI

2) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ t=1 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=6 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=-11/13 \\ y=-19/13 \\ z=5/13 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x=40/7 \\ y=-10/7 \\ z=-29/7 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=2 \end{cases} \begin{cases} x=3/2 \\ y=3/2 \\ z=1/2 \\ t=3/2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=\dfrac{19}{4} \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=1 \\ z=\dfrac{17}{9} \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ t=-1 \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{5}{3} \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{4}{3} \\ z=\dfrac{4}{5} \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=1 \\ z=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

14) $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=7 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-4 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{20}{17} \\ y=-\dfrac{39}{17} \\ z=-4 \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases} \begin{cases} a=-\dfrac{5}{7} \\ b=-\dfrac{17}{7} \\ c=\dfrac{15}{7} \end{cases}$ **17)** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-2 \\ t=1 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=2 \\ t=5 \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-3 \\ d=2 \end{cases} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \\ d=-4 \end{cases}$

4. SISTEMI RISOLUBILI CON ARTIFICI VARI O FATTORIZZAZIONI

1) $\begin{cases} x^3y^3+x^2y^2-16xy=16 \\ y-x+2=0 \end{cases}$ *La prima equazione è caratterizzata dal "blocco" xy. Poniamo dunque $xy=z$ e determineremo i valori di xy.*

$x^3y^3+x^2y^2-16xy=16$ $\boxed{xy=z}$ $z^3+z^2-16z=16$ $(z+1)(z^2-16)=0$ $\boxed{z=-1;\ z=\pm 4}$

$\begin{cases} xy=-1 \\ y-x+2=0 \end{cases}$ ... $\begin{cases} y=x-2 \\ (x-1)^2=0;\quad x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} xy=4 \\ y-x+2=0 \end{cases}$ ... $\begin{cases} y=x-2 \\ x=1\pm\sqrt{1+4}=1\pm\sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ y=1-\sqrt{5}-2=-1-\sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1+\sqrt{5} \\ y=1+\sqrt{5}-2=-1+\sqrt{5} \end{cases}$

$\begin{cases} xy=-4 \\ y-x+2=0 \end{cases}$ ... $\begin{cases} y=x-2 \\ x=1\pm\sqrt{1-4} \end{cases}$ *imp. in* $\mathbb{R}$

Le soluzioni reali del sistema dato sono dunque le tre coppie:

$\boxed{(1,-1)}$ *soluzione "doppia"*; $\boxed{(1-\sqrt{5},\ -1-\sqrt{5})}$; $\boxed{(1+\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5})}$

2) $\begin{cases} 3x^2+3y^2+xy=17 \\ x+y-2xy=-1 \end{cases}$ *Questo è un sistema nel quale è possibile far comparire esclusivamente i due blocchi $x+y$, xy*

$\begin{cases} 3(x^2+y^2)+xy=17 \\ (x+y)-2xy=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\left[(x+y)^2-2xy\right]+xy=17 \\ (x+y)-2xy=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3(x+y)^2-6xy+xy=17 \\ (x+y)-2xy=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2-5xy=17 \\ (x+y)-2xy=-1 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x+y=s \\ xy=p \end{matrix}}$ $\begin{cases} 3s^2-5p=17 \\ s-2p=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s=2p-1 \\ 3(2p-1)^2-5p=17 \end{cases}$

$3(4p^2-4p+1)-5p=17$; ... $p_{1,2}=\begin{cases} -7/12 \\ 2 \end{cases}$

$\begin{cases} p=2 \\ s=2p-1=4-1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}}$ $\boxed{\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}}$

$\begin{cases} p=-7/12 \\ s=2p-1=-7/6-1=-13/6 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=-7/12 \\ x+y=-13/6 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{-13\pm\sqrt{253}}{12} \\ y=\dfrac{-13\mp\sqrt{253}}{12} \end{cases}}$

3) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ x^2+x+2y=24 \end{cases}$ *Se fattorizziamo il primo membro della prima equazione, potremo spezzare il sistema dato in una coppia di sistemi più semplici.*

$\begin{cases} (x+2y)(x-2y)=0 \\ x^2+x+2y=24 \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y=0 \\ x^2+x+2y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2y \\ 4y^2-2y+2y=24;\ y^2=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2y \\ y=\pm\sqrt{6} \end{cases}$

$\boxed{\begin{cases} x=-2y=-2\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}}$ $\boxed{\begin{cases} x=-2y=2\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}}$

$\begin{cases} x-2y=0 \\ x^2+x+2y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y \\ 4y^2+2y+2y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y \\ y=2 \vee y=-3 \end{cases}$

$\boxed{\begin{cases} x=2y=4 \\ y=2 \end{cases}}$ $\boxed{\begin{cases} x=2y=-6 \\ y=-3 \end{cases}}$

ESERCIZI Correzioni ⇨

4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=11 \\ xy+xz+yz=-1 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-y+z=a \\ x-3y+2z+1=0 \\ x^2+z^2=2(y^2+1) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y+xy^2=0 \\ x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y-6z=0 \\ x^2+y^2+36z^2=56 \\ xyz=8 \end{cases}$

SOLUZIONI

4) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=a+1 \\ y=a \\ z=a-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=(a-3)/3 \\ y=(5a+6)/3 \\ z=(7a+9)/3 \end{cases}$

6) $\left(0,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$

7) $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \\ z=-2/3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \\ z=-2/3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-6 \\ y=4 \\ z=-1/3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=-6 \\ z=-1/3 \end{cases}$

5. ESERCIZI SUI SISTEMI DI GRADO SUP. AL 1° Correzioni (numeri dispari) ⇨

8) $\begin{cases} 3x-2(y+4)=0 \\ x^2+y^2=xy+7 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} \frac{x}{4}=\frac{y}{3} \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x-y+1=0 \\ (x+y)^2=(x-y)^2+24 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+2ab+3b^2=8 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{x-1}{y} \\ 3(x-1)=2y \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} u(v+1)+1=v^2 \\ 2v-u=3 \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} \frac{a}{b}=2 \\ a+a^2+b+b^2=14 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x=y+1 \\ x^2=y^3+1 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x+y=13/12 \\ xy=1/4 \end{cases}$ **17)** $\begin{cases} x+y=2\sqrt{5} \\ xy=2 \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ 16xy=1 \end{cases}$ **19)** $\begin{cases} x+y=xy-56 \\ xy=72 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=14 \end{cases}$ **21)** $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=4\sqrt{2} \end{cases}$ **22)** $\begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=65/4 \end{cases}$ **23)** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=1 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=19 \end{cases}$ **25)** $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a-c=1 \\ ab+ac+bc=2 \end{cases}$ **26)** $\begin{cases} 2x-y=3 \\ y-2z=1 \\ xy+z^2=0 \end{cases}$ **27)** $\begin{cases} ab+1=0 \\ ac+2=0 \\ bc=a+b+c \end{cases}$

28) $\begin{cases} x^2y^2=xy \\ x+y=2 \end{cases}$ **29)** $\begin{cases} (x+y)^2=6xy-x-y \\ 2x+2y=3xy \end{cases}$ **30)** $\begin{cases} x^4y^4+x^2y^2=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ **31)** $\begin{cases} 1/x+1/y=6 \\ 1/x^2+1/y^2=18 \end{cases}$

32) $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ x^2-y^2=33 \end{cases}$ **33)** $\begin{cases} xy+x=35 \\ xy+y=36 \end{cases}$ **34)** $\begin{cases} 2x-y=9 \\ 9x^2-y^2=143 \end{cases}$ **35)** $\begin{cases} 3x-y=13 \\ 9x^2-y^2=143 \end{cases}$ **36)** $\begin{cases} t^2=z \\ t=z^2 \end{cases}$

37) $\begin{cases} x^2+x^2y=2 \\ x^2-xy^2=2 \end{cases}$ **38)** $\begin{cases} x^2+y^2+4x+7y=4 \\ x^2+y^2+2x+3y=4 \end{cases}$ **39)** $\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2=9 \\ 3y^2-2z^2=1 \\ 3x^2+4y^2=16 \end{cases}$ **40)** $\begin{cases} (x-y)(x-2y)=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

41) Una radice quadrata del numero complesso $a+bi$ è un altro numero complesso $c+di$, tale che $(c+di)^2=a+bi$. Ma l'uguaglianza $(c+di)^2=a+bi$ equivale a $c^2-d^2+2cdi=a+bi$ e sarà dunque verificata qualora i due coefficienti REALI c, d soddisfino il sistema $\begin{cases} c^2-d^2=a \\ 2cd=b \end{cases}$.

Ciò premesso, determina le radici quadrate di: I) $28-96i$ II) $4+2i$ (*troverai valori "brutti"*! ☺)

SOLUZIONI

8) $(2,-1)\ \left(\frac{18}{7},-\frac{1}{7}\right)$ **9)** $(4,3)\ (-4,-3)$ **10)** $(-3,-2)\ (2,3)$ **11)** $(2,-2)\ (-2,2)$

12) $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$ ~~$(1,0)$~~ NON ACC. **13)** $(1,2)\ (-5,-1)$ **14)** $(-4,-2)\ \left(\frac{14}{5},\frac{7}{5}\right)$ **15)** $(1,0)\ (3,2)\ (0,-1)$

16) $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)\ \left(\frac{3}{4},\frac{1}{3}\right)$ **17)** $\begin{cases} x=\sqrt{5}\pm\sqrt{3} \\ y=\sqrt{5}\mp\sqrt{3} \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} x=1/4 \\ y=1/4 \end{cases}$ **19)** impossibile (in $\mathbb{R}$)

20) $\begin{cases} x=2\pm\sqrt{3} \\ y=2\mp\sqrt{3} \end{cases}$ **21)** $\left(\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$ $\left(3\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ **22)** $(1/2,4)\ (4,1/2)$ $(-1/2,-4)\ (-4,-1/2)$ **23)** $(0,1)\ (1,0)$

24) $(1,3,3)\ (3,3,1)$ **25)** $(1,2,0)\ (2,0,1)$ **26)** $(1,-1,-1)\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ **27)** $(-1,1,2)\left(2,-\frac{1}{2},-1\right)$

28) $(0,2)\ (2,0)\ (1,1)$ **29)** $(0,0)\ (1,2)\ (2,1)$ **30)** $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$ **31)** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

32) $(7,4)\ (-7,4)$ $(7,-4)\ (-7,-4)$ **33)** $(5,6)\ (-7,-6)$ **34)** $(4,-1)\ \left(-\frac{56}{5},-\frac{157}{5}\right)$ **35)** $(4,-1)$

36) $(0,0)$ $(1,1)$ **37)** $(\sqrt{2},0)$ $(-\sqrt{2},0)$ $(-1,1)$ **38)** $(-2,1)$ $\left(\frac{8}{5},-\frac{4}{5}\right)$ **39)** $x=\pm2$ $y=\pm1$ $z=\pm1$ *da cui* 8 *soluzioni* **40)** $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ $(\pm2,\pm1)$

41) I) $8-6i,\ -8+6i$

II) $\sqrt{\sqrt{5}+2}+i\sqrt{\sqrt{5}-2}$ $-\sqrt{\sqrt{5}+2}-i\sqrt{\sqrt{5}-2}$

Problemi geometrici da risolvere con un sistema di grado superiore al primo: pagine 256 e 257

DISEQUAZIONI

1. LA "NUMBER LINE"

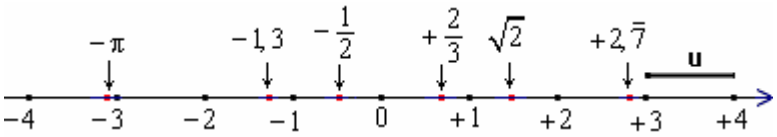
Il termine inglese "number line" ("*linea numerica*", "*linea dei numeri*") indica una retta, dotata di
a) orientamento b) origine c) unità di misura, sulla quale vengono rappresentati i numeri reali.

Vi è una **corrispondenza biunivoca** fra l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (razionali+irrazionali) e l'insieme dei punti della numb*er line*:

- ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto (detto "l'immagine" di quel numero);
- e ad ogni punto della *number line* corrisponde uno e un solo numero reale ("l'ascissa" di quel punto).

In ogni intervallino, anche piccolissimo, della "number line", troviamo sempre infiniti punti con ascissa razionale ed infiniti altri punti con ascissa irrazionale.

In lingua italiana viene di norma denominata "**asse delle ascisse**", locuzione che però tende a richiamarci un'idea di "orizzontalità", mentre non è detto che una *number line* debba essere orizzontale: ecco perché preferiamo il termine inglese.



Un asse delle *ordinate*, in un riferimento cartesiano, altro non è che una *number line* disposta (nella maggior parte dei casi) *verticalmente* rispetto all'osservatore.

2. INTERVALLI

Si chiamano "**intervalli**" **particolari insiemi numerici** (vedi schema seguente).
Gli intervalli possono essere: **chiusi, aperti, semiaperti**; possono essere **limitati o illimitati**.

Notare **l'uso delle parentesi**:

- parentesi **QUADRA** = **estremo COMPRESO**;
- parentesi **TONDA** = **estremo ESCLUSO**

Certi testi al posto della tonda usano la "quadra voltata di schiena" e quindi, ad es., al posto di $[a,b)$ scrivono $[a,b[$

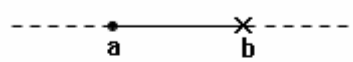
Intervallo chiuso di estremi a e b:
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \ / \ a\le x\le b\}$



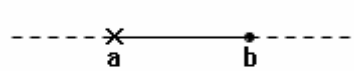
Intervallo aperto di estremi a e b:
$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \ / \ a< x< b\}$



Intervallo di estremi a e b, chiuso a sinistra e aperto a destra:
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \ / \ a\le x< b\}$



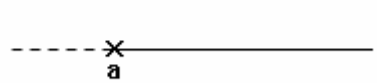
Intervallo di estremi a e b, aperto a sinistra e chiuso a destra:
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \ / \ a< x\le b\}$



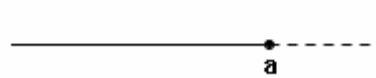
Intervallo chiuso illimitato superiormente:
$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x\ge a\}$



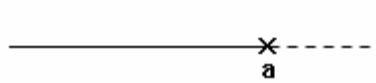
Intervallo aperto illimitato superiormente:
$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x> a\}$



Intervallo chiuso illimitato inferiormente:
$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}/x\le a\}$



Intervallo aperto illimitato inferiormente:
$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}/x< a\}$



Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$:

- contiene il 4;
- contiene tutti i numeri, **NON SOLO** (occhio!) quelli interi **MA ANCHE** quelli "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- NON contiene l'8.

Anche l'intero insieme $\mathbb{R}$ si può pensare come un intervallo (illimitato sia inferiormente che superiormente):

$$\boxed{\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$$

3. PROPRIETA' DELLE DISUGUAGLIANZE

Aggiungendo, o togliendo,
da entrambi i membri di una disuguaglianza,
uno stesso numero,
si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso:

$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a<b \Leftrightarrow a+c<b+c \\ a<b \Leftrightarrow a-c<b-c \end{cases}$

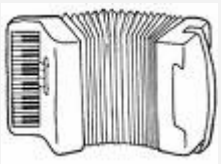
$2<6$
$2+5<6+5$
$2-5<6-5$

Sulla *number line*:
TRASLAZIONE (NOTA 1) ⇨

Moltiplicando, o dividendo,
entrambi i membri di una disuguaglianza,
per uno stesso numero POSITIVO,
si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso:

$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall c \in (0,+\infty) \quad \begin{cases} a<b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c \\ a<b \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$

$1<3 \quad \boxed{\cdot 2} \quad 2<6$
$-\frac{1}{3}<1 \quad \boxed{\cdot 3} \quad -1<3$
$-15>-20 \quad \boxed{\cdot \frac{1}{5}} \quad -3>-4$



Sulla *number line*:
DILATAZIONE O CONTRAZIONE,
"EFFETTO FISARMONICA" CON
L'ORIGINE CHE RIMANE FERMA (NOTA 2) ⇨

Se due numeri sono disuguali,
i loro opposti sono disuguali
in senso contrario:

$\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a<b \Leftrightarrow -a>-b$

$2<3 \quad -1<4 \quad -3>-5$
$-2>-3 \quad 1>-4 \quad 3<5$

Sulla *number line*:
SIMMETRIZZAZIONE RISPETTO
ALL'ORIGINE (NOTA 3) ⇨



Moltiplicando, o dividendo,
entrambi i membri di una disuguaglianza,
per uno stesso numero NEGATIVO,
si ottiene una disuguaglianza
DI VERSO CONTRARIO:

$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall c \in (-\infty, 0) \quad \begin{cases} a<b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c \\ a<b \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$

$1<3 \quad \boxed{\cdot(-2)} \quad -2>-6$
$-\frac{1}{2}<4 \quad \boxed{\cdot(-3)} \quad \frac{3}{2}>-12$
$-15>-20 \quad \boxed{\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)} \quad 3<4$



Sulla *number line*: ⇨
SIMMETRIZZAZIONE RISPETTO ALL'ORIGINE
poi DILATAZIONE O CONTRAZIONE

Due disuguaglianze dello stesso verso si possono
sommare membro a membro, ottenendosi con ciò
una disuguaglianza dello stesso verso:

$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \dfrac{\begin{matrix} a<b \\ c<d \end{matrix}}{a+c<b+d}$

$\dfrac{\begin{matrix} 8<9 \\ 2<5 \end{matrix}}{10<14} \qquad \dfrac{\begin{matrix} 1<2 \\ -7<-5 \end{matrix}}{-6<-3} \qquad \dfrac{\begin{matrix} -3>-4 \\ 1>-1 \end{matrix}}{-2>-5}$

Invece
NON è lecito
sottrarre membro a membro due disuguaglianze!

$9<11$
$6<7$
...sottraendo...
$3<4$ *vera*

$9<11$
$6<10$
...sottraendo...
~~$3<1$~~ *FALSA*!!!

Se due numeri POSITIVI sono disuguali,
i loro *reciproci* sono disuguali *in senso contrario*:

$\forall a,b \in (0,+\infty), \quad a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

$2<3$
$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$

NOTA 1 - Se due punti sulla *number line* vengono entrambi traslati, verso destra o verso sinistra, della stessa lunghezza, quello dei due che stava più a sinistra prima continuerà a stare più a sinistra anche dopo!

NOTA 2 - Se due punti sulla *number line* vengono entrambi sottoposti a questo "effetto fisarmonica", quello dei due che stava più a sinistra prima continuerà a stare più a sinistra anche dopo!

NOTA 3 - Se due punti sulla *number line* vengono entrambi simmetrizzati rispetto all'origine, quello dei due che stava più a SINISTRA prima starà più a DESTRA dopo!

4. DATA UNA DISUGUAGLIANZA, SI POSSONO ELEVARE A POTENZA I DUE MEMBRI? SI POSSONO ESTRARRE LE RADICI DEI DUE MEMBRI?

Ed ecco infine due ulteriori proprietà molto rilevanti,
che occorre padroneggiare perfettamente:

Se indichiamo con 2n+1 un numero naturale DISPARI,
e con a, b due numeri reali DI SEGNO QUALSIASI:

$$a < b \leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$$

$$a < b \leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b}$$

Se indichiamo con 2n un numero naturale PARI,
e con a, b due numeri reali POSITIVI O NULLI:

$$a < b \leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$$

$$a < b \leftrightarrow \sqrt[2n]{a} < \sqrt[2n]{b}$$

Ricordiamo (importantissimo!) che, parlando di radicali:

Se l'indice è DISPARI,

- il radicando potrà essere di segno qualsiasi: positivo, negativo o nullo
- e il risultato dell'estrazione di radice conserverà sempre lo stesso segno del radicando;

Se l'indice è PARI,

- il radicando dovrà essere positivo o nullo, altrimenti l'operazione sarebbe impossibile (NOTA)
- il risultato dell'estrazione di radice è, *per convenzione*, anch'esso positivo o nullo
  (insomma, NON è $\cancel{\sqrt{9} = \pm 3}$, bensì $\sqrt{9} = 3$)

NOTA
… a meno di sconfinare in campo complesso, cosa che, salvo esplicito avviso contrario, non si fa mai.
E d'altronde, nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi
la comunità matematica NON definisce le relazioni di < e >.

Le due proprietà di cui ci stiamo occupando possono essere riassunte come segue:

Data una disuguaglianza,
è SEMPRE lecito
(qualunque siano i segni dei due membri)
elevare ambo i membri ad esponente DISPARI,
o estrarne le radici con lo stesso indice DISPARI

Invece,

l'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza,
o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza,
sono leciti
SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI
DELLA DISUGUAGLIANZA DATA
SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.



5. LE DISEQUAZIONI E LA LORO RISOLUZIONE

Disequazione = disuguaglianza problematica:
una disequazione è una disuguaglianza, contenente un numero sconosciuto, "incognito" (generalmente indicato con *x*), che ci chiede di determinare per quali valori di *x*, ammesso che esistano, la disuguaglianza stessa è verificata.

Le proprietà delle disuguaglianze, esposte nei due paragrafi precedenti, consentono di stabilire che **nella risoluzione di una DISEQUAZIONE (che consiste poi nel sostituire la disequazione di partenza con altre via via più semplici, ma sempre equivalenti a quella data, ossia aventi le stesse soluzioni di quella data) noi possiamo effettuare tutti i passaggi che siamo già abituati a svolgere su di un'*EQUAZIONE*, con**

♥ **DUE SOLE IMPORTANTI AVVERTENZE:**

a) **quando vogliamo cambiare tutti i segni (= moltiplicare per –1), o comunque moltiplicare o dividere ambo i membri per uno stesso numero NEGATIVO, dobbiamo ricordarci di CAMBIARE IL VERSO della disequazione**

b) *mentre* l'elevamento ad esponente dispari, o l'estrazione di radice con indice dispari, è un passaggio sempre lecito in una disequazione, *invece* **l'elevamento ad esponente pari, o l'estrazione di radice con indice pari, è un passaggio effettuabile soltanto a patto che i due membri siano entrambi positivi** (≥ 0) per ogni valore della variabile, o comunque a patto di riferirsi esclusivamente ai valori di x che rendono positivi (≥ 0) entrambi i membri.

6. LA RISOLUZIONE DI UNA DISEQUAZIONE DI 1° GRADO

Esempio:

$\frac{x-4}{2} - x < \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ — Faccio il denominatore comune, lo stesso da entrambe le parti

$\frac{3x-12-6x}{6} < \frac{2x+3}{6}$ — Ora manderò via i due denominatori uguali.
E' come moltiplicare per 6 ambo i membri: $\cancel{6}\cdot\frac{3x-12-6x}{\cancel{6}} < \frac{2x+3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6}$

$3x-12-6x < 2x+3$ — Applico la "regola del trasporto":
è possibile spostare un termine da un membro all'altro, cambiandolo però di segno.
Ad esempio, trasportare $2x$ dal secondo membro al primo, mutandolo in $-2x$,
è lecito perché è come sottrarre $2x$ da entrambi i membri:
$3x-12-6x \ \cancel{-2x} < \cancel{2x}+3 \ \cancel{-2x}$

$3x-6x-2x < 3+12$ — Faccio i calcoli

$-5x < 15$ — Essendo negativo il coefficiente di x, **mi conviene cambiare i segni**: **ma così facendo, devo ricordarmi di cambiare anche il verso.**
Infatti: se due numeri sono disuguali, i loro opposti saranno disuguali IN SENSO CONTRARIO; o anche: cambiare i segni è come moltiplicare per il numero NEGATIVO -1 (NOTA 1)



$+5x > -15$ — Divido ambo i membri per il coefficiente di x, che è 5.
Il verso resta inalterato, perché divido per un numero POSITIVO.
$\frac{\cancel{+5}x}{\cancel{5}} > \frac{-15^{3}}{\cancel{5}}$

$x > -\frac{15^{3}}{\cancel{5}}$ — Ecco fatto! Le soluzioni sono dunque tutti i numeri reali (interi, razionali, irrazionali) maggiori di -3 (NOTA 2).
In forma insiemistica, possiamo dire che l'insieme S delle soluzioni è $S = (-3, +\infty)$

♥ NOTA 1 - Riflettiamo sul motivo per cui il passaggio ci porta da una disequazione ad un'altra ad essa EQUIVALENTE, cioè con le medesime soluzioni:
- se, per un certo valore di x, si ha $-5x < 15$, allora, per quello stesso valore di x, si avrà anche $5x > -15$;
- e viceversa, se, per un certo valore di x, si ha $5x > -15$, allora, per lo stesso valore, si avrà pure $-5x < 15$.

♥ NOTA 2 - Prova a SOSTITUIRE nella disequazione iniziale, al posto di x, il valore -2; poiché si tratta di un valore maggiore di -3, vedrai che la disuguaglianza sarà verificata. Altrettanto, ad esempio, con $x = 12$ o con $x = 0$.
Invece (provaci!) con $x = -4$ o $x = -3$ la disuguaglianza risulterà falsa.

ESERCIZI a pagina 144

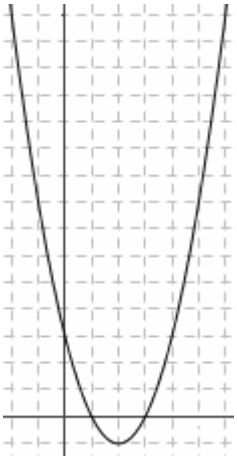
7. LO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO E LA RISOLUZIONE DI UNA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO

"STUDIARE IL SEGNO" DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO
significa chiedersi per quali valori della variabile il trinomio

- **assume valore positivo;**
- **si annulla;**
- **assume valore negativo**

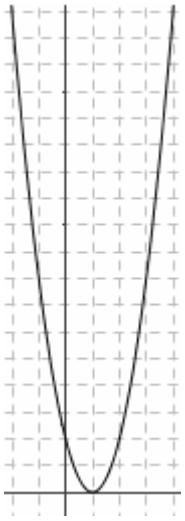
Ecco qui di seguito i grafici di alcuni trinomi di 2° grado, pensati come funzioni (*l'unità di misura è 1 quadretto*):

x	y
-5	48
-4	35
-3	24
-2	15
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8



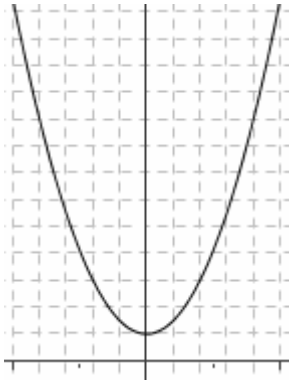
$y = x^2 - 4x + 3$

x	y
-5	72
-4	50
-3	32
-2	18
-1	8
0	2
1	0
2	2
3	8
4	18
5	32



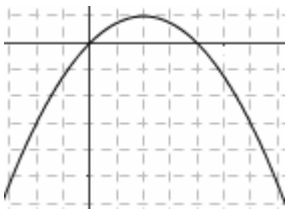
$y = 2x^2 - 4x + 2$

x	y
-5	13,5
-4	9
-3	5,5
-2	3
-1	1,5
0	1
1	1,5
2	3
3	5,5
4	9
5	13,5



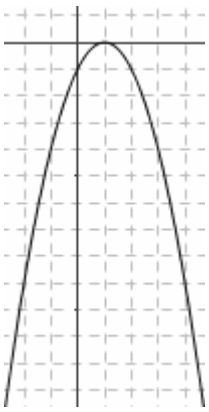
$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

x	y
-5	-11,25
-4	-8
-3	-5,25
-2	-3
-1	-1,25
0	0
1	0,75
2	1
3	0,75
4	0
5	-1,25



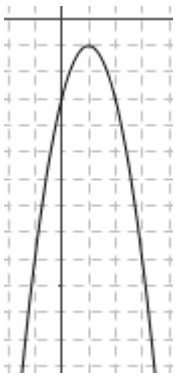
$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$

x	y
-5	-36
-4	-25
-3	-16
-2	-9
-1	-4
0	-1
1	0
2	-1
3	-4
4	-9
5	-16



$y = -x^2 + 2x - 1$

x	y
-5	-73
-4	-51
-3	-33
-2	-19
-1	-9
0	-3
1	-1
2	-3
3	-9
4	-19
5	-33



$y = -2x^2 + 4x - 3$

Come avevamo già avuto modo di evidenziare in precedenza,
il grafico di un trinomio di 2° grado, pensato come una funzione,
è costituito da una curva che ha un tipico andamento
"scendi-poi-sali", oppure "sali-poi-scendi",
chiamata "**parabola**".

Quando il **coefficiente di x^2** nel trinomio è **positivo**,
la parabola ha la **concavità** (la parte "cava")
rivolta verso l'alto →



mentre se il **coefficiente di x^2** è **negativo**,
la parabola ha la **concavità**
rivolta verso il basso →



Lo studio del segno di un trinomio di 2° grado assegnato ax^2+bx+c
si effettuerà disegnando "approssimativamente" la parabola $y=ax^2+bx+c$
che rappresenta il grafico del trinomio dato, pensato come funzione,
poi andando a vedere per quali valori di x la y corrispondente
(ossia, il valore assunto dal trinomio) è positiva, nulla, negativa.



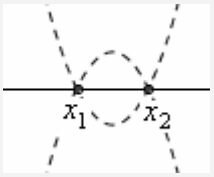
Ora, **per tracciare approssimativamente la parabola** in questione **basterà**:

♪ **stabilire se la sua concavità è rivolta verso l'alto oppure verso il basso,**
semplicemente **osservando il segno del coefficiente di x^2** nel trinomio;



$a>0$ **$a<0$**

♫ **stabilire se la parabola interseca l'asse x,**
e, in caso affermativo, DOVE lo interseca:
ma **ciò equivale a** chiedersi per quali valori di x risulta $y=0$,
cioè a **risolvere l'equazione $ax^2+bx+c=0$**
(detta "equazione associata" al trinomio considerato).



Studiamo, ad esempio, il segno del seguente trinomio di 2° grado: $\boxed{x^2-8x+12}$

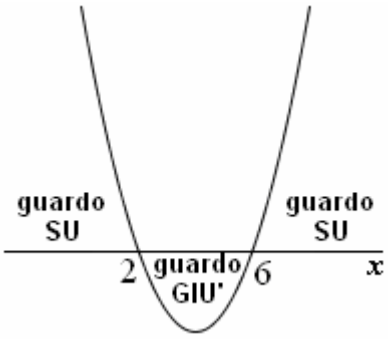
Si tratta di tracciare approssimativamente il grafico della parabola $y=x^2-8x+12$.

♪ Di essa sappiamo che ha la concavità rivolta verso l'alto, perché il coefficiente di x^2 è $1>0$.

♫ Ora stabiliremo per quali valori di x la parabola interseca l'asse orizzontale,
risolvendo l'equazione $x^2-8x+12=0$.

Con la formula, o per scomposizione in fattori, si trova $x=2 \vee x=6$.

Allora il grafico sarà (ci interessa solo una "bozza"!)
il seguente:

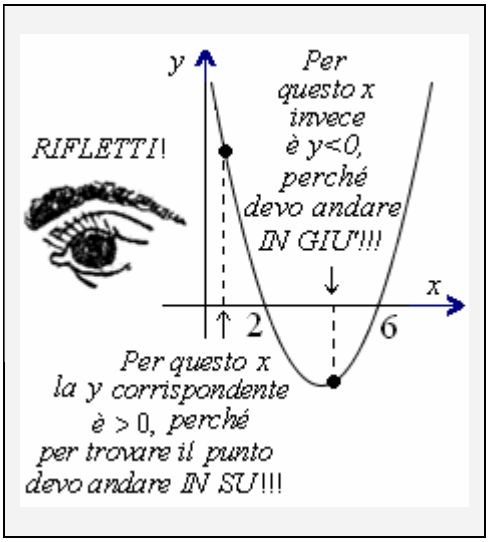


♥ Immagina di essere una FORMICHINA
che cammina sull'asse delle x.
I valori di x per cui è $y>0$ sono quelli
per i quali il punto sulla parabola
lo si vede guardando verso l'alto.

… e osservando il grafico
si traggono subito
le conclusioni (y esprime
il valore del trinomio):

$y>0$ *per* $x<2 \vee x>6$
$y=0$ *per* $x=2 \vee x=6$
$y<0$ *per* $2<x<6$

Ad es., con $x=5$
(5 è compreso fra 2 e 6)
il trinomio
dovrebbe assumere
valore negativo.
Controlla, sostituendo!
Troverai che con $x=5$
il trinomio vale -3



ESERCIZI. Studiare il segno dei trinomi seguenti (risposte subito a fianco):

1) $-x^2-x+20$
$y>0$ *per* $-5<x<4$
$y=0$ *per* $x=-5 \vee x=4$
$y<0$ *per* $x<-5 \vee x>4$

2) $2x^2-x$
$y>0$ *per* $x<0 \vee x>1/2$
$y=0$ *per* $x=0 \vee x=1/2$
$y<0$ *per* $0<x<1/2$

3) $x^2-14x+49$
$y>0$ *per* $x \neq 7$
$y=0$ *per* $x=7$
$y<0$ *per nessun valore di* x

4) x^2-x+1
$y>0$ *per tutti i valori di* x
$y=0$ *per nessun valore di* x
$y<0$ *per nessun valore di* x

5) $49-x^2$
$y>0$ *per* $-7<x<7$
$y=0$ *per* $x=-7 \vee x=7$
$y<0$ *per* $x<-7 \vee x>7$

6) $x^2-20x+64$
$y>0$ *per* $x<4 \vee x>16$
$y=0$ *per* $x=4 \vee x=16$
$y<0$ *per* $4<x<16$

7) $x^2-16x+64$
$y>0$ *per* $x \neq 8$
$y=0$ *per* $x=8$
$y<0$ *per nessun valore di* x

8) $x^2-12x+64$
$y>0$ *per tutti i valori di* x
$y=0$ *per nessun valore di* x
$y<0$ *per nessun valore di* x

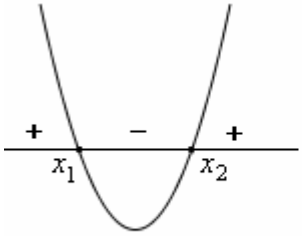
9) $2x^2+2x-24$
$y>0$ *per* $x<-4 \vee x>3$
$y=0$ *per* $x=-4 \vee x=3$
$y<0$ *per* $-4<x<3$

10) $-x^2+2x+1$
$y>0$ *per* $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$
$y=0$ *per* $x=1-\sqrt{2} \vee x=1+\sqrt{2}$
$y<0$ *per* $x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2}$

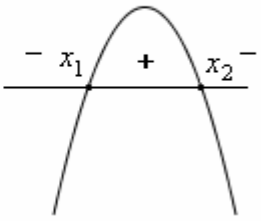
Volendo, si possono enunciare le seguenti **REGOLE**:

Un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c con $\boxed{\Delta>0}$ ha **segno concorde con quello del suo 1° coeff. per valori** di x **esterni** all'intervallo delimitato dalle due soluzioni dell'equazione associata (cioè, per $x<x_1 \vee x>x_2$) mentre ha **segno discorde** rispetto a quello del suo 1° coefficiente **per valori interni** (cioè, per $x_1<x<x_2$)

$\Delta>0,\ a>0$

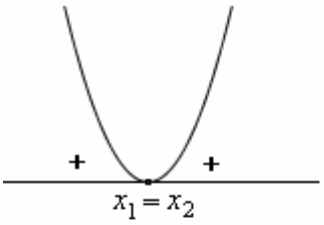


$\Delta>0,\ a<0$

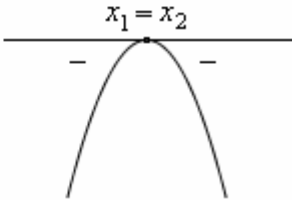


Un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c con $\boxed{\Delta=0}$ ha **quasi sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, con una sola eccezione**: per $x=x_1$, con $x_1\ (=x_2)$ soluzione dell'equazione associata, il trinomio si annulla.

$\Delta=0,\ a>0$

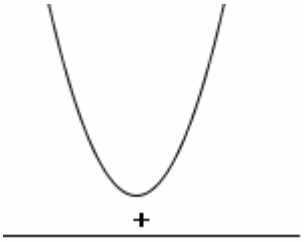


$\Delta=0,\ a<0$

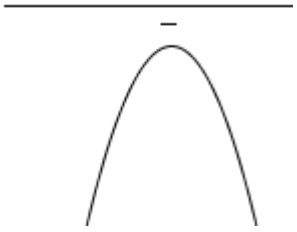


Un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c con $\boxed{\Delta<0}$ ha **sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, senza eccezioni.**

$\Delta<0,\ a>0$



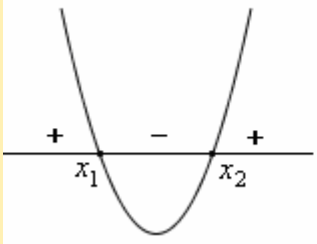
$\Delta<0,\ a<0$



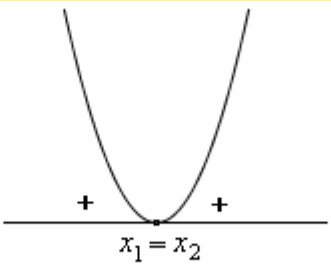
Quando si risolve una disequazione di 2° grado, si ha sempre la possibilità di lavorare con un trinomio col 1° coefficiente positivo: infatti, se così non fosse, si potrebbero sempre cambiare segni e verso. E' perciò molto comodo, oltre che conoscere bene le regole sopra riportate, tenere anche presente cosa dicono **LE STESSE REGOLE**, quando vengono **PARTICOLARIZZATE AL CASO a > 0** :

♥ **UN TRINOMIO DI 2° GRADO ax^2+bx+c CON 1° COEFFICIENTE POSITIVO ($\boxed{a>0}$)**

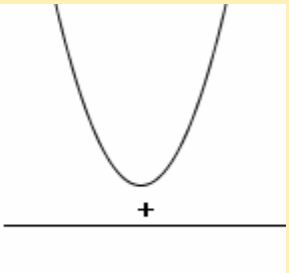
se ha $\boxed{\Delta>0}$ è **positivo per valori esterni** $x<x_1 \vee x>x_2$ e **negativo per valori interni** $x_1<x<x_2$



se ha $\boxed{\Delta=0}$ è **positivo per ogni valore di *x*, con una sola eccezione**: è nullo per $x=x_1\ (=x_2)$



se ha $\boxed{\Delta<0}$ è **positivo per ogni valore di *x*, senza eccezioni**.





Rimpiazzando, in questo schema, "positivo/negativo" con "concorde/discorde, in segno, rispetto al segno del 1° coefficiente", ecco che si torna alle regole generali.

Una DISEQUAZIONE DI 2° GRADO ci chiede di rispondere a uno solo dei tre punti in cui consiste lo studio del segno di un trinomio di 2° grado. Vediamo alcuni ESEMPI SVOLTI.

$\boxed{x^2-7x+10<0}$

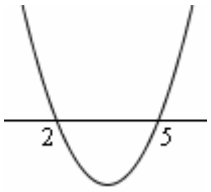
Equazione associata:

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$

$x=2 \vee x=5$

Il grafico della parabola $y=x^2-7x+10$ è il seguente ($a>0$, quindi concavità verso l'alto):



La disequazione (che ha verso $<$) è perciò verificata per: $\boxed{2<x<5}$

$\boxed{2x+1<8x^2}$

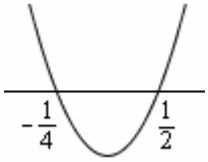
$-8x^2+2x+1<0$

1° coefficiente negativo: conviene cambiare segni e verso

$8x^2-2x-1>0$

Penso all'equazione associata e la risolvo: $x_{1,2}=\ldots=\begin{cases}-1/4\\1/2\end{cases}$

Il grafico della parabola $y=8x^2-2x-1$ è:



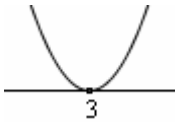
La disequazione (il cui verso *definitivo* è $>$) risulta quindi verificata per: $\boxed{x<-1/4 \vee x>1/2}$

$\boxed{x^2-6x+9>0}$

L'equazione associata è: $x^2-6x+9=0$

con le soluzioni $x_1=x_2=3$

Il grafico della parabola $y=x^2-6x+9$ è:



La disequazione è perciò verificata per $\boxed{x\neq 3}$

Anche (meglio!) con ragionamento più diretto:

$x^2-6x+9>0 \leftrightarrow (x-3)^2>0$

La disequazione ci chiede dunque di stabilire per quali valori di x il quadrato $(x-3)^2$ è strettamente positivo.

Ma un quadrato è **quasi sempre** strettamente positivo: l'unica eccezione si ha quando il quadrato si annulla, il che avviene quando si annulla la sua base.

Perciò la disequazione proposta è verificata "quasi sempre", purché sia $x-3\neq 0,\ x\neq 3$.

$\boxed{x<\dfrac{x^2+5}{4}}$

$4x<x^2+5$

$-x^2+4x-5<0$

$x^2-4x+5>0$

Passando all'equazione associata, si vede che è $\Delta<0$ per cui tale equazione è impossibile.

Ciò significa che non esiste nessun valore di x per il quale si abbia $y=x^2-4x+5=0$:

la parabola $y=x^2-4x+5$ è priva di intersezioni con l'asse delle x e il suo grafico è



La disequazione è perciò verificata $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}}$

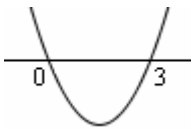
$\boxed{x^2>3x}$

$x^2-3x>0$

$x(x-3)>0$

Mutando ora nella nostra mente il $>$ in $=$ per pensare all'equazione associata, vediamo che le soluzioni di questa sono $x=0 \vee x=3$

Grafico:



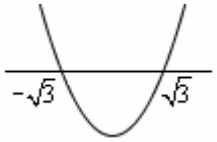
Soluzioni della disequazione:

$\boxed{x<0 \vee x>3}$

$\boxed{x^2>3}$

$x^2-3>0$

Eq. associata: $x^2-3=0$, con le soluzioni $x=\pm\sqrt{3}$.



Soluzioni della disequazione:

$\boxed{x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3}}$

NOTA

Sarebbe stato possibile risolvere questa disequazione anche in un altro modo, sullo stile dell'Esempio 1 di pagina 148

$\boxed{x^2+3>0}$

Si vede subito che la disequazione è sempre verificata, $\forall x\in\mathbb{R}$. Infatti il 1°membro è la somma di due termini, il primo dei quali è ≥ 0 per ogni x e il secondo dei quali è una costante >0. E' quindi evidente che la somma di tali due termini sarà >0 per ogni x.

$$\underbrace{\overbrace{x^2}^{\geq 0,\forall x}+\overbrace{3}^{>0}}_{>0,\ \forall x}$$

Volendo risolvere in modo "standard", si trova un'eq. ass. impossibile, quindi un grafico "tutto sopra" rispetto all'asse x, e la conclusione è la medesima: disequazione verificata $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}}$

8. SIGNIFICATO DEI SIMBOLI ≤ *(minore o uguale di)*, ≥ *(maggiore o uguale di)*

$a \le b$ significa : $a < b$ oppure $a = b$ $\quad \boxed{a \le b \leftrightarrow a < b \vee a = b}$ $\quad \le$ equivale a "non maggiore";

$a \ge b$ significa : $a > b$ oppure $a = b$ $\quad \boxed{a \ge b \leftrightarrow a > b \vee a = b}$ $\quad \ge$ equivale a "non minore"

Ad es., l'insieme $\{x \in \mathbb{R} / \ x \le 4\}$ è formato da tutti i numeri minori di 4, più anche il numero 4.

Sono corrette (anche se appaiono strane) le scritture $3 \le 4$ e $4 \le 4$,
mentre sarebbe, ovviamente, SBAGLIATO scrivere ~~$5 \le 4$~~

SUGGERIMENTO IMPORTANTE

♥ **Di fronte a una disequazione di 2° grado col ≤, oppure il ≥, può essere utile pensare dapprima alla disequazione STRETTA (cioè, quella solo col < o col >), per poi aggiungere all'insieme delle soluzioni così trovate anche quei valori che rendono il 1° membro uguale al 2°.**
Questa indicazione è ancora più efficace per le disequazioni di grado superiore al 2° o fratte.
Invece per le disequazioni di 1° grado basta procedere "meccanicamente",
semplicemente ricordando che, **nel caso il verso debba cambiare, il ≤ diventa ≥, e viceversa**:
ad esempio $2x \le 3x+4$; $2x-3x \le 4$; $-x \le 4$; $x \ge -4$

9. ESERCIZI

❑ ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 1° GRADO

1) $3(x-5) < 2$ 2) $x+7 < 4(x-1)$ 3) $(x+2)^2 > (x-1)^2 + 15$ 4) $\frac{x-1}{4} + \frac{2x-3}{2} < 3x$ 5) $\frac{2}{3}(3-x) - x > 0$

6) $2x - \frac{4x-3}{5} \le 1$ 7) $3(x+1) \le 5(x+7)$ 8) $\frac{2x}{5} - \frac{x-1}{2} \ge -\frac{3}{4}x$ 9) $\frac{x}{3} < \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}(x-1)$ 10) $x(x+1) > x(x+4)$

11) $4(2x+1) - 3x < 5(x-2)$ 12) $(x-1)^2 \le (x+1)^2$ 13) $226(x-8) > 0$ 14) $x\sqrt{2} - x\sqrt{3} > \sqrt{6}$ 15) $x < x\sqrt{2}$

16) $x < x\sqrt{2} - 1$ 17) $0{,}0004x - 0{,}003 < 0{,}0005x$ 18) $(2x-1)^2 < 4x(x-1)$ 19) $(x+7)^2 > x(x+16) + 47$

SOLUZIONI

1) $x < \frac{17}{3}$ 2) $x > \frac{11}{3}$ 3) $x > 2$ 4) $x > -1$ 5) $x < \frac{6}{5}$ 6) $x \le \frac{1}{3}$ 7) $x \ge -16$ 8) $x \ge -\frac{10}{13}$

9) indeterminata (verificata $\forall x \in \mathbb{R}$) 10) $x < 0$ 11) impross. 12) $x \ge 0$ 13) $x > 8$ senza nessun calcolo!

14) $x < -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \ldots = -\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$ 15) $x > 0$ 16) $x > \sqrt{2} + 1$ 17) $x > -30$ 18) imp. 19) $x < 1$

❑ ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 2° GRADO

20) $2x^2 - 7x + 3 < 0$ 21) $x^2 - 5x + 4 > 0$ 22) $x^2 - 49 < 0$ 23) $x^2 - 4x > 0$

24) $25x^2 - 10x + 1 > 0$ 25) $2x^2 - 4x + 9 > 0$ 26) $x + 12 > x^2$ 27) $x < \frac{x^2+1}{2}$

28) $4x^2 + 1 < 0$ 29) $x^2 - 4x + 1 > 0$ 30) $x^2 + 8x + 16 > 0$ 31) $x^2 + 10x + 16 > 0$

32) $x^2 - 5 < 0$ 33) $x^2 - 2x + 2 > 0$ 34) $x^2 - 6x + 9 < 0$ 35) $x^2 + x > 0$

36) $7x > 6x^2 + 1$ 37) $x^2 - 4x + 3 > 0$ 38) $x^2 - 4x + 4 > 0$ 39) $x^2 - 4x + 5 > 0$

40) $9x > x^2$ 41) $9 > x^2$ 42) $9x^2 + 49 > 0$ 43) $9x^2 + 1 > 10x$

44) $9x^2 + 1 > -6x$ 45) $9x^2 + 1 < -3$ 46) $9x^2 > 0$ 47) $9x^2 > 9$

SOLUZIONI

20) $1/2 < x < 3$ 21) $x < 1 \vee x > 4$ 22) $-7 < x < 7$ 23) $x < 0 \vee x > 4$

24) $x \ne 1/5$ 25) $\forall x \in \mathbb{R}$ 26) $-3 < x < 4$ 27) $x \ne 1$

28) *impross.* 29) $x < 2 - \sqrt{3} \vee x > 2 + \sqrt{3}$ 30) $x \ne -4$ 31) $x < -8 \vee x > -2$

32) $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ 33) $\forall x \in \mathbb{R}$ 34) *impross.* 35) $x < -1 \vee x > 0$

36) $1/6 < x < 1$ 37) $x < 1 \vee x > 3$ 38) $x \ne 2$ 39) $\forall x \in \mathbb{R}$

40) $0 < x < 9$ 41) $-3 < x < 3$ 42) $\forall x \in \mathbb{R}$ 43) $x < 1/9 \vee x > 1$

44) $x \ne -1/3$ 45) *impross.* 46) $x \ne 0$ 47) $x < -1 \vee x > 1$

♥ Vuoi un CONSIGLIO? Almeno ogni tanto, fai qualche "esperimento", sostituendo al posto dell'incognita qualche valore preso dall'insieme delle soluzioni che hai trovato, per vedere se la disuguaglianza è vera!

❑ ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 1° e 2° GRADO

	SOLUZIONI
1) $6x^2-7x-10\geq 0$	$x\leq -5/6 \vee x\geq 2$
2) $6x^2-7x-10\leq 0$	$-5/6\leq x\leq 2$
3) $16x^2-40x+25>0$	$x\neq 5/4$
4) $16x^2-40x+25\geq 0$	$\forall x\in\mathbb{R}$
5) $16x^2-40x+25<0$	*imposs.*
6) $16x^2-40x+25\leq 0$	$x=5/4$
7) $3x^2-4x+2>0$	$\forall x\in\mathbb{R}$
8) $3x^2-4x+2\geq 0$	$\forall x\in\mathbb{R}$
9) $3x^2-4x+2<0$	*imposs.*
10) $3x^2-4x+2\leq 0$	*imposs.*
11) a) $x^2>9$ b) $x^2>9x$ c) $x^2>-9$	a) $x<-3\vee x>3$ b) $x<0\vee x>9$ c) $\forall x\in\mathbb{R}$
12) a) $9x>0$ b) $9x^2>0$ c) $9x^2>1$	a) $x>0$ b) $x\neq 0$ c) $x<-1/3\vee x>1/3$
13) a) $x^2<1$ b) $x^2<0$ c) $x^2<x$	a) $-1<x<1$ b) *imposs.* c) $0<x<1$
14) a) $5-4x^2\leq 0$ b) $5x-4x^2\leq 0$	a) $x\leq -\sqrt{5}/2\vee x\geq \sqrt{5}/2$ b) $x\leq 0\vee x\geq 5/4$
15) a) $(x+1)^2>x(x+2)$ b) $(x-1)^2>x^2+1$	a) $\forall x\in\mathbb{R}$ b) $x<0$
16) a) $(x-2)(x-6)>0$ b) $(x-2)(x-6)>5$	a) $x<2\vee x>6$ b) $x<1\vee x>7$
17) a) $(x-2)^2>0$ b) $(x-2)^2\geq 0$	a) $x\neq 2$ b) $\forall x\in\mathbb{R}$
18) a) $(x-2)^2>x$ b) $(x-2)^2+4x>0$	a) $x<1\vee x>4$ b) $\forall x\in\mathbb{R}$
19) $2-x-x^2>0$ (se vuoi, cambia segni e verso!)	$-2<x<1$
20) $(2x-1)(2x^2-x-3)\leq (2x-1)^3-4x(x-1)^2$	$x\geq 4/7$
21) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)+x+2^{-2}\geq\frac{13}{8}$	$x\leq -\frac{5}{4}\vee x\geq 1$
22) $\frac{2x-3}{6}\leq\frac{x^2}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}(x-1)$ 23) $3x^2\geq 2(4x-3)$	$\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}$
24) $(x+3)^2+(2x-3)^2\leq x+2$	*imposs.*
25) $\frac{1}{6}(x-1)-x^2<x$ 26) $\frac{x^2}{23}\geq 0$	$x<-\frac{1}{2}\vee x>-\frac{1}{3}$ $\forall x\in\mathbb{R}$
27) $\left(y+\frac{1}{6}\right)^2\geq\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2$	$-1\leq y\leq -\frac{1}{3}$
28) $4x(\sqrt{3}-x)\geq 3$ 29) $9x^2+16>24x$	$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x\neq\frac{4}{3}$
30) $(3w-2)^3-3w(3w-1)^2+3w<0$	$w<\frac{1}{3}\vee w>\frac{2}{3}$
31) $(x^2-x-2)^2-(x^2+x-2)^2+1>x(3-4x-4x^2)$	$x<-1\vee x>-\frac{1}{4}$
32) $2(-3x+1)(-3x-1)>3(2x\sqrt{2}-1)$	$x\neq\frac{\sqrt{2}}{6}$
33) $x^2-x+\sqrt{2}\leq 2$ 34) $2-x^2\geq\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$ $-\sqrt{2-\sqrt{2}}\leq x\leq\sqrt{2-\sqrt{2}}$
35) $(0{,}0002x+24)^2>0$	$x\neq -120000$
36) $347(3x-122)(4x-123)<0$	$\frac{123}{4}<x<\frac{122}{3}$
37) $a-2<a$ 38) $(b-2)^2<b^2$ 39) $(c-2)^3<c^3$	$\forall a\in\mathbb{R}$ $b>1$ $\forall c\in\mathbb{R}$

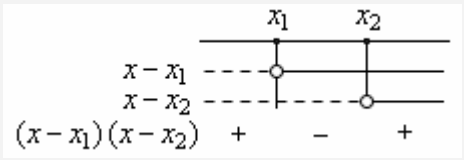
ANCORA SULLO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO

Abbiamo detto che il grafico di una funzione di 2° grado $y = ax^2 + bx + c$
è una curva che va "prima giù e poi su" oppure "prima su e poi giù", detta "parabola".
E' evidente che il discorso è generico: richiederebbe una impostazione più rigorosa,
e corredata da dimostrazioni di quanto affermato. Ciò è compito della "Geometria Analitica".

Ci limitiamo qui ad affermare che, **volendo, le regole per lo studio del segno di un trinomio di 2° grado potrebbero anche essere ricavate senza interpretazione grafica, ossia per pura via algebrica**.

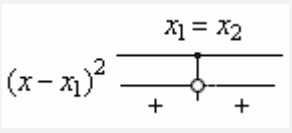
Sia infatti $ax^2 + bx + c$ un trinomio di 2° grado. Sappiamo che

1) se $\Delta > 0$, il trinomio è scomponibile in $a(x - x_1)(x - x_2)$, con x_1, x_2 soluzioni dell'equazione associata.
Ma in questo caso allora, dato che il fattore $x - x_1$
è $>, =, < 0$ a seconda che sia $x > x_1$, $x = x_1$, $x < x_1$,
e analogamente per il fattore $x - x_2$,
il prodotto $(x - x_1)(x - x_2)$
avrà, a seconda dei vari valori di x,
il segno che risulta dallo schema riportato qui a destra →
ed essendo dunque $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
se ne trae che il trinomio avrà
"**segno concorde con quello del suo primo coefficiente *a***
per valori esterni, discorde per valori interni"



tratteggio = negatività,
linea continua = positività

2) se $\Delta = 0$, il trinomio è scomponibile in $a(x - x_1)^2$, con x_1 $(= x_2)$ unica soluzione dell'equaz. associata.
Poiché ora un quadrato è sempre > 0,
con la sola eccezione di essere $= 0$ se ne è $= 0$ la base,
se ne trae che **il trinomio avrà *sempre* segno concorde**
con quello del suo primo coefficiente *a* , *con una sola eccezione*:
il trinomio infatti si annullerà per $x = x_1$, essendo x_1 $(= x_2)$
l'unica soluzione che in questo caso possiede l'equazione associata.



linea continua = positività,
pallino = annullamento

3) se, infine, $\Delta < 0$, l'equazione associata è impossibile in campo reale,
e **il trinomio non è scomponibile in campo reale**;
in questo caso però possiamo scrivere

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0}\right]$$

Siccome è $\Delta < 0$, il contenuto della parentesi quadra sarà strettamente positivo (>0)
perché somma di un termine non negativo (il quadrato) con un termine >0
$\left(-\frac{\Delta}{4a^2},\ \text{che è} > 0\ \text{perché è l'opposto del quoziente fra}\ \Delta < 0\ \text{e}\ 4a^2 > 0\right)$.
Ma il prodotto del coefficiente *a* per un numero strettamente positivo qualunque sia *x*,
ha sempre, per qualsiasi valore di *x*, lo stesso segno di *a*.

10. DISEQUAZIONI IN CUI COMPAIONO POTENZE

I) UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI, CONFRONTATA CON LO ZERO

a) $(x-7)^4 > 0$ b) $(x-7)^4 < 0$ c) $(x-7)^4 \geq 0$ d) $(x-7)^4 \leq 0$

Per risolvere queste disequazioni basta ragionare così:

una quarta potenza (più in generale: UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI)
NON PUO' MAI ESSERE NEGATIVA.
Essa è:

- **POSITIVA quando la BASE è DIVERSA DA 0;**
- **NULLA quando la BASE è UGUALE A 0.**

Perciò:

a) $(x-7)^4 > 0$ è verificata quando $x-7 \neq 0$, ossia $x \neq 7$. Insieme delle soluzioni = $S = \mathbb{R} - \{7\}$

b) $(x-7)^4 < 0$ non è mai verificata, è **impossibile**: $S = \varnothing$

c) $(x-7)^4 \geq 0$ è **sempre verificata**, per ogni x: $S = \mathbb{R}$

d) $(x-7)^4 \leq 0$ è **verificata solo per $x = 7$**. $S = \{7\}$

E' chiaro che allo stesso modo avremmo potuto procedere
se al posto dell'esponente 4 ci fosse stato un qualunque esponente PARI.

ESERCIZI

1) $(2x-1)^6 < 0$ 2) $(3x-8)^8 > 0$ 3) $(x^2-3)^4 > 0$ 4) $(6x^2-18x+5)^2 \geq 0$

5) $(4-x)^6 \leq 0$ 6) $x^{10} > 0$ 7) $(3x^2-2x-1)^2 > 0$ 8) $(3-7x)^4 < 0$ 9) $(3-7x)^4 \leq 0$

SOLUZIONI

1) impossibile 2) $x \neq 8/3$ 3) $x \neq \pm\sqrt{3}$ 4) $\forall x \in \mathbb{R}$

5) $x = 4$ 6) $x \neq 0$ 7) $x \neq -\frac{1}{3} \wedge x \neq 1$ 8) impossibile 9) $x = \frac{3}{7}$

II) UNA POTENZA CON ESPONENTE DISPARI, CONFRONTATA CON LO ZERO

e) $(x-7)^5 > 0$ f) $(x-7)^5 < 0$ g) $(x-7)^5 \geq 0$ h) $(x-7)^5 \leq 0$

Per risolvere queste disequazioni basta osservare che

una quinta potenza
(più in generale: UNA POTENZA CON ESPONENTE DISPARI)
HA SEMPRE LO STESSO SEGNO DELLA SUA BASE, ossia è:

- **positiva quando la base è positiva;**
- **negativa quando la base è negativa;**
- **nulla quando la base è nulla.**

Perciò:

e) $(x-7)^5 > 0$ è verificata quando $x-7 > 0$, ossia $x > 7$. Insieme delle soluzioni: $S = (7, +\infty)$

f) $(x-7)^5 < 0$ è verificata quando $x-7 < 0$, ossia $x < 7$. $S = (-\infty, 7)$

g) $(x-7)^5 \geq 0$ è verificata quando $x-7 \geq 0$, ossia $x \geq 7$. $S = [7, +\infty)$

h) $(x-7)^5 \leq 0$ è verificata quando $x-7 \leq 0$, ossia $x \leq 7$. $S = (-\infty, 7]$

E allo stesso modo, ovviamente, si sarebbe potuto ragionare
se al posto dell'esponente 5 avessimo trovato un qualsiasi altro esponente DISPARI.

ESERCIZI

10) $(3x-2)^5 > 0$ 11) $(4-x)^5 \geq 0$ 12) $(x^2-3)^5 > 0$ 13) $x^7 < 0$

14) $(3x^2-2x-1)^3 < 0$ 15) $(x+7)^5 \geq 0$ 16) $(x^2+7)^5 > 0$ 17) $(3x^2-2x-1)^4 \geq 0$

18) $(x^2+2x\sqrt{6}+6)^3 > 0$ 19) $(4x^2-1)^3 > 0$ 20) $(9x^2-6x+1)^3 < 0$ 21) $\left[(7x+5)^4+1\right]^3 > 0$

SOLUZIONI

10) $x > 2/3$ 11) $x \leq 4$ 12) $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$ 13) $x < 0$ 14) $-1/3 < x < 1$ 15) $x \geq -7$

16) $\forall x \in \mathbb{R}$ 17) $\forall x \in \mathbb{R}$ 18) $x \neq -\sqrt{6}$ 19) $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$ 20) impossibile 21) $\forall x \in \mathbb{R}$

III) DISEQUAZIONI RISOLUBILI ESTRAENDO UNA RADICE CON INDICE PARI

L'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza, o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza, sono leciti SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.

Infatti, indicato con 2n un intero PARI, e con a, b due numeri reali POSITIVI O NULLI, si ha:

$$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}; \qquad a < b \Leftrightarrow \sqrt[2n]{a} < \sqrt[2n]{b}$$

Invece, se due numeri che *non* sono entrambi positivi sono disuguali, *non* è detto che i loro quadrati (ad esempio) siano disuguali nello stesso senso: potrebbero esserlo, o non esserlo.

$$-2 < 3 \quad e \quad 4 < 9$$
$$-5 < 3 \quad \text{MA} \quad \cancel{25 < 9}$$
$$-8 < -5 \quad \text{MA} \quad \cancel{64 < 25}$$

Nel risolvere una disequazione mediante estrazione di radice con indice pari, ci vuole cautela!!!

♪ Innanzitutto, ribadiamolo ancora, **il passaggio è possibile solo quando i due membri sono positivi (in senso lato: ≥ 0) sempre, ossia per ogni valore di *x*;**

♫ inoltre, **è indispensabile ricordare che l'estrazione di radice con indice pari costringe, spesso, a introdurre un simbolo di valore assoluto**:
ad esempio, sappiamo (vedi pag. 31) che $\sqrt{x^2} = |x|$

Esempio 1 $\boxed{x^4 > 625}$

Possiamo estrarre le radici quarte perché i due membri sono sempre ≥ 0, $\forall x$:

$$\sqrt[4]{x^4} > \sqrt[4]{625}$$

OCCHIO ADESSO! Deve per forza intervenire il simbolo di valore assoluto, e si ottiene

$$|x| > 5$$

Ma quali sono i numeri reali il cui valore assoluto è maggiore di 5?
Il valore assoluto di un numero non è altro che la distanza dall'origine del punto che, sulla *number line*, rappresenta quel numero!
E allora

$$|x| > 5 \Leftrightarrow \boxed{x < -5 \ \vee \ x > 5}$$ (i numeri, la cui distanza dall'origine sulla *number line* è >5, sono quelli a destra del +5 ma anche quelli a sinistra del -5)

Es. 2 $\boxed{(5x-3)^4 < 16}$

$$\sqrt[4]{(5x-3)^4} < \sqrt[4]{16}$$
$$|5x-3| < 2$$
$$-2 < 5x-3 < 2$$

(i numeri il cui val. ass. è <2 sono quelli la cui "distanza dall'origine" è <2, ossia quelli compresi fra –2 e +2).

Aggiungendo ora 3 ad ogni anello della catena si ha

$$1 < 5x < 5$$

e dividendo infine per 5

$$\boxed{\frac{1}{5} < x < 1}$$

Es. 3 $\boxed{(x-7)^6 > 64}$

$$\sqrt[6]{(x-7)^6} > \sqrt[6]{64}$$
$$|x-7| > 2$$
$$x-7 < -2 \ \vee \ x-7 > 2$$
$$\boxed{x < 5 \ \vee \ x > 9}$$

Es. 4 $\boxed{(x^2-10x)^2 < 576}$

$$\sqrt{(x^2-10x)^2} < \sqrt{576}$$
$$|x^2-10x| < 24$$
$$-24 < x^2-10x < 24$$

Qui però *non* si può isolare *x* operando direttamente sulla catena. La doppia limitazione equivale a domandarsi per quali valori di *x* sono verificate *simultaneamente entrambe* le condizioni

$$-24 < x^2-10x \ (o \ anche \ x^2-10x > -24) \quad \text{e} \quad x^2-10x < 24$$

quindi a risolvere il SISTEMA $\begin{cases} x^2-10x > -24 \\ x^2-10x < 24 \end{cases}$.

La 1ª disequaz. è verificata per $x < 4 \vee x > 6$, la 2ª per $-2 < x < 12$, quindi il sistema ha per soluzioni i valori $\boxed{-2 < x < 4 \vee 6 < x < 12}$; comunque, dell'argomento si occuperà un capitolo successivo.

Es. 5 $\boxed{x^4 > -16}$

OCCHIO!!!



Qui 2° membro è negativo, perciò NON si possono estrarre le radici quarte.

Siamo *bloccati*, dobbiamo procedere diversamente.
Ma basta osservare che il risultato dell'operazione x^4 è sempre (qualunque sia *x*) positivo (≥ 0), per concludere che la disequazione proposta è $\boxed{\text{sempre verificata, } \forall x \in \mathbb{R}}$.

IV) DISEQUAZIONI RISOLUBILI ESTRAENDO UNA RADICE CON INDICE DISPARI

L'elevamento ad esponente DISPARI, o l'estrazione di radice con indice DISPARI, è un passaggio SEMPRE LECITO in una disequazione:

infatti, qualunque siano i segni dei due numeri reali a, b, valgono le doppie implicazioni

$$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} \qquad a < b \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b}$$

Esempio 1

$x^3 < 8$
$\sqrt[3]{x^3} < \sqrt[3]{8}$
$x < 2$

Esempio 2

$x^5 - 3 > 0$
$x^5 > 3$
$x > \sqrt[5]{3}$

Esempio 3

$(x-7)^3 - 27 \le 0$
$(x-7)^3 \le 27$
$x - 7 \le 3$
$x \le 10$

Esempio 4

$(x-1)^3 < -2$
$x - 1 < \sqrt[3]{-2}$
$x - 1 < -\sqrt[3]{2}$
$x < 1 - \sqrt[3]{2}$

Esempio 5

$(x^2 - x - 1)^3 > 1$
$x^2 - x - 1 > 1$
$x^2 - x - 2 > 0$
$(x+1)(x-2) > 0$
$x < -1 \vee x > 2$

ESERCIZI (se c'è la freccia, cliccando potrai vedere la correzione)

22) $x^4 > 16$ 23) $x^3 > 8$ 24) $625x^4 - 1 < 0$ 25) $625x^4 + 1 > 0$

26) $8x^3 - 1 < 0$ 27) $8x^3 + 1 < 0$ 28) $25x^4 - 49 \ge 0$ 29) $x^6 - 1 < 0$

30) $x^6 - 4 < 0$ 31) $x^6 + 4 < 0$ 32) $x^8 + 3 > 0$ 33) $x^8 - 3 > 0$

34) $(x-1)^3 < 8$ 35) $(x-1)^4 < 16$ 36) $(2x+1)^4 - 1 > 0$ 37) $(6x+1)^3 + 8 > 0$

38) $x^6 + 1 \ge 0$ 39) $8x^3 + 3 \ge 0$ 40) $8x^4 + 3 \ge 0$ 41) $x^3 + 16 \le 0$ 42) $x^4 + 16 \le 0$

43) $(x-1)^2 + (x-2)^2 > 0$ ⇨ 44) $(x-1)^3 + (x-2)^3 > 0$ ⇨ 45) $(x+1)^2 + (x^2-1)^2 \le 0$ ⇨

46) $(2x-1)^4 < 0$ 47) $(2x-1)^4 > 0$ 48) $(2x-1)^3 < 0$ 49) $(2x-1)^3 > 0$

50) $(2x-1)^4 < 1$ 51) $(2x-1)^4 > 1$ 52) $(2x-1)^3 < 1$ 53) $(2x-1)^3 > 1$

54) $(4x+1)^4 < 3$ ⇨ 55) $(1-x)^6 < 64$ ⇨ 56) $(4x-3)^4 > 81$ ⇨

SOLUZIONI

22) $x < -2 \vee x > 2$ 23) $x > 2$ 24) $-1/5 < x < 1/5$ 25) $\forall x \in \mathbb{R}$

26) $x < \frac{1}{2}$ 27) $x < -\frac{1}{2}$ 28) $x \le -\sqrt{\frac{7}{5}} \vee x \ge \sqrt{\frac{7}{5}}$ 29) $-1 < x < 1$

30) $-\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}$ 31) imposs. 32) $\forall x \in \mathbb{R}$ 33) $x < -\sqrt[8]{3} \vee x > \sqrt[8]{3}$

34) $x < 3$ 35) $-1 < x < 3$ 36) $x < -1 \vee x > 0$ 37) $x > -1/2$

38) $\forall x \in \mathbb{R}$ 39) $x \ge -\sqrt[3]{3}/2$ 40) $\forall x \in \mathbb{R}$ 41) $x \le -2\sqrt[3]{2}$ 42) imposs.

43) $\forall x \in \mathbb{R}$ 44) $x > 3/2$ 45) $x = -1$

46) imposs. 47) $x \ne 1/2$ 48) $x < 1/2$ 49) $x > 1/2$

50) $0 < x < 1$ 51) $x < 0 \vee x > 1$ 52) $x < 1$ 53) $x > 1$

54) $-\frac{\sqrt[4]{3}+1}{4} < x < \frac{\sqrt[4]{3}-1}{4}$ 55) $-1 < x < 3$ 56) $x < 0 \vee x > 3/2$

CENNI ALLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Sono quelle che **contengono l'incognita sotto il segno di radice**.
Ci si libera dalle radici elevando a potenza; e tuttavia,
mentre l'elevamento a esponente dispari è un'operazione "tranquillissima",
perché sempre lecita e sempre tale da mutare la disequazione di partenza in un'altra ad essa equivalente,
invece **l'elevamento ad esponente pari**, necessario ad esempio per sbarazzarsi da una radice quadrata,
è un passaggio estremamente problematico, possibile solo a condizione che i due membri siano
positivi per tutti i valori di x, o almeno "per tutti i valori di x ai quali ci si sta riferendo".

Tutto ciò costringe ad elaborare una teoria non semplicissima,
che fa parte di uno studio più avanzato.

11. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UNA DISEQUAZIONE

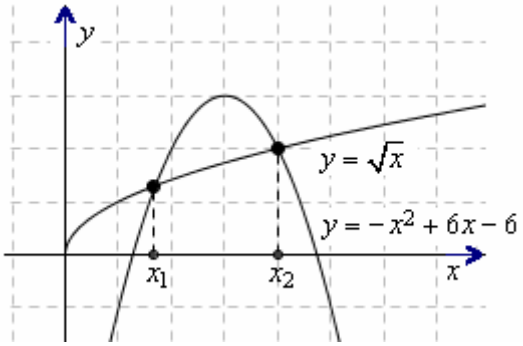
- Per risolvere graficamente una disequazione come

  $-x^2+6x-6>\sqrt{x}$

  si tracceranno innanzitutto, in uno stesso riferimento cartesiano,
  i grafici delle due funzioni a 1° e a 2° membro

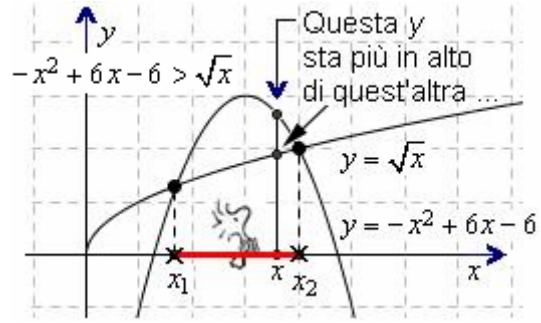
  $y=-x^2+6x-6$;

  $y=\sqrt{x}$



A questo punto, la disequazione ci "chiede" di determinare
per quali valori di x la y della prima funzione
è maggiore, quindi sta più in alto, della y della seconda.

Viaggiamo quindi, con gli occhi della mente, lungo l'asse delle *x*:
quali sono i valori di *x* in corrispondenza dei quali
la "*y*" della funzione a 1° membro $y=-x^2+6x-6$ **sta più in alto?**
Sono, evidentemente, gli x compresi fra quei due puntini, sull'asse orizzontale,
che rappresentano le ascisse x_1 e x_2 dei punti di intersezione fra le due curve.



La x evidenziata,
vicino alle zampette dell'uccello Woodstock,
vale circa 3,6.

La y che corrisponde a questa x
sulla curva $y=-x^2+6x-6$
vale circa 2,7
ed è maggiore dell'altra y,
quella sulla curva $y=\sqrt{x}$,
che vale meno di 2.

Possiamo così concludere che le soluzioni della disequazione data sono i valori di x tali che

$x_1<x<x_2$ (le crocette che abbiamo messo in figura servono proprio per escludere gli estremi).

Ora, per quanto riguarda x_2 sembrerebbe dalla figura che valga esattamente 4,
e in effetti, se sostituiamo il valore 4 al posto di x nelle due equazioni $y=-x^2+6x-6$ e $y=\sqrt{x}$,
vediamo che si ottiene la stessa y:

$\left[y=-x^2+6x-6\right]_{x=4}=-16+24-6=2$ e anche $\left[\sqrt{x}\right]_{x=4}=2$.

Per determinare x_1 occorre invece risolvere l'equazione

$-x^2+6x-6=\sqrt{x}$.

Elevando al quadrato, si ottiene un'equazione di 4° grado
di cui già sappiamo che è verificata con $x=4$;
caso vuole, si tratta di un'equazione risolubile per scomposizione in fattori col metodo di Ruffini …
e tuttavia, indipendentemente da questa circostanza, potremmo anche fermarci qui
accontentarndoci di concludere che la nostra disequazione

$-x^2+6x-6>\sqrt{x}$

è verificata per

$x_1<x<4$,

dove x_1 è un determinato valore compreso fra 1,5 e 2.

- Un altro esempio.

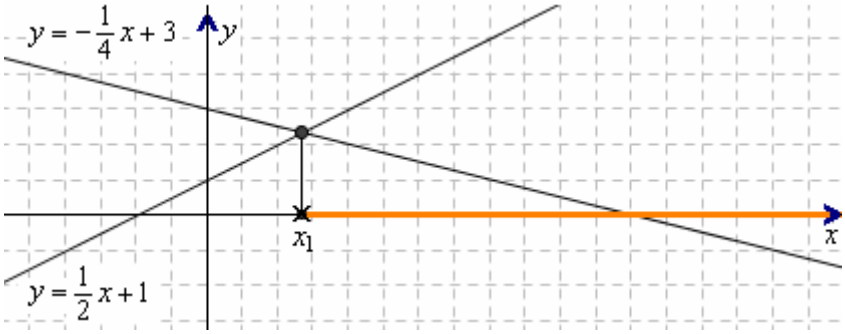
  Volendo risolvere graficamente la disequazione

  $-\frac{1}{4}x+3<\frac{1}{2}x+1$,

  disegneremo i grafici delle due funzioni lineari

  $y=-\frac{1}{4}x+3$ (retta in discesa)

  $y=\frac{1}{2}x+1$ (retta in salita)



  per andare a vedere per quali valori di *x* accade che l'ordinata corrispondente sulla prima retta è minore, è più bassa, dell'ordinata corrispondente sulla seconda retta.
  Ciò avviene per $x>x_1$, ma quanto vale x_1?
  Dalla figura si può solo vedere che è compresa fra 2 e 3 (più vicina a 3 che a 2 …)

  Per rispondere, risolviamo l'equazione $-\frac{1}{4}x+3=\frac{1}{2}x+1$. Otterremo $x=\frac{8}{3}=2,\overline{6}$.

  Quindi in definitiva la nostra disequazione è verificata con $x>8/3$.

- La figura qui a fianco si riferisce alla disequazione

  $\frac{3}{x}\geq x^2+4x$

  e mostra che essa è verificata quando

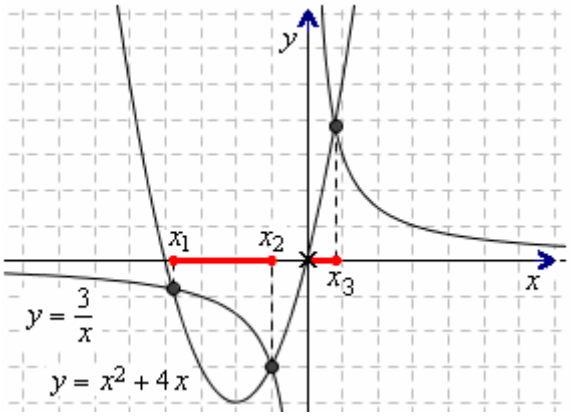
  $x_1\leq x\leq x_2 \ \vee \ 0<x\leq x_3$

  dove

  $x_2=-1$

  come il disegno suggerisce e come si può verificare:

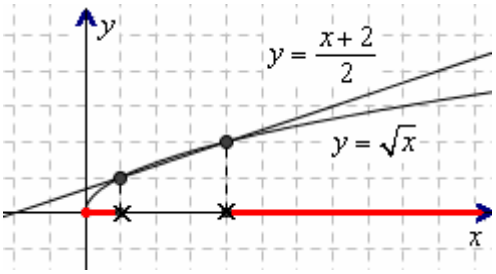
  $\left[\frac{3}{x}\right]_{x=-1}=-3 \quad \left[x^2+4x\right]_{x=-1}=-3$



  Quanto alle altre due soluzioni x_1, x_3
  dell' "equazione associata" $\frac{3}{x}=x^2+4x$,
  si possono facilmente determinare scomponendo col metodo di Ruffini il polinomio di 3° grado che si ottiene dopo aver eliminato il denominatore.

  In definitiva si ha $\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\leq x\leq -1 \ \vee \ 0<x\leq\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

- A volte quando si risolve graficamente una disequazione occorre anche tenere conto del "**campo di esistenza**" delle funzioni coinvolte.
  Facciamo un esempio:
  la disequazione $\sqrt{x}<\frac{x+2}{2}$
  è verificata per $0\leq x<1 \ \vee \ x>4$



ESERCIZI

Risolvi graficamente le disequazioni che seguono.

1) $7-x<3x$ 2) $3-2x>0$ 3) $x^2<x+6$ 4) $\frac{4}{x}>1-x$ 5) $3x+1\leq 2x+5$ 6) $3x-1<5x$

7) $x^2+x>12$ 8) $0,5x^2+1<6/x$ 9) $x^3\leq 2-x$ 10) $\sqrt{x}<4-3x$ 11) $x^3>x^2-1$ 12) $\sqrt[3]{x}>x^2-2$

RISPOSTE

1) $x>\frac{7}{4}$ 2) $x<\frac{3}{2}$ 3) $-2<x<3$ 4) $x>0$ 5) $x\leq 4$ 6) $x>-\frac{1}{2}$ 7) $x<-4 \ \vee \ x>3$

8) $0<x<2$ 9) $x\leq 1$ 10) $0\leq x<1$ 11) $x>x_1$, con $-1<x_1<-0,5$ 12) $-1<x<x_2$, con $1,5<x_2<2$

12. PROBLEMI CHE HANNO COME MODELLO UNA O PIU' DISEQUAZIONI

A) I minibus che il Comune ha predisposto per trasportare la gente ad una festa campestre, cui si è deciso di vietare l'accesso in automobile, possono trasportare ciascuno al massimo 24 passeggeri. E si sono prenotate 440 persone. Quanti servizi devono effettuare al minimo?

Il problema è SEMPLICISSIMO e potremmo pure fare a meno di disequazioni.
Comunque, detto x il numero minimo di viaggi che è richiesto di determinare, potremo scrivere
$\mathbf{24x \geq 440}$ **da cui** $\mathbf{x \geq 18,3...}$ e **la risposta è dunque: "minimo 19 viaggi"**.

B) Il prodotto di due multipli di 72 consecutivi non raggiunge 200000. Quanto possono valere, al massimo, quei due numeri?

Facile anche questo! Potremmo benissimo procedere per tentativi …
… Tuttavia, come possiamo indicare due multipli di 72 consecutivi?
Con x e $x+72$, ad esempio, intendendo che x sia multiplo di 72;
oppure con $72n$ e $72(n+1)$, dove n è un intero positivo.
Con la prima scelta (x e $x+72$), avremo
$\mathbf{x(x+72) < 200000;}$ $\mathbf{x^2 + 72x - 200000 < 0}$ da cui $\mathbf{-484,7 < x < 412,7}$ (valori approssimati).
x sarà perciò il multiplo di 72 più vicino, per difetto, a 412,7.
Possiamo determinarlo andando a vedere quante volte il 72 sta nel 412,7.
La divisione 412,7:72 dà circa 5,7 quindi ci sta 5 volte e il multiplo cercato è $72 \cdot 5 = 360$.
I due numeri in questione sono dunque **360 e 432**.



ESERCIZI (risposte a pagina 155)

1) L'attempato Riccardo ha fatto oggi il suo solito allenamento, alla velocità costante di 250 m al minuto, senza però riuscire, per via dei crampi, a coprire i 12 km che si era proposto come distanza minima. Per quanti minuti può, al massimo, aver corso? Scrivi e risolvi la disequazione che risponde a questa domanda.

2) La signora Tiziana ha 3 figlioli gemelli ai quali concede come paghetta mensile una somma, data da un numero intero di euro per ciascuno, e che non deve superare 100 € per tutti e 3. Se questa settimana si è deciso in famiglia che uno dei fratelli debba ricevere 5 € in meno di un altro, e questi a sua volta 5 euro in meno del terzo, per via della diversa collaborazione nei lavori domestici, stabilisci attraverso una disequazione quanti euro potrà al massimo ricevere il più bravo.

3) Giuliana e Gaia sono bravissime a confezionare piccole crostate, che vendono con successo ai compagni di scuola, durante l'intervallo, al prezzo di 3 euro e 50 centesimi l'una. Questo mese hanno deciso di donare il 75% delle loro entrate in beneficenza, e desidererebbero destinare a tale scopo non meno di 100 euro. Scrivi e risolvi la disequazione che porta a stabilire il numero minimo di crostatine da vendere per realizzare il lodevole proposito.

4) Se uno studente ha totalizzato 76 punti su 100 alla prima prova, 81 alla seconda, 75 alla terza, e 74 alla quarta, quale punteggio dovrebbe far registrare, al minimo, alla quinta e ultima prova perché la sua media complessiva non sia inferiore a 80?

5) Un pugile ha vinto 30 fra le 40 sfide finora disputate. Nel prossimo anno sono previsti 8 altri match, dopodiché il boxeur intende ritirarsi: tuttavia, desidererebbe aver concluso vittoriosamente almeno l'80% degli incontri. A tale scopo, quanti fra gli 8 combattimenti dovrebbe vincere, al minimo?

6) Due ciclisti partono nello stesso istante a distanza di 2 km l'uno dall'altro, venendosi incontro; a un certo punto, si incroceranno e si saluteranno, proseguendo a pedalare. La bici di Anselmo procede alla velocità costante di 18 km all'ora, quella di Beniamino ai 14 km/h. Quanto tempo deve passare, al minimo, perché la loro distanza sia maggiore di 2 km? Scrivi la disequazione che permette di rispondere.
[Immagina una *number line* … Anselmo parte dall'origine e Beniamino dal punto di ascissa 2 …]

7) Determina tutte le terne di multipli di 4 consecutivi, la cui somma sia inferiore a 1000.

8) Da www.sinclair.edu
You rent a car and are offered 2 payment options.
- You can pay $25 a day plus 15 cents a mile (option A)
- or you can pay $10 a day plus 40 cents a mile (option B).

For what amount of daily miles will option A be the cheaper plan?

Matematica e Problemi della Realtà	**DISEQUAZIONI E SITUAZIONI REALI CENNI ALLA "RICERCA OPERATIVA"**		The symbol "less than" < http://illuminations.nctm.org

Moglie e marito stanno partendo per le ferie, verso una località di mare piuttosto lontana.
Va detto che la moglie è molto prudente e timorosa, per cui vuole mantenere la velocità costante di 80 km/h, mentre il marito, più esperto e sicuro, è abituato a viaggiare ai 100 km/h.
Poiché non intendono, per la prima giornata, restare al volante complessivamente più di 8 ore, ma in compenso desiderano percorrere non meno di 700 km, traccia un diagramma che mostri il numero di ore *x* e il numero di ore *y* che ciascuno dei due potrà, teoricamente, passare alla guida.
Per quante ore dovrà guidare, al minimo, il marito?

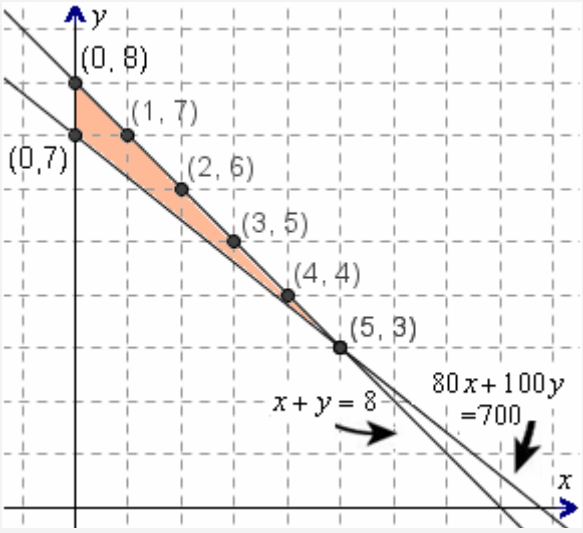
Innanzitutto si ha $x + y \le 8$, $80x + 100y \ge 700$

Ora, la condizione $x + y \le 8$ equivale a $y \le 8 - x$ ed è verificata dalle coordinate (x, y) di quei punti che si trovano AL DI SOTTO della retta di equazione $y = 8 - x$.

Allo stesso modo, la condizione $80x + 100y \ge 700$ è verificata dalle coppie (x, y) che sono coordinate di punti situati AL DI SOPRA della retta $80x + 100y = 700$ $(y = 7 - 0{,}8x)$.

In figura è ombreggiata la regione di piano nella quale sono verificate simultaneamente ENTRAMBE le condizioni in gioco.

Le soluzioni del problema sono le coordinate dei punti che appartengono a quella regione: abbiamo evidenziato solo quelli a coordinate intere.



La signora potrà, ad esempio, guidare 0 ore e il marito 7 ore, oppure anche 8;
o in alternativa 1 ora la signora e 7 il marito, ecc. ecc., comprese le soluzioni non intere:
in tutti questi casi saranno verificate entrambe le condizioni richieste, ossia:
a) tempo di guida complessivo non superiore a 8 h b) distanza percorsa non inferiore a 700 km

Tieni dunque presente che **sul piano cartesiano l'insieme delle coppie (*x*, *y*), che sono soluzione di una DISEQUAZIONE DI 1° GRADO IN DUE INCOGNITE, costituisce un SEMIPIANO** (ovviamente, nell'esempio, dall'intersezione dei due semipiani abbiamo comunque tolto le coppie con $x < 0$, che non interessavano dato il contesto).

Dal diagramma si vede anche che il marito dovrà guidare al minimo per 3 ore, mentre la moglie potrebbe anche, volendo, fare 0 ore di guida, lasciando il volante a suo marito per un numero di ore da 7 fino a 8.

CHE COS'E' LA "RICERCA OPERATIVA"

In Matematica, si dice "ricerca operativa" (*operational research*), o anche "teoria delle decisioni", un insieme di strumenti che possono servire ad ottimizzare scelte gestionali, magari per massimizzare oppure minimizzare una "funzione obiettivo", come ad esempio un guadagno o un costo. Essa insegna ad elaborare un "modello matematico" di un dato problema, e a partire da questo a ricercare la soluzione ottima o, quando ciò non sia possibile, "subottima", per il problema medesimo.

I quesiti di cui ci stiamo occupando possono rappresentarne dei semplicissimi esempi introduttivi.

9) Nadia l'estate scorsa è stata in villeggiatura a Rimini, dove ha fatto amicizia con un pasticciere che le ha confidato il segreto di due ricette veramente fantastiche per preparare bomboloni e croissant. Le è stato raccomandato di dosare gli ingredienti alla perfezione, altrimenti il rischio di fallire è alto. In particolare, un singolo bombolone richiede 15 grammi esatti di zucchero e 10 grammi di burro, mentre per un croissant ci vogliono precisamente 8 grammi di zucchero più 20 di burro.
Un bel giorno la nostra Nadia, mentre si trova nella baita di famiglia in montagna, riceve una telefonata che le annuncia la visita, la mattina dopo, di un gruppetto di amici escursionisti.
Messa giù la cornetta, si precipita subito tutta contenta in cucina per preparare le sue prelibatezze … … ma si rende conto che le sono rimasti solo 120 grammi di zucchero e 185 di burro, mentre è del tutto evidente l'impossibilità di fare acquisti in paese in tempo utile. La aiuteresti, con l'impiego di un diagramma cartesiano, a determinare qual è il numero massimo di dolci che potrà offrire ai suoi ospiti?

10) Con un liquido X, contenente il 20% di alcool, e un altro liquido Y, che contiene il 30% di alcool, si vuole fare una miscela che:
- contenga almeno il 22% di alcool;
- ci stia in un bottiglione da 8 litri.

Disegna un grafico dal quale risulti come si possono scegliere *x* e *y* in modo che mescolando *x* di litri di X e *y* di litri di Y siano rispettati questi vincoli.

Stabilisci infine quanti litri di liquido X si possono utilizzare, al massimo, nella miscela.

11) Osvaldo ha 16000 euro di risparmi, e intende investirli, tutti o in parte, coi vincoli seguenti:
- almeno 4000 euro in un fondo ad alto rischio-alto rendimento;
- e almeno il doppio, in titoli di Stato.

Disegna un diagramma che illustri la possibile ripartizione fra le *x* migliaia di euro per l'investimento nel fondo e le *y* migliaia di euro per quello in titoli.

Stabilisci anche qual è la massima cifra possibile per il primo investimento, quello più rischioso.

12) Il medico specialista mi ha prescritto degli integratori alimentari per il fatto che dai miei esami del sangue è emersa la carenza di due certe sostanze A e B.
In commercio sono disponibili due parafarmaci utili a questo scopo, Vitalyn ed Energex, che hanno anche ugual prezzo (ed entrambi sono, a dire il vero, scandalosamente cari …)
Una fiala di soluzione Vitalyn contiene 3 milligrammi di A e 2 milligrammi di B.
Una fiala di Energex contiene invece 2 milligrammi di A e 4 di B.
L'indicazione del dottore è che io assuma complessivamente, nell'arco di un mese, almeno 20 mg di A e 20 di B; non ha importanza se la dose viene superata, basta che sia assicurato quel minimo.
Quante fiale di Vitalyn e quante di Energex devo acquistare, per ridurre il più possibile la spesa?

13) Una confezione di preparato dietetico a base di riso integrale e di farro dovrebbe fornire almeno 50 grammi di proteine e non più di 10 grammi di grassi.
Ora, un etto di riso integrale fornisce 7,5 grammi di proteine e 2 grammi di grassi; mentre un etto di farro 15 grammi di proteine e 2,5 grammi di grassi.
E perché il piatto abbia un buon sapore, la dose di farro dev'essere almeno il doppio di quella di riso, ma anche non più del quadruplo.
Determina le quantità di riso e di farro che a) minimizzino b) massimizzino il peso della confezione.

14) Un emporio specializzato in blue jeans si rifornisce dai due laboratori artigianali di Anna e di Barbara.
Tuttavia, dopo ciascun approvvigionamento il direttore dell'emporio esegue una cernita accurata dei capi, per distinguere fra quelli di qualità ottima, buona, e accettabile.
Ora, l'emporio prevede, per il prossimo inverno, di doversi procurare almeno 100 blue jeans di ottima qualità e almeno 150 di buona qualità.
Diciamo che le forniture di Anna sono mediamente tali che il 50% dei suoi pezzi è giudicato ottimo, il 30% buono e il 20% accettabile; mentre per il laboratorio di Barbara queste percentuali sono rispettivamente del 30%, 60% e 10%.
Poiché entrambe le imprenditrici fanno pagare i propri jeans 24 euro l'uno, determina quanti jeans dovrebbero essere acquistati presso Anna e quanti presso Barbara per realizzare la scorta minima desiderata, e nel contempo spendere il meno possibile. [*Utilizza GEOGEBRA per il diagramma …*]

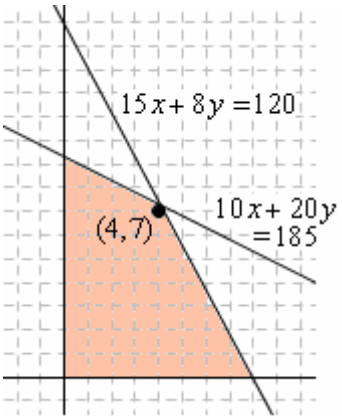
15) Una confezione da 1 Kg di anticrittogamico S1 contiene 6 hg di una data sostanza A, e 3 hg di un'altra sostanza B (l'hg restante si deve a un eccipiente).
E una confezione da 1 Kg di S2 contiene 2 hg di A, e 6 hg di B.
Ora, il preparato S1 costa 3 euro la confezione, e 5 euro invece S2.
L'agricoltore Gilberto necessita di almeno 3 kg di A e di almeno 4 kg di B: aiutalo a determinare quante confezioni di S1 e quante di S2 dovrebbe acquistare per spendere la cifra più bassa possibile.
Se il prezzo di S2 scattasse improvvisamente a 7 euro la confezione, la risposta rimarrebbe la stessa?

16) Un esame si svolge con modalità molto particolari.
C'è un set di 20 problemi di Media difficoltà, e un altro set di 20 problemi di difficoltà Elevata; il candidato deve scegliere non più di 20 problemi complessivamente, e cercare di rispondere in un tempo massimo di 90', tenendo presente che ogni quesito M vale 2 punti e ogni quesito E ne vale 3.
Il volonteroso Vincenzo si ritiene in grado di elaborare la risposta corretta a una richiesta M in 3 minuti, e a una richiesta E in 10 minuti.
Quante domande M e quante E dovrebbe scegliere per massimizzare il punteggio sperato?

RISPOSTE

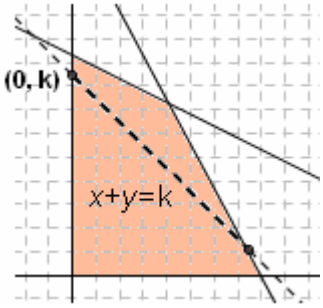
1) $250x < 12000 \rightarrow x < 48$ 2) Al massimo 38 euro
3) $3{,}5 \cdot x \cdot 75/100 \geq 100$ (almeno 39 costatine) 4) $(76+81+75+74+x)/5 \geq 80$; almeno 94
5) $30 + x \geq 80/100 \cdot 48$. Non può realizzare il suo desiderio: la disequazione è verificata per $x \geq 8{,}4$!
6) $18x-(2-14x) > 2 \rightarrow x > 1/8$, e $1/8$ di ora sono 7 minuti e ½ 7) Da (4, 8, 12) fino a (328, 332, 336)
8) Plan A will be the cheaper plan if you drive more than 60 miles per day

9) Posto x = n° di bomboloni, y = n° di croissant,
la regione di piano ombreggiata contiene tutte le coppie (x, y)
che rispettano entrambi i vincoli
$15x + 8y \leq 120$, $10x + 20y \leq 185$.
Il punto evidenziato, di coordinate (4, 7), è quello che
appartiene alla regione, **ha coordinate intere** e **massimizza $x + y$** .
Nadia potrà così preparare, con gli ingredienti di cui dispone,
4 ottimi bomboloni più 7 squisiti croissant da offrire agli amici.



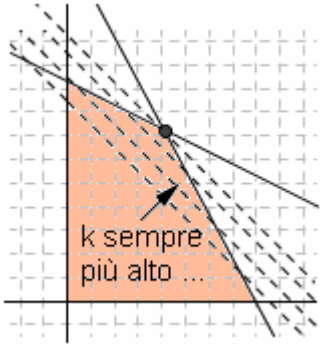
C'è un
PROCEDIMENTO GRAFICO GENERALE
PER MASSIMIZZARE $x + y$,
e lo si trae dalle considerazioni seguenti.

Se k è un numero fissato,
l'insieme delle coppie x, y
per le quali è $x + y = k$
è rappresentato dalla retta
di equazione $x + y = k$ ossia $y = k - x$,
che è inclinata di 45° in discesa (avendo coefficiente angolare -1)
e interseca l'asse verticale nel punto di ordinata k.



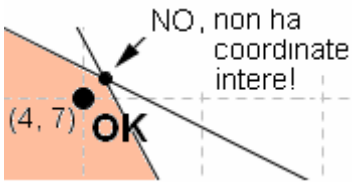
Ora i punti di una regione di piano, per i quali $x + y = k$,
sono le intersezioni di quella regione con tale retta.

Adesso **andiamo ad aumentare il valore di k:**
la retta si sposta verso l'alto, parallelamente a sé stessa,
e NOI SIAMO INTERESSATI
AD ARRIVARE PIÙ IN ALTO CHE POSSIAMO,
SEMPRE CONTINUANDO A INTERSECARE LA REGIONE.

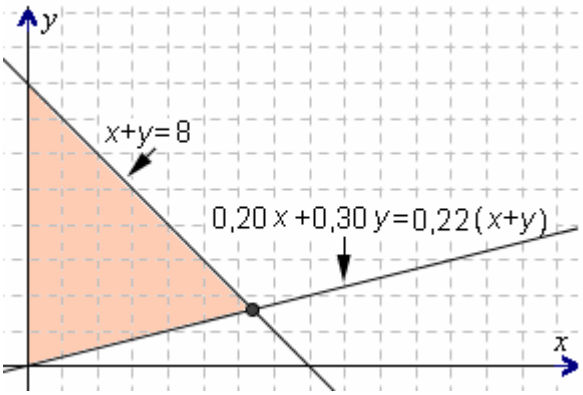


Quindi il punto della regione per cui è massima la somma $x + y$
sarebbe quello evidenziato col pallino nella figura qui a destra → …

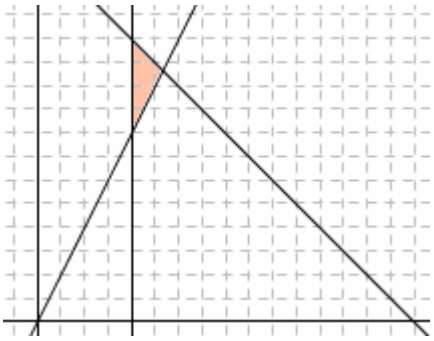
… PERO' nel caso nel nostro esempio,
non ci interessa proprio *quel* punto
dato che non ha coordinate intere:
beh, considereremo i punti
della regione ombreggiata,
con coordinate *intere*, ad esso più vicini!



10) Massimo 6,4 litri di X



11) Vedi figura qui sotto; la cifra massima
che si può investire nel fondo ad alto rischio,
con quei vincoli, è di 5333 euro.



12) 8 confezioni: 4 e 4, oppure 5 di Vitalyn e 3 di Energex, o 6 di Vitalyn e 2 di Energex
13) a) hg 0,74 di riso e hg 2,96 di farro; b) 1,43 e 2,86 hg 14) 72 da A e 214 da B opp. 71 da A e 215 da B
15) 4 di S1 e 5 di S2. No; scelta migliore in questo caso: 14 confezioni di S1, e 0 di S2 16) 16 M, 4E

13. DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

Esempio 1: $\boxed{2\left(x^3+5x+4\right)<11x^2}$

Innanzitutto svolgiamo i calcoli e portiamo tutto a 1° membro, in modo che il 2° membro sia 0

$$2x^3+10x+8<11x^2$$
$$2x^3-11x^2+10x+8<0$$

Ora SCOMPONIAMO il 1° membro IN FATTORI, ciascuno dei quali dovrà essere:

- **di 1° grado**
- **oppure di 2° grado**
- **o comunque tale che il suo segno si possa studiare agevolmente**

$$\underbrace{(x-2)}_{1°\ fatt.}\underbrace{\left(2x^2-7x-4\right)}_{2°\ fatt.}<0$$ (*la scomposizione è stata effettuata qui col metodo di Ruffini*)

Dalla disequazione ottenuta ci viene rivolta dunque la seguente richiesta:
dimmi, caro solutore, per quali valori di x il prodotto che sta a primo membro risulta <0 !

Ora, il segno di un prodotto dipende dalla combinazione dei segni dei suoi fattori:

- un prodotto è *positivo* se tutti i fattori sono positivi, oppure se si ha un numero pari di fattori negativi
- un prodotto è *negativo* se presenta un solo fattore negativo, oppure un numero dispari di fattori negativi
- sempre tenendo presente, s'intende, che se anche uno solo dei fattori è nullo, allora il prodotto è *nullo*.

Dovremo quindi STUDIARE IL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE,
per stabilire per quali valori di x esso è positivo, per quali nullo, per quali negativo;

dopodiché, utilizzeremo un semplice SCHEMA PER IL CONFRONTO DEI SEGNI, che
darà un quadro "sinottico" degli studi effettuati e ci permetterà, finalmente, di trarre le conclusioni.

Diciamo subito che il modo più comodo per studiare il segno di un'espressione contenente x
è quello di impostare la disequazione

$$\boxed{espressione>0}\ ,$$

finalizzata a stabilire per quali valori di x l'espressione data è, appunto, >0; risolta questa, sarà poi
del tutto immediato stabilire, "per esclusione", per quali valori di x l'espressione è <0 e per quali è $=0$.

Procediamo, dunque!

$\boxed{1°\ fatt.>0}$ $\quad x-2>0;\quad \boxed{x>2}$

Abbiamo così stabilito che l'espressione $x-2$ è positiva quando $x>2$.
In questo modo, ovviamente, sappiamo anche che l'espressione $x-2$ sarà:

- negativa per $x<2$,
- nulla per $x=2$

$\boxed{2°\ fatt.>0}$ $\quad 2x^2-7x-4>0;$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\ldots=\begin{matrix}-1/2\\4\end{matrix}$$

$$\boxed{x<-\frac{1}{2}\vee x>4}$$

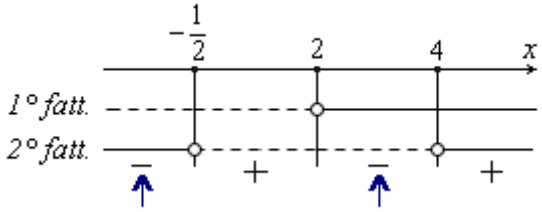
Abbiamo così stabilito che l'espressione $2x^2-7x-4$
è *positiva* quando $x<-1/2\ \vee\ x>4$;
da ciò si trae, evidentemente, che l'espressione stessa sarà:

- *negativa* per $-1/2<x<4$
- *nulla* per $x=-1/2\ \vee\ x=4$

Adesso che, tramite queste "disequazioni ausiliarie"
1° fatt.>0, 2° fatt.>0,
abbiamo studiato il segno di ogni singolo fattore,
possiamo costruire lo schema finale.

♥ Utilizzeremo la **SIMBOLOGIA** seguente:

LINEA CONTINUA	——	**FATTORE POSITIVO**
PALLINO VUOTO	○	**FATTORE NULLO**
LINEA TRATTEGGIATA	**- - -**	**FATTORE NEGATIVO**



SOLUZIONI (NOTA): $\boxed{x<-\frac{1}{2}\ \vee\ 2<x<4}$

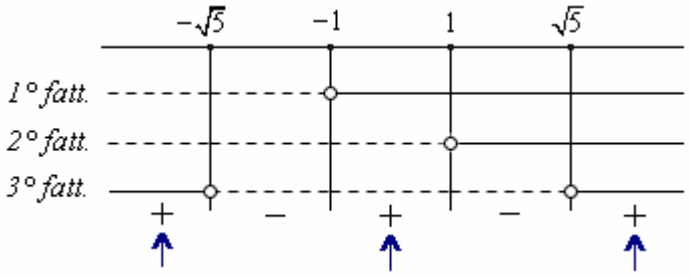
NOTA
Nel primo intervallo, quello dei valori di x minori di –1/2,
il 1° fatt. ha segno negativo e il 2° fatt. positivo, quindi il prodotto sarà negativo.
Analogamente, si stabilisce il segno del prodotto negli altri intervalli.
Infine, poiché il verso della disequazione è <, si scelgono quegli intervalli nei quali il prodotto risulta <0.

Esempio 2: $x^4-6x^2+5\geq 0$

Questa è una disequazione BIQUADRATICA.
Le disequazioni biquadratiche non fanno eccezione: si risolvono anch'esse SCOMPONENDO IN FATTORI

$$(x^2-1)(x^2-5)\geq 0$$
$$(x+1)(x-1)(x^2-5)\geq 0$$
1° *fatt.* 2° *fatt.* 3° *fatt.*

1° *fatt.* >0 $\quad x+1>0 \quad x>-1$
2° *fatt.* >0 $\quad x-1>0 \quad x>1$
3° *fatt.* >0 $\quad x^2-5>0 \quad x<-\sqrt{5} \vee x>\sqrt{5}$
(NOTA)



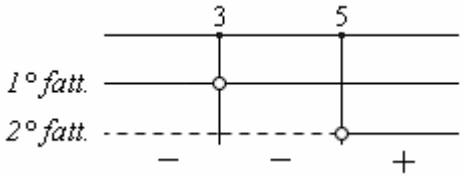
SOLUZIONI: $x\leq-\sqrt{5} \vee -1\leq x\leq 1 \vee x\geq\sqrt{5}$

NOTA: *la disequaz.* $x^2-5>0$ *può essere risolta anche scrivendo* $x^2>5$; $|x|>\sqrt{5}$; $x<-\sqrt{5} \vee x>\sqrt{5}$

♥ **Il modo migliore per risolvere una disequazione col ≥ o col ≤ (che non sia di 1° grado) è di pensare dapprima alla disequazione "stretta", cioè solo col > o col <, poi aggiungere alle soluzioni trovate anche i valori che rendono il primo membro uguale al secondo, ossia le soluzioni dell'EQUAZIONE. Applica questa indicazione sulle ultime due disequazioni del successivo Esempio 3!**

Esempio 3: $(x-3)^2(x-5)<0$

1° *fatt.* >0 $\quad (x-3)^2>0 \quad x\neq 3$
2° *fatt.* >0 $\quad x-5>0 \quad x>5$



SOLUZIONI:
$x<5$ ma $x\neq 3$

Di questo esercizio potremmo considerare le **varianti** seguenti (leggi il riquadro sottostante per le ultime due):

$(x-3)^2(x-5)>0$ impostazione e schema identici al caso precedente; soluzioni: $x>5$

$(x-3)^2(x-5)\leq 0$ impostazione e schema identici ai casi precedenti; soluzioni: $x\leq 5$

$(x-3)^2(x-5)\geq 0$ impostazione e schema identici ai casi precedenti; soluzioni: $x\geq 5 \vee x=3$

Esempio 4: $5x(x-7)(x-4)^2(x^2+1)(x^2-2x-1)<0$

Qui c'è innanzitutto la possibilità di **semplificare**.

Possono essere semplificati quei fattori che risultino sempre strettamente positivi (> 0); qui,

- il fattore 5 (**costante positiva**)
- e il fattore x^2+1 (che dipende da *x*, ma è **sempre strettamente positivo per qualsiasi valore di *x***).

$$\underset{>0}{5}\,x(x-7)(x-4)^2\underbrace{(x^2+1)}_{>0,\ \forall x}(x^2-2x-1)<0$$

Semplificare, infatti, vuol dire dividere,
e dividendo ambo i membri di una disuguaglianza per una quantità strettamente positiva,
il verso rimane invariato.

- **Non è lecito invece semplificare per una quantità il cui segno può essere, a seconda dei valori di *x*, positivo oppure negativo**: infatti la semplificazione per un numero <0 richiede di cambiare il verso, e allora, se volessimo a tutti i costi semplificare una disequazione per una quantità di segno variabile, saremmo obbligati ad addentrarci in una laboriosa distinzione di casi.
- **Osserviamo** che **il fattore $(x-4)^2$ NON può essere semplificato: esso è QUASI sempre strettamente positivo, ma non sempre**: infatti si può annullare (per $x=4$). Questo fattore $(x-4)^2$ ce lo dobbiamo per forza tenere: nello schema per il confronto dei segni, ad esso corrisponderà una linea continua di positività, contenente al suo interno un pallino di annullamento.

Puoi proseguire per conto tuo, ora, con la risoluzione della disequazione; vedrai che essa è verificata per:

$$1-\sqrt{2}<x<0 \quad \vee \quad 1+\sqrt{2}<x<7 \ ma\ x\neq 4$$

14. DISEQUAZIONI FRATTE

Si risolvono come le disequazioni di grado superiore al secondo. Vale a dire:

A) SI PORTA TUTTO A 1° MEMBRO, IN MODO CHE IL 2° MEMBRO SIA 0
(si dovrà avere, in definitiva, un'unica frazione, confrontata con lo 0)

B) poi SI SCOMPONGONO IN FATTORI SIA IL NUMERATORE. CHE IL DENOMINATORE
(ciascun fattore dovrà essere di 1° grado, oppure di 2° grado, oppure di tipo "particolare": vedi es. 5)

C) quindi **SI STUDIA IL SEGNO DI CIASCUN FATTORE IN GIOCO** (NOTA)
NOTA. Sarebbe **gravissimo errore** mandar via il denominatore! Infatti
ciò equivarrebbe a moltiplicare per il denominatore entrambi i membri, ma in una disequazione è lecito moltiplicare per un'espressione contenente x soltanto se questa è sempre >0, $\forall x$

D) e infine **SI TRACCIA UNO SCHEMA PER IL CONFRONTO DEI SEGNI**
per trarre, dall'osservazione di questo, le conclusioni opportune.

Esempio 1:

$$\boxed{x\cdot\frac{2x-7}{x^2-4}<\frac{2}{x+2}}$$

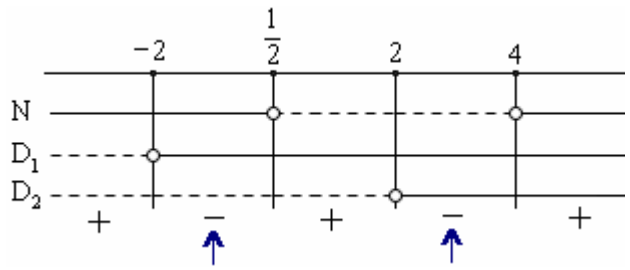
$$\frac{2x^2-7x}{x^2-4}-\frac{2}{x+2}<0 \;;\quad \frac{2x^2-7x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{x+2}<0 \;;\quad \frac{2x^2-7x-2x+4}{(x+2)(x-2)}<0$$

$$\boxed{\underset{}{\overset{N}{\frac{2x^2-9x+4}{(x+2)(x-2)}}}<0 \quad \underset{D_1}{} \quad \underset{D_2}{}}$$

$N>0 \quad 2x^2-9x+4>0 \quad x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm7}{4}=\begin{cases}1/2\\4\end{cases} \quad \boxed{x<\frac{1}{2}\ \vee\ x>4}$

$D_1>0 \quad x+2>0 \quad \boxed{x>-2}$

$D_2>0 \quad x-2>0 \quad \boxed{x>2}$



SOLUZIONI: $\boxed{-2<x<\frac{1}{2}\ \vee\ 2<x<4}$

LINEA CONTINUA	———	**FATTORE POSITIVO**
PALLINO VUOTO	°	**FATTORE NULLO**
LINEA TRATTEGGIATA	- - - -	**FATTORE NEGATIVO**



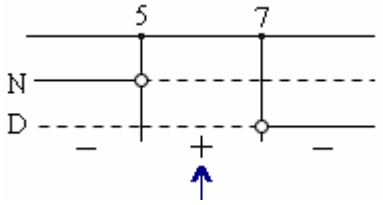
Esempio 2:
(leggi il riquadro sottostante)

$$\boxed{\underset{}{\overset{N}{\frac{5-x}{x-7}}}\geq 0 \quad \underset{D}{}}$$

NOTA
Volendo, si potrebbe riscrivere come
$\frac{x-5}{x-7}\leq 0$

$N>0 \quad 5-x>0 \quad -x>-5 \quad \boxed{x<5}$

$D>0 \quad x-7>0 \quad \boxed{x>7}$



SOLUZIONI:
$\boxed{5\leq x<7}$
$S=[5,\,7)$

♥ **Nel caso si abbia il ≤, oppure il ≥, conviene pensare DAPPRIMA alla disequazione STRETTA (quella solo col > o col <), POI aggiungere alle soluzioni così trovate anche quei valori che rendono la frazione uguale a 0.**

♥ **Ricorda a proposito che una frazione si annulla quando si annulla il suo NUMERATORE, purché però non si annulli contemporaneamente anche il denominatore, nel qual caso la frazione non sarebbe nulla bensì indeterminata.**

$\frac{0}{a}=0$

$\frac{a}{0}=$ **IMPOSSIBILE**

$\frac{0}{0}=$ **INDETERMINATA**

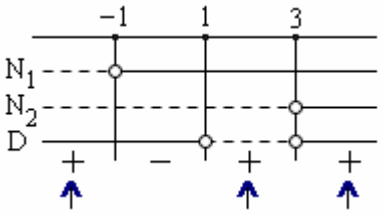


Esempio 3: $\dfrac{\overset{N_1}{(x+1)^3}\overset{N_2}{(x-3)}}{\underset{D}{x^2-4x+3}} \geq 0$

$N_1 > 0 \quad (x+1)^3 > 0 \quad x+1>0 \quad \boxed{x>-1}$

$N_2 > 0 \quad x-3>0 \quad \boxed{x>3}$

$D > 0 \quad x^2-4x+3>0 \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \boxed{x<1 \vee x>3}$



La disequazione presenta il $\geq$.

La **disequazione "stretta"** ($>$) è verificata per $x<-1 \vee 1<x<3 \vee x>3$.
L'**equazione** ($=$) è verificata soltanto con $x=-1$,
valore che annulla il numeratore senza annullare il denominatore;
invece i valori $x=1$ e $x=3$ NON sono soluzioni dell'equazione:

- $x=1$ non lo è perché annulla il denominatore (frazione impossibile);
- $x=3$ non lo è perché, sebbene annulli il numeratore, annulla contemporaneamente anche il denominatore (frazione indeterminata).

SOLUZIONI:

$\boxed{x \leq -1 \vee x>1 \; ma \; x \neq 3}$

Pertanto alle soluzioni della disequazione stretta andrà aggiunto il solo valore $x=-1$, e si otterrà in definitiva

$x \leq -1 \;\vee\; 1<x<3 \;\vee\; x>3$ o anche: $\boxed{x \leq -1 \vee x>1 \text{ ma } x \neq 3}$

OSSERVAZIONE

Risolviamo lo **stesso esercizio** diversamente, **scomponendo il denominatore in due fattori di 1° grado**:

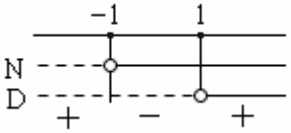
$\boxed{\dfrac{(x+1)^3(x-3)}{(x-1)(x-3)} \geq 0}$

Fattorizzando il denominatore, si nota la **possibilità di semplificare**.
Semplificando, però, viene eliminata l'espressione $(x-3)$
che inizialmente compariva a denominatore, quindi bisogna ricordarsi di **scrivere la condizione** $x \neq 3$, che significa: "se alla fine fra le soluzioni trovate dovesse rientrare anche il valore $x=3$, lo si dovrebbe escludere". Dunque:

$\dfrac{\overset{N}{(x+1)^3\cancel{(x-3)}}}{\underset{D}{(x-1)\cancel{(x-3)}}} \geq 0 \quad \boxed{x \neq 3}$

$N > 0 \quad (x+1)^3 > 0 \quad x+1>0 \quad \boxed{x>-1}$

$D > 0 \quad x-1>0 \quad \boxed{x>1}$

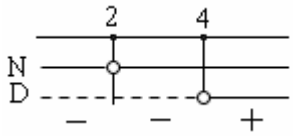


Tenuto conto ora del verso ($\geq$) e della condizione $x \neq 3$, si hanno le **SOLUZIONI**:

$\boxed{x \leq -1 \vee x>1 \text{ ma } x \neq 3}$

Esempio 4: a) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}<0}$ b) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}>0}$ c) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4} \leq 0}$ d) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4} \geq 0}$

Lo **schema finale** è, **in tutti e 4 i casi**, il seguente:



… e le **SOLUZIONI** sono, rispettivamente:

a) $\boxed{x<4 \text{ ma } x \neq 2}$ b) $\boxed{x>4}$

c) $\boxed{x<4}$ d) $\boxed{x>4 \vee x=2}$

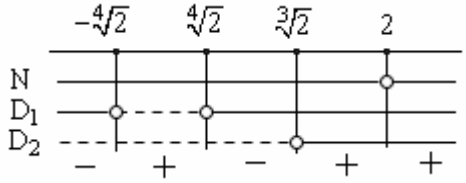
Esempio 5: $\dfrac{\overset{N}{(x-2)^4}}{\underset{D_1}{(x^4-2)}\underset{D_2}{(x^3-2)}} \leq 0$

In questo caso i fattori in gioco non sono né di 1°, né di 2° grado; sono però "**di tipo particolare**", nel senso che, per ciascun fattore, se ne può agevolmente studiare il segno, mediante la disequazione ausiliaria *fattore>0*, senza ricorrere ad una … scomposizione del fattore in altri fattori di grado inferiore.

$N > 0 \quad (x-2)^4 > 0 \quad x-2 \neq 0 \quad \boxed{x \neq 2}$

$D_1 > 0 \quad x^4-2>0 \quad x^4>2 \quad |x| > \sqrt[4]{2} \quad \boxed{x<-\sqrt[4]{2} \;\vee\; x>\sqrt[4]{2}}$

$D_2 > 0 \quad x^3-2>0 \quad x^3>2 \quad \boxed{x>\sqrt[3]{2}}$



SOL.: $\boxed{x<-\sqrt[4]{2} \;\vee\; \sqrt[4]{2}<x<\sqrt[3]{2} \;\vee\; x=2}$

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

1) $x^3-x^2-4x+4<0$ (raccoglimenti parziali) 2) $(x+3)(x-2)(x^2+7)\geq 0$

3) $4x^3+x^2-12x-3<0$ (raccoglimenti parziali) 4) $x^3-6x^2+11x-6>0$ (Ruffini)

5) $\frac{6}{5}(4x+1)(3x+1)(2x+1)^2\leq 0$ 6a) $(x-5)^2(x-2)>0$ 6b) $(x-5)^2(x-2)\leq 0$

7) $x(2x^2-10x+1)<5$ 8) $x^3+x^2+2x+2>0$ 9) $a^3-a^2\geq 0$ 10) $(x-1)(x^2-x+1)<0$

11a) $x^3-3x^2+2x>0$ 11b) $x^3-3x^2+2x\geq 0$ 11c) $x^4+2x^2>3x^3$ 11d) $x^4+2x^2\geq 3x^3$

12a) $x^3-4x>0$ 12b) $x^3-4x\geq 0$ 13) $5x(x+2)^2(x^2+2)(x^2-2x-4)(x^2-2x+4)<0$

14a) $4x^2<x^4$ 14b) $4x^2\leq x^4$ 14c) $4x^2>x^4$ 14d) $4x^2\geq x^4$ 15) $y^4-y^3\geq 0$

16) $(x^2+3)(x+2)^2(x-1)<0$ 17) $(x-1)(x-2)^2(x-3)(4x^2+1)<0$ 18) $x^3(x^2-2x-1)<0$

19) $x^4-5x^2+4>0$ Le disequazioni BIQUADRATICHE non fanno eccezione: si risolvono anch'esse SCOMPONENDO IN FATTORI 20) $4x^4-5x^2+1\leq 0$

21) $\frac{11}{12}x^2>\frac{x^4}{3}+\frac{1}{2}$ Si può moltiplicare per 12 oppure fare il den. com. 12 e mandarlo via 22) $y^4-\frac{7}{2}y^2-2>0$ 23) $21t^2+25>4t^4$

24) $16b^4-148b^2+36>0$ (semplifica innanzitutto i coefficienti!) 25) $x^4+7x^2+12>0$

26) $x^4-3x^2+4>0$ (molto particolare!) 27) $x^6-x^3-6<0$ 28) $x^8-6x^4+5<0$

29) $x^8-15x^4-16>0$ 30) $x^8-3x^4<0$ 31) $3x^4(1-5x)(4x^2+11x-3)(2x^2-1)(x^2+1)(x+1)^2<0$

SOLUZIONI

1) $x<-2\ \vee\ 1<x<2$ 2) $x\leq -3\vee x\geq 2$ 3) $x<-\sqrt{3}\vee -1/4<x<\sqrt{3}$ 4) $1<x<2\ \vee\ x>3$

5) $-1/3\leq x\leq -1/4\vee x=-1/2$ Il fattore 6/5 è >0 e può essere semplificato … 6a) $x>2$ ma $x\neq 5$ 6b) $x\leq 2\ \vee\ x=5$

7) Raccoglimenti parziali; si ottiene $(x-5)(2x^2+1)<0$ e a questo punto, se si nota che il fattore $2x^2+1$ è >0 qualunque sia x, lo si potrà eliminare: $(x-5)\cancel{(2x^2+1)}<0$ e la disequazione diventerà allora semplicemente $x-5<0$ con le soluzioni $x<5$. Se invece NON si elimina il fattore $2x^2+1$, essendo questo sempre >0, nello schema finale ad esso corrisponderà una linea continua di positività e si troveranno le stesse soluzioni, ossia i valori $x<5$.

8) $x>-1$ 9) $a\geq 1\vee a=0$ 10) $x<1$ (il fattore x^2-x+1, con $\Delta<0$, è sempre > 0, per ogni x!)

11a) $0<x<1\vee x>2$ 11b) $0\leq x\leq 1\vee x\geq 2$ 11c) $x<1\,(ma\ x\neq 0)\vee x>2$ 11d) $x\leq 1\vee x\geq 2$

12a) $-2<x<0\vee x>2$ 12b) $-2\leq x\leq 0\vee x\geq 2$ 13) $x<1-\sqrt{5}\ \ (ma\ x\neq -2)\ \vee\ 0<x<1+\sqrt{5}$

14a) $x<-2\vee x>2$ 14b) $x\leq -2\vee x\geq 2\vee x=0$ 14c) $-2<x<2\ ma\ x\neq 0$ 14d) $-2\leq x\leq 2$

15) $y\leq 0\vee y\geq 1$ 16) $x<1\ ma\ x\neq -2$ 17) $1<x<3\ ma\ x\neq 2$ 18) $x<1-\sqrt{2}\vee 0<x<1+\sqrt{2}$

19) $x<-2\vee -1<x<1\vee x>2$ 20) $-1\leq x\leq -\frac{1}{2}\ \vee\ \frac{1}{2}\leq x\leq 1$ 21) $-\sqrt{2}<x<-\frac{\sqrt{3}}{2}\vee\frac{\sqrt{3}}{2}<x<\sqrt{2}$

22) $y<-2\vee y>2$ 23) $-5/2<t<5/2$ 24) $b<-3\vee -1/2<b<1/2\vee b>3$ 25) $\forall x\in\mathbb{R}$

26) $\forall x\in\mathbb{R}$ Il trinomio biquadratico dato non è scomponibile perché il suo Δ è negativo; la negatività del Δ ci dice anche che l'equazione biquadratica associata non ha soluzioni, cioè che il trinomio non si può annullare; ma allora la quantità x^4-3x^2+4 mantiene segno costante, e siccome ad esempio con $x=0$ è positiva, si manterrà positiva per ogni valore di x

27) Si scompone in $(x^3+2)(x^3-3)$, dopodiché: $x^3+2>0$; $x^3>-2$; $x>\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$, ecc. Soluzioni: $-\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{3}$

28) Si scompone in $(x^4-5)(x^4-1)$, dopodiché: $x^4-5>0$; $x^4>5$; $|x|>\sqrt[4]{5}$; $x<-\sqrt[4]{5}\vee x>\sqrt[4]{5}$, ecc. Soluzioni: $-\sqrt[4]{5}<x<-1\vee 1<x<\sqrt[4]{5}$

29) $x<-2\vee x>2$ 30) $-\sqrt[4]{3}<x<\sqrt[4]{3}\ \ ma\ x\neq 0$ 31) $-3<x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\ (ma\ x\neq -1)\ \vee\ \frac{1}{5}<x<\frac{1}{4}\vee x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI FRATTE

1a) $\frac{x-1}{x-2}<0$ 1b) $\frac{x-1}{x-2}\le 0$

2) $\frac{12x-4}{12x-6}\ge 0$ Può essere innanzitutto semplificata, dividendo per 4 e moltiplicando per 6: $\frac{3x-1}{2x-1}\ge 0$

3) $\frac{3-x}{x-7}>0$ o anche $\frac{x-3}{x-7}<0$ ⇨

4) $\frac{x-4}{8-x}\le 0$ opp. $\frac{x-4}{x-8}\ge 0$ ⇨

5) $\frac{5-x}{9-x}>0$ opp. $\frac{x-5}{x-9}>0$ ⇨

6a) $\frac{x^2-9}{x-1}<0$ 6b) $\frac{x^2-9}{x-1}\le 0$ 7) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}>0$ 8) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}\ge 0$ 9) $\frac{x^2-2x-1}{x^2-2}<0$

10a) $\frac{(x-7)^2}{x-1}>0$ 10b) $\frac{(x-7)^2}{x-1}\ge 0$ 10c) $\frac{x-1}{(x-7)^2}>0$ 10d) $\frac{x-1}{(x-7)^2}\ge 0$ 11) $\frac{x^2-1}{3x^2-3x}\ge 0$

12) $\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^3-2x^2}<0$ Qui INNANZITUTTO (**PRIMO PASSAGGIO**! Vedi RIFLESSIONE a pag. 163) bisogna **SCOMPORRE sia il N che il D in fattori** ciascuno dei quali deve essere: o di **1° grado**, o di **2° grado**, oppure **"di tipo particolare"**

13) $\frac{x^3-4x}{x^2-2}>0$ 14) $\frac{x^4-2x^3+4x^2}{x+2}>0$ 15) $\frac{x^3-9x^2+8x}{x^3-x^2-x+1}\le 0$ 16) $\frac{5x+15}{x^3+x^2+x+1}\le 0$

17) $\frac{7a+21}{a^2-9}<0$ 18) $\frac{3x^2}{6-x}\le 0$ 19) $\frac{3}{x^2-4x}>0$ 20) $\frac{x^2-4x+5}{4x-x^2}\le 0$ 21) $\frac{25-16d^4}{d^2+2d+1}>0$

22) $\frac{6}{2x-1}>\frac{5}{x-2}$ Porta a 1° m., fai il denom. comune!

23) $\frac{x^3+2}{x}\ge 2x+1$ 24) $\frac{1}{2x-2}+\frac{3}{x^2-1}\le\frac{1}{4}$ 25) $\frac{2}{b^2-1}\ge -1$

Nelle seguenti N e D sono GIA' "di tipo particolare"

26) $\frac{x^4-2}{x^3-2}>0$ 27) $\frac{x^4+2}{x^3+2}>0$ 28) $\frac{(x+3)^4}{x^3+8}<0$ 29) $\frac{(x+2)^3}{x^4}\ge 0$

Qui occorre prima scomporre

30) $\frac{x^5-x}{x^4-81}>0$ 31) $\frac{x^6-x^3-2}{x^8+15x^4-16}\ge 0$ 32) $\frac{a^8-1}{a^3-a^2-3a+3}<0$

33) $\frac{x^2(3x+2)(x^3-2)}{3-4x}<0$ 34) $\frac{12x^4-19x^2+4}{4x^2+4x-3}\le 0$ 35) $\frac{z^3-3z^2+z+5}{16z^4+40z^3+25z^2}\le 0$ 36) $\frac{x-4}{x^2+3}<0$

SOLUZIONI

1a) $1<x<2$ 1b) $1\le x<2$ 2) $x\le 1/3 \vee x>1/2$ 3) $3<x<7$ 4) $x\le 4\vee x>8$ 5) $x<5\vee x>9$

6a) $x<-3\vee 1<x<3$ 6b) $x\le -3\vee 1<x\le 3$ 7) $x<1\vee 2<x<3\vee x>4$ 8) $x<2\vee x\ge 3$ *ma* $x\ne 4$

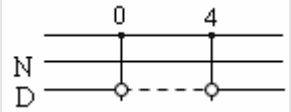
9) $-\sqrt{2}<x<1-\sqrt{2}\vee\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ 10a) $x>1$ *ma* $x\ne 7$ 10b) $x>1$ 10c) $x>1$ *ma* $x\ne 7$

10d) $x\ge 1$ *ma* $x\ne 7$ 11) $x\le -1\vee x>0$ *ma* $x\ne 1$ 12) $-3<x<1$ *ma* $x\ne 0\vee 2<x<3$

13) $-2<x<-\sqrt{2}\vee 0<x<\sqrt{2}\vee x>2$ 14) $x>-2$ *ma* $x\ne 0$ 15) $-1<x\le 0\vee 1<x\le 8$

16) $-3\le x<-1$ 17) $a<3$ *ma* $a\ne -3$ 18) $x>6\vee x=0$

19) $x<0\vee x>4$ ⇨



20) $x<0\vee x>4$ 21) $-\frac{\sqrt{5}}{2}<d<\frac{\sqrt{5}}{2}$ *ma* $d\ne -1$ 22) $x<-\frac{7}{4}\vee\frac{1}{2}<x<2$

23) $x\le -1\vee 0<x\le 1\vee x\ge 2$ 24) $x\le -3\vee -1<x<1\vee x\ge 5$ 25) $b<-1\vee b>1$ 26) $-\sqrt[4]{2}<x<\sqrt[4]{2}\vee x>\sqrt[3]{2}$

27) $x>-\sqrt[3]{2}$ 28) $x<-2$ *ma* $x\ne -3$ 29) $x\ge -2$ *ma* $x\ne 0$ 30) $-3<x<-1\vee 0<x<1\vee x>3$

31) $x<1$ *ma* $x\ne -1\vee x\ge\sqrt[3]{2}$ 32) $a<-\sqrt{3}\vee -1<a<\sqrt{3}$ *ma* $a\ne 1$ 33) $-\frac{2}{3}<x<\frac{3}{4}$ *ma* $x\ne 0\ \vee\ x>\sqrt[3]{2}$

34) $-\frac{3}{2}<x\le -\frac{2\sqrt{3}}{3}\vee -\frac{1}{2}\le x\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *ma* $x\ne\frac{1}{2}$ 35) $z\le -1$ *ma* $z\ne -\frac{5}{4}$

36) $x<4$ Qui *eccezionalmente* il D potrebbe andarsene, perché è >0 per ogni x! ⇨

ALTRI ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI FRATTE (soluzioni alla pagina seguente)

1) $\frac{x-8}{x+2}<0$ 2) $\frac{4x-5}{2x-3}\le 0$ 3) $\frac{4x-4}{3x-15}>0$ 4) $\frac{x-5}{2}>0$ 5) $\frac{x+1}{x+3}<0$ 6) $\frac{x+1}{x+3}\le 0$

7) $\frac{5x+1}{4x+1}>0$ 8) $\frac{5x+1}{4x+1}\ge 0$ 9) $\frac{2x}{x-4}<0$ 10) $\frac{2x}{x-4}<1$ 11) $\frac{1}{x+3}>0$ 12) $\frac{3}{x-5}\le 0$

13) $\frac{1-2x}{2-x}<0$ 14) $\frac{x}{5-x}\ge 0$ 15) $\frac{4-x}{x}\ge 2$ 16) $\frac{1}{x}\ge\frac{3}{2x}$ 17) $\frac{1}{7-x}<0$ 18) $\frac{6}{7-x}<3$

19) $\frac{x^2-9x+20}{x^2-5x+6}<0$ 20) $\frac{x^2-x-12}{x-1}\le 0$ 21) $\frac{10x-5}{x^2-3x+2}>0$ 22) $\frac{x^2-1}{x^2-4x+4}\ge 0$

23) $\frac{x^2-9x+14}{x^2-15x+14}\ge 0$ 24) $\frac{x^2}{x^2-8x+15}\le 0$ 25) $\frac{x^2+14}{x^2-6x+14}>0$ 26) $\frac{x^2-14}{x^2-14x}\le 0$

27) $\frac{12x^2-7x+1}{3x^2-13x+4}<0$ 28) $\frac{6x^2+5x-1}{x^2-4x-1}\ge 0$ 29) $\frac{x^2-2x}{x^2-2x+5}<0$ 30) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-3}>0$

31) $\frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+3}<0$ 32) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+2}<0$ 33) $\frac{49x^2+14x+1}{24x^2+10x+1}<0$ 34) $\frac{x-4}{x^2-10x+16}\le 0$

35) $\frac{x^2-4x}{x^2-1}\ge 0$ 36) $\frac{x^2-4x+1}{2x^2}\ge 0$ 37) $\frac{x^2-x+2}{3x^2-12x}>0$ 38) $\frac{x+4}{x^2+4}>0$

39) $\frac{8-2x-x^2}{8+2x-x^2}>0$ 40) $\frac{x-x^2}{x^2-12x+35}>0$ 41) $\frac{2(x+1)^2}{3(x^2+1)}\le 0$ 42) $\frac{(x+3)^2}{x^2}>0$

43) $\frac{x^2-11x+30}{x-6}>0$ 44) $\frac{x^2-x}{x^2+2x}<0$ 45) $\frac{2x^2+6x+4}{x^2-2x+2}\le 0$ 46) $\frac{6x-x^2-5}{x^2-2x\sqrt{2}+2}>0$

47) $\frac{1}{x}>x$ 48) $\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}\le 2$ 49) $\frac{x^2+x}{x-1}-1>0$ 50) $\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-2}$

51) $\frac{x^4-x^2}{x^4+x^2-6}>0$ 52) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x-2}\le 0$ 53) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-3x^2-4x+12}>0$ 54) $\frac{4x^4+3x^2-1}{4x^4-3x^2-1}\le 0$

55) $\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^3-x}\ge 0$ 56) $\frac{x^5-5x^3+6x}{4x+6}\ge 0$ 57) $\frac{1}{x^2}\ge\frac{1}{x^4}$ 58) $\frac{3x^3+x+2}{x^3}\ge 2$

59) $\frac{(x-3)^4}{(x-4)^3}<0$ 60) $\frac{x^4-625}{x^4+625}<0$ 61) $\frac{x^3-64}{x^3+64}>0$ 62) $\frac{x^6}{x^4-3}>0$

63) $\frac{x^4+3}{x^7}>0$ 64) $\frac{12+x^2(x^2-1)}{x^4}>0$ 65) $\frac{x^4-x^2-12}{x^4}>1$ 66) $\frac{x^4-10x^2+9}{x^6-10x^3+9}>0$

67) $\frac{(x+3)^3}{x^3+3}\le 0$ 68) $\frac{(x+3)^4}{x^4+3}\le 0$ 69) $\frac{x^4}{x^4-x^2+2x-1}<0$ 70) $\frac{x^6-x^2}{x^5-x^2}>0$

71) $\frac{x^2+3x-4}{4+3x-x^2}\le 0$ 72) $\frac{5}{x^7+3}<0$ 73) $\frac{5}{x^7+3}<1$ 74) $\frac{x^4-x}{x^4}<1$

75) $\frac{x^4-1}{x^4+x^2}<2$ 76) $1+x<\frac{2}{x}$ 77) $1+x^2<\frac{2}{x^2}$ 78) $1+x^3<\frac{2}{x^3}$

79) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3\ge 0$ 80) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^4\ge 0$ 81) $\frac{x^3+1}{x^3-2}<0$ 82) $\frac{x^4+1}{x^4-2}<0$

♥ RIFLESSIONE METODOLOGICA MOLTO IMPORTANTE

$\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^3-2x^2}<0$	In una disequazione fratta nella quale N e/o D siano di grado sup. al 2°, **INNANZITUTTO** bisogna **SCOMPORRE sia il N che il D in fattori** ciascuno dei quali deve essere: o di **1° grado**, o di **2° grado**, oppure **"di tipo particolare"**

Infatti, se si fa in questo modo, si ottiene la situazione seguente: $\frac{\overset{N_1}{(x-1)}\overset{N_2}{(x^2-9)}}{\underset{D_1}{x^2}\underset{D_2}{(x-2)}}<0$

e basterà allora studiare il segno di ogni singolo fattore in gioco
e PASSARE POI SUBITO ALLO SCHEMA FINALE, CHE AVRA' 4 RIGHE:

N_1 ...
N_2 ...
D_1 ...
D_2 ...

☺ **… TUTTO MOLTO VELOCE E TRANQUILLO!**

SE INVECE non si scompone, il procedimento diventa INUTILMENTE LUNGO E NOIOSO!

$\frac{N}{\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^3-2x^2}<0}$ $\quad$ $\frac{}{D}$

N > 0, FATTORIZZAZIONE seguita da un ***PRIMO SCHEMA***
D > 0, FATTORIZZAZIONE seguita da un ***SECONDO SCHEMA***
... e infine lo SCHEMA CONCLUSIVO N ... D ...

☹ **CHE BARBA !!!**



SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI della pagina precedente

1) $-2<x<8$ 2) $5/4\le x<3/2$ 3) $x<1\vee x>5$ (volendo, si poteva semplificare …)
4) $x>5$ (il denominatore, costante positiva, se ne può andare!) 5) $-3<x<-1$ 6) $-3<x\le -1$
7) $x<-1/4\vee x>-1/5$ 8) $x<-1/4\vee x\ge -1/5$ 9) $0<x<4$ 10) $-4<x<4$ 11) $x>-3$
12) $x<5$ 13) $1/2<x<2$ 14) $0\le x<5$ 15) $0<x\le 4/3$ 16) $x<0$ 17) $x>7$ 18) $x<5\vee x>7$
19) $2<x<3\vee 4<x<5$ 20) $x\le -3\vee 1<x\le 4$ 21) $1/2<x<1\vee x>2$ 22) $x\le -1\vee x\ge 1\wedge x\ne 2$
23) $x<1\vee 2\le x\le 7\vee x>14$ 24) $3<x<5\vee x=0$ 25) $\forall x\in\mathbb{R}$ 26) $-\sqrt{14}\le x<0\vee\sqrt{14}\le x<14$
27) $1/4<x<4\wedge x\ne 1/3$ 28) $x\le -1\vee 2-\sqrt{5}<x\le 1/6\vee x>2+\sqrt{5}$ 29) $0<x<2$
30) $x<-\sqrt{3}\vee x>\sqrt{3}\wedge x\ne 3$ 31) $1<x<3$ 32) $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}\wedge x\ne 2$
33) $-1/4<x<-1/6$ 34) $x<2\vee 4\le x<8$ 35) $x<-1\vee 0\le x<1\vee x\ge 4$
36) $x\le 2-\sqrt{3}\vee x\ge 2+\sqrt{3}\wedge x\ne 0$ 37) $x<0\vee x>4$ 38) $x>-4$
39) $x<-4\vee -2<x<2\vee x>4$ 40) $0<x<1\vee 5<x<7$ 41) $x=-1$ 42) $x\ne -3\wedge x\ne 0$
43) $x>5\wedge x\ne 6$ 44) $-2<x<1\wedge x\ne 0$ 45) $-2\le x\le -1$ 46) $1<x<5\wedge x\ne\sqrt{2}$
47) $x<-1\vee 0<x<1$ 48) $x<2\vee x\ge 4\wedge x\ne -3$ 49) $x>1$ 50) $1<x<2$
51) $x<-\sqrt{2}\vee(-1<x<1\wedge x\ne 0)\vee x>\sqrt{2}$ 52) $-1\le x<2$ 53) $x<-2\vee(0<x<2\wedge x\ne 1)\vee x>3$
54) $-1<x\le -1/2\vee 1/2\le x<1$ 55) $x\le -1-\sqrt{2}\vee -1<x<0\vee x\ge -1+\sqrt{2}\wedge x\ne 1$
56) $x\le -\sqrt{3}\vee -3/2<x\le -\sqrt{2}\vee 0\le x\le\sqrt{2}\vee x\ge\sqrt{3}$ 57) $x\le -1\vee x\ge 1$ 58) $x\le -1\vee x>0$
59) $x<4\wedge x\ne 3$ 60) $-5<x<5$ 61) $x<-4\vee x>4$ 62) $x<-\sqrt[4]{3}\vee x>\sqrt[4]{3}$ 63) $x>0$
64) $x\ne 0$ 65) impross. 66) $x<-3\vee(-1<x<\sqrt[3]{9}\wedge x\ne 1)\vee x>3$ 67) $-3\le x<-\sqrt[3]{3}$ 68) $x=-3$
69) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\wedge x\ne 0$ 70) $x>-1\wedge x\ne 0\wedge x\ne 1$ 71) $x\le -4\vee -1<x\le 1\vee x>4$
72) $x<-\sqrt[7]{3}$ 73) $x<-\sqrt[7]{3}\vee x>\sqrt[7]{2}$ 74) $x>0$ 75) $x\ne 0$ 76) $x<-2\vee 0<x<1$ 77) $-1<x<1\wedge x\ne 0$
78) $x<-\sqrt[3]{2}\vee 0<x<1$ 79) $x\le -1\vee x>2$ 80) $x\ne 2$ 81) $-1<x<\sqrt[3]{2}$ 82) $-\sqrt[4]{2}<x<\sqrt[4]{2}$

15. SISTEMI DI DISEQUAZIONI

L'obiettivo di un **sistema** (di equazioni, di disequazioni, misto)
è sempre di determinare per quali valori dell'incognita, o delle incognite,
sono verificate **CONTEMPORANEAMENTE TUTTE** le condizioni che compongono il sistema.

Per risolvere un sistema di disequazioni,

A) PRIMA SI RISOLVERA' SEPARATAMENTE OGNI SINGOLA DISEQUAZIONE;

B) POI si traccerà uno SCHEMA "DI INTERSEZIONE",
che mostri in un quadro "sinottico" per quali valori è verificata ciascuna disequazione
e permetta così di stabilire per quali valori sono verificate contemporaneamente tutte.

Esempio 1:

$$\begin{cases} (x-4)^2 \le x^2 \\ \dfrac{x-1}{x-4} \le 0 \end{cases}$$

NOTA

Due differenze fondamentali fra i sistemi di DISEQuazioni e i sistemi di EQuazioni:

1) *in un sistema di disequazioni abbiamo UNA SOLA incognita*
(disequazioni in più incognite, e sistemi con esse, si incontrano in determinati contesti, e si affrontano in generale con metodi grafici, ma noi qui non ce ne occuperemo)

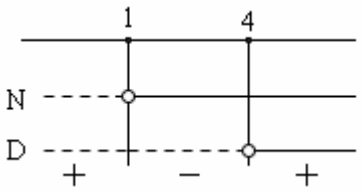
2) *in un sistema di disequazioni, queste non vengono fatte "interagire" fra loro, ma, come abbiamo detto, le si risolve separatamente, una per una.*

1ª disequazione:

$(x-4)^2 \le x^2 \quad \cancel{x^2} - 8x + 16 \le \cancel{x^2} \quad -8x \le -16 \quad 8x \ge 16 \quad \boxed{x \ge 2}$ **1ª diseq.** $S_1 = [2, +\infty)$

2ª disequazione:

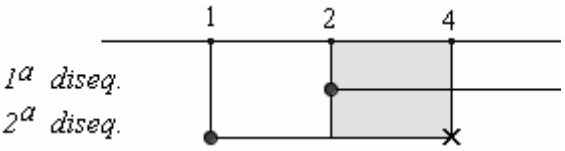
$$\frac{\overset{N}{x-1}}{\underset{D}{x-4}} \le 0 \qquad \begin{matrix} N > 0 & x-1 > 0 & x > 1 \\ D > 0 & x-4 > 0 & x > 4 \end{matrix}$$



$\boxed{1 \le x < 4}$ **2ª diseq.**

$S_2 = [1, 4)$

SCHEMA DI SISTEMA (= SCHEMA DI INTERSEZIONE):



SOLUZIONI DEL SISTEMA:

$\boxed{2 \le x < 4}$

$S = S_1 \cap S_2 = [2, 4)$

♥ **SIMBOLOGIA IN UNO SCHEMA DI SISTEMA:**
linea continua, pallino pieno
DISEQUAZIONE VERIFICATA
nessuna linea, crocetta di esclusione
DISEQUAZIONE NON VERIFICATA

Uno schema di sistema è anche chiamato "**schema di intersezione**": infatti l'insieme S delle soluzioni del sistema costituisce l'intersezione fra gli insiemi S_1, S_2, … delle soluzioni delle singole condizioni che compongono il sistema.

Esempio 2:

$$\begin{cases} (x-1)^4 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \\ (x-2)^3 \le 0 \end{cases}$$

1ª disequazione:

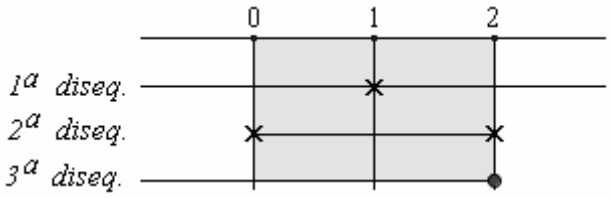
$(x-1)^4 > 0 \quad x \ne 1$

2ª disequazione:

$x^2 - 2x < 0 \quad x(x-2) < 0 \quad 0 < x < 2$

3ª disequazione:

$(x-2)^3 \le 0 \quad x - 2 \le 0 \quad x \le 2$



SOLUZIONI SISTEMA:

$\boxed{0 < x < 2 \ \text{ ma } \ x \ne 1}$

In forma insiemistica:

$S_1 = \mathbb{R} - \{1\}$ *opp.* $(-\infty, +\infty) - \{1\}$ *opp.* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$S_2 = (0, 2)$

$S_3 = (-\infty, 2]$

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (0,2) - \{1\}$ *oppure* $(0,1) \cup (1,2)$

OSSERVAZIONI UTILI

- **Se**, nell'ambito di un sistema, si nota che
  due delle condizioni sono "INCOMPATIBILI" fra loro,
  ossia: **non possono essere verificate contemporaneamente,**
  allora si può immediatamente concludere che **il sistema è impossibile**.

  Es. $\begin{cases} x > 6 \\ 1 < x < 8 \\ x < 4 \end{cases}$ *La prima e la terza condizione sono in contraddizione fra loro, sono incompatibili: non c'è alcun valore di x che le possa soddisfare entrambe simultaneamente. Il sistema è impossibile.*

- **La presenza anche di una sola condizione IMPOSSIBILE, rende impossibile tutto il sistema**.

  Es. $\begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ x^2 > 8x + 7 \\ x^2 + 1 < 0 \end{cases}$ *Si vede subito che la terza condizione è impossibile. Non perdiamo tempo: il sistema è impossibile.*

- **Invece una condizione SEMPRE VERIFICATA** ($\forall x \in \mathbb{R}$)
  non pone alcun vincolo all'incognita,
  e di conseguenza **è irrilevante nell'ambito del sistema: essa può essere, volendo, eliminata**
  (se comunque la si tiene, nello schema finale ad essa corrisponderà una linea continua
  di "condizione sempre verificata", e tale linea continua sarà, ovviamente, ininfluente).

  Es. $\begin{cases} x^2 > 9 \\ 3(x+1) > 4(x-1) \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases}$ *Si vede subito che la terza condizione è sempre verificata. Essa è allora irrilevante: se vogliamo, possiamo eliminarla dal sistema, e le soluzioni di questo non cambieranno.*

- **Sovente lo "schema di intersezione" è superfluo**, perché (almeno in situazioni semplici)
  può essere rimpiazzato da considerazioni elementari, che si possono fare a mente.

  ♪ Ad esempio, è subito evidente che il sistema $\begin{cases} x > 2 \\ x < 5 \end{cases}$ ha come soluzioni: $2 < x < 5$

  ♫ **FRA DUE O PIÙ CONDIZIONI "EQUIVERSE", PREVALE LA PIÙ RESTRITTIVA**,
  ossia quella che lascia all'incognita minore "libertà":

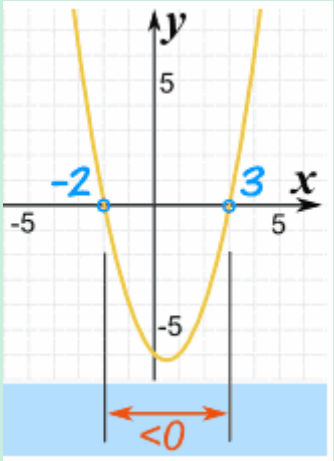
  $\begin{cases} x > 1 \\ x > 4 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow x > 7$ *Fra le tre condizioni con lo stesso verso, la più "restrittiva", quella che lascia meno libertà a x, è la x>7, che "obbliga" x a stare "a destra del 7". Ciascuna delle altre due lascia a disposizione di x un piccolo spazio in più.*

  $\begin{cases} x > 0 \ * \\ x < 2 \ ** \\ x > 1 \ * \\ x < 3 \ ** \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \ * \\ x < 2 \ ** \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$

DISEQUAZIONI SU INTERNET

♪ Dal sito www.themathpage.com del professor Lawrence Spector:
INEQUALITIES ⇨
(The number line, "Or" versus "and", … , Solving inequalities)

♫ Dal sito www.mathsisfun.com
(da cui è tratta l'immagine qui a fianco):
SOLVING QUADRATIC INEQUALITIES ⇨



ESERCIZI SUI SISTEMI DI DISEQUAZIONI

1) $\begin{cases} x^2 < 3x \\ 2x \geq x+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x+5} < 0 \\ x^2 \leq x(x+1) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 < 2x-3 \\ x^2 < 3x-2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 > x+6 \\ 3(x-1) < 3x-2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x-1} \geq 1 \\ 7x \geq x^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 > x+2 \\ \dfrac{x-7}{x} \leq 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} < \dfrac{x}{3} \\ 3(x+2) < 5x \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ 2x < x+3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x \leq 5 \\ x < 5 \\ x \leq 4 \\ x < 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{4-x}{x} \geq 0 \quad \boxed{\dfrac{4-x}{x} \geq 0} \\ \dfrac{6-x}{2-x} \leq 0 \quad \boxed{\dfrac{6-x}{2-x} \leq 0} \end{cases}$ si può riscrivere, se si preferisce, come $-\dfrac{x-4}{x} \geq 0$ e quindi come $\boxed{\dfrac{x-4}{x} \leq 0}$ si può riscrivere, volendo, come $\boxed{\dfrac{x-6}{x-2} \leq 0}$ perché se si cambiano simultaneamente di segno sia il numeratore che il denominatore, una frazione non varia

12) $\begin{cases} 2x^2 < 2x+3 \\ 2x-1 > \dfrac{x}{3} \end{cases}$ 13) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-1} < 0 \\ x^2-9 > 0 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x+1 \geq 3x-1 \\ x \leq 2(x+2) \\ x^2+3x < 10 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \dfrac{3x-4}{x-6} \leq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x} \leq 0 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x^4 > 2x^3 \\ \dfrac{x^3-4}{x^4-4} < 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 16x^4+3 > 0 \\ 16x^4-3 \geq 0 \\ 3x^4+16 > 16x^2 \\ \dfrac{1}{x^2} \geq 0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{7-x} \leq 0 \\ \dfrac{4x}{x+4} \leq 0 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} 8x^6-7x^3-1 > 0 \\ x^4\left(16x^4+15\right) \geq 1 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 2x^2+3 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \\ 2x < 2x^2+4 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x^2+2 \geq 3x \\ 1 \geq \dfrac{x}{2} \\ 2x^2+1 > x \end{cases}$

SOLUZIONI

1) $\boxed{2 \leq x < 3}$ 2) $\boxed{0 \leq x < 5}$ 3) $\boxed{\text{impross.}}$ 4) $\boxed{x < -2 \vee x > 3}$ 5) $\boxed{0 \leq x < 1 \vee 4 \leq x \leq 7}$ 6) $\boxed{2 < x \leq 7}$

7) $\boxed{\begin{array}{l} 3 < x < 9: \\ S = (3, 9) \end{array}}$ 8) $\boxed{\begin{array}{l} x \leq -2 \ \vee \ 2 \leq x < 3: \\ S = (-\infty, -2] \cup [2, 3) \end{array}}$ 9) $\boxed{1 \leq x < 4}$ 10) $\boxed{x \geq 1}$

11) $\boxed{2 < x \leq 4}$ 12) $\boxed{\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}}$ 13) $\boxed{3 < x < 5}$ 14) $\boxed{-4 \leq x < 2}$

15) 1^a *diseq.*: $-1 \leq x < 6 \quad S_1 = [-1, 6)$

2^a *diseq.*: $x \leq -1 \ \vee \ 0 < x \leq 1 \quad S_2 = (-\infty, -1] \cup (0, 1]$

Sistema: $\boxed{\begin{array}{l} x = -1 \vee 0 < x \leq 1 \\ S = S_1 \cap S_2 = \{-1\} \cup (0,1] \end{array}}$

16) 1^a *diseq.*: $x < 0 \vee x > 2$

2^a *diseq.*: $x < -\sqrt{2} \ \vee \ \sqrt{2} < x < \sqrt[3]{4}$

Sistema: $\boxed{\begin{array}{l} x < -\sqrt{2} \\ S = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \end{array}}$

17) 1^a *diseq.*: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 2^a$ *diseq.*: $x \leq -\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2} \vee x \geq \dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$

3^a *diseq.*: $x < -2 \vee -\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \vee x > 2$ $\quad 4^a$ *diseq.*: $x \neq 0$

Sistema: $\boxed{S = (-\infty, -2) \cup \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup (2, +\infty)}$

18)

1^a *diseq.*: $x \leq 3 \vee x > 7$

2^a *diseq.*: $-4 < x \leq 0$

Sistema:

$\boxed{-4 < x \leq 0: \ S = (-4, 0]}$

19) 1^a *diseq.*: $x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1$

2^a *diseq.*: $x \leq -\dfrac{1}{2} \vee x \geq \dfrac{1}{2}$

Sistema: $\boxed{\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1 \\ S = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \end{array}}$

20) $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Sistema: $\boxed{\begin{array}{l} x \neq 2 \\ S = \mathbb{R} - \{2\} = \\ = (-\infty, +\infty) - \{2\} = \\ = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \end{array}}$

21) $\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ x \leq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

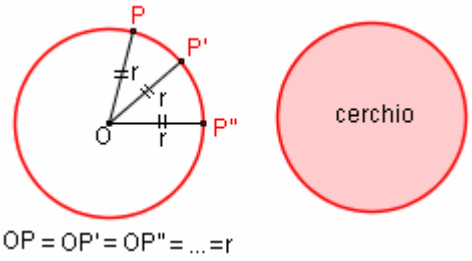
Sistema: $\boxed{\begin{array}{l} x \leq 1 \vee x = 2 \\ S = (-\infty, 1] \cup \{2\} \end{array}}$

GEOMETRIA Cap. 6: LA CIRCONFERENZA

6.1 - DEFINIZIONI

Siano: O un punto fissato del piano, r un segmento fissato.

- Si dice "**circonferenza**" di centro O e raggio r
  il luogo dei punti del piano
  la cui distanza da O è uguale a r.
- Si dice "**cerchio**" di centro O e raggio r
  il luogo dei punti del piano
  la cui distanza da O è minore o uguale a r.



Con simbologia insiemistica avremo:

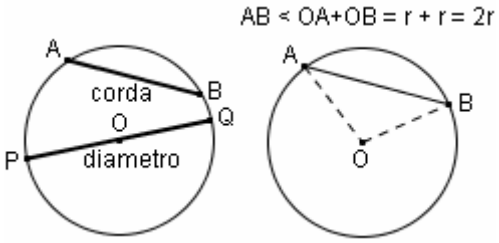
$$\textit{circonferenza di centro O e raggio r} = \{P \in \text{piano} \ / \ OP = r\}$$

$$\textit{cerchio di centro O e raggio r} = \{P \in \text{piano} \ / \ OP \le r\}$$

Quindi il "cerchio" è l'insieme formato dai punti di una circonferenza, più anche tutti i punti interni a questa.
E perciò, **mentre la CIRCONFERENZA è una LINEA, il CERCHIO è una SUPERFICIE**.

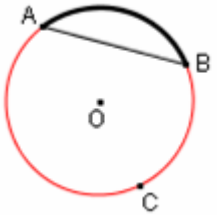
E' evidente (e, volendo, facilmente dimostrabile, con considerazioni su movimenti rigidi e sovrapposizioni) che se due circonferenze, o due cerchi, hanno ugual raggio allora sono uguali (=congruenti, sovrapponibili esattamente).

- Un segmento che congiunga due punti di una circonferenza prende il nome di "**corda**".
- Si dice "**diametro**" ogni corda passante per il centro.



Tutti i diametri di una stessa circonferenza sono uguali fra loro, essendo ciascuno il doppio del raggio.

E' facile dimostrare (vedi figura) che
una corda non passante per il centro è sempre minore del diametro:
basta congiungere le estremità della corda col centro, e ricordare che
in un triangolo ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due.



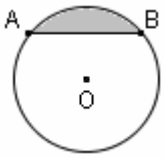
Nella figura qui a sinistra: i due archi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{ACB}$

- Si dice "**arco**" una parte di circonferenza compresa fra due punti della circonferenza stessa (detti "gli estremi" dell'arco in questione)

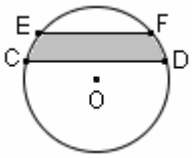
L'arco di estremi A, B si indica col simbolo $\overset{\frown}{AB}$. Poiché, tuttavia, esistono non uno solo, ma DUE archi di estremi A e B, in caso di ambiguità si prenderà un altro punto qualsiasi C all'interno dell'arco che si vuole considerare, e si parlerà di arco $\overset{\frown}{ACB}$ (= arco che va da A fino a B, passando per C).

Si suol dire che l'arco $\overset{\frown}{AB}$ "sottende" la corda AB (e, quindi, si dirà che la corda AB "è sottesa" dall'arco $\overset{\frown}{AB}$).

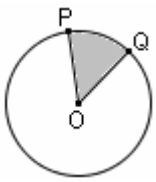
Una corda divide il cerchio in due parti: ciascuna di queste due superfici si dice "**segmento circolare a una base**".



"**Segmento circolare a due basi**" è la parte di cerchio compresa fra due corde parallele (in altre parole, l'intersezione di un cerchio con una striscia).

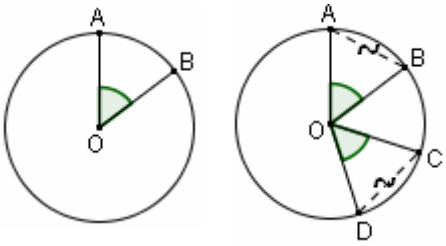


Anche tracciando due raggi il cerchio ne risulta suddiviso in due parti: ciascuna di queste prende il nome di "**settore circolare**".



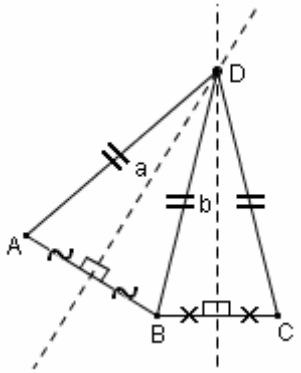
Si dice "**angolo al centro**" un angolo che abbia il suo vertice nel centro della circonferenza.

E' facile dimostrare (immaginando di sottoporre il cerchio ad un movimento rigido e precisamente a una rotazione intorno al centro O) che **in uno stesso cerchio, ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali, corde uguali e settori uguali**; e che **valgono anche i vari "viceversa" di questo teorema.**
Ovviamente, le stesse affermazioni restano valide anche se, invece di pensare ad un solo cerchio, ci si riferisce a due cerchi uguali.



6.2 - TEOREMI FONDAMENTALI SULLA CIRCONFERENZA

TEOREMA
Per tre punti non allineati (cioè: che non giacciono su di una stessa retta) passa una circonferenza ed una sola.



IPOTESI

A, B, C non allineati

TESI

Esiste
una
e una sola
circonferenza,
che passa per i tre punti A, B, C

Dimostrazione

ESISTENZA

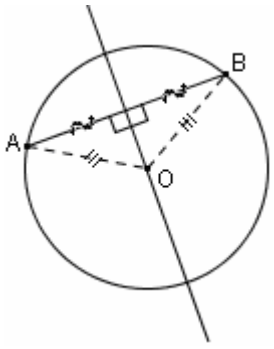
Siano a, b gli assi dei due segmenti AB e BC.
Osserviamo che le due rette a, b devono per forza incontrarsi, perché sono perpendicolari a due rette incidenti.
Più in dettaglio: se, per assurdo, a e b fossero parallele, allora a, oltre ad esser perpendicolare ad AB, cadrebbe perpendicolarmente anche sul prolungamento di BC (in quanto parallela ad una perpendicolare a BC), e si formerebbe un triangolo con due angoli retti, il che è impossibile.
Sia dunque D il punto di incontro dei suddetti due assi a, b.
Ricordiamo che l'asse di un segmento (cioè, la perpendicolare a quel segmento nel suo punto medio) risulta essere il luogo geometrico dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento dato.
Perciò, poiché D appartiene all'asse di AB, avremo DA=DB;
e poiché D appartiene anche all'asse di BC, sarà pure DB=DC.
In definitiva, avremo DA=DB=DC e, di conseguenza, puntando il compasso in D con apertura DA, la circonferenza tracciata passerà anche per B e per C.
L'esistenza di una circonferenza passante per tutti e tre i punti A, B, C è così dimostrata.

UNICITA'

Tale circonferenza è poi unica, perchè la posizione del suo centro è univocamente determinata.
Infatti, esclusivamente il punto D della costruzione da noi effettuata
ha la proprietà di essere equidistante da A, B e C:
se un punto O è tale che OA=OB=OC, allora O deve stare sia sull'asse di AB (per il fatto che OA=OB) che sull'asse di BC (per il fatto che OB=OC),
quindi deve per forza coincidere col punto di intersezione di tali due assi, ovvero con D.

- OSSERVAZIONE
  Il teorema precedente si potrebbe anche enunciare dicendo che "Tre punti non allineati INDIVIDUANO una circonferenza ed una sola".
  Il termine "individuare" in Matematica è adoperato per indicare che "ad un certa cosa si può associare, in modo unico, una certa altra cosa".
  Altri esempi:
  - *Due punti distinti su di un piano "individuano" una retta.*
  - *Una coppia ordinata di interi, il secondo dei quali $\neq 0$, "individua" un numero razionale*

TEOREMA
La perpendicolare ad una corda condotta dal centro della circonferenza dimezza la corda stessa (quindi, ne è asse).



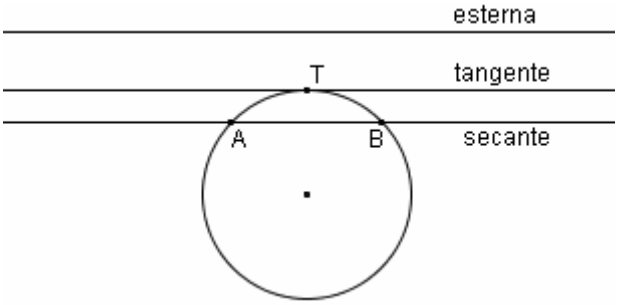
Per la dimostrazione, basta congiungere gli estremi della corda col centro: si forma un triangolo che è isoscele, perciò l'altezza relativa alla base fa anche da mediana.

TEOREMA
L'asse di ogni corda passa per il centro.

Conseguenza del teorema precedente.
Oppure, in modo ancora più diretto, si può ragionare così:
il centro è equidistante dagli estremi della corda, perciò appartiene all'asse di questa.

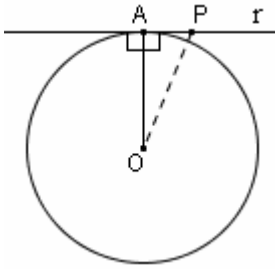
6.3 - POSIZIONI RECIPROCHE DI UNA RETTA E DI UNA CIRCONFERENZA

DEFINIZIONE
Una retta si dice **ESTERNA**, oppure **TANGENTE**, oppure **SECANTE** rispetto ad una circonferenza a seconda che abbia, rispettivamente:
nessun punto in comune, o **un solo punto** in comune, oppure **due punti** in comune con la circonferenza.



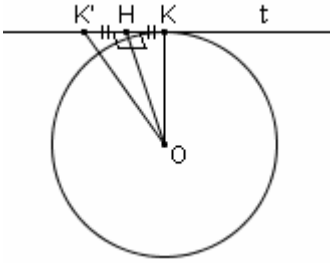
TEOREMA
La perpendicolare ad un raggio nel suo estremo (NOTA) è tangente alla circonferenza.

NOTA. - *Parlando di "estremo" di un raggio si sottintende che si tratti dell'estremo non coincidente col centro, vale a dire dell'estremo che sta sulla circonferenza.*



Dimostrazione
In una circonferenza di centro O, sia OA un raggio, e sia r la retta per A, perpendicolare ad OA (ipotesi); vogliamo dimostrare (tesi) che r non ha in comune con la circonferenza nessun punto oltre al punto A.
Infatti, preso su r un punto qualsiasi P distinto da A, il segmento OP, essendo l'ipotenusa del triangolo rettangolo OAP, è maggiore del cateto OA.
Pertanto P NON può stare sulla circonferenza, perché la sua distanza dal centro è maggiore del raggio.

TEOREMA
Una tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio passante per il (= avente un estremo nel) punto di contatto.



Dimostrazione
Sia t una retta tangente alla circonferenza (ipotesi), cioè una retta che abbia in comune con la circonferenza un solo punto, che abbiamo indicato con K.
Vogliamo dimostrare (tesi) che t e OK sono perpendicolari.

Infatti, se per assurdo OK non fosse perpendicolare a t, allora calando da O la perpendicolare a t questa incontrerebbe t in un punto H, distinto da K.
Prendiamo dunque sulla tangente t, a partire da H e da parte opposta rispetto a K, un segmento HK' = KH.
Si dimostra subito (OKH = OK'H per il Primo Criterio) che OK' = OK.
Pertanto K' sta sulla circonferenza, perché la sua distanza OK' dal centro è uguale a OK che è un raggio.
Ma avevamo supposto che t avesse in comune con la circonferenza soltanto il punto K!!! L'assurdo trovato dimostra la tesi.

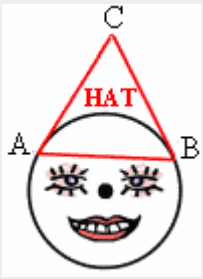
Dagli ultimi due teoremi si deduce immediatamente il

COROLLARIO
Se una retta ha distanza dal centro uguale al raggio, allora è tangente alla circonferenza, e viceversa.

Qualche semplice considerazione complementare porta anzi al seguente enunciato più completo:

TEOREMA
Una retta è SECANTE, TANGENTE o ESTERNA rispetto ad una circonferenza a seconda che la sua distanza dal centro della circonferenza sia, rispettivamente, MINORE, UGUALE o MAGGIORE del raggio della circonferenza stessa.

TEOREMA
(the "Hat" Theorem = il Teorema "del Cappello"!)
Vedi anche pagina successiva a questo riguardo



Se da un punto esterno si conducono le due tangenti ad una circonferenza, allora:

I) i due segmenti di tangente sono uguali;

II) la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice
- **sia dell'angolo formato dalle due tangenti,**
- **sia dell'angolo formato dai due raggi che vanno ai punti di contatto;**

III) infine, tale congiungente è l'asse della corda avente per estremi i punti di contatto.

IPOTESI

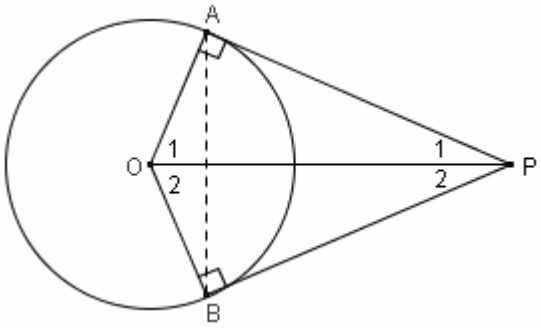
PA, PB tangenti

TESI

I) PA = PB

II) $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$; $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

III) PO è l'asse di AB



DIMOSTRAZIONE

I) Basta confrontare i due triangoli POA, POB.
Essi sono entrambi rettangoli
perché una tangente è sempre perpendicolare al raggio che va al punto di contatto,
e sono uguali per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli
(ipotenusa OP in comune, OA = OB perché raggi di una stessa circonferenza).
Segue subito la tesi.

II) Conseguenza immediata dell'uguaglianza di triangoli dimostrata per la parte I)

III) Il punto P è equidistante dagli estremi del segmento AB (infatti PA = PB come già dimostrato);
quindi, P appartiene all'asse di AB. Lo stesso dicasi del punto O:
si ha OA = OB perché entrambi raggi, quindi O appartiene all'asse di AB.
Ma allora PO, congiungente due punti dell'asse di AB, *è* l'asse di AB, c.v.d.

Vedi la pagina a fianco per una trattazione molto sintetica, in Inglese, dell'argomento "rette tangenti", compreso il precedente "Teorema del Cappello".

Potrai osservare come in lingua Inglese diversi nomi di teoremi siano particolarmente azzeccati!
Nel nome, infatti, sovente abbiamo anche una schematizzazione molto efficace dell'enunciato.

Già avevamo visto a suo tempo come i tre Criteri di Uguaglianza dei Triangoli
vengono detti, in Inglese, rispettivamente:
- the **Side-Angle-Side Theorem (SAS): 1° Criterio**
- the **Angle-Side-Angle Theorem (ASA): 2° Criterio**
- the **Side-Side-Side Theorem (SSS): 3° Criterio**

Qui potrai notare altre denominazioni molto "indovinate", quali:
- the **"Hat" theorem** appunto
- the **Hypotenuse Leg Postulate,**
  ossia quello che noi avevamo chiamato
  "Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli":
  "Se due triangoli rettangoli hanno rispettivamente uguali
  l'ipotenusa (Hypothenuse) e un cateto (Leg),
  allora sono uguali".
  L'uso qui del termine "Postulate" anziché "Theorem" ci fa capire che nella loro organizzazione della Geometria, gli autori del sito www.regentsprep.org da cui è tratta la pagina hanno ritenuto di inserire questo enunciato fra gli Assiomi o Postulati anziché fra i Teoremi.

  NOTA: *lato* (di triangolo, o di poligono) = **Side**; *cateto*, in un triangolo rettangolo = **Leg**

Dal sito www.regentsprep.org:

Tangents and Circles

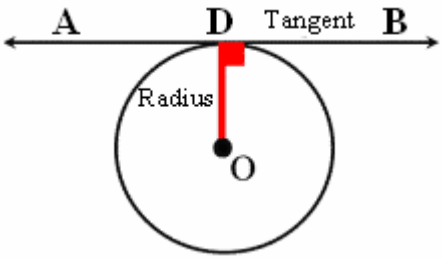
A **tangent to a circle** is a line in the plane of the circle that intersects the circle in exactly one point.



If you spin an object
in a circular orbit
and release it,
it will travel on a path
that is tangent
to the circular orbit.

Theorem:

**If a line is tangent to a circle,
it is perpendicular to the radius
drawn to the point of tangency**.



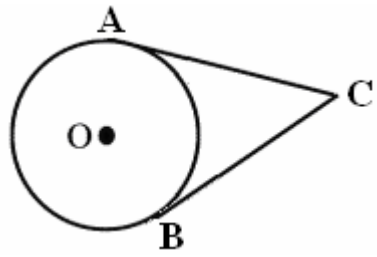
IF: AB is a tangent
D is point of tangency

THEN: OD ⊥ AB

Theorem:

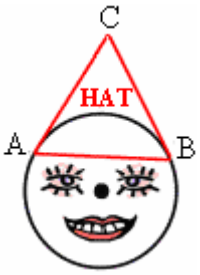
**Tangent segments to a circle
from the same external point
are congruent.**

(You may think of this as
the "Hat" Theorem
because the diagram looks like
a circle wearing a pointed hat.)

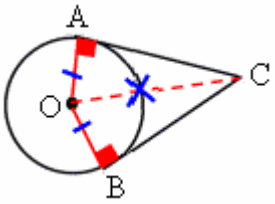


IF: AB is a tangent to circle O at A
CB is a tangent to circle O at C

THEN: CA = CB

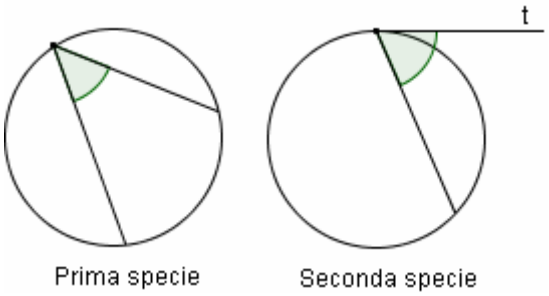


This theorem can be proven using congruent triangles and the previous theorem.
The triangles shown below are congruent by the Hypotenuse Leg Postulate for Right Triangles.
The radii (legs) are congruent and the hypotenuse is shared by both triangles.
By using Corresponding Parts of Congruent Triangles are Congruent, this theorem is proven true.

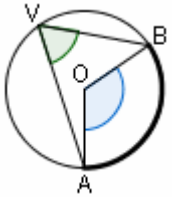


6.4 - ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA E ANGOLI AL CENTRO

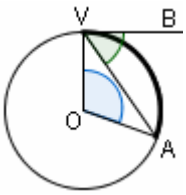
Def. Si dice "**angolo alla circonferenza**" un angolo avente il **vertice sulla circonferenza**, e i **lati**
i) **ENTRAMBI SECANTI** la circonferenza (angolo alla circonferenza "di **prima specie**")
ii) oppure **UNO SECANTE E L'ALTRO TANGENTE** (angolo alla circ. "di **seconda specie**")



Per un angolo alla circonferenza,
l'angolo al centro "CORRISPONDENTE"
è quello che **contiene lo stesso arco**,
o, come si usa dire, che "**insiste sullo stesso arco**".



$A\hat{V}B$ e $A\hat{O}B$ sono corrispondenti ←



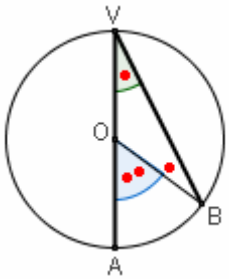
$A\hat{V}B$ e $A\hat{O}V$ sono corrispondenti ←

TEOREMA
Ogni angolo alla circonferenza è uguale a metà dell'angolo al centro corrispondente.

Per la **dimostrazione**, occorre **distinguere vari casi** (l'angolo alla circonf. sarà sempre indicato con $A\hat{V}B$).

♪ **1° CASO: $A\hat{V}B$ sia di 1ª SPECIE; si possono avere TRE SOTTOCASI, a seconda che il centro:**

1) appartenga a uno dei lati dell'angolo

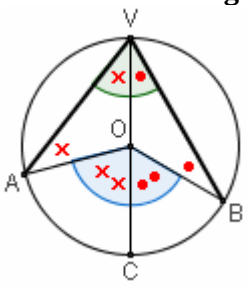


$A\hat{O}B$ = $A\hat{V}B + \hat{B}$ = $2A\hat{V}B$
(teorema angolo esterno, tr. OBV; OBV isoscele quindi $A\hat{V}B=\hat{B}$)

perciò

$\mathbf{A\hat{V}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B}$ c.v.d.

2) sia interno all'angolo

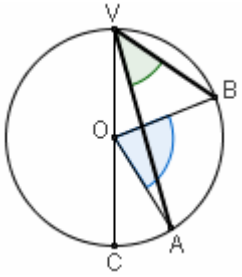


$A\hat{V}C = \frac{1}{2}A\hat{O}C$ (sottocaso prec.)

$C\hat{V}B = \frac{1}{2}C\hat{O}B$ (sottocaso prec.)

$\underbrace{A\hat{V}C + C\hat{V}B}_{A\hat{V}B} = \frac{1}{2}\underbrace{(A\hat{O}C + C\hat{O}B)}_{A\hat{O}B}$ c.v.d.

3) sia esterno all'angolo

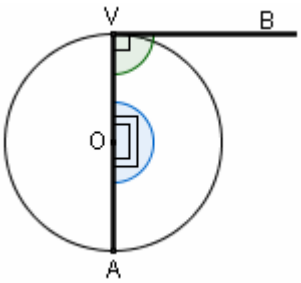


Lasciata al bravo lettore. Per differenza anziché per somma … La TH è

$\mathbf{A\hat{V}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B}$

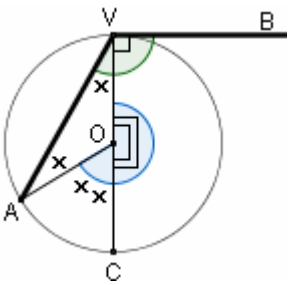
♫ **2° CASO: $A\hat{V}B$ sia di 2ª SPECIE; si possono avere TRE SOTTOCASI, a seconda che il centro:**

1) appartenga a uno dei lati dell'angolo



Semplicissimo: $A\hat{V}B = 90°$
perché una tangente ad una circonf. è sempre perpendicolare al raggio che va al punto di contatto;
ma $A\hat{O}V = 180°$;
pertanto $\mathbf{A\hat{V}B = \frac{1}{2}A\hat{O}V}$ c.v.d.

2) sia interno all'angolo

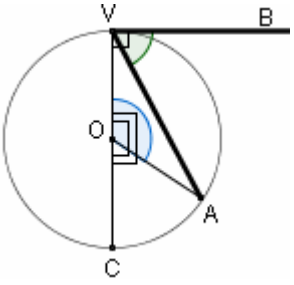


$A\hat{V}C = \frac{1}{2}A\hat{O}C$ (1° caso, 1°sott.)

$C\hat{V}B = \frac{1}{2}C\hat{O}V$ (2° caso, 1°sott.)

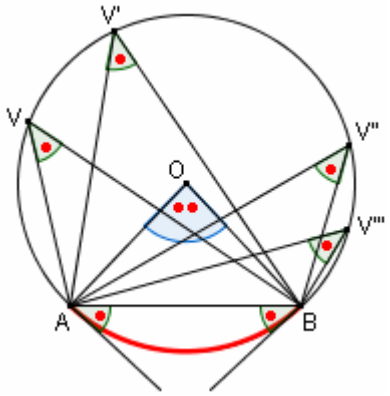
$\underbrace{A\hat{V}C + C\hat{V}B}_{A\hat{V}B} = \frac{1}{2}\underbrace{(A\hat{O}C + C\hat{O}V)}_{A\hat{O}V_{concavo}}$ c.v.d.

3) sia esterno all'angolo



Lasciata al diligente lettore. Per differenza anziché per somma …
La tesi è $\mathbf{A\hat{V}B = \frac{1}{2}A\hat{O}V}$

COROLLARIO 1
Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco sono uguali.



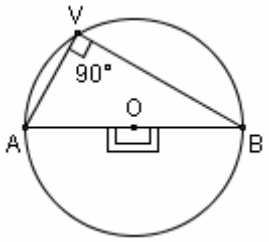
Infatti sono tutti uguali a metà dello stesso angolo al centro!

Nella figura:

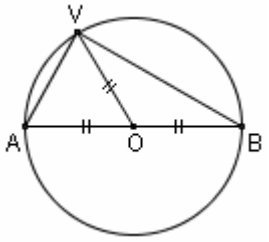
$$\hat{V} = \hat{V}' = \hat{V}'' = \hat{V}''' = \ldots$$

perché sono tutti uguali a $\frac{1}{2}A\hat{O}B$.

COROLLARIO 2
Un angolo alla circonferenza che insiste su di una semicirconferenza
(o, come si preferisce dire, che "è inscritto" in una semicirconferenza;
o, come si suole anche dire seppure impropriamente, che "insiste su un diametro"),
è RETTO.

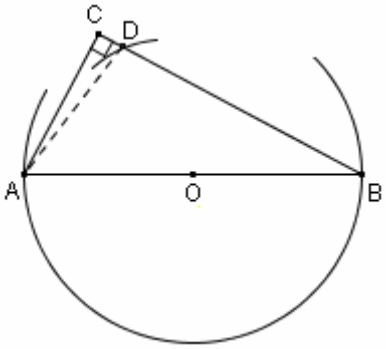


Nella figura, l'angolo alla circonferenza $A\hat{V}B$
"**insiste**" sulla semicirconferenza
che va da A fino a B, e NON passa per V;
si può anche dire (e, in effetti, *si preferisce* dire)
che "**è inscritto**" nell'**altra** semicirconferenza
(quella che va da A fino a B, passando per V).
Bene! $A\hat{V}B$ è retto, perché è metà
dell'angolo al centro corrispondente $A\hat{O}B$
che è piatto.



IN ALTERNATIVA ,
la dimostrazione dello stesso enunciato
si potrebbe anche effettuare
applicando, al triangolo ABV, il teorema secondo cui
"se in un triangolo la mediana relativa ad un lato
è metà del lato stesso,
allora il triangolo è rettangolo
(e, precisamente, l'angolo retto
è quello opposto al lato in questione)".

COROLLARIO 3
In un triangolo rettangolo, la circonferenza avente per diametro l'ipotenusa
passa per il vertice dell'angolo retto.



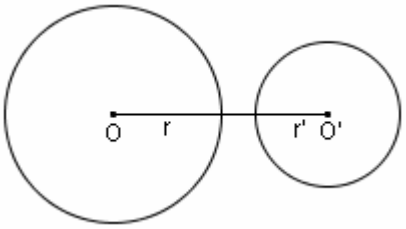
Questo teorema, che può essere pensato come l'inverso
del precedente corollario 2, si può dimostrare in diversi modi.
Ad esempio, è bella la seguente dimostrazione per assurdo.

Sia ABC un triangolo rettangolo in C;
se la circonferenza di diametro AB non passasse per C,
allora intersecherebbe il lato BC (o il suo prolungamento)
in un punto D distinto da C.
Perciò l'angolo $A\hat{D}B$ sarebbe retto perché inscritto in una
semicirconferenza, ed essendo pure retto (per ipotesi) l'angolo $A\hat{C}B$,
dal punto A si potrebbero condurre alla retta BC
due distinte perpendicolari,
mentre sappiamo che la perpendicolare
per un punto dato a una retta data è unica.

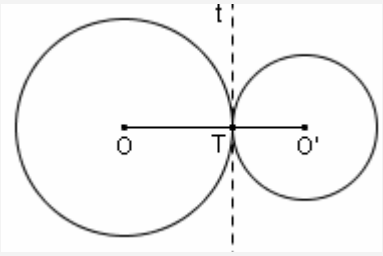
L'assurdo trovato dimostra la tesi.

6.5 - POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE CIRCONFERENZE

Due circonferenze (per tutte le figure di questa pagina, s'intende di indicare i due raggi con r ed r') possono essere: **esterne, tangenti esternamente, secanti, tangenti internamente, interne**.



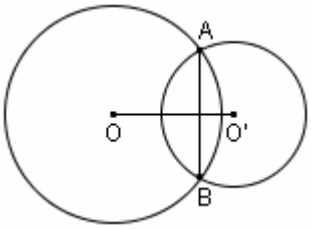
Nel caso di due **circonferenze ESTERNE** si ha
OO' > r + r'
(vale a dire, la distanza fra i centri
è maggiore della somma dei raggi)



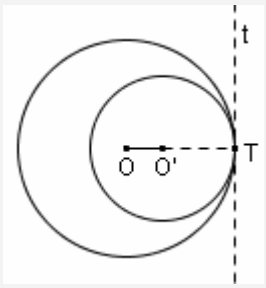
NOTA - Dire che
"la congiungente i due centri
passa per il punto di contatto"
equivale, evidentemente, a dire che
"i due raggi tracciati
da ciascun centro al punto di contatto
stanno uno sul prolungamento
dell'altro (=formano angoli di 180°)"

Nel caso di due circonferenze TANGENTI ESTERNAMENTE i due centri e il punto di contatto sono allineati
(in altre parole, *la congiungente i due centri passa per il punto di contatto; vedi NOTA*).
Ciò è del tutto evidente all'intuizione
per motivi di simmetria; ma è anche dimostrabile
(vedi APPROFONDIMENTO 1 alla pagina successiva).
Ne deriva che **OO' = r + r'**
(**la distanza fra i centri è uguale alla somma dei raggi**)

Nel punto di contatto, le due circonferenze ammettono una retta tangente comune:
infatti la perpendicolare ad OO'
passante per il punto di contatto T
- è tangente alla circonferenza di centro O
  (perché perpendicolare al raggio OT nel suo estremo)
- ed è anche tangente alla circonferenza di centro O'
  (perché perpendicolare al raggio O'T nel suo estremo)

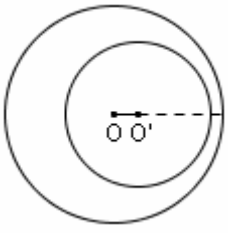


Nel caso di due **circonferenze SECANTI**, si ha
OO' < r + r'
E' inoltre facile dimostrare
(APPROFONDIMENTO 2 alla pagina successiva)
che **la congiungente i centri (OO')**
è l'asse della corda comune (AB)



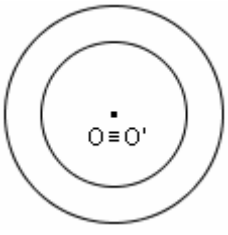
Anche nel caso di due **circonferenze TANGENTI INTERNAMENTE** si può dimostrare
(come d'altronde si intuisce per evidenti motivi di simmetria)
che **i due centri e il punto di contatto sono allineati**,
ossia che *la congiungente i due centri, se prolungata, passa per il punto di contatto*, oppure, volendo, che
i due raggi aventi un estremo nel punto di contatto sono parzialmente sovrapposti).
Ne deriva che **OO' = r – r'** (se r' è il raggio più piccolo):
la distanza fra i centri è uguale alla differenza dei raggi.

La perpendicolare ad OO' nel punto di contatto T,
essendo simultaneamente perpendicolare ai due raggi OT e O'T
nel loro estremo, è tangente ad entrambe le circonferenze.



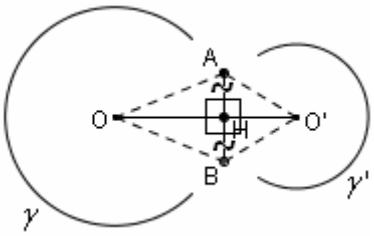
Nel caso delle **circonferenze INTERNE**, si avrà
OO' < r – r'

Un **caso particolare di circonferenze interne** è rappresentato da due **circonferenze CONCENTRICHE** (= aventi lo stesso centro).



APPROFONDIMENTO 1

Nel caso di due circonferenze tangenti esternamente i due centri e il punto di contatto sono allineati
(in altre parole, la congiungente i due centri passa per il punto di contatto).

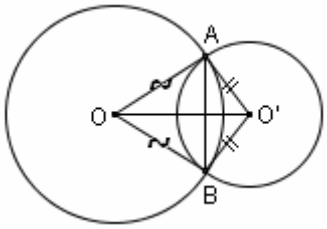


L'enunciato è evidente all'intuizione per simmetria; tuttavia, dimostriamolo.
Siano γ, γ' due circonferenze tangenti esternamente;
indichiamo con O e O' i loro centri, con A il loro punto di contatto.
Se, per assurdo, A NON stesse sulla congiungente OO',
allora potremmo andare a considerare il punto B,
simmetrico di A rispetto alla congiungente OO' (ossia, il punto B ottenibile tracciando da A il segmento AH perpendicolare ad OO', poi prolungandolo di un segmento HB = AH).
Avremmo subito le uguaglianze AHO = BHO e AHO' = BHO' (1° Criterio)
da cui si trarrebbe OB = OA e O'B = O'A.
Ma OB = OA significa che anche OB, al pari di OA, è un raggio della circonferenza γ, e ciò implica $B \in \gamma$.
Analogamente, O'B = O'A significa che anche O'B, al pari di O'A, è un raggio di γ', e ciò implica $B \in \gamma'$.
Avendosi ora $B \in \gamma$ e $B \in \gamma'$ ne deriva che le due circonferenze hanno in comune *anche* il punto B,
e *non soltanto* il punto A: non sono quindi tangenti, come avevamo supposto.
L'assurdo trovato dimostra la tesi.

APPROFONDIMENTO 2

Nel caso di due circonferenze secanti, la congiungente i centri (OO') è l'asse della corda comune (AB).

Questo enunciato si può dimostrare in più modi diversi, ad esempio ragionando nel modo seguente.



Poiché OA = OB,
il punto O è equidistante dagli estremi del segmento AB
per cui appartiene al suo asse;
d'altra parte, essendo O'A = O'B, anche il punto O' è equidistante dagli estremi del segmento AB e quindi appartiene al suo asse.
Ma allora, sia O che O' appartengono all'asse del segmento AB;
in altre parole, l'asse di AB passa sia per O che per O':
l'asse di AB si identifica con la retta OO'.

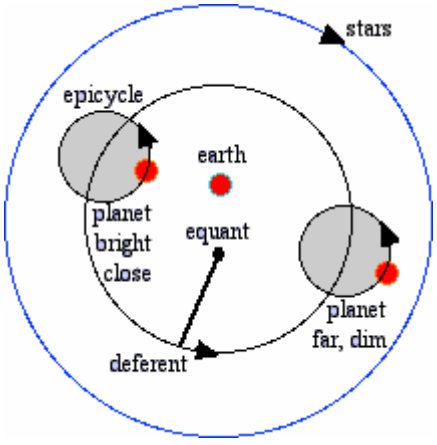
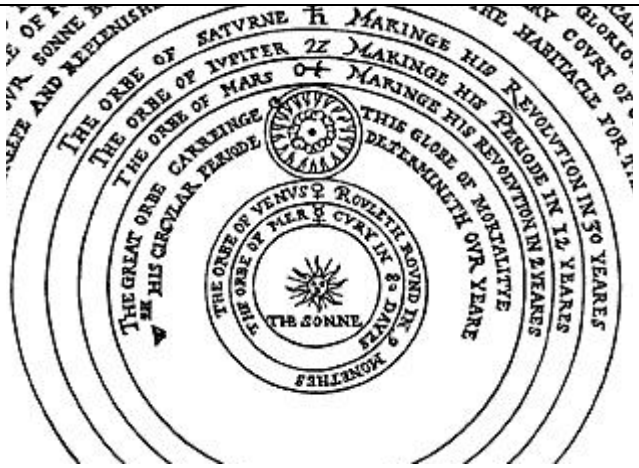


Immagine tratta dal sito http://web.me.com/dtrapp/ di Dave Trapp



Apollonio (III secolo A.C.), Ipparco (II secolo A.C.) e Tolomeo (II secolo D.C.) erano così convinti che i movimenti dei corpi celesti non potessero avere altra forma se non quella "perfetta" della circonferenza, che per conciliare questo assioma con le concrete osservazioni del cielo elaborarono complicati sistemi di "epicicli", "deferenti", "eccentrici" ed "equanti" con cui, a loro parere, le apparenti irregolarità osservabili nel moto dei pianeti erano interpretabili come l'effetto di una combinazione di moti, ciascuno dei quali, per conto suo, era esattamente circolare.

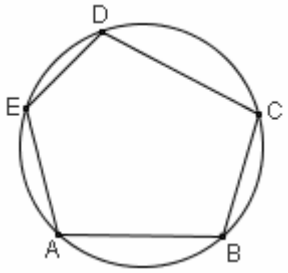
Quest'altra immagine rappresenta invece la visione del sistema solare di Thomas Digges, un astronomo inglese del XVI secolo che abbracciò la teoria eliocentrica di Copernico, ma che comunque rappresentava ancora le orbite dei pianeti come delle perfette circonferenze concentriche.
Fu il tedesco Johannes Kepler (1571-1630), noto in Italia come "Keplero", a sostenere per primo che i pianeti non descrivono traiettorie circolari bensì ellittiche.
Il paragrafo sulle *coniche* (pag. 98) dice qualcosa in più sulle orbite dei corpi celesti.

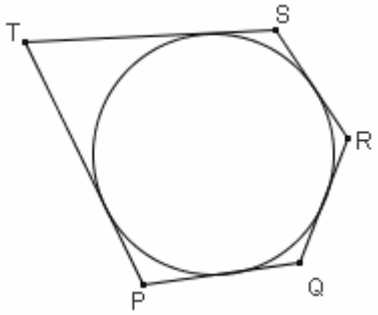
6.6 - POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI AD UNA CIRCONFERENZA

Definizione

Un poligono si dice:

"**inscritto** in una circonferenza" **se tutti i suoi vertici stanno sulla circonferenza**	"**circoscritto** ad una circonferenza" **se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza**





Se un poligono è **inscritto** in una circonferenza, si dice che questa circonferenza è "**circoscritta**" al poligono; e se un poligono è **circoscritto** ad una circonferenza, questa si dirà "**inscritta**" nel poligono.

PROPRIETA' DEI QUADRILATERI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

TEOREMA
In un quadrilatero inscritto, o inscrivibile, in una circonferenza, gli angoli opposti sono supplementari.

IPOTESI ABCD inscritto (o inscrivibile) in una circonferenza

TESI $\hat{A}+\hat{C}=180°, \quad \hat{B}+\hat{D}=180°$

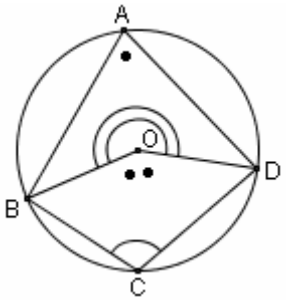
Dimostrazione

$\hat{A}=\frac{1}{2}B\hat{O}D_{convesso}$ (angolo alla circ., angolo al centro corrispondente)

$\hat{C}=\frac{1}{2}B\hat{O}D_{concavo}$ (")

$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{1}{2}B\hat{O}D_{convesso}+\frac{1}{2}B\hat{O}D_{concavo}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(B\hat{O}D_{convesso}+B\hat{O}D_{concavo}\right)=\frac{1}{2}\cdot 360°=180°$$

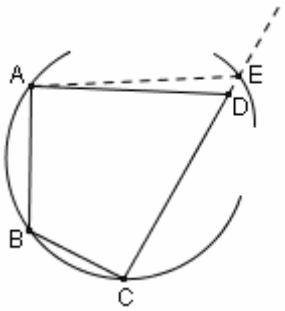


… e analogamente, tracciando OA e OC, per la somma $\hat{B}+\hat{D}$.

TEOREMA (inverso del precedente)
Un quadrilatero con gli angoli opposti supplementari è inscrivibile in una circonferenza.

IPOTESI ABCD ha gli angoli opposti supplementari: $\hat{A}+\hat{C}=180°; \quad \hat{B}+\hat{D}=180°$

TESI ABCD è inscrivibile in una circonferenza
(= esiste una circonferenza, che passi per tutti e quattro i punti A, B, C, D)



Dimostrazione

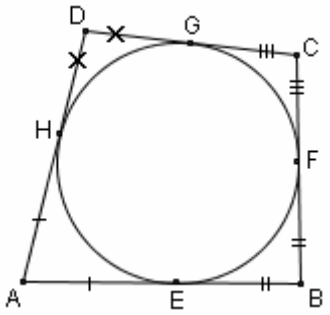
Consideriamo la circonferenza (certamente esistente, per un teorema noto) che passa per i tre punti A, B, C: vogliamo dimostrare che essa contiene anche D. Infatti, se, per assurdo, tale circonferenza NON passasse per D, allora intersecherebbe la retta CD in un punto E, distinto da D (NOTA).

Il quadrilatero ABCE sarebbe dunque inscritto in una circonferenza, e di conseguenza, per il teorema diretto, avrebbe gli angoli opposti supplementari; in particolare, $A\hat{E}C$ sarebbe supplementare di $\hat{B}$.
Ma anche $A\hat{D}C$ è, per ipotesi, supplementare di $\hat{B}$, quindi si avrebbe $A\hat{E}C = A\hat{D}C$:
entreremmo così in contraddizione col Teorema dell'Angolo Esterno (applicato al triangolo AED).

NOTA:
il punto E potrebbe trovarsi all'interno del segmento CD, oppure su uno dei suoi prolungamenti; comunque il ragionamento da farsi è, in entrambi i casi, il medesimo.

TEOREMA. In un quadrilatero circoscritto, o circoscrivibile, ad una circonferenza, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

IPOTESI ABCD circoscritto (o circoscrivibile) ad una circonferenza
TESI AB+DC = AD+BC



Dimostrazione

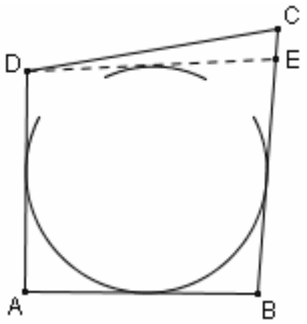
Molto semplice, basata sul "teorema del Cappello", quello secondo il quale i due segmenti di tangente condotti a una circonferenza da un punto esterno sono uguali.

$$\begin{gathered} AE = AH \\ BE = BF \\ CG = CF \\ DG = DH \end{gathered}$$

$$\underbrace{AE + BE + CG + DG}_{AB+DC} = \underbrace{AH + BF + CF + DH}_{AD+BC}$$

TEOREMA (inverso del precedente)
Un quadrilatero in cui la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due, è circoscrivibile ad una circonferenza.

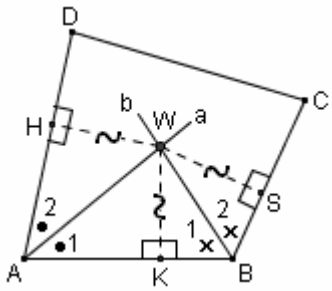
IPOTESI AB+DC = AD+BC
TESI ABCD è circoscrivibile ad una circonferenza
(= esiste una circonf., che sia tangente a tutti e quattro i lati di ABCD)



Dimostrazione

Consideriamo la circonferenza tangente a TRE dei quattro lati, ad esempio ai lati AD, AB e BC (NOTA); vogliamo dimostrare che tale circonferenza è tangente anche al lato rimanente DC. Infatti, se, per assurdo, la circonferenza in questione *non* fosse tangente a DC, allora, conducendo da D l'altra tangente (oltre a DA) alla circonferenza, tale tangente sarebbe una retta distinta da DC, e, quindi, andrebbe a intersecare la retta BC in un punto E, distinto da C.
Il quadrilatero ABED risulterebbe, dunque, circoscrivibile ad una circonf., e di conseguenza, per il teor. diretto, la somma di due suoi lati opposti sarebbe uguale alla somma degli altri due: $AB + DE = AD + BE$.
Tuttavia si ha anche, per ipotesi, $AB + DC = AD + BC$ …
… quindi da quanto scritto seguirebbe, sottraendo membro a membro, che $DC - DE = BC - BE$.
Ma $BC - BE = CE$, e allora nel triangolo CDE un lato sarebbe uguale alla differenza degli altri due: assurdo.

NOTA Occorre però, se si vuol esser rigorosi, dimostrare l'ESISTENZA di detta circonferenza.
A tale scopo, consideriamo la bisettrice a dell'angolo $\hat{A}$ e la bisettrice b dell'angolo $\hat{B}$.
Ciascuno dei due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ è minore di un angolo piatto;
quindi la somma delle loro metà è minore della somma di due retti, ossia minore di un piatto.



Insomma, $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 < 180°$ e quindi le due rette a e b, non formando angoli coniugati interni supplementari, non sono parallele: si devono incontrare.
Indichiamo con W il loro punto di intersezione, e proiettiamo W su AD, AB, BC.
Poiché W appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$, avremo $WH = WK$, e poiché W appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, avremo pure $WK = WS$.
In definitiva, è $WH = WK = WS$. Se noi ora puntiamo il compasso in W con apertura uguale a $WH = WK = WS$, la circonferenza che tracceremo:

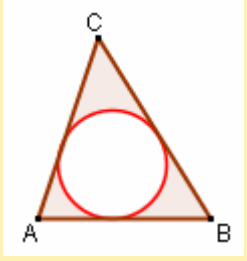
I) passerà per H, K, S;
II) e sarà tangente, in questi punti, alle tre rette AD, AB e BC, per il fatto che ciascuna di queste tre rette è perpendicolare ad un raggio nel suo estremo.

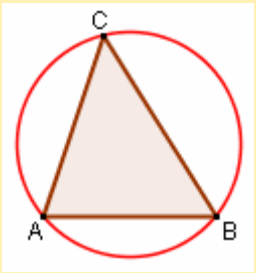
La nostra tesi (l'esistenza di una circonf., tangente a tutte e tre le rette AD, AB, BC) resta così provata.

TEOREMA

Per ogni TRIANGOLO, esistono sempre sia la circonf. inscritta che la circonf. circoscritta.

- **Il centro della circonferenza INSCRITTA coincide col punto di incontro delle BISETTRICI, ossia con l' INCENTRO;**
- **il centro della circonferenza CIRCOSCRITTA coincide col punto di incontro degli ASSI, ossia col CIRCOCENTRO.**



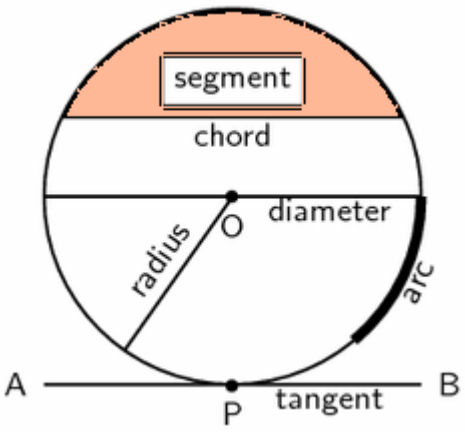


La dim. è basata su enunciati già acquisiti … comunque, puoi vederla a pag. 185.

RIPASSO della circonferenza

tramite il sito http://m.everythingmaths.co.za

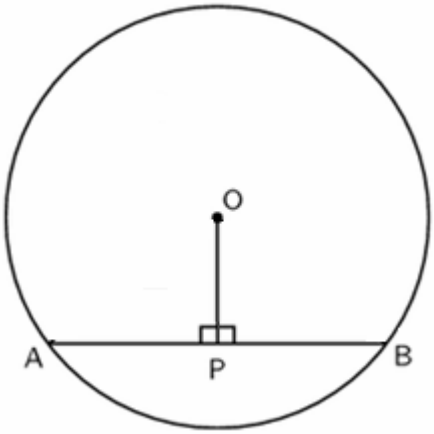
- **arc:** an arc is a part of the circumference of a circle.
  [*Circumference* si pronuncia *sə'kʌmfərəns*, con accento dopo l'apostrofo ossia sulla 2ª sillaba]
- **chord:** a straight line joining the ends of an arc.
- **radius:** a radius, r, is any straight line from the centre of the circle to a point on the circumference.
- **diameter:** a diameter, ∅ , is a special chord that passes through the centre of the circle.
  [Pronuncia *dai ˈæmitə,* accento dopo l'apostrofo]
- **segment:** a segment is the part of the circle that is cut off by a chord.
  A chord divides a circle into two segments.
- **tangent:** a tangent is a line that makes contact with a circle at one point on the circumference
  (AB is a tangent to the circle at point P)



Quali sono i termini corrispondenti in Italiano?

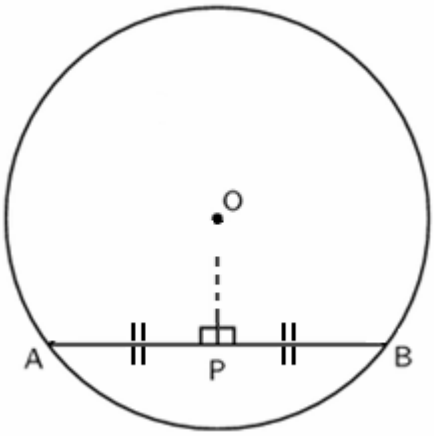
The line drawn from the centre of a circle,
perpendicular to a chord,
bisects the chord.

Come si dimostra? Si tracciano …



The perpendicular bisector of a chord
passes through the centre of the circle.

Che parola italiana usiamo di norma al posto dell'espressione inglese "perpendicular bisector"?
Come si dimostra l'enunciato?



RIPASSO della circonferenza

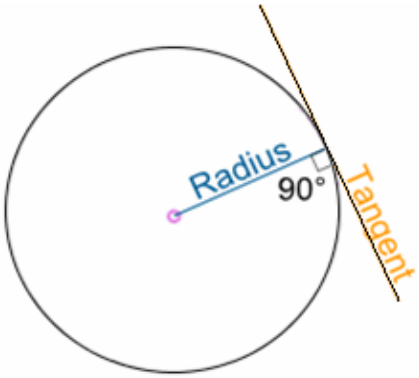
tramite il sito www.mathsisfun.com

Tangent Angle

A tangent is a line that just touches a circle at one point.

It always forms a **right angle**
with the circle's radius as shown here.

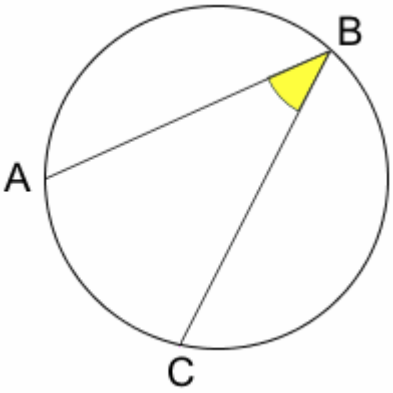
Ti ricordi la dimostrazione (per assurdo)?



Inscribed Angle:

an angle made from points sitting
on the circle's circumference

A and C are "end points"; B is the "apex point"



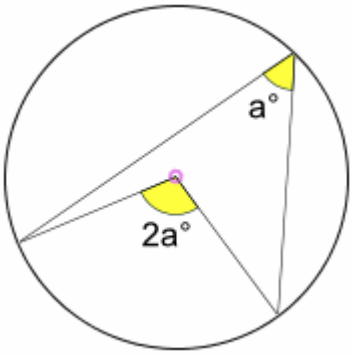
Inscribed Angle Theorems

An inscribed angle a°
is half of the central angle 2a°

(called the **Angle at the Center Theorem**)

Sapresti fare la dimostrazione
con riferimento alla figura qui a fianco?

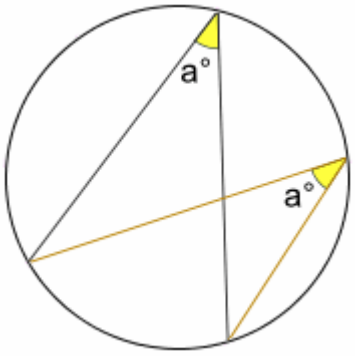
Ti ricordi quali sono gli angoli alla circonferenza
"di seconda specie"?
Vale anche per essi il teorema?



And (keeping the endpoints fixed)
the angle a° is always the same,
no matter where it is on the circumference

(**Angles Subtended by Same Arc Theorem**)

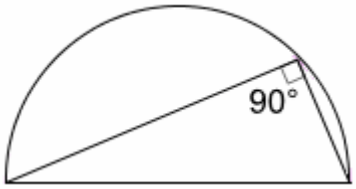
Perché questo teorema è un corollario del precedente?



Angle in a Semicircle

An angle **inscribed** in a **semicircle**
is always a right angle
(the end points are either end of a circle's diameter,
the apex point can be anywhere on the circumference)

Ti ricordi come si dimostra?



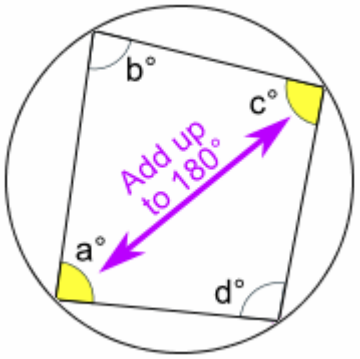
Cyclic Quadrilateral

A "Cyclic" Quadrilateral
has every vertex on a circle's circumference

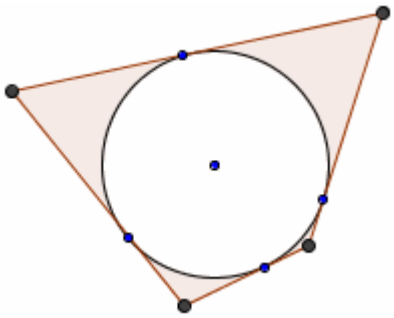
A Cyclic Quadrilateral's opposite angles add to 180°:

a° + c° = 180°; b° + d° = 180° [gradi = degrees]

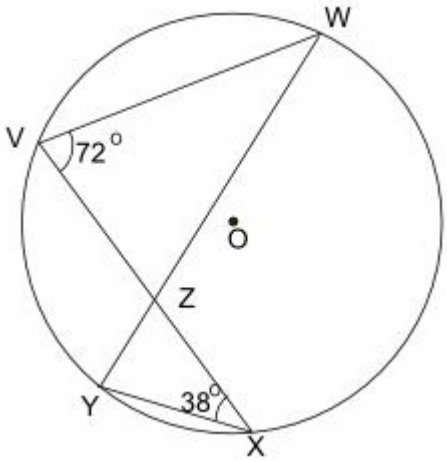
Ti ricordi come si dimostra?



E qual è, invece, la proprietà caratteristica
dei quadrilateri CIRCOscritti?
Dimostrala, utilizzando la figura qui a destra →



V, W, X and Y →
are points on the
circumference.
Chords VX and WY
intersect
at the point Z.
^ XVW = 72°
and ^VXY = 38°.
What is the size
of ^VZW?

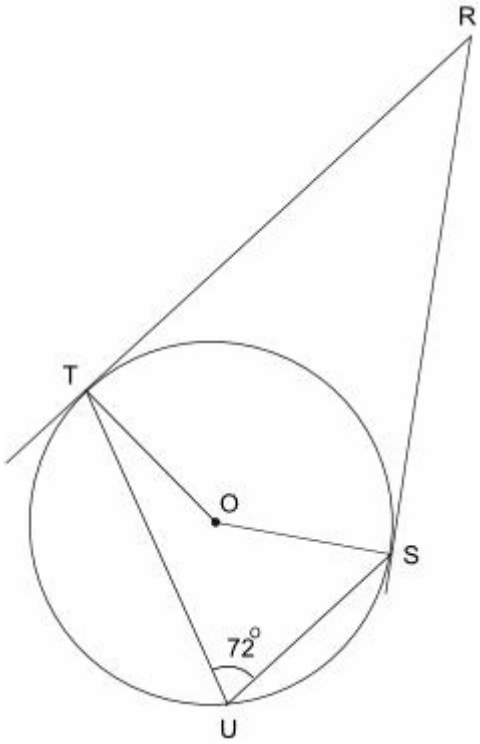


Le RISPOSTE
sono le soluzioni
delle seguenti equazioni:

$(x+12)^2 = x^2 + 4(5x+106)$ ↑

$3(x+1)+64 = 5(x-1)$ →

→
RS and RT are tangents
to the circle center O.
^SUT = 72°
What is the size
of ^SRT?



GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 6

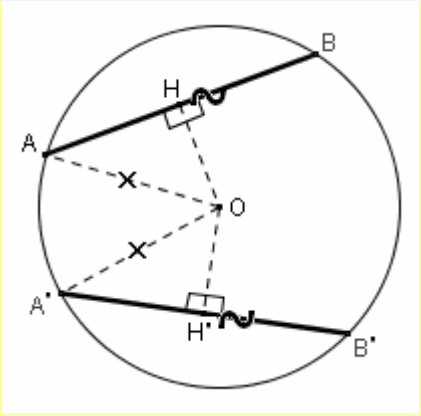
1) **ESERCIZIO SVOLTO**

In una stessa circonferenza,

a) due corde uguali hanno ugual distanza dal centro;

b) e viceversa, se due corde hanno ugual distanza dal centro, allora sono uguali.

a)



HP $AB = A'B'$, $OH \perp AB$, $OH' \perp A'B'$

TH $OH = OH'$

DIM.

Traccio i due raggi OA e OA'
e confronto i due triangoli OAH, OA'H':

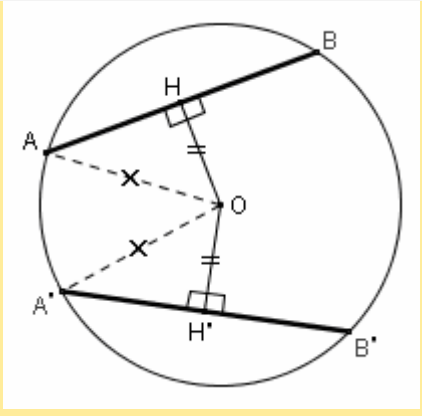
- sono entrambi rettangoli
- $OA = OA'$ (raggi di una stessa circonferenza)
- $AH \underset{*}{=} \frac{1}{2}AB \underset{\substack{\text{per HP,}\\ AB=A'B'}}{=} \frac{1}{2}A'B' \underset{*}{=} A'H'$

* *è noto che la perpendicolare a una corda condotta dal centro dimezza la corda stessa*

quindi $OAH = OA'H'$ per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli (hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto).

Segue la tesi.

b)



HP $OH \perp AB$, $OH' \perp A'B'$, $OH = OH'$

TH $AB = A'B'$

DIM.

Traccio i due raggi OA e OA'
e confronto i due triangoli OAH, OA'H':

- sono entrambi rettangoli
- $OA = OA'$ (raggi di una stessa circonf.)
- $OH = OH'$ (ipotesi)

quindi $OAH = OA'H'$ per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli.

Segue $AH = A'H'$;
allora è pure $AB \underset{*}{=} 2AH = 2A'H' \underset{*}{=} A'B'$ c.v.d.

* *AB e A'B' sono i doppi di AH e A'H' rispett., perché è noto che la perpendicolare a una corda condotta dal centro dimezza la corda stessa.*

2) ☼ **(dimostrazione guidata a pagina 186)**
Dimostra che in una circonferenza, due punti di una corda, che abbiano ugual distanza dagli estremi di questa, sono equidistanti dal centro (*Indicazione: dal centro, traccia la perpendicolare alla corda*)

3) ⇨ Dato un angolo convesso di vertice O e di lati a, b, se con centro in O si traccia una circonferenza di raggio r, che intersechi la semiretta a in A e la b in B, poi con centri A e B rispettivamente si tracciano altre due circonferenze sempre con lo stesso raggio r della precedente, allora, detto C il 2° punto di intersezione (oltre a O) di tali due ultime circonferenze, la semiretta OC è bisettrice di $a\hat{O}b$.

4) Se si traccia una circonferenza con centro nel vertice A di un triangolo isoscele ABC di base BC, e si indicano con D, E i punti in cui tale circonferenza taglia i lati obliqui (o i loro prolungamenti dalla parte della base), allora la congiungente DE è parallela a BC.

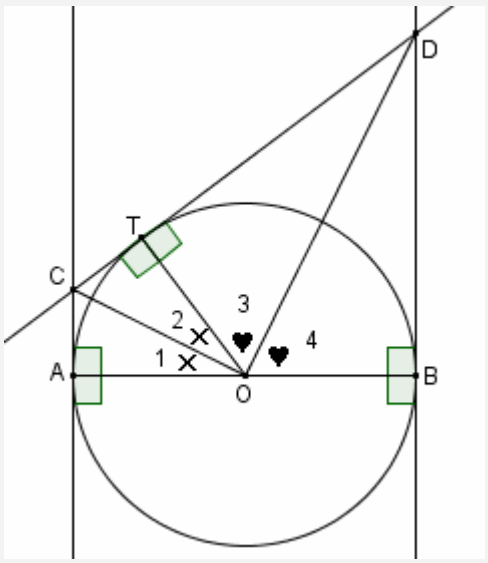
5) In una circonferenza, si tracciano un diametro AB e una corda CD ad esso parallela.
Si indicano poi con C' e D' rispettivamente, le proiezioni dei punti C e D su AB.
Dimostrare che $AC' = BD'$.

6) Se in una circonferenza due corde uguali AB e CD vengono prolungate di due segmenti uguali $BP = DQ$, allora l'asse del segmento PQ passa per il centro
(*basta dimostrare che il centro è equidistante da P e da Q ...*)

7) ⇨ Se in una circonferenza, dai due estremi di un diametro, si tracciano due corde parallele fra loro, allora: I) queste corde sono uguali II) la congiungente gli altri due estremi passa per il centro

8) **ESERCIZIO SVOLTO**

In una circonferenza di centro O, sia AB un diametro.
Condotte le tangenti alla circonferenza in A e in B,
e una terza tangente
che incontri le altre due in C e in D,
dimostrare che $C\hat{O}D$ è retto.



HP AB diametro, T punto della circonferenza
AC, BD, CD (per T) tangenti

TH $C\hat{O}D = 90°$

NOTA

♥ In generale, quando si traccia
una tangente ad una circonferenza,
è sempre consigliabile
evidenziare con un quadratino
gli angoli retti che essa forma
con il raggio che va ai punti di contatto.

DIMOSTRAZIONE

E' noto che quando da un punto esterno partono due tangenti a una circonferenza,
la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice
sia dell'angolo formato dalle due tangenti,
sia dell'angolo formato dai due raggi che vanno ai punti di contatto.

Ora, pensando alle due tangenti che si tagliano in C, ne consegue

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

e pensando alle due tangenti che si tagliano in D, ne deriva

$$\hat{O}_3 = \hat{O}_4$$

Allora, poiché $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 180°$, si avrà

$$\hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_3 = 180°$$
$$2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 180°$$
$$2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 180°$$
$$\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90°$$

ossia

$$C\hat{O}D = 90°, \text{ c.v.d.}$$

9) Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono le due tangenti,
l'angolo da queste formato e l'angolo formato dai due raggi che vanno ai punti di contatto
sono fra loro supplementari.

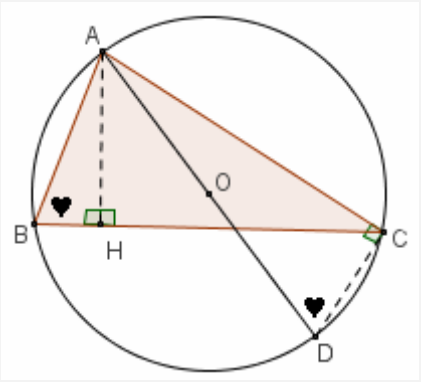
10) ⇨ Siano PA e PB le due tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno P.
Sia C un punto arbitrario, preso sul più piccolo dei due archi di estremi A e B.
Si tracci la tangente in C e si indichino con D, E i punti in cui questa tangente interseca PA e PB.
Dimostrare che il perimetro del triangolo PDE rimane costante, al variare del punto C.

11) ☼ (**dimostrazione guidata a pagina 186**)
Prese due circonferenze concentriche (sia O il centro comune),
e un punto A esterno ad entrambe,
si tracciano le due tangenti AB, AC alla circonferenza maggiore,
e le due tangenti AD, AE alla minore (con B, D situati dalla stessa parte rispetto ad AO).
E' richiesto di dimostrare che:

I. $B\hat{A}D = C\hat{A}E$
II. BCED è un trapezio isoscele
III. il punto di incontro delle diagonali di BCED sta su AO.

12) **ESERCIZIO SVOLTO**

In una circonferenza di centro O
è inscritto un triangolo ABC (vedi figura).
Si tracciano l'altezza AH e il diametro AD.
E' richiesto di dimostrare che
i due angoli $B\hat{A}H$ e $D\hat{A}C$ sono uguali



HP ABC triangolo inscritto
$AH \perp BC$

TH $B\hat{A}H = D\hat{A}C$

DIMOSTRAZIONE

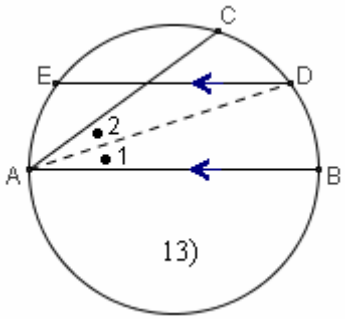
Congiungiamo C con D.
L'angolo $A\hat{C}D$ è retto perché inscritto in una semicirconferenza.
Gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{D}$ sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco.
Allora i due triangoli ABH e ADC,
poiché hanno due angoli rispettivamente uguali,
avranno uguale anche l'angolo rimanente:

$B\hat{A}H = 180° - A\hat{H}B - \hat{B} = 180° - A\hat{C}D - \hat{D} = D\hat{A}C$

13) ☼ (vedi figura; **dimostrazione guidata a pagina 187**)

Considera un angolo alla circonferenza $B\hat{A}C$,
con B e C sulla circonferenza,
tracciane la bisettrice, fino ad incontrare la circonferenza in D,
poi per D traccia la parallela al lato AB dell'angolo,
che incontri la circonferenza in E.

Dimostra a questo punto che $DE = AC$.



14) ⇨ Se i punti V, V', V", V"', ...
"vedono un segmento dato AB sotto lo stesso angolo",
vale a dire:
se $A\hat{V}B = A\hat{V}'B = A\hat{V}''B = A\hat{V}'''B = \ldots$,
allora i punti A, B, V, V', V", V"', ... stanno su di una stessa circonferenza
(*dimostra, per assurdo,*
che la circonferenza passante per i 3 punti A, B, V
deve necessariamente passare anche per V')

15) Dimostra che la circonferenza, avente per diametro uno dei lati di un triangolo,
interseca gli altri due lati nei piedi delle altezze ad essi relative.

16) Siano PA e PB le due tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno P.
Sia F un punto arbitrario, preso sul maggiore dei due archi di estremi A e B.
La somma $P\hat{A}F + P\hat{B}F$ rimane costante, al variare del punto F: dimostralo.

17) ⇨ La tangente nel punto medio di un arco è parallela alla corda sottesa dall'arco stesso;
e viceversa,
se in una circonferenza una tangente è parallela a una corda, allora
il punto di contatto è il punto medio dell'arco che sottende la corda.
NOTA - *Ricorda che in una circonferenza ad angoli al centro uguali*
corrispondono archi uguali e corde uguali, e viceversa.

18) Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T.
Tracciata per T una retta r, che intersechi la circonferenza di centro O in A,
e quella di centro O' in A', dimostrare che il raggio OA è parallelo al raggio O'A'.

19) Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T.
Tracciata per T una retta r,
che intersechi la circonferenza di centro O in A, e quella di centro O' in A',
e tracciate le tangenti in A e in A', dimostrare che tali due rette tangenti sono parallele.

20) ☼ (**dimostrazione guidata a pagina 187**)
Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T. Si traccino per T:
- una retta r, che intersechi le due circonferenze rispettivamente in A e in A',
- e una seconda retta s, che le intersechi rispettivamente in B e in B'.

Dimostrare che le due corde AB e A'B' sono parallele fra loro.

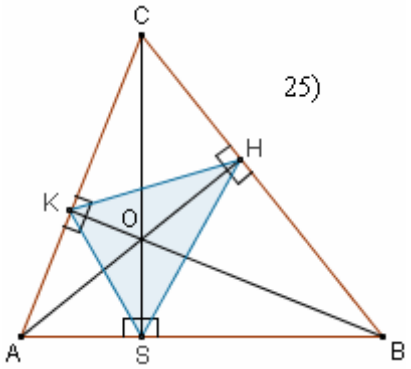
21) Due circonferenze sono tangenti internamente in B.
Dall'estremo A del diametro AB della circonferenza maggiore, si conduca una tangente alla minore,
che la tocchi in C e vada poi a intersecare la circonferenza maggiore in D.
Dimostrare che:
I) indicato con O il centro della circonferenza minore, è CO || DB
II) BC taglia in due parti uguali (= "biseca") l'angolo $A\hat{B}D$

22) Su di una circonferenza di centro O, si prende un punto qualunque P,
dopodiché, detto AB un diametro, si tracciano le due rette tangenti in P e in B,
indicando con Q il loro punto di incontro.
Dimostrare che la congiungente QO è parallela alla corda PA.

23) Se una circonferenza è inscritta in un triangolo isoscele, il punto di contatto
della base del triangolo con la circonferenza è il punto medio della base stessa.

24) ☼ (**dimostrazione guidata a pagina 187**)
In un triangolo isoscele il vertice, il centro della circonferenza inscritta e il punto medio della base sono allineati.

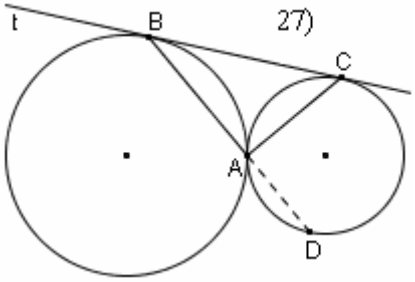
25) ⇨ (*L'ultima parte è molto impegnativa*)
In un triangolo ABC,
le tre altezze sono AH, BK, CS, l'ortocentro è O.



a) Dimostra che il quadrilatero OHCK è inscrivibile in una circonf.
b) Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscrivibile in una circonf.
c) I centri di tali due circonferenze stanno in posizioni molto particolari: sapresti specificarle? E giustificare la risposta?
d) Quali altri quadrilateri della figura sono inscrivibili in una circonferenza?
e) Dimostra che le tre altezze AH, BK, CS sono bisettrici degli angoli del triangolo HKS avente per vertici i piedi delle altezze stesse.

26) Due circonferenze, di centri O e O', sono secanti;
A e B ne sono i punti di intersezione.
Per B si conduce una retta che taglia le due circonferenze in C e in C' rispettivamente.
Dimostrare che gli angoli $C\hat{A}C'$ e $O\hat{A}O'$ sono uguali fra loro.

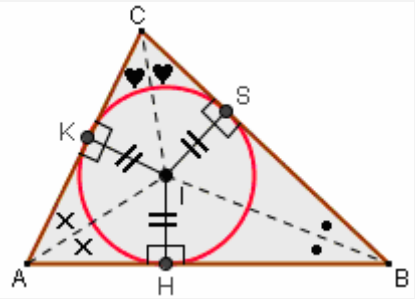
27) ⇨ Due circonferenze sono tangenti esternamente in A,
e una retta tangente comune t tocca
la prima circonferenza in B e la seconda in C.



a) Dimostra che l'angolo $B\hat{A}C$ è retto
b) Dimostra che, se si prolunga la corda BA fino ad incontrare la seconda circonferenza in D, la congiungente CD è un diametro della seconda circonferenza.

28) (importante; ESERCIZIO SVOLTO)

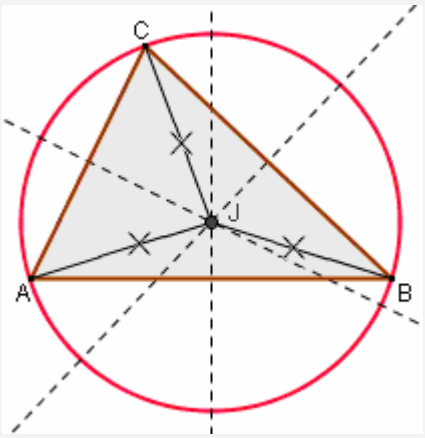
Per ogni TRIANGOLO, esiste sempre la circonferenza INSCRITTA.
Il suo centro coincide col punto di incontro delle BISETTRICI, ossia con l' INCENTRO.



Sia ABC un triangolo qualsiasi.
Tracciamo le bisettrici dei tre angoli interni:
esse, come sappiamo, si incontreranno in uno stesso punto
(l'*incentro*, indicato in figura con I).
E' noto che ogni punto della bisettrice di un angolo è equidistante dai lati dell'angolo stesso: quindi si avrà $IH = IK = IS$.
Perciò, se si punta il compasso in I con raggio $IH = IK = IS$,
la circonferenza tracciata passerà per i 3 punti H, K, S,
che appartengono ai lati del triangolo e in corrispondenza dei quali tali lati, formando angoli retti col raggio, risulteranno tangenti alla circonferenza stessa. Il triangolo ABC sarà perciò circoscritto alla circonferenza tracciata, e questa sarà a sua volta inscritta nel triangolo dato.

29) (importante; ESERCIZIO SVOLTO)

Per ogni TRIANGOLO, esiste sempre la circonferenza CIRCOSCRITTA.
Il suo centro coincide col punto di incontro degli ASSI dei lati, ossia col CIRCOCENTRO.



Che per tre punti distinti e non allineati passi una (e una sola) circonferenza ci è già noto. Qui è però anche richiesto di dimostrare che il centro di tale circonferenza coincide col circocentro del triangolo.
Sia ABC un triangolo qualsiasi. Tracciamo gli assi dei tre lati:
essi, come sappiamo, si incontreranno in uno stesso punto
(il *circocentro*, indicato in figura con J).
E' noto che ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante dagli estremi del segmento stesso: quindi si avrà $JA = JB = JC$.
Perciò, se si punta il compasso in J con raggio $JA = JB = JC$,
la circonferenza tracciata passerà per i 3 punti A, B, C
e sarà dunque la circonferenza circoscritta in questione.

Le parole "INcentro" e "CIRCOcentro", usate per indicare risp. il punto di incontro delle bisettrici e degli assi dei lati in un triangolo, sono dovute proprio al fatto che tali punti notevoli coincidono col centro della circonferenza INscritta e CIRCOscritta.

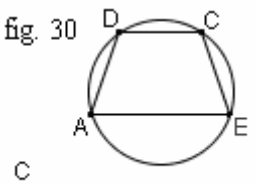
Altri esercizi (**TEOREMI MOLTO IMPORTANTI**, DA **TENERE A MEMORIA**!)

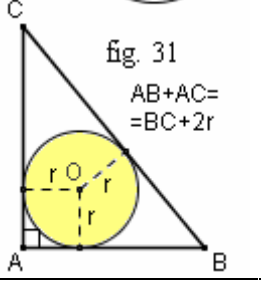
30) ☼ **Un trapezio inscritto in una circonferenza è sempre isoscele** (*figura*; **dim. guidata a pag. 188**)

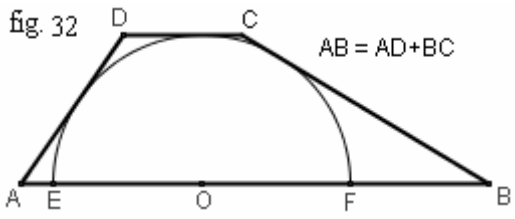
31) ☼ **In un triangolo rettangolo, la somma dei cateti supera l'ipotenusa di un segmento uguale al diametro della circonferenza inscritta nel triangolo** (*figura*; **dim. guidata a pag. 188**)

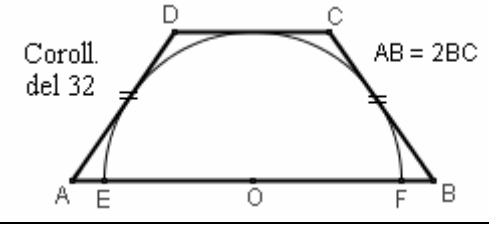
32) ☼ **Se un trapezio è circoscritto ad una SEMIcirconferenza** (cioè, se la sua base maggiore sta sulla retta del diametro, e lati obliqui e base minore sono tangenti alla semicirconferenza), allora **la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui** (*figura*; **dim. guidata a pag. 188**)

COROLLARIO: In un trapezio ISOSCELE circoscritto ad una SEMIcirconferenza la base maggiore è il doppio del lato obliquo (= il lato obliquo è metà della base maggiore). Vedi *figura*.

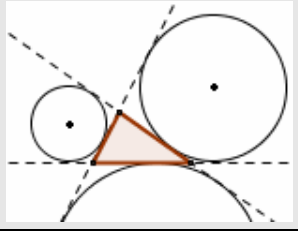






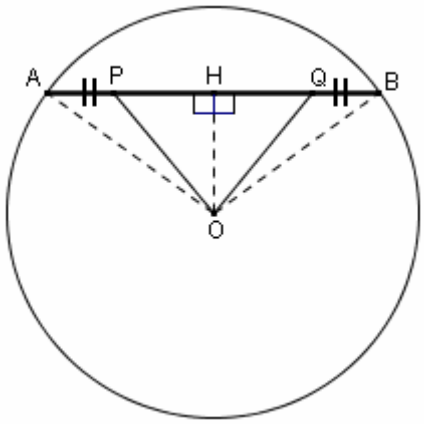


33) In ogni triangolo, oltre alle circonf. inscritta e circoscritta, esistono anche le tre circonferenze "ex-inscritte", ciascuna tangente a un lato e ai prolungamenti degli altri due lati. Dove stanno i loro centri? ⇨



☼ **DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)**

2)
⇨



HP: PA = QB

TH: PO = QO

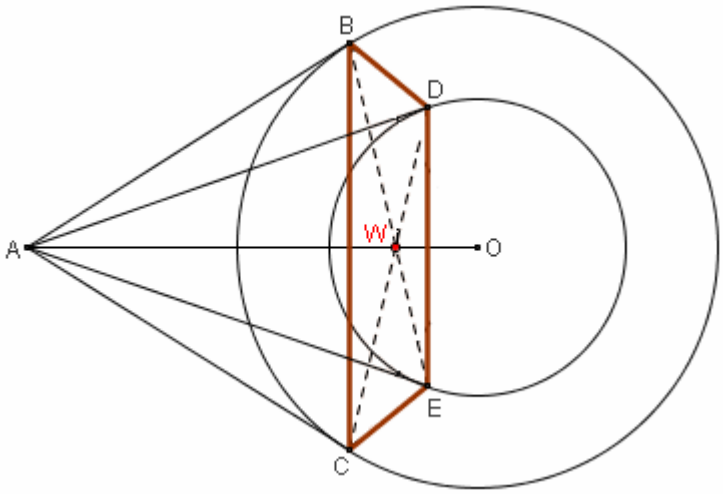
DIM.
Dal centro O, tracciamo la perpendicolare OH alla corda AB.
Un teorema noto ci assicura che H è il punto medio di AB: HA = HB.
Dunque, per differenza di segmenti uguali, è HP = HQ:

HP = ... − ... = ... − ... = HQ oppure

$$\begin{array}{r} HA = HB \\ \dots = \dots \\ \hline \underbrace{HA - \dots}_{HP} = \underbrace{HB - \dots}_{HQ} \end{array}$$

Ora, confrontando i due triangoli OHP e OHQ, li si dimostra subito uguali per il … da cui la tesi.

11)
⇨



HP: AB, AC, AD, AE tangenti a due circonferenze concentriche

TH
I) $B\hat{A}D = C\hat{A}E$
II) DE || BC, BD = CE
III) il punto di incontro delle diagonali di BCED sta su AO

DIM.

I) E' noto che quando da un punto esterno si conducono le due tangenti ad una circonferenza, la congiungente il punto esterno col centro fa da … per l'angolo formato dalle due tangenti. Perciò

$$\begin{array}{r} O\hat{A}B = \dots \\ O\hat{A}D = \dots \\ \hline \dots - \dots = \dots - \dots \\ B\hat{A}D = C\hat{A}E \end{array}$$

II) Lo stesso teorema sulle due tangenti condotte a una circonferenza da un punto esterno afferma pure che la congiungente il punto esterno col centro è … della corda che ha per estremi i punti di contatto.
Quindi AO ⊥ BC, AO ⊥ DE
e di conseguenza BC e DE, essendo entrambe perpendicolari ad AO, sono … fra loro.
Con ciò resta provato che BCED è un trapezio.
Per far vedere che si tratta di un trapezio isoscele, occorre dimostrare che BD = … ;
a tale scopo basta rilevare che i due triangoli ABD e ACE sono uguali per il … avendo:
AB = AC perché … ; AD = AE per lo stesso motivo; $B\hat{A}D = C\hat{A}E$ come già dimostrato.

III) Come sappiamo, in un trapezio isoscele le diagonali si tagliano in parti … Detto perciò W il punto di intersezione delle diagonali del nostro trapezio isoscele BCED, si ha WB = … , WD = … .
La prima uguaglianza ci dice che W è equidistante dalle estremità del segmento BC, quindi appartiene all' … di BC. Ma l'asse di BC, come abbiamo visto al punto II), è la congiungente AO! Quindi W appartiene ad AO, c.v.d.

13) DIM.

⇨ Tracciamo le due congiungenti AE e DC
e confrontiamo i due triangoli EAD, CDA.
Essi hanno:

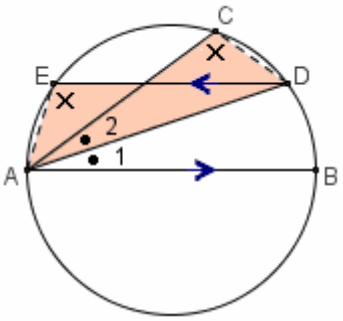
AD in comune

$E\hat{D}A = \hat{A}_2$ perché $E\hat{D}A \underset{\text{in quanto ...}}{=} \hat{A}_1 \underset{HP}{=} \hat{A}_2$

$A\hat{E}D = A\hat{C}D$ perché ….

Quindi si ha EAD = CDA per il …
e in particolare DE = AC, c.v.d.

HP: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, DE || AB
TH: DE = AC



20) DIM.

⇨ *Si può procedere in più modi diversi, ma comunque sempre trafficando con gli angoli, dopo aver tracciato opportuni raggi. Probabilmente la dimostrazione più rapida è la seguente.*

Osserviamo gli angoli indicati col pallino:
la loro uguaglianza è ovvia (…).
Ma allora saranno pure uguali fra loro
(per …)
i due angoli indicati col doppio archetto:

$B\hat{O}T = B'\hat{O}'T$.

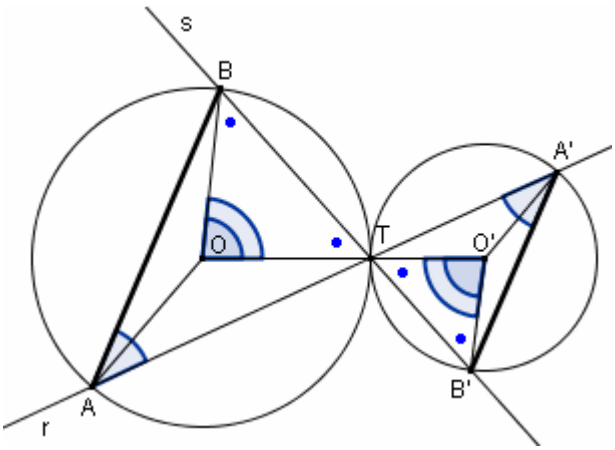
E di conseguenza avremo anche

$B\hat{A}T = B'\hat{A}'T$

perché …

Si può trarre, a questo punto, la conclusione:
AB || A'B' perché … , c.v.d.

TH: AB || A'B'



24) DIM.

⇨ *1° metodo di ragionamento*

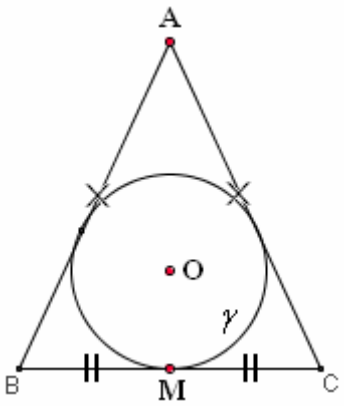
E' noto che, quando da un punto esterno si conducono
le due tangenti ad una circonferenza,
la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice
dell'angolo formato dalle … .

Se dunque si traccia la semiretta AO,
questa, nel triangolo isoscele ABC,
farà da bisettrice per l'angolo al vertice e quindi,
in virtù di un altro teorema noto,
andrà a tagliare la base BC nel suo punto medio M.

A, O, M sono dunque allineati, c.v.d.

HP:
AB = AC
γ circonferenza inscritta
BM = MC

TH:
A, O, M sono allineati



2° metodo

Se si traccia il segmento AM, questo sarà mediana
relativa alla base nel triangolo isoscele ABC
e di conseguenza sarà pure …
dell'angolo al vertice $B\hat{A}C$.

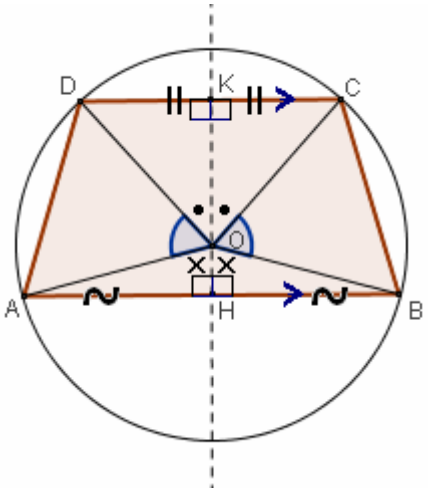
Ora, è noto che, quando da un punto esterno
si conducono le due tangenti ad una circonferenza,
la congiungente il punto esterno col centro
è la bisettrice dell'angolo formato dalle due tangenti,
il che è come dire che la bisettrice dell'angolo formato
dalle due tangenti passa per il centro.

Dunque AM, essendo la bisettrice di $B\hat{A}C$, passa per O:
A, O, M sono allineati, c.v.d.

30) DIM.

HP: $DC \parallel AB$, ABCD inscritto

TH: $AD = BC$



⇨ Tracciamo, per il centro O della circonferenza, la perpendicolare alle due rette, parallele fra loro, su cui giacciono le basi.
Come è ben noto, la perpendicolare a una corda condotta per il centro … la corda stessa.
Quindi è immediato dimostrare che sono uguali per il … le coppie di triangoli

$$OAH = OBH, \quad ODK = OCK.$$

Ne consegue l'uguaglianza delle coppie di angoli indicate sulla figura con "crocetta" e con "pallino", ossia:

$$A\hat{O}H = B\hat{O}H, \quad D\hat{O}K = C\hat{O}K .$$

Allora, per … , saranno uguali fra loro pure i due angoli indicati con "archetto":

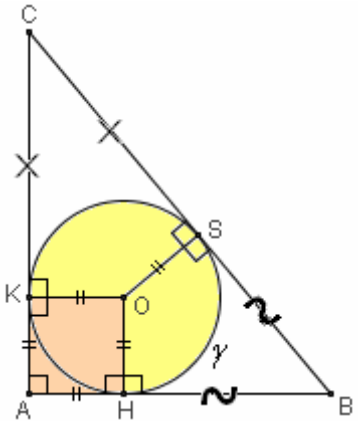
$$A\hat{O}D = B\hat{O}C .$$

E a questo punto, basta ricordare il teorema secondo cui **in una circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono …** , per avere la tesi.

31) DIM.

HP: $\hat{A} = 90°$, circonferenza inscritta

TH: $AB + AC = BC + 2r$



⇨ Il quadrilatero AKOH è un … ; infatti ha

- gli angoli retti
  $\hat{A} = 90°$ per … ,
  $A\hat{H}O = A\hat{K}O = 90°$ perché … ,
  quindi $H\hat{O}K = 90°$ per …
- e due lati consecutivi uguali
  ($OK = OH$ perché …).

Dunque è $AH = AK = OK = OH =$ raggio $= r$
Inoltre, per il teorema … , $BH = BS$; $CK = CS$
La seguente catena dimostra la tesi:

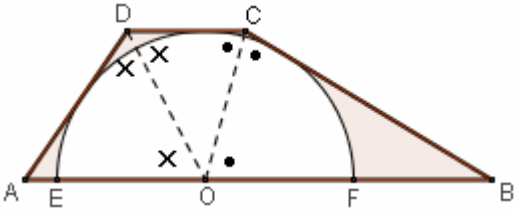
$$AB + AC = (AH + BH) + (AK + CK) =$$
$$= r + BS + r + CS = (BS + CS) + 2r =$$
$$= BC + \text{diametro} \qquad \text{c.v.d.}$$

32) DIM.

TH: $AB = AD + BC$

(nel caso del trapezio *isoscele*, $AB = 2AD = 2BC$, ossia

$AD = BC = \frac{1}{2}AB$)



⇨ Congiungiamo il centro O con le estremità C e D della base minore. Vediamo che

- $A\hat{O}D = C\hat{D}O$ perché … ;
- $C\hat{D}O = A\hat{D}O$ perché, per il teorema detto " … ", è noto che, quando da un punto esterno a una circonferenza (D) si tracciano le due tangenti (DA, DC), la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice dell'angolo …

Quindi sono uguali gli angoli…
per cui il triangolo AOD è isoscele: $AO = AD$.
Analogamente si dimostra che è isoscele il triangolo BOC: $OB = BC$.
Dalle due uguaglianze di cui sopra segue

$$AB = AO + OB = AD + BC , \quad \text{c.v.d.}$$

Se poi il trapezio fosse isoscele, la tesi appena dimostrata diventerebbe

$$AB = AD + BC = 2AD = 2BC \rightarrow AD = BC = \frac{1}{2}AB$$

GEOMETRIA Cap. 7: MISURA DELLE GRANDEZZE

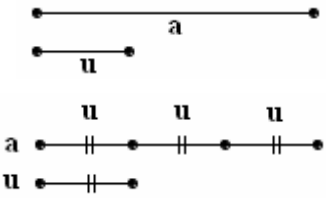
7.1 - MISURIAMO I SEGMENTI

"**Misurare**" un segmento **a**
significa prendere un altro segmento di riferimento **u** (detto "unità di misura")
e chiedersi quante volte **u** è contenuto in **a**.

A) QUANDO LA MISURA E' INTERA

Se **u** è contenuto in **a** esattamente n volte (n numero intero non negativo), si potrà scrivere
a = n · **u** (generalmente il puntino di moltiplicazione si omette, scrivendo semplicemente: **a** = n**u**)
e si dirà che
"la misura del segmento **a**, rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura, è il numero **INTERO** n".

La figura qui a fianco mostra due segmenti **a, u**.
a *è il segmento che si vuole misurare,*
u *è il segmento che si vuole utilizzare come unità di misura.*



Poiché **a** *risulta uguale alla somma*
di esattamente 3 segmentini, ciascuno uguale a **u**,
possiamo scrivere **a** = 3**u**
e affermare che "la misura di **a** *(rispetto a* **u***) è 3".*

B) QUANDO LA MISURA E' RAZIONALE

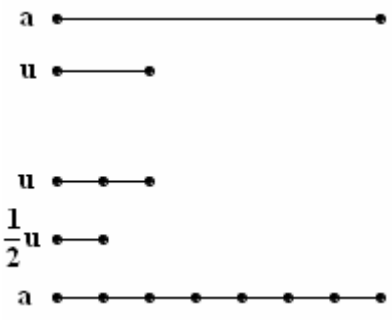
Se il segmento **u** NON è contenuto un numero intero di volte in **a**,
si ricorrerà ai cosiddetti "sottomultipli" di **u**
(vale a dire: la metà di **u**, la terza parte di **u**, la quarta parte di **u**, ecc. ecc.).
Dato un qualunque segmento **u**,
si dice "sottomultiplo di **u** secondo n" ciascuno dei segmentini che si ottengono dividendo **u** in n parti uguali.
Il sottomultiplo di **u** secondo n si indica col simbolo $\frac{1}{n}\cdot\mathbf{u}$ (oppure $\frac{1}{n}\mathbf{u}$),
che si può leggere: *un n-esimo*, oppure: *l'n-esima parte*, di **u**.

Se l'n-esima parte dell'unità di misura **u** è contenuta esattamente m volte
nel segmento **a** che intendiamo misurare, potremo scrivere

$$\mathbf{a} = m\cdot\frac{1}{n}\mathbf{u} = \frac{m}{n}\mathbf{u}$$

e diremo che
"la misura del segmento **a**, rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura,
è il numero **RAZIONALE** m/n".

La figura qui a fianco mostra due segmenti **a, u**.
a *è il segmento da misurare,* **u** *svolge il ruolo di unità di misura.*



Si osserva che ***u non*** *è contenuto un numero* ***intero*** *di volte in* **a**
(3 volte è "troppo poco", 4 volte è "troppo").

Però, se dividiamo **u** *in due parti uguali*
(costruendo, così, il segmento $\frac{1}{2}\mathbf{u}$*),*
vediamo che questo segmentino $\frac{1}{2}\mathbf{u}$
è contenuto esattamente 7 volte in **a.**

Poiché dunque **a** *risulta uguale alla somma di esattamente 7 segmentini, ciascuno uguale a* $\frac{1}{2}\mathbf{u}$,

possiamo scrivere $\mathbf{a} = 7\cdot\frac{1}{2}\mathbf{u} = \frac{7}{2}\mathbf{u}$ *e affermare che "la misura di* **a** *(rispetto a* **u***) è* $\frac{7}{2}$ *".*

C) QUANDO LA MISURA E' IRRAZIONALE

Si scopre tuttavia – cosa che lasciò del tutto sconcertati gli studiosi greci i quali, nel VI o V secolo a. C., per primi se ne accorsero – che per certe coppie di segmenti **a**, **u**, non avviene

- né che **u** sia contenuto un numero esatto di volte in **a**
- né che esista un sottomultiplo di **u**, che sia contenuto un numero esatto di volte in **a**.

In questo caso si dice che **a**, **u** sono "**incommensurabili**".

DEF. Due **segmenti a, u** si dicono "**incommensurabili**" se **non hanno nessun sottomultiplo comune.**

Ad esempio, si può dimostrare il seguente importantissimo

TEOREMA - **Il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili.**

La *dimostrazione* è molto interessante: vediamola.

Se, per assurdo, esistesse un sottomultiplo **s** del lato AB del quadrato ABCD, contenuto un numero esatto di volte nella diagonale BD dello stesso quadrato, allora esisterebbero due numeri interi n, m, tali che

$AB = n\mathbf{s}$, $BD = m\mathbf{s}$

I quadrati costruiti sui lati uguali AB e AD potrebbero allora essere suddivisi ciascuno in una griglia di n^2 quadratini di lato **s**, mentre il quadrato costruito sulla diagonale BD potrebbe essere suddiviso in una griglia di m^2 quadratini di lato **s**.

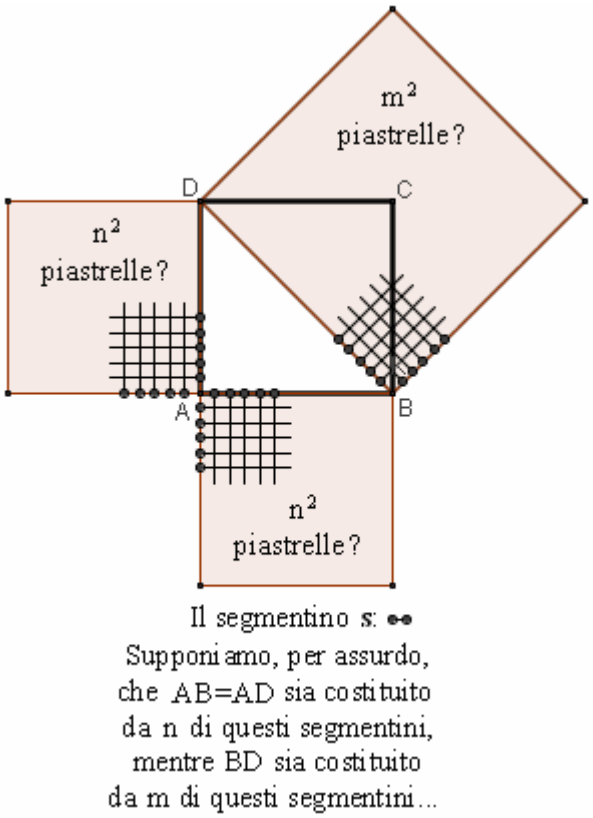
D'altra parte, per il Teorema di Pitagora, il quadrato costruito su BD è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AB e AD, e questo comporta che il numero totale di quadratini che "piastrellano" i due quadrati costruiti sui due lati AB e AD, sia uguale al numero dei quadratini che "piastrellano" il quadrato costruito sulla diagonale BD.

Dunque si avrà $n^2 + n^2 = m^2$ ossia $2n^2 = m^2$ per cui gli interi n ed m saranno tali che

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 .$$

Ma è possibile dimostrare (Teorema nel riquadro sottostante) che non può esistere alcuna frazione (=rapporto di due interi) la quale elevata al quadrato dia come risultato 2.

L'assurdo trovato dimostra la tesi.



TEOREMA

Non esiste nessuna frazione (rapporto fra due interi) la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2

Dimostrazione

Per assurdo. Supponiamo, per assurdo, che esista una frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

Detta, per fissare le idee, $\frac{m}{n}$ tale frazione, avremo: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Riduciamo la frazione m/n ai minimi termini, se già non lo è; otterremo una frazione p/q, con p e q primi fra loro (cioè: privi di divisori comuni; in altre parole: non più semplificabili), tale che $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Si potrà scrivere quindi la seguente catena di deduzioni:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2 \rightarrow \text{il numero } p^2 \text{ è pari} \rightarrow \boxed{\text{p è PARI}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{esiste un INTERO p' tale che } p = 2p' \rightarrow (2p')^2 = 2q^2 \rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \rightarrow q^2 = 2p'^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{il numero } q^2 \text{ è pari} \rightarrow \boxed{\text{q è PARI}}$$

Ora, nel corso di tale catena abbiamo dedotto che p e q sono entrambi PARI, cioè entrambi divisibili per 2, mentre eravamo partiti dal presupposto che la frazione p/q fosse ridotta ai minimi termini, vale a dire non più semplificabile.

Ricapitoliamo: supponendo che esistesse una frazione m/n tale che $(m/n)^2=2$, siamo pervenuti a conclusioni assurde.

Non esiste perciò alcuna frazione che elevata al quadrato dia 2.

Se i due segmenti **a**, **u** sono incommensurabili,

non esiste dunque nessun numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che risulti $\mathbf{a} = \frac{m}{n}\mathbf{u}$:

per qualunque numero razionale $\frac{m}{n}$, il segmento $\frac{m}{n}\mathbf{u}$,

ossia il segmento ottenuto mettendo in fila m segmenti ciascuno uguale all'n-esima parte di **u**,

potrà magari discostarsi pochissimo dal segmento **a**, ma comunque NON potrà mai coincidere esattamente con **a**!

Supponiamo che **a** ed **u** siano incommensurabili,
e supponiamo che, per due certi numeri razionali m/n e m'/n',
si abbia: $\frac{m}{n}\mathbf{u} < \mathbf{a} < \frac{m'}{n'}\mathbf{u}$.
Allora diremo che il numero razionale m/n costituisce una "misura per difetto del segmento **a**"
e che il numero razionale m'/n' costituisce una "misura per eccesso del segmento **a**".

E' evidente che esisteranno infiniti numeri razionali caratterizzati dal fatto
di essere misure **per difetto** del segmento **a**;
come pure, esisteranno infiniti numeri razionali caratterizzati dal fatto
di essere misure **per eccesso** di **a** …
… ma - ribadiamolo - se **a** e **u** sono incommensurabili non esiste alcun numero razionale,
che abbia il diritto di essere considerato la misura ***esatta*** di **a** rispetto a **u**.

In caso di incommensurabilità di **a** con **u**, la misura di **a** rispetto a **u** sarà espressa da un numero **IRRAZIONALE**:
precisamente, da quel numero irrazionale che è maggiore di tutte le misure razionali per difetto di **a**,
e minore di tutte le misure razionali per eccesso di **a**.

NUMERI IRRAZIONALI
Un numero si dice "irrazionale" se non è esprimibile sotto forma di frazione
(intesa come "rapporto fra due numeri interi").

- Il discorso fatto sulla "misura" può essere schematizzato, in sostanza, affermando che

l' "IRRAZIONALITÀ" è "l'aspetto aritmetico dell'INCOMMENSURABILITÀ".

- ♪ incommensurabilità = concetto geometrico
- ♫ irrazionalità = concetto aritmetico (da *arithmós* = numero)

- **Un numero irrazionale è "definito", "individuato",**
  dalle sue "approssimazioni razionali per difetto" e dalle sue "approssimazioni razionali per eccesso".

  Ad esempio, il numero irrazionale
  $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095...$
  è definito come "quell'entità numerica che è
  maggiore di 1 ma minore di 2;
  maggiore di 1,4 ma minore di 1,5;
  maggiore di 1,41 ma minore di 1,42;
  ecc. ecc. "

- Esistono infiniti numeri razionali, ed esistono pure infiniti numeri irrazionali,
  ma, in un certo senso,
  i numeri irrazionali sono "più infiniti ancora" dei razionali
  (la loro "numerosità" ha un "grado di infinito" maggiore).

  Se io "pesco a caso" un punto su di una *number line*,
  normalmente la sua ascissa sarà *irrazionale*;
  sì, certo, potrebbe anche capitarmi di "beccare" un punto con ascissa *razionale*,
  ma la probabilità che ciò accada è *infinitamente piccola* !!!!!

  Straordinario …
  Se vuoi approfondire queste tematiche,
  di cui fu geniale esploratore il matematico danese Georg Cantor (1845-1918),
  puoi andare alla pagina 402 di questo volume.

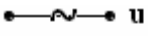
7.2 - MISURIAMO LE SUPERFICI

E per misurare le superfici, come si farà?
Così come, per misurare un segmento, si prende come unità di misura un altro segmento,
per misurare una superficie si dovrà prendere come unità di misura un'altra superficie.

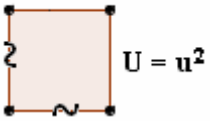
"Misurare" una superficie **A** significa dunque prendere un'altra superficie di riferimento **U**
(che farà da "unità di misura") e chiedersi quante volte la superficie **U** è contenuta in **A**.

Di solito, il calcolo della misura di una superficie è richiesto in un contesto nel quale
già sono stati misurati dei segmenti, con l'utilizzo di un determinato segmento **u**, scelto come unità di misura.
Allora, è sempre conveniente adottare come unità di misura **U** per le superfici,
il quadrato avente per lato il segmento **u**. Tale quadrato viene generalmente indicato col simbolo $\mathbf{u^2}$

Insomma: se si è scelto questo segmento come unità di misura per le lunghezze (NOTA) …



… per calcolare delle aree (NOTA) si sceglierà come unità di misura questo quadrato:

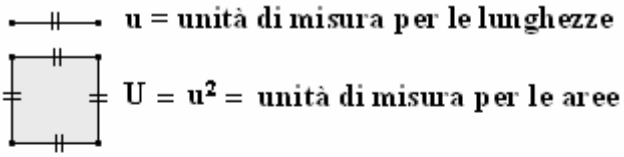


Ad esempio, se si sono calcolate le lunghezze in centimetri, le aree verranno calcolate in centimetri quadrati.

N O T A
- *Lunghezza = quel "quid" che hanno in comune tutti i segmenti congruenti ad un segmento dato*
- *Area = quel "quid" che hanno in comune tutte le superfici con la stessa estensione di una superficie data*

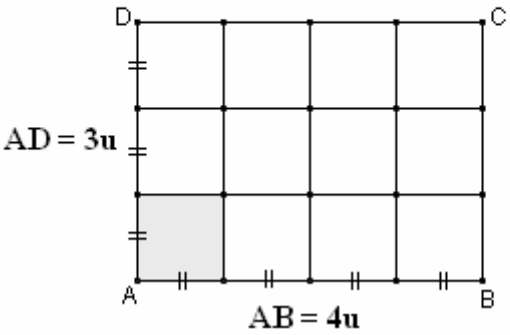
Spessissimo, si dice semplicemente "lunghezza", o, rispettivamente, "area",
quando, a rigore, bisognerebbe dire "misura della lunghezza" e "misura dell'area".

Ora, supponiamo di dover misurare una superficie rettangolare ABCD le cui dimensioni misurino, rispetto all'unità di misura **u** scelta per i segmenti, rispettivamente 4 (la base AB) e 3 (l'altezza AD).
Ci chiediamo: quanto misurerà il rettangolo?



Ribadiamo innanzitutto che, avendo noi adottato il segmento **u** come unità di misura "lineare", dovremo adottare il quadrato di lato **u** ($\mathbf{u^2}$) come unità di misura per le superfici.

Si tratta perciò di chiedersi quante volte il quadrato $\mathbf{u^2}$ "sta" nella superficie ABCD, sapendo che il segmento **u** sta 4 volte nel segmento AB e 3 volte nel segmento AD.



La figura mostra che il rettangolo ABCD è riempito da $4\cdot 3=12$ quadrati di lato **u**
(4 quadrati per ogni fila orizzontale; 3 file orizzontali una sopra l'altra; in totale, $4\cdot 3=12$ quadrati).
E' dunque ABCD = 12 $\mathbf{u^2}$,
e ne concludiamo che l'area di un rettangolo le cui dimensioni hanno lunghezza 4 e 3 rispettivamente, è $4\cdot 3=12$.

Si capisce che il discorso è generalizzabile, almeno se le misure lineari in gioco sono intere: insomma, se in un rettangolo le misure di base e altezza sono, rispett., b ed h, con b ed h interi, allora la misura dell'area sarà $b\cdot h$.

E' poi facile dimostrare che questo risultato si estende anche al caso in cui le misure b ed h siano razionali;
infine, tenendo presente la definizione rigorosa di numero irrazionale come "elemento separatore di due classi contigue di numeri razionali" (definizione che si dà in trattazioni a livello più avanzato)
si può far vedere che la stessa formula $b\cdot h$ vale anche se i due numeri b ed h sono irrazionali,
oppure uno razionale e l'altro irrazionale.

In definitiva, resta stabilito che l'area S di un rettangolo le cui dimensioni misurino b, h $(b,h\in\mathbb{R})$
si calcola tramite la formula $\boxed{S=b\cdot h}$

I teoremi sulle equivalenze permettono poi di determinare, mediante formule opportune,
le aree del parallelogrammo, del triangolo, del trapezio.
Il calcolo delle aree degli altri poligoni si effettua decomponendoli nella somma di poligoni più semplici,
mentre per le superfici non poligonali il discorso dell'area comporta considerazioni un po' più articolate.
Riguardo ai *volumi dei solidi*, la trattazione è analoga a quella per le aree delle superfici;
se ne discuterà brevemente a pagina 386.

7.3 - GENERALIZZIAMO IL CONCETTO DI MISURA

A) LE "CLASSI DI GRANDEZZE"

Diciamo che si può parlare di "misura" ogniqualvolta si consideri una "**classe di grandezze**".

Cos'è dunque una "classe di grandezze" ?

Prima di rispondere astrattamente a questa domanda, avvertiamo, a titolo di esempio, che

sono classi di grandezze:
- l'insieme dei **segmenti**;
- l'insieme delle **superfici piane**;
- l'insieme degli **angoli**, se si ammette di poter anche "andare oltre il giro completo";
- l'insieme degli **archi di una stessa circonferenza** (compresi quelli maggiori della circonferenza stessa);
- … ecc.

E procediamo ora con la (in verità: piuttosto impegnativa) DEFINIZIONE.

Si dice "**classe di grandezze**" un insieme I di oggetti matematici nel quale

1. **siano definite tre relazioni, da indicarsi coi simboli = , <, >**
   (dove s'intende che > indichi la relazione inversa di <)
   NOTA - *Il simbolo = potrà avere, a seconda del contesto, significati diversi: ad esempio*
   - *nel caso dei segmenti, dire che sono = significherà affermare che sono "congruenti, sovrapponibili";*
   - *nel caso delle superfici, = avrà il significato di "equivalente", ossia "avente la stessa estensione di" (e il simbolo = verrà preferibilmente rimpiazzato dal simbolo ≐);*
   - *ecc. ecc.*
2. **sia definita un'operazione denominata "somma", da indicarsi col simbolo +**
   (l'operazione inversa di + verrà indicata con –)
3. **e le definizioni adottate siano tali che =, <, > , + soddisfino ai seguenti ASSIOMI**
   ("assioma" ha qui il senso di "affermazione cha fa da premessa in una teoria"):
   - la relazione = dev'essere riflessiva, simmetrica e transitiva;
   - date due qualsiasi grandezze A e B, deve verificarsi una e una sola delle tre eventualità A=B, A<B, A>B (**assioma della tricotomia**);
   - la relazione < deve essere transitiva;
   - l'operazione + dev'essere "ovunque definita" (cioè, per *qualsiasi* coppia di elementi A, B di I la somma A+B deve potersi effettuare, con risultato che deve appartenere anch'esso all'insieme I); dev'essere commutativa, associativa, e dotata di elemento neutro (detto "grandezza nulla");
   - per ogni grandezza A dell'insieme I, e per ogni numero naturale non nullo n, deve esistere una e una sola grandezza B tale che nB=A , dove nB indica il risultato della somma di n addendi B+B+ … +B.
     In altre parole, per ogni grandezza A dell'insieme I, e per ogni numero naturale non nullo n, deve esistere, ed essere unico, il "sottomultiplo di A secondo n" (**assioma della divisibilità indefinita**);
   - date due grandezze A, B, se A non è l'elemento neutro additivo ("grandezza nulla") ed è B>A, allora deve esistere un numero naturale n, tale che nA>B; in altre parole, data una grandezza non nulla A e data un'altra grandezza B maggiore di A, deve esistere un multiplo di A, che sia maggiore di B (**assioma di Archimede**);
   - se due sottoinsiemi I', I" di I sono tali che ogni elemento di I' è < di ogni elemento di I", allora esiste almeno un elemento di I, che sia ≥ di tutti gli elementi di I' e ≤ di tutti gli elementi di I" (**assioma di continuità**).

B) MISURA DI UNA GRANDEZZA

"**Misurare**" una grandezza A significa **confrontarla** con un'altra grandezza U della stessa classe; quindi, con una grandezza che sia "**omogenea**" con quella da misurare ("omogenea" = "della stessa specie").

U assumerà il ruolo di "**unità di misura**" e si tratterà di esprimere, mediante un numero reale, "**quante volte U è contenuta in A**".

In analogia a quanto visto coi segmenti, si vede che il procedimento di misura può condurre, a seconda dei casi:

- ad un **numero intero** (quando, sommando più grandezze tutte uguali a U, si riesce a ottenere esattamente A);
- ad una **frazione**, ovvero ad un numero razionale (quando sia necessario ricorrere ai sottomultipli di U);
- ad un **numero irrazionale**
  (quando accade che A e U sono "incommensurabili" ossia non ammettono alcun sottomultiplo comune).

C) RAPPORTO FRA DUE GRANDEZZE

Supponiamo che "la misura di A, rispetto a U, sia α ($\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0$)".
Allora potremo scrivere

$$A = \alpha U$$

e il numero α potrà essere chiamato, indifferentemente:
"la misura di A rispetto a U"
oppure anche
"il rapporto A/U (o A:U) fra la grandezza A e la grandezza U".

Cos'è, dunque, il "rapporto fra due grandezze omogenee"?
E' la misura della prima grandezza, quando la seconda venga assunta come unità di misura;
in altre parole, è il numero che esprime "quante volte la seconda grandezza è contenuta nella prima".

D) IL "TEOREMA DEL RAPPORTO"

Dovendo calcolare il rapporto fra due grandezze omogenee A e B, possiamo procedere per via diretta (chiedendoci "quante volte B è contenuta in A"),
oppure per via indiretta, andando a misurare sia A che B rispetto ad una terza grandezza U,
che faccia da unità di misura comune, poi eseguendo il quoziente fra le due misure così ottenute.
Vale infatti (noi ci limitiamo ad enunciarlo, omettendo la dimostrazione) il seguente fondamentale

TEOREMA ("del rapporto"):
Il rapporto A/B o A:B fra due grandezze omogenee A e B, è uguale
al quoziente fra le loro misure, calcolate rispetto ad una qualsivoglia unità di misura comune U.

In pratica.
Supponiamo che un pensionato sia abituato a utilizzare il suo bastone da passeggio per calcolare le lunghezze, e abbia constatato che il rapporto fra la lunghezza L del campo da bocce e la lunghezza B del bastone è 8,5 (perché "il bastone ci sta esattamente 8 volte e mezzo nel campo da bocce").
Bene! Allora quel pensionato, qualora andasse a misurare sia il campo da bocce che il bastone in metri, e facesse poi la divisione fra le due misure in metri ottenute, troverebbe come risultato ancora 8,5.

E) CLASSI DI GRANDEZZE IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

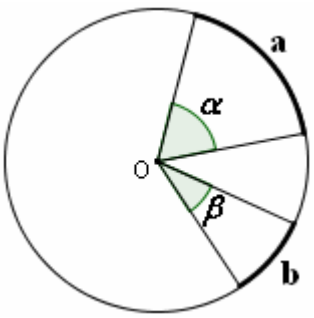
Si dice che due insiemi sono in "**corrispondenza biunivoca**"
se è stata fissata una legge che faccia corrispondere ad ogni elemento del primo insieme,
uno e un solo elemento del secondo insieme, E VICEVERSA.

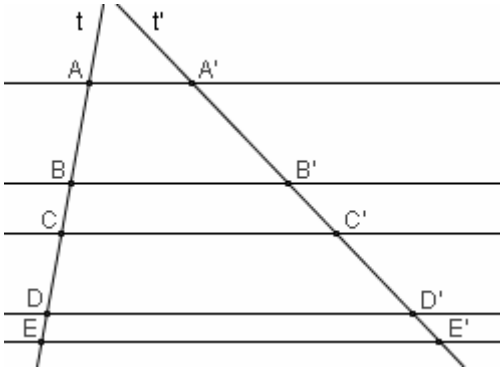
Ad esempio, in una camicia, l'insieme delle asole e l'insieme dei bottoni sono in corrispondenza biunivoca: ad ogni asola corrisponde uno e un sol bottone e viceversa ad ogni bottone corrisponde una e una sola asola.

In Geometria non è raro imbattersi in casi in cui c'è una corrispondenza biunivoca che lega fra loro due "classi di grandezze".

Ad esempio, presa una circonferenza Γ, possiamo considerare l'insieme A dei suoi angoli al centro (insieme A che costituisce, a patto di includervi anche gli angoli maggiori di un angolo giro, una "classe di grandezze") e l'insieme A' dei suoi archi (anche A', se vi includiamo pure gli archi maggiori dell'intera circonferenza, è una classe di grandezze).
I due insiemi A e A' sono, com'è evidente, in corrispondenza biunivoca:
ad ogni angolo al centro corrisponde uno ed un solo arco, e ad ogni arco corrisponde uno e un solo angolo al centro.

Altro esempio.
Quando un fascio di parallele è tagliato da due trasversali t e t', si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme S dei segmenti giacenti su t (S è una classe di grandezze, "sottoclasse" della più generale classe di tutti i segmenti del piano) e l'insieme S' dei segmenti che giacciono su t'.





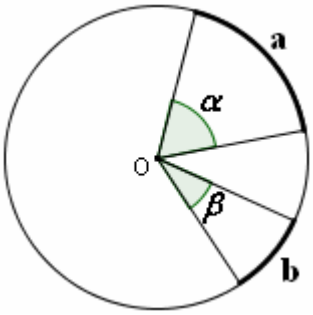
F) CLASSI DI GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI

Quando abbiamo due classi di grandezze, una classe G e un'altra classe G', legate fra loro da una corrispondenza biunivoca, diremo che G e G' sono "direttamente proporzionali" se accade che il rapporto fra due qualsivoglia grandezze della classe G, è uguale al rapporto delle grandezze che ad esse corrispondono in G'.

Presa una circonferenza Γ, *consideriamo la classe degli angoli al centro e la classe degli archi (classi che, come abbiamo osservato, sono in corrispondenza biunivoca fra loro).*

Supponiamo che l'angolo α *sia il doppio di* β *così che il rapporto* $\alpha:\beta$ *sia* 2. *Allora si capisce (e si dimostra con facilità) che l'arco* a *corrispondente ad* α *sarà il doppio dell'arco* b *corrispondente a* β, *cosicché anche* $a:b=2$. *E, al di là del particolare esempio fatto, è intuitivo che, presi due qualsivoglia angoli al centro* α, β *e detti* a, b *i corrispondenti archi, varrà sempre la proporzione* $\alpha:\beta=a:b$.

Insomma, l'intuizione ci dice che gli angoli al centro in una data circonferenza, e gli archi di quella stessa circonferenza, sono due classi di grandezze direttamente proporzionali



$\alpha:\beta=a:b$

Dunque, due classi di grandezze G e G' in corrispondenza biunivoca fra loro sono direttamente proporzionali quando, prese due qualunque grandezze A, B in G, e considerate le rispettive corrispondenti A' e B' in G', si ha sempre $A:B=A':B'$

o, se si preferisce, quando sussiste l'implicazione $\frac{A}{B}=\alpha \Rightarrow \frac{A'}{B'}=\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\geq 0)$

In altre parole ancora, affinché due classi di grandezze G e G', in corrispondenza biunivoca fra loro, siano direttamente proporzionali, deve accadere che
se A è il doppio di B, allora la grandezza A' (corrispondente di A) è il doppio della grandezza B' (che corrisponde a B);
se A è il triplo di B, allora la grandezza A' (corrispondente di A) è il triplo della grandezza B' (che corrisponde a B);
…
anzi, in termini del tutto generali, deve accadere che, se $A=\alpha B$, allora $A'=\alpha B'$ (α numero reale non negativo).

G) IL "CRITERIO DI PROPORZIONALITA'"

Una cosa è INTUIRE che due certe classi di grandezze in corrispond. biunivoca siano direttamente proporzionali, un'altra cosa è DIMOSTRARLO. A tale scopo, si utilizza di solito un teorema del tutto generale il quale assicura, se sono verificate determinate condizioni, il sussistere della diretta proporzionalità.
Vediamo l'enunciato di questo teorema, pur omettendone la dimostrazione
(che è piuttosto impegnativa, perché deve tenere conto della possibilità, per due grandezze della stessa specie, di essere incommensurabili, quindi di avere come rapporto un numero irrazionale).

TEOREMA ("Criterio di Proporzionalità")

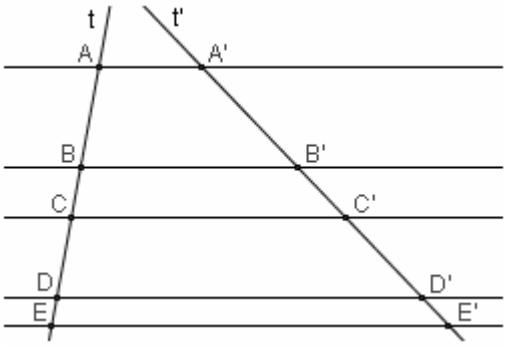
Se due classi di grandezze G, G' sono in corrispondenza biunivoca, e accade che:

i) **$A=B\Rightarrow A'=B'$ ossia:**
a due grandezze che sono uguali in G corrispondono sempre due grandezze, che sono uguali in G'

ii) **$A=B+C\Rightarrow A'=B'+C'$ cioè :**
ad una grandezza A, in G, che sia la somma di due altre grandezze, corrisponde sempre, in G', quella grandezza A', che è la somma delle rispettive corrispondenti

allora quelle due classi di grandezze sono direttamente proporzionali.

Ad esempio, la proporzionalità fra gli angoli al centro e gli archi in una stessa circonferenza, che abbiamo dato per scontata per intuizione, può essere dimostrata rigorosamente come conseguenza del precedente Criterio (in quanto è noto che in una stessa circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali, ed è evidente che ad un angolo al centro, che sia somma di altri due, corrisponde proprio quell'arco, che è la somma dei due archi corrispondenti ai due angoli che fanno da addendi nella somma).
Anche l'importantissimo ***Teorema di Talete ("Quando un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali, i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali"),*** *di cui parleremo al successivo capitolo 9, viene giustificato in base al Criterio di Proporzionalità sopra citato.*



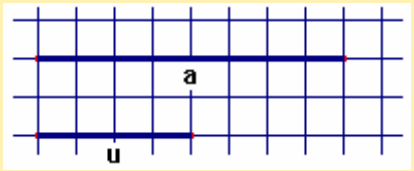
$AB:CD=A'B':C'D'$
TEOREMA DI TALETE

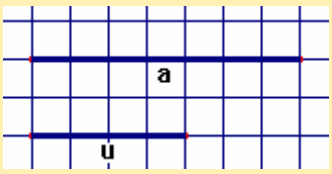
QUESTIONARIO PER IL RIPASSO DELLA DIFFICILE "TEORIA DELLA MISURA"

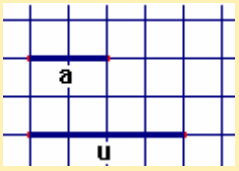
1) "Misurare" un segmento **a** significa prendere un altro segmento **u** (detto "unità di misura") e chiedersi …

2) Dato un qualunque segmento **u**, e considerato un numero naturale non nullo n,
si dice "sottomultiplo di **u** secondo n" …

3) In ciascuna delle tre figure sotto riportate, quanto vale la misura di **a** rispetto ad **u**?







4) Due segmenti **a**, **u** si dicono "incommensurabili" quando …

5) Dimostra che la diagonale e il lato di uno stesso quadrato sono fra loro incommensurabili.

6) Dimostra che non esiste nessuna frazione
(= rapporto fra due interi)
la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

7) Un numero si dice "irrazionale" se …

8) Ad esempio, si dimostra che sono irrazionali i numeri …

9) Trova un numero con la virgola, contenente esclusivamente le cifre 1 e 2, che sia irrazionale.

10) Che simbolo viene utilizzato, di norma, per indicare l'insieme dei numeri irrazionali?

11) Se due dati segmenti **a**, **u** sono incommensurabili,
il numero che indica la misura di **a** rispetto a **u** è …

12) Per misurare le superfici, come si sceglie l'unità di misura?

13) Cita due esempi di "classi di grandezze", oltre alla classe dei segmenti.

14) Cos'è il "rapporto fra due grandezze omogenee"?

15) Enuncia il "Teorema del Rapporto".

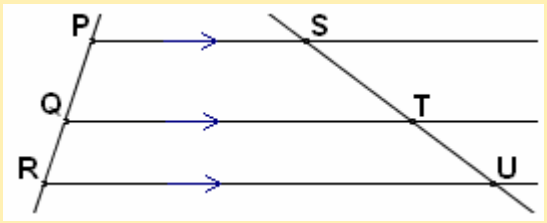
16) Cos'è una "corrispondenza biunivoca" fra due insiemi?

17) Quando abbiamo due classi di grandezze, una classe G e un'altra classe G', legate fra loro da una corrispondenza biunivoca, diremo che G e G' sono "direttamente proporzionali" se accade che …

18) Enuncia il teorema chiamato "Criterio di Proporzionalità".

19) Il Teorema di Talete afferma che quando un fascio di parallele viene tagliato da due trasversali …

20) Ad esempio, con riferimento alla figura qui a destra,
il Teorema di Talete afferma che vale la proporzione
TU : SU = ... : ...



CLICCA PER LE RISPOSTE ⇨

Un uomo, un maestro: PITAGORA DI SAMO

Pitagora, nato a Samo nella Ionia intorno al 570 a.C., è spesso descritto come "il primo matematico puro". Non lasciò niente di scritto, ed è problematico riconoscere con certezza quali contributi scientifici e filosofici si debbano a lui personalmente, e quali invece ai suoi seguaci.

Non si può dire abbia avuto una vita quieta - davvero! … Figlio di un mercante di gemme, ricevette un'ottima educazione, e imparò da bambino a recitare Omero e a suonare la lira, passione quest'ultima che mantenne poi per sempre. Viaggiò parecchio col papà sin da piccolo, e più avanti ebbe modo di conoscere di persona il già anziano filosofo Talete nonché il suo allievo Anassimandro. Intorno all'anno 535 si recò in visita in Egitto, forse principalmente per ragioni di formazione culturale e spirituale. A seguito dell'invasione persiana fu condotto prigioniero in Babilonia, dove pure trovò modo di coltivare i suoi interessi matematici, mistici e artistici. Tornato successivamente a Samo, e visitata l'isola di Creta, finì per stabilirsi a Crotone, nell'odierna Calabria, dove fondò una Scuola filosofica e religiosa, per aderire alla quale in modo stretto era richiesto di adottare una dieta vegetariana e di rinunciare alle proprietà personali.

I concetti di "numero", di "triangolo", di "dimostrazione", e più in generale le idee di "bene", di "giustizia" e di "opportunità", erano i punti fondanti della sua riflessione.

Era persuaso che ogni aspetto della realtà fosse riconducibile a relazioni numeriche. La prova più significativa di questo era l'osservazione che le corde vibranti di una lira producevano suoni armoniosi quando le loro lunghezze stavano nei rapporti 2:1, 3:2, 4:3, ecc.

A ogni numero attribuiva una propria "personalità": maschile o femminile, perfetto o incompleto, bello o brutto. Il "dieci" era ritenuto il migliore fra i numeri, in quanto somma dei primi quattro interi (1+2+3+4) e per il fatto che si poteva rappresentare con un insieme di punti disposti a triangolo.

Oggi il nome di Pitagora è legato specialmente al famoso teorema geometrico che tutti conoscono, ma va detto che questo era già noto da secoli agli studiosi babilonesi, e non è neppure certo che si debba proprio a Pitagora la sua prima dimostrazione di carattere generale.



Un elenco di risultati attribuibili a Pitagora o ai suoi discepoli è il seguente:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti;
  la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $2n - 4$ angoli retti
  mentre la somma degli angoli esterni di un poligono misura quattro angoli retti
- In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa (*vedi* ↑) … dove "quadrato" non deve qui intendersi nel senso moderno di "risultato che si ottiene elevando la misura all'esponente 2", bensì in senso strettamente geometrico: "E' possibile decomporre i due quadrati aventi per lato i cateti in superfici le quali, accostate in modo opportuno, riempiano esattamente il quadrato avente per lato l'ipotenusa"
- Risoluzione di equazioni con interpretazione geometrica, es. $a(a - x) = x^2$
- Scoperta (dovuta non a Pitagora, con le cui visioni filosofiche era del resto in contrasto, ma ai suoi discepoli) delle grandezze "incommensurabili", ossia, in senso aritmetico, dei numeri "irrazionali"
- Studi sui cinque poliedri regolari

In astronomia, Pitagora riteneva che la Terra avesse forma sferica e stesse al centro dell'Universo; scoprì l'inclinazione dell'orbita della Luna rispetto all'equatore e comprese che Lucifero e Vespero - le stelle del mattino e della sera - non erano corpi celesti distinti ma si identificavano entrambe col pianeta Venere.

Come filosofo, pensava che il mondo dipendesse dall'interazione fra coppie di "contrari", e che l'anima fosse eterna e trasmigrasse, dopo la morte del corpo, in un altro essere, uomo o animale (metempsicosi: si narra che avesse affermato di riconoscere nel latrato di un cane la voce di un amico defunto). Questo continuo ciclo di reincarnazioni poteva aver fine solo a seguito di una purificazione, ottenibile tramite il perfezionamento intellettuale/morale: i pitagorici tenevano in gran pregio l'amicizia, l'altruismo, l'onestà.

Riguardo alla morte di Pitagora, avvenuta in data incerta, le versioni non sono univoche.

Una di queste racconta che egli, poiché detestava e disprezzava le fave, inseguito dal nemico, preferì farsi raggiungere ed uccidere piuttosto che mettersi in salvo attraversando un campo di fave (tale ripugnanza è forse da collegarsi a una patologia chiamata "favismo", diffusa proprio nella zona di Crotone, e/o all'antica credenza secondo la quale questi legumi avevano a che fare col mondo dei morti, della decomposizione e dell'impurità, da cui il filosofo deve tenersi lontano).

Le parole messe in bocca al Maestro da Ovidio (43 a.C. - 17 d.C.) nell'opera "Metamorfosi" sono emblema di una nobiltà di spirito che dovrebbe certamente far meditare anche noi:

« Smettetela, uomini, di profanare i vostri corpi con cibi empi! Ci sono le messi, ci sono alberi stracarichi di frutti, ci sono turgidi grappoli d'uva sulle viti; ci sono erbe dolci e tenere. Avete a disposizione il latte e il miele profumato di timo. La terra nella sua generosità vi propone in abbondanza blandi cibi e vi offre banchetti senza stragi né sangue. Che enorme delitto è ingurgitare viscere altrui nelle proprie, far ingrassare il proprio corpo ingordo a spese di altri corpi, e vivere, noi animali, della morte di altri animali! »

Cap. 8: EQUIVALENZE; I TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

8.1 - L'EQUIVALENZA DELLE SUPERFICI PIANE

- Una "**superficie piana**" è una porzione di piano, limitata da una linea chiusa:
  ad esempio, sono superfici piane i poligoni, o i cerchi.
- L' "**estensione**" di una superficie piana è "la quantità di piano occupata dalla superficie".

"Superficie" ed "estensione" sono "concetti primitivi",
la cui descrizione è insita implicitamente negli assiomi che ad essi si riferiscono.

Due superfici con uguale estensione sono dette "**equivalenti**".

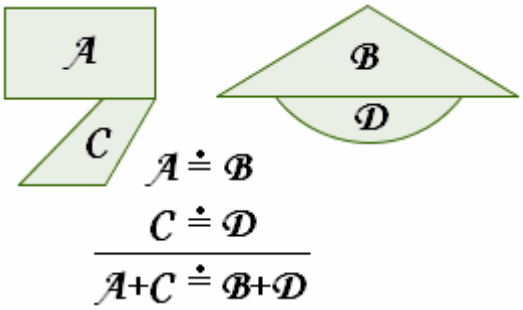
Se prendiamo una lamiera di metallo e ritagliamo da essa due porzioni di ugual peso,
avremo l'idea di due superfici equivalenti.
Ancora: l'imbianchino che impieghi la stessa quantità di vernice per pitturare due diverse pareti,
ha verniciato due superfici equivalenti.

Il simbolo che utilizzeremo per indicare equivalenza sarà un "uguale, col puntino sopra": $\doteq$

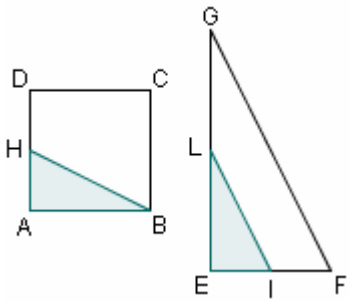
ASSIOMI della relazione di "equivalenza fra superfici piane"

1. **Due superfici uguali** (= congruenti) **sono equivalenti**
2. **L'equivalenza delle superfici piane gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva**
   - PROPRIETA' RIFLESSIVA $\forall \mathbf{A},\ \mathbf{A} \doteq \mathbf{A}$
     Ogni superficie è equivalente a sé stessa
   - PROPRIETA' SIMMETRICA $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \doteq \mathbf{A}$
     Se una superficie **A** è equivalente ad una superficie **B**, allora anche **B** è equivalente ad **A**
   - PROPRIETA' TRANSITIVA $(\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \doteq \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{A} \doteq \mathbf{C}$
     Se una superficie **A** è equivalente ad una superficie **B**,
     e la superficie **B** a sua volta è equivalente ad una superficie **C**,
     allora **A** è equivalente a **C**:
     In altre parole, due superfici equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.
3. **Somme, o differenze, di superfici equivalenti (in particolare: uguali), sono equivalenti**

NOTA. *Per "somma" di due superfici, intendiamo la superficie "totale".*
Per poter essere "sommate", due superfici devono essere prive di intersezione, o, al più,
avere in comune soltanto punti del contorno.
Per sommare due superfici S ed S' che siano parzialmente sovrapposte, così da avere in comune
anche dei punti interni ai contorni, occorre sostituire ad una di esse (es. S')
una superficie congruente, o equivalente, disposta in modo tale da poter essere sommata con S.

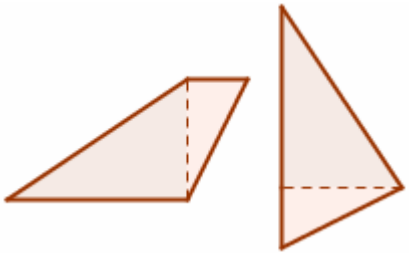


$$\frac{\mathcal{A} \doteq \mathcal{B} \quad \mathcal{C} \doteq \mathcal{D}}{\mathcal{A}+\mathcal{C} \doteq \mathcal{B}+\mathcal{D}}$$



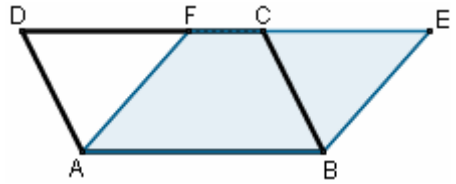
$$\frac{\mathrm{ABCD} \doteq \mathrm{EFG} \quad \mathrm{ABH} \doteq \mathrm{EIL}}{\underbrace{\mathrm{ABCD} - \mathrm{ABH}}_{\mathrm{BCDH}} \doteq \underbrace{\mathrm{EFG} - \mathrm{EIL}}_{\mathrm{IFGL}}}$$

COROLLARIO
dell'assioma 3:
due superfici equiscomponibili (ossia: scomponibili in parti rispettivamente uguali) sono equivalenti



Ad esempio, sono equivalenti
il trapezio e il triangolo in figura,
perché scomponibili in triangoli
rispettivamente uguali

TEOREMA. **Due parallelogrammi aventi ugual base e uguale altezza sono equivalenti**



IPOTESI
ABCD, ABEF parallelogrammi
con ugual base e uguale altezza

TESI ABCD ≐ ABEF

DIM.

I due triangoli ADF, BCE sono uguali per il Primo Criterio perché hanno: AD = BC (lati opposti di un parallelogrammo); AF = BE (stesso motivo); $D\hat{A}F = C\hat{B}E$ (angoli coi lati paralleli e concordi). Quindi:

ABED ≐ ABED (ogni superficie è equivalente a sé stessa : assioma 2, proprietà riflessiva dell'equivalenza)

ADF ≐ BCE (due superfici uguali sono anche equivalenti : assioma 1)

$$\underbrace{ABED - ADF}_{ABEF} \doteq \underbrace{ABED - BCE}_{ABCD}$$

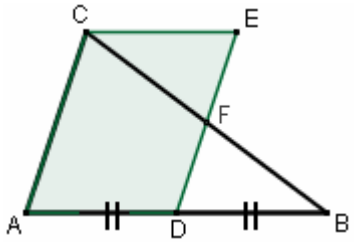
Vuoi sapere perché abbiamo preferito ragionare per differenza anziché per somma? Clicca qui: ⇨

COROLL. **Un parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo avente ugual base e uguale altezza**

NOTA 1 – Il corollario appena enunciato autorizza a calcolare l'**area di un parallelogrammo** tramite la **stessa formula che consente di calcolare l'area di un rettangolo:**

$\boxed{S_{RETT.} = b \cdot h}$ (vedi a questo proposito il precedente capitolo "Misura delle Grandezze").

TEOREMA. **Un triangolo è equivalente a un parallelogrammo avente base uguale a metà base del triangolo, e per altezza la stessa altezza**



IPOTESI:
ABC triangolo

ADEC parallelogrammo con $AD = \frac{1}{2}AB$, e stessa altezza di ABC

TESI
ABC ≐ ADEC

DIM.

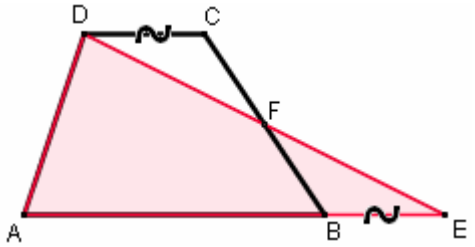
I due triangoli DBF, EFC sono uguali per il Secondo Criterio (due parallele, alterni interni, DB=AD=CE). Possiamo allora scrivere la catena $ABC = ADFC + DBF \doteq ADFC + EFC = ADEC$, che dimostra la tesi.

NOTA 2 – Combinando questo teorema con la NOTA 1 si ha la

formula per l'area di un triangolo: $\boxed{S_{TRIANG.} = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}}$

COROLLARIO. **Due triangoli con ugual base e uguale altezza sono equivalenti**

TEOREMA. **Un trapezio è equivalente a un triangolo avente base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza**



IPOTESI
ABCD trapezio
BE = DC,
così che il triangolo AED abbia base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza del trapezio

TESI
ABCD ≐ AED

DIM.

I due triangoli FCD e FBE sono uguali per il Secondo Criterio. Ne consegue

ABCD = ABFD + FCD ≐ ABFD + FBE = AED, c.v.d.

NOTA 3 - Questo teorema, insieme con la formula di cui alla NOTA 2, giustifica la

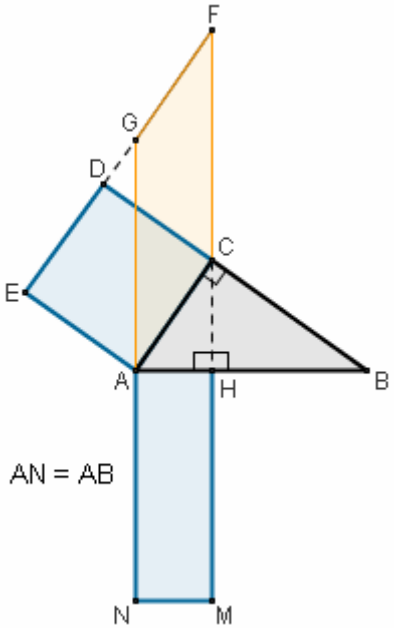
formula per l'area di un trapezio: $\boxed{S_{TRAP.} = \frac{(\text{BASE MAGG.} + \text{base min.}) \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}}$

8.2 - I TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

IL 1° TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo,
il quadrato costruito su di un cateto
è equivalente al rettangolo,
avente per dimensioni
l'ipotenusa
e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa:

$\boxed{q(AC) \doteq r(AB, AH)}$



Se pensiamo che due superfici equivalenti,
ossia aventi la stessa estensione, hanno la stessa "area"
(dove per "area" intendiamo la "misura numerica dell'estensione"),
e teniamo presenti le formule per l'area di quadrato e rettangolo,
note dalle scuole medie e discusse in questo volume
nel capitolo dedicato alla "Misura delle Grandezze",
otteniamo

il 1° Teorema di Euclide enunciato IN FORMA ARITMETICA:

In un triangolo rettangolo, il quadrato di un cateto
(nel senso di "la misura del cateto, elevata alla seconda")
è uguale al prodotto dell'ipotenusa per la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa
(ci si riferisce al prodotto delle misure, ovviamente):

$\boxed{AC^2 = AB \cdot AH}$ **Figura dinamica GEOGEBRA** ⇨

DIM.
La figura mostra:
- un triangolo rettangolo ABC;
- il quadrato ACDE costruito su di un cateto;
- e il rettangolo AHMN, il quale, poiché si è preso AN = AB, ha una dimensione uguale all'ipotenusa AB, e l'altra dimensione uguale alla proiezione AH del cateto AC prima considerato, sull'ipotenusa.

Vogliamo dimostrare che le due superfici $ACDE = q(AC)$ e $AHMN = r(AB, AH)$ sono equivalenti.
A tale scopo, prolunghiamo i tre segmenti NA, MC, ED, in modo da ottenere il parallelogrammo ACFG.
Tale parallelogrammo farà da "figura-ponte": faremo vedere che è equivalente sia al quadrato, che al rettangolo.
E con ciò resterà dimostrato, per la proprietà transitiva dell'equivalenza,
che il quadrato ACDE e il rettangolo AHMN sono equivalenti fra loro.
Ora, che il parallelogrammo ACFG e il quadrato ACDE siano equivalenti è immediato:
infatti, se si prende AC come base sia per ACFG che per ACDE, si vede che il segmento CD fa da altezza per entrambi: quindi il parallelogrammo e il quadrato sono equivalenti perché hanno stessa base e stessa altezza.
Un poco più impegnativo è dimostrare che sono equivalenti il rettangolo AHMN e il parallelogrammo ACFG.
AHMN e ACFG sono inscritti nella stessa striscia, avente per lati le due rette NG ed MF: quindi, se si prendono come rispettive basi AN e AG, hanno la stessa altezza (ad esempio, il segmento AH fa da altezza per entrambi).
Si tratta allora di dimostrare che hanno anche ugual base, cioè che risulta AN = AG.
Ma AN = AB, quindi se riusciamo a far vedere che AB = AG, la nostra dimostrazione sarà completata.
A tale scopo, confrontiamo i due triangoli ABC, AGE: se riusciamo a dimostrarli uguali, siamo a posto.
In effetti tali due triangoli hanno:
- $AC = AE$ perché lati di un quadrato;
- $A\hat{C}B = A\hat{E}G = 90°$
- $C\hat{A}B = E\hat{A}G$ perché complementari dello stesso angolo $G\hat{A}C$
  $(C\hat{A}B = G\hat{A}B - G\hat{A}C = 90° - G\hat{A}C = C\hat{A}E - G\hat{A}C = E\hat{A}G)$

E' dunque ABC = AGE per il Secondo Criterio, come intendevamo provare. La tesi è perciò dimostrata.

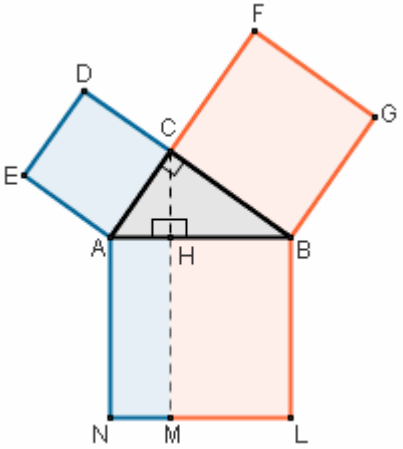
RIAS-SU-MEN-DO:
$\boxed{ABC = AGE \ (2° \text{ crit.}) \rightarrow AB = AG \ \ (\text{quindi } AN = AB = AG)}$
$\boxed{AHMN \doteq ACFG}$ (ugual base: AN = AG, stessa altezza AH)
$\boxed{ACFG \doteq ACDE}$ (stessa base AC, stessa altezza CD)
$\rightarrow \boxed{AHMN} \doteq ACFG \boxed{\doteq ACDE}$ **c.v.d.**

OSSERVAZIONE: la dimostrazione appena conclusa costituisce un bell'esempio di METODO TOP-DOWN!

IL TEOREMA DI PITAGORA

In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa

$\boxed{q(AC) + q(BC) \doteq q(AB)}$



Il Teorema di Pitagora enunciato IN FORMA ARITMETICA:

In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati dei cateti ("quadrato" nel senso di "misura elevata alla seconda") **è uguale al quadrato dell'ipotenusa**

$\boxed{AC^2 + BC^2 = AB^2}$

Figura dinamica GEOGEBRA ⇨

DIM.
La figura mostra:
- un triangolo rettangolo ABC;
- i quadrati ACDE e CBGF costruiti sui cateti e il quadrato ABLN costruito sull'ipotenusa.

E' stata anche tracciata l'altezza CH relativa all'ipotenusa,
poi prolungata fino ad incontrare il segmento NL in M.
In questo modo, sono comparsi nella figura due rettangoli:
- AHMN, che ha una dimensione uguale all'ipotenusa,
  e l'altra dimensione uguale alla proiezione del cateto AC sull'ipotenusa;
- HBLM, che ha una dimensione uguale all'ipotenusa,
  e l'altra dimensione uguale alla proiezione del cateto BC sull'ipotenusa.

Ora si ha

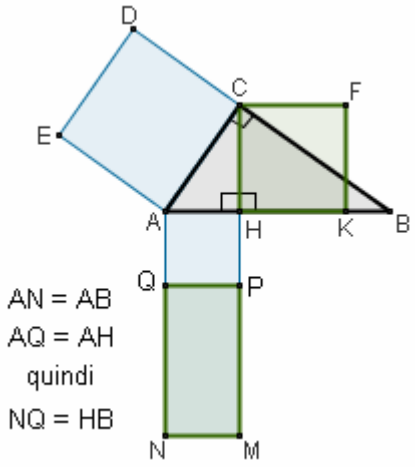
$AHMN \doteq ACDE$ (1° Teorema di Euclide)
$HBLM \doteq CBGF$ (1° Teorema di Euclide)

$\overbrace{AHMN + HBLM}^{ABLN} \doteq ACDE + CBGF$ **c.v.d.**

IL 2° TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa

$\boxed{q(CH) \doteq r(AH, HB)}$



Il 2° Teorema di Euclide enunciato IN FORMA ARITMETICA:

In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

$\boxed{CH^2 = AH \cdot HB}$

Figura dinamica GEOGEBRA ⇨

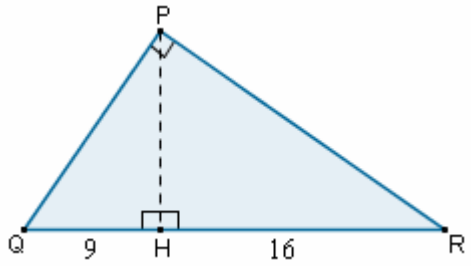
DIM.
Nella figura compaiono:
- un triangolo rettangolo ABC;
- il quadrato ACDE costruito sul cateto AC;
- il quadrato CHKF costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa (CH);
- il rettangolo AHMN, che è una "vecchia conoscenza" proveniente dal Primo Teorema di Euclide:
  infatti la dimensione AN è stata presa uguale all'ipotenusa AB.
  poi sul segmento AN è stato preso un segmento AQ = AH e da Q è stata tracciata la parallela QP ad AH, così da ottenere il quadrato AHPQ ed il rettangolo NMPQ.
  Quest'ultimo rettangolo ha una dimensione uguale ad AH, mentre l'altra sua dimensione è
  $NQ = AN - AQ = AB - AH = HB$.
  Insomma, NMPQ ha le due dimensioni uguali alle proiezioni AH, HB dei due cateti sull'ipotenusa, ed è dunque il rettangolo di cui parla la tesi.

Si tratta, in definitiva, di dimostrare che il quadrato CHKF è equivalente al rettangolo NMPQ.
E tale equivalenza si può provare con la seguente catena:

$CHKF \underset{\text{Pitagora su AHC}}{\doteq} ACDE - AHPQ \underset{\substack{\text{ACDE è equivalente ad AHMN per il 1° Teorema di Euclide applicato ad ABC}}}{\doteq} AHMN - AHPQ = NMPQ$ **c.v.d.**

ESEMPI NUMERICI, ESERCIZI SUI TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

a) In un triangolo rettangolo PQR, di ipotenusa QR, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano rispettivamente 9 cm e 16 cm. Determinare perimetro e area del triangolo.



$Q\hat{P}R = 90°$

$PH \perp QR$

$QH = 9$ cm, $HR = 16$ cm

$2p(PQR) = ?$

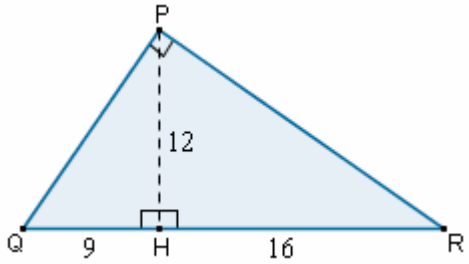
$S(PQR) = ?$

Il fatto che siano note le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa ci fa venire in mente il 2° Teorema di Euclide, del quale sono "protagoniste" tali due proiezioni, insieme con l'altezza relativa all'ipotenusa. Dunque

$\boxed{PH^2 = QH \cdot HR}$ (**Euclide 2°**, PQR)

e da qui ricaviamo

$\boxed{PH \underset{\text{NOTA 1}}{=} \sqrt{QH \cdot HR}} = \sqrt{9 \cdot 16} \underset{\text{NOTA 2}}{=} \sqrt{144} \underset{\text{NOTA 3}}{=} 12$ cm



NOTA 1 Ovviamente, davanti alla radice non mettiamo il doppio segno $\pm$ perché il valore negativo non avrebbe senso in questo contesto.

NOTA 2 Anche: $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

NOTA 3 L'unità di misura, a stretto rigore, andrebbe scritta ad ogni passaggio della catena; noi, per brevità, la mettiamo solo nel passaggio finale.

Ora possiamo ricavare il cateto PQ:

♪ applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PHQ:

$\boxed{PQ^2 = QH^2 + PH^2}$ (**Pitagora**, PHQ)

da cui

$\boxed{PQ = \sqrt{QH^2 + PH^2}} = \sqrt{9^2 + 12^2} =$

$= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ cm

♫ oppure applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo PQR:

$\boxed{PQ^2 = QR \cdot QH}$ (**Euclide 1°**, PQR), da cui

$\boxed{PQ = \sqrt{QR \cdot QH}} = \sqrt{(9+16) \cdot 9} =$

$= \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{225} = 15$ cm

E possiamo ricavare il cateto PR:

♪ applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PHR:

$\boxed{PR^2 = HR^2 + PH^2}$ (**Pitagora**, PHR)

da cui

$\boxed{PR = \sqrt{HR^2 + PH^2}} = \sqrt{16^2 + 12^2} =$

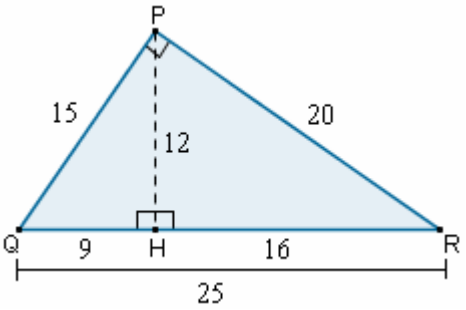
$= \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$ cm

♫ oppure applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo PQR:

$\boxed{PR^2 = QR \cdot HR}$ (**Euclide 1°**, PQR), da cui

$\boxed{PR = \sqrt{QR \cdot HR}} = \sqrt{(9+16) \cdot 16} =$

$= \sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{400} = 20$ cm

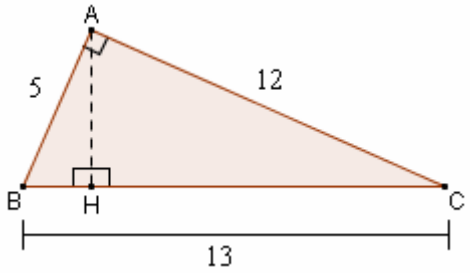


$\boxed{2p(PQR) =} \; PQ + QR + PR = 15 + 25 + 20 = \boxed{60 \text{ cm}}$

$\boxed{S(PQR)} = \dfrac{QR \cdot PH}{2} = \dfrac{25 \cdot 12^{6}}{2} = \boxed{150 \text{ cm}^2}$

oppure $S(PQR) = \dfrac{PQ \cdot PR}{2} = \dfrac{15 \cdot 20^{10}}{2} = 150 \text{ cm}^2$

b) In un triangolo rettangolo i cui lati misurano 5, 12 e 13, quali sono le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa? E dell'altezza relativa all'ipotenusa?



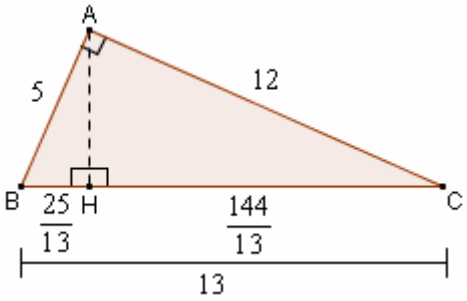
$\boxed{AB^2 = BC \cdot BH}$ (**Euclide 1°**, ABC)

$BC \cdot BH = AB^2$ (scambiando i membri)

$\boxed{BH = \frac{AB^2}{BC}} = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13}$ cm

$HC = BC - BH = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}$ cm

$\boxed{AH^2 = BH \cdot HC}$ (**Euclide 2°**, ABC)



$\boxed{AH = \sqrt{BH \cdot HC}} = \sqrt{\frac{25}{13} \cdot \frac{144}{13}} = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 12^2}{13^2}} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$ cm

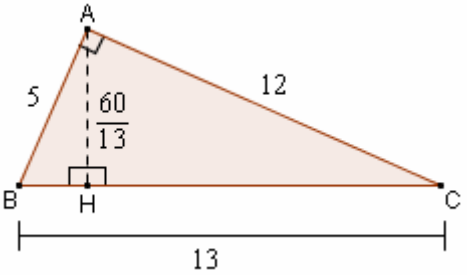
In alternativa (con calcoli, però, più pesanti)
si sarebbe potuta calcolare immediatamente l'altezza relativa all'ipotenusa mediante la formula

$\boxed{\text{altezza} = \frac{\text{doppia area}}{\text{ipotenusa}} = \frac{\text{prodotto cateti}}{\text{ipotenusa}}}$

$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$ cm

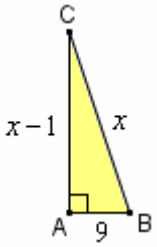
per poi ricavare le proiezioni con Pitagora:

$\boxed{BH^2 + AH^2 = AB^2}$ (**Pitagora**, ABH)



$BH^2 = AB^2 - AH^2$, $\boxed{BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \ldots = \sqrt{\frac{625}{169}} = \frac{25}{13}$ cm

c) In un triangolo rettangolo, un cateto misura metri 9, e l'altro cateto è inferiore di 1 metro all'ipotenusa. Determina tutti i lati del triangolo.



$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\boxed{9^2 + (x-1)^2 = x^2}$

$81 + x^2 - 2x + 1 = x^2$

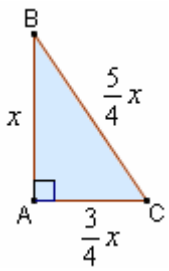
$-2x = -82$; $x = 41$

BC = 41 m, AC = 40 m

In questo problema,
Pitagora è stato utilizzato
per impostare l'equazione risolvente.

INUTILE, IN CASI SIMILI,
SCOMODARE formule inverse o RADICI QUADRATE:
quando si desidera scrivere un'uguaglianza
contenente x che serva da equazione risolvente,
basta a tale scopo la relazione pitagorica "originaria".

d) In un triangolo rettangolo, i cateti sono uno i ¾ dell'altro e il perimetro misura 36*a*. Determinare l'area.



$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} =$

$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} = \ldots = \frac{5}{4}x$

$x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 36a$ ... $x = 12a$

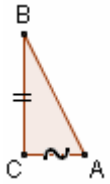
$AC = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \cdot 12a = 9a$

$S = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{9a \cdot 12a}{2} = 54a^2$

In questo problema, dunque,
il teorema di Pitagora
è stato impiegato
per esprimere un segmento in funzione di *x*.

L'INVERSO DEL TEOREMA DI PITAGORA

Se in un triangolo
la somma dei quadrati costruiti su due lati
è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato,
allora il triangolo è rettangolo
(e ha il terzo lato come ipotenusa)



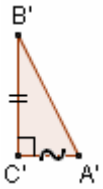
IPOTESI
$q(AC) + q(BC) \doteq q(AB)$

TESI
ABC è rettangolo, con ipotenusa AB

L'inverso del Teorema di Pitagora
enunciato
in FORMA
ARITMETICA:

Se in un triangolo
la somma dei quadrati di due lati
("quadrato" nel senso di
"misura elevata alla seconda")
è uguale al quadrato del terzo lato,
allora il triangolo è rettangolo
e ha il terzo lato come ipotenusa

DIM. Si considera (fig. qui a destra) un angolo retto $\hat{C}'$,
e sui suoi lati si prendono due segmenti $A'C' = AC$ e $B'C' = BC$.
Si congiunge poi A' con B', ottenendo così un triangolo rettangolo $A'B'C'$.
L'obiettivo è a questo punto di dimostrare che i due triangoli $A'B'C'$ e ABC sono uguali:
con ciò resterà infatti provato che anche ABC, al pari di $A'B'C'$, è rettangolo.
Ora, ABC e $A'B'C'$ hanno già uguali, per costruzione, due lati:
se riuscissimo a far vedere che hanno uguale anche il lato rimanente, saremmo a posto,
perché potremmo invocare il 3° Criterio.
E in effetti, si ha:



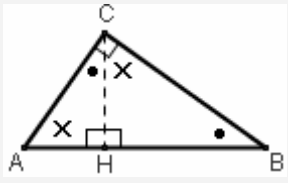
$$q(A'B') \underset{\substack{\text{perché A'B'C' è rettangolo per costruzione}}}{\doteq} q(A'C') + q(B'C') \underset{\substack{\text{perché A'C'=AC, B'C'=BC per costruzione}}}{\doteq} q(AC) + q(BC) \underset{\text{per ipotesi}}{\doteq} q(AB)\,.$$

Ma se $q(A'B') \doteq q(AB)$, ne consegue $A'B' = AB$!
Possiamo dunque davvero concludere che i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali per il 3° Criterio,
c.v.d.

♥ **E' giusto dire che un triangolo coi lati di 3, 4 e 5 cm è rettangolo "per il Teorema di Pitagora"?**
Beh, no, perché dovremmo dire invece "per l'INVERSO del Teorema di Pitagora"!
Tuttavia, se per "Teorema di Pitagora" intendiamo
quel *doppio* enunciato che consta del teorema diretto e del suo inverso,
l'espressione verbale ritorna ad essere accettabile.

I TEOREMI DI EUCLIDE "RITROVATI PER SIMILITUDINE"

♥ A distanza di tempo, potresti avere difficoltà a ricordare gli enunciati dei due Teoremi di Euclide.
Se ciò accadesse, tieni conto della possibilità di ricostruirli utilizzando le Similitudini,
che saranno oggetto di studio in un capitolo successivo.



E' ben noto che quando, in un triangolo rettangolo,
si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa,
si ottengono tre triangoli rettangoli (compreso quello di partenza),
dotati della proprietà di avere gli angoli rispettivamente uguali.
Ora, si dimostra (teoria delle Similitudini),
che quando due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali,
allora sono "simili", ossia hanno anche i lati in proporzione
(in pratica, sono "uno l'ingrandimento dell'altro").
I lati che si corrispondono nella proporzione
sono quelli che stanno opposti ad angoli uguali.

Dunque, con riferimento alla figura:

- $ACH \underset{\substack{\text{simile con}}}{\sim} ABC \rightarrow AH : AC = AC : AB \rightarrow AC^2 = AH \cdot AB$ (1° Teorema di Euclide)
- $ACH \underset{\substack{\text{simile con}}}{\sim} CHB \rightarrow AH : CH = CH : HB \rightarrow CH^2 = AH \cdot HB$ (2° Teorema di Euclide)

TERNE PITAGORICHE

Una "terna pitagorica" è una terna di numeri naturali tutti non nulli a, b, c tali che

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

Esempi:

3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
...	...	...

Un programmino che dà un elenco delle terne pitagoriche ⇨

E' evidente che una terna "pitagorica" prende questo nome dal fatto che i suoi termini possono essere interpretati come le misure dei tre lati di un triangolo rettangolo.

Infatti **il Teorema di Pitagora** afferma (nella sua lettura "aritmetica") che

"in un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati (NOTA) **dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa"**

mentre **il suo inverso** afferma che

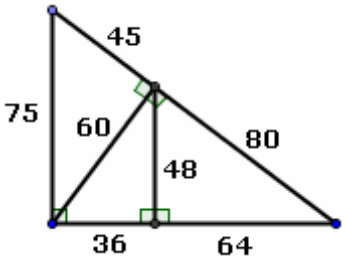
"se in un triangolo la somma dei quadrati (NOTA) **di due lati è uguale al quadrato del terzo lato, allora il triangolo è rettangolo e ha il terzo lato come ipotenusa"**

NOTA: "quadrato" nel senso di "misura elevata alla seconda"

- **Se si prendono i tre termini a, b, c di una terna pitagorica e li si moltiplica per uno stesso numero naturale maggiore di 1, si ottiene un'altra terna pitagorica.**

  infatti $\mathbf{a^2+b^2=c^2} \leftrightarrow k^2(a^2+b^2)=k^2c^2 \leftrightarrow k^2a^2+k^2b^2=k^2c^2 \leftrightarrow \mathbf{(ka)^2+(kb)^2=(kc)^2}$

  vale a dire: se **(a, b, c)** è una terna pitagorica, allora anche **(ka, kb, kc)** lo è, e viceversa.
  Ad esempio, dalla terna $(3\ 4\ 5)$ si generano tutte le "figlie"
  $(6\ 8\ 10)$, $(9\ 12\ 15)$, $(12\ 16\ 20)$, $(15\ 20\ 25)$, $(18\ 24\ 30)$, $(21\ 28\ 35)$, ...



Verifica che dalla figura ↑ si possono trarre 5 terne pitagoriche.

- **Diremo che una terna pitagorica è "primitiva" o "fondamentale" se i suoi tre termini sono "primi fra loro"**, ossia non hanno divisori comuni (= il loro Massimo Comun Divisore è 1), altrimenti parleremo di terna "derivata".

- **Per scoprire nuove terne pitagoriche** possiamo anche sfruttare delle IDENTITÀ algebriche:

  ad esempio, per le tre espressioni n^2-p^2; $2np$; n^2+p^2

  vale l'identità $(n^2-p^2)^2+(2np)^2=(n^2+p^2)^2$ (verificalo!)

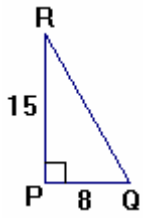
  quindi, **se attribuiamo alle lettere n, p valori interi a nostro piacere, la terna $(n^2-p^2,\ 2np,\ n^2+p^2)$ sarà SEMPRE una terna pitagorica.**

Verifica che $(2001\ \ 2002000\ \ 2002001)$ è una terna pitagorica. Suggerimento utile: controlla che sia $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$

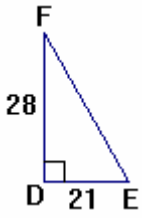
- Tante cose si potrebbero aggiungere; qui ci accontentiamo di rilevare un aspetto molto "pratico":

  se sono noti 2 lati di un dato triangolo rettangolo, e si osserva che le loro misure coincidono con i termini che hanno ugual posto in una terna pitagorica nota, allora la determinazione del lato rimanente sarà immediata !!!

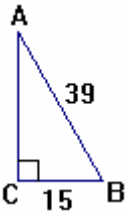
  Esempi:



Qui possiamo subito dire, se ricordiamo la terna $(8, 15, 17)$, che $QR=17$.



Se osserviamo che $21=3\cdot7$; $28=4\cdot7$ capiamo di trovarci di fronte alla terna pitagorica $(3, 4, 5)$ moltiplicata per 7, e concludiamo immediatamente che $EF=5\cdot7=35$



Se osserviamo che $39=13\cdot3$; $15=5\cdot3$ e ricordiamo la terna pitagorica fondamentale $(5, 12, 13)$ avremo subito, senza dover fare calcoli, $AC=12\cdot3=36$

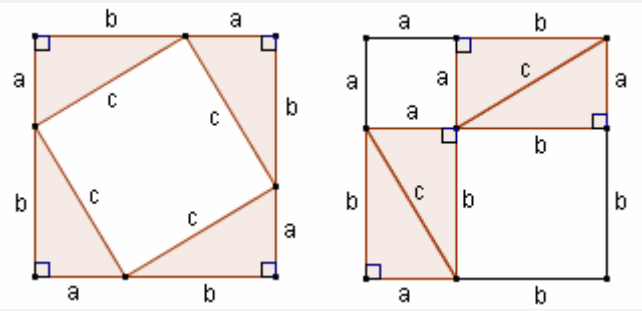
PITAGORA: STORIA, APPROFONDIMENTI DAL SITO DEL PROF. PEIRETTI

Sul bellissimo sito http://www2.polito.it/didattica/polymath/
(progetto Polymath, dedicato alla bellezza della matematica), troviamo, fra le tante cose interessanti, queste splendide lezioni su Pitagora e il suo Teorema a cura del professor Federico Peiretti di Torino: ⇨

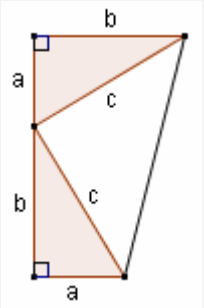
LE TANTE DIMOSTRAZIONI ALTERNATIVE DEL TEOREMA DI PITAGORA

Del Teorema di Pitagora sono state escogitate tantissime dimostrazioni alternative.
Il sito www.cut-the-knot.org, in questa pagina ⇨, ne riporta più di 100!!!

Ecco qui di seguito tre possibili modalità di dimostrazione del teorema.



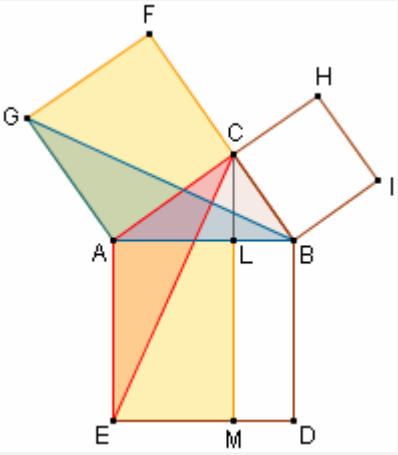
In questa dimostrazione vengono indicate con a, b, c le misure dei tre lati del triangolo rettangolo.
Nella prima figura quattro copie del triangolo sono state disposte in modo tale da lasciare in mezzo una regione vuota, che si può dimostrare facilmente essere quadrata.
Nella figura a fianco le stesse quattro mattonelle triangolari sono state posate in maniera differente.
Ma i due quadratoni più grossi sono uguali (il loro lato è, in entrambi i casi, a+b)
e quindi hanno la stessa estensione anche le regioni bianche che rappresentano, nei due casi,
la differenza fra i due quadratoni uguali e la superficie formata dalle quattro mattonelle triangolari.
Segue la tesi: $c^2 = a^2 + b^2$



La figura qui a fianco si riferisce ad una dimostrazione trovata da Garfield (1831-1881), un presidente degli Stati Uniti che si dilettava di matematica.
Due copie di un triangolo rettangolo di lati a, b, c sono state disposte in modo che, tracciata una congiungente, si formasse un trapezio rettangolo.
Poiché gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono fra loro complementari, ne deriva che il triangolo bianco ha un angolo di 180°–90°=90°.
Se calcoliamo l'area del trapezio in due modi differenti, avremo

$$S = \frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} \quad \text{ma anche} \quad S = \cancel{2}\cdot\frac{ab}{\cancel{2}} + \frac{c\cdot c}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

e quindi $\frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$ da cui $\frac{a^2 + \cancel{2ab} + b^2}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2ab} + c^2}{\cancel{2}}$ c.v.d.



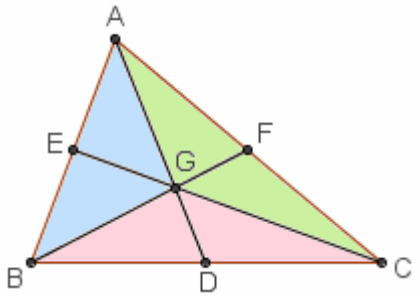
La figura a sinistra riporta la dimostrazione che si trova negli "Elementi", il più famoso testo di geometria di tutti i tempi, scritto da Euclide intorno al 300 a. C.
Il triangolo rett. di partenza è ABC (l'angolo retto è quello di vertice C);
ABDE, ACFG, BCHI sono i tre quadrati costruiti sui lati
mentre CL è l'altezza relativa all'ipotenusa, poi prolungata in LM.
Tracciate le congiungenti BG e CE, possiamo osservare che
il quadrato ACFG è equivalente alla metà del triangolo ABG
(infatti il quadrato e il triangolo hanno la stessa base AG e uguale altezza)
mentre il rettangolo ALME è equivalente alla metà del triangolo ACE
(stessa base AE e uguale altezza).
Ma i due triangoli ABG e ACE sono uguali per il 1° Criterio
(i due loro angoli di vertice A sono uguali a 90° + uno stesso angolo)
perciò è ACFG ≐ ALME ;
e analogamente si potrebbe far vedere che è BCHI ≐ LBDM .
Sommando si ha ACFG + BCHI ≐ ALME + LBDM = ABDE c.v.d.

RIPASSO, ESERCIZI su equivalenze e teoremi di Euclide e Pitagora

1) Dimostra che un parallelogrammo è suddiviso dalle sue diagonali in quattro triangoli fra loro equivalenti.

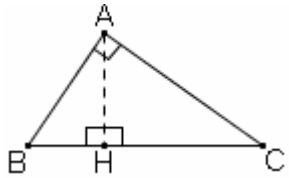
2) Dimostra che se si tracciano le diagonali di un trapezio, i due triangoli che hanno per lati i due lati obliqui sono equivalenti fra loro.

3) Dimostra che i sei triangoli in cui un triangolo dato è suddiviso dalle sue mediane, sono tutti equivalenti fra loro.



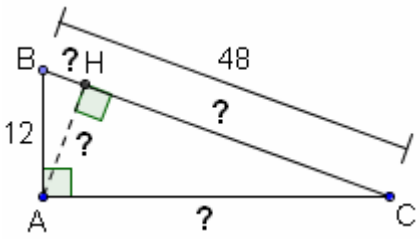
4)

a)

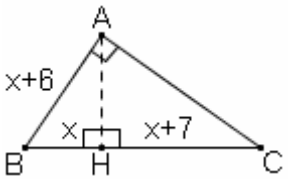


Euclide 1°: $AB^2 = BC \cdot BH$
Enuncialo anche a parole!

b)



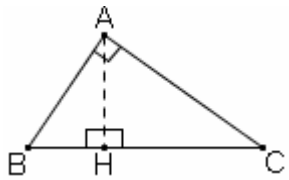
c)



$x = ?$
$S(ABC) = ?$

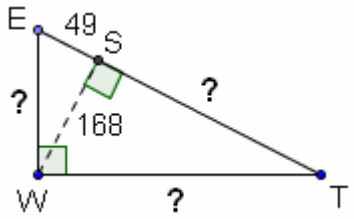
5)

a)

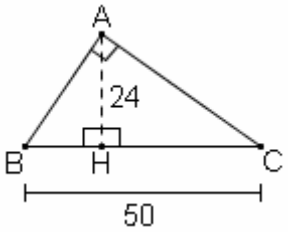


Euclide 2°: $AH^2 = BH \cdot HC$
Enuncialo anche a parole.

b)



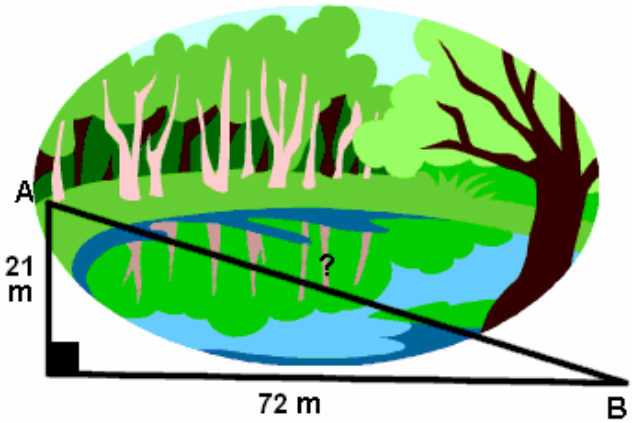
c)



$BC = 50$, $AH = 24$
$2p(ABC) = ?$

www.proprofs.com

6) To get from point A to point B Myranda must avoid walking through the pond. She walks 21 meters south and 72 meters east. How many meters is the shortest distance from point A to point B?

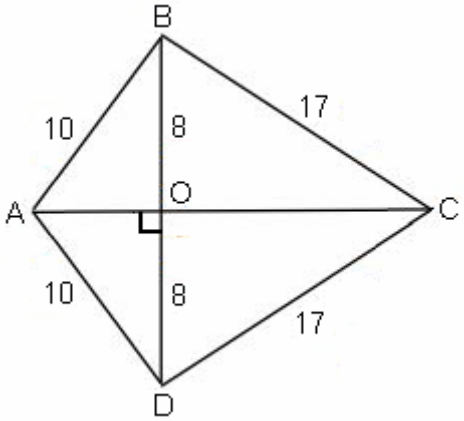


7) Breanna has a laptop computer that has a 37 centimeter diagonal screen. The width of the laptop is 12 centimeters.

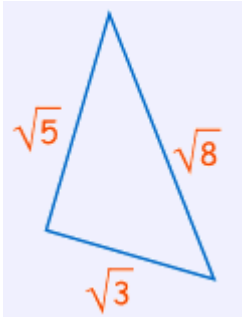
What is the length of the laptop?

Da www.mathsisfun.com

8) The diagram shows a kite ABCD. The diagonals cut at right angles and intersect at O. What is the length of the diagonal AC?



9) Does this triangle have a right angle?



3	4	…		13	…	85
5	12	…		…	63	65
…	24	25		20	…	29
8	…	17		28	45	…
…	40	41		…	56	65
11	60	…		36	77	…
12	…	37		39	…	89

←

10) Elenco delle più semplici terne pitagoriche primitive (da completare)

Ispirato a un problema trovato su di un'antica tavola babilonese:

11) Una trave lunga 30 dm sta verticalmente a ridosso di una parete. Mentre la sua sommità scivola in basso di 6 dm mantenendosi appoggiata alla parete, di quanti dm l'estremità che poggia a terra si allontana dalla parete?

12) Se n è un intero qualunque, la terna (a, b, c), dove

$a = 2n+1;\quad b = 2n(n+1);\quad c = 2n(n+1)+1$

è sempre una terna pitagorica: dimostralo.

13) Se (a, b, c) è una terna pitagorica, allora anche

$a+2b+2c;\quad 2a+b+2c;\quad 2a+2b+3c$

sarà una terna pitagorica: dimostralo.

Scritto intorno al 200 a. C., ripreso con ampliamenti e commenti da Liu Hui nel III secolo d.C., "I Nove Capitoli dell'Arte Matematica" è il "classico" dell'antichità matematica cinese. Pressappoco come avvenne per gli Elementi di Euclide nel mondo greco antico, questo scritto rappresentò un compendio della matematica che si era sviluppata in Cina fino a quel tempo.

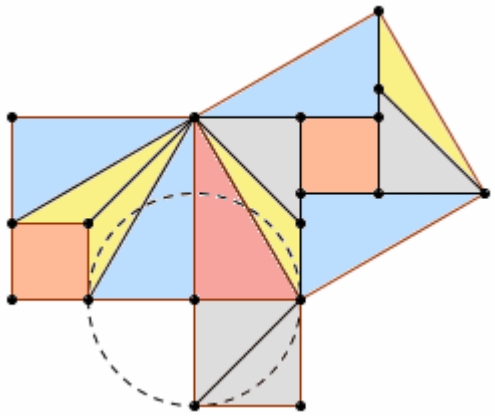


Questo francobollo è dedicato a Liu Hui

I due problemi qui a fianco → sono liberamente ispirati a quesiti tratti da quel testo.

14) Un'asta metallica poggia contro una parete verticale sulla quale il suo punto d'appoggio si trova all'altezza di 10 cm. Se l'altra estremità dell'asta, quella che poggia a terra, viene allontanata dalla parete in modo da distare da essa 1 cm in più di quanto distava prima, l'asta finirà per giacere orizzontale a terra. Quanto è lunga quest'asta?

15) Un bastone ha la stessa lunghezza della diagonale di un'anta di armadio, ed è di 4 dm più lungo dell'altezza dell'anta e di 2 dm più lungo della sua larghezza. Quanto misurano le dimensioni dell'anta? [Equazione di 2° grado …]



16)

La figura qui a sinistra mostra una delle tante possibili dimostrazioni del Teorema di Pitagora.

C'è chi la attribuisce al cinese Liu Hui, di cui abbiamo parlato, ma non è certo.

Cerca di comprenderla nei particolari, e di capire perché funziona per qualsiasi triangolo rettangolo.

QUALCHE RISPOSTA

1) Hanno tutti e quattro ugual base e uguale altezza, perché …

2) Sono differenze fra due triangoli equivalenti e uno stesso triangolo …

3) BGD e CGD sono equivalenti perché hanno ugual base e stessa altezza; poiché com'è noto la mediana AD è divisa dal baricentro G in due parti delle quali quella contenente il vertice A è doppia dell'altra, il triangolo BGD avrà estensione uguale alla metà di quella del triangolo BGA = AGE + BGE , quindi …

4b) $BH = 3,\ HC = 45,\ AH = 3\sqrt{15},\ AC = 12\sqrt{15}$ 4c) $(x+6)^2 = x(2x+7);\ x = 9,\ S(ABC) = 150$

5b) $ST = 576,\ WE = 175,\ WT = 600$ 5c) $BH = x;\ x(50-x) = 24^2;\ x = 18 \vee x = 32,\ 2p(ABC) = 120$

6) 75 m 7) 35 cm 8) 21 9) Sì, per l'inverso del Teorema di Pitagora: $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{8})^2$

11) Di 18 dm 14) E' lunga 50,5 cm 15) 6 dm e 8 dm

Altri problemi sui teoremi di Euclide e Pitagora si trovano a pagina 245

GEOMETRIA Cap. 9: SIMILITUDINI

Per comodità del lettore riportiamo alcune nozioni di base sulle proporzioni già esposte nel Volume 1.

9.1 - PROPORZIONI

Si dice "**proporzione**" un'**uguaglianza fra due rapporti** (= quozienti).

Esempio

12 : 16 = 15 : 20

Questa proporzione è corretta, perché effettivamente i due rapporti (=quozienti) 12:16 e 15:20 sono uguali fra loro (valgono entrambi ¾, o, se si preferisce: 0,75).

Di solito si legge "**12 *sta a* 16 *come* 15 *sta a* 20**",
proprio per evidenziare il fatto che si va a confrontare il "peso di un numero rispetto all'altro":
12, nei confronti di 16, è i ¾ e quindi è proprio come 15 nei confronti di 20.

ESERCIZI (risposte più avanti in questa pagina)

a) Quanto deve valere x se si vuole che la proporzione $24:12 = x:11$ sia corretta?
b) Quanto deve valere y se si vuole che la proporzione $5:15 = y:18$ sia corretta?
c) Quanto deve valere z se si vuole che la proporzione $6:4 = 30:z$ sia corretta?

Un po' di **terminologia**. In una proporzione,

- i due dividendi (cioè: il 1° e il 3° termine) si dicono "**antecedenti**";
- i due divisori (cioè: il 2° e il 4° termine) si dicono "**conseguenti**";

antecedenti
12 : 16 = 15 : 20
conseguenti

- il 1° e il 4° termine si dicono "**estremi**";
- il 2° e il 3°, "**medi**".

estremi
12 : 16 = 15 : 20
medi

Risposte agli esercizi di questa pagina

a) Il quoziente 24:12 vale 2, quindi anche il quoziente x:11 dovrà valere 2,
e ciò avviene a condizione che x sia uguale a 22.
Anche: così come 24 è il doppio di 12, altrettanto x dovrà essere il doppio di 11 da cui x=22.

b) Così come 5 è la terza parte di 15, anche y dovrà essere la terza parte di 18. Perciò y=6.

c) 6:4 =1,5 ossia il 6 è 1 volta e mezza il 4. Il 30 è una volta e mezza … che cosa? 20, evidentemente!
Anche ragionando "da destra a sinistra":
z, rispetto al 30, dovrà avere lo stesso "peso" che ha il 4 rispetto al 6.
Ma 4 è i 4/6 di 6, cioè i 2/3 di 6, e allora z dovrà essere i 2/3 di 30, cioè 20.

PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;

E, VICEVERSA,

se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due, allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione, a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di un medesimo prodotto.

Brevemente: se a, b, c, d sono quattro numeri non nulli, vale la **doppia implicazione**

$$\mathbf{a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc}$$

Dimostrazione $a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad=bc$

Importante - **Questa proprietà consta di DUE enunciati**: un enunciato **diretto**, e il rispettivo **inverso**.
Essa fornisce perciò una condizione NECESSARIA E SUFFICIENTE
affinché quattro numeri non nulli, presi in un dato ordine, formino una proporzione valida.

Per verificare se una proporzione è corretta, anziché calcolare i due quozienti per vedere se coincidono, **si può andare a vedere se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**:
così facendo si applica, appunto, la "Proprietà Fondamentale" (precisamente, nel suo "aspetto **INVERSO**").

La Proprietà Fondamentale delle proporzioni ha importanti **conseguenze**.

Ad esempio, supponiamo che in una proporzione siano noti i primi tre termini ma non il quarto. Allora:

$$a : b = c : x; \quad ax = bc; \quad x = \frac{bc}{a}.$$

E in generale, è facile vedere che:

se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;
se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto

Esempio: $\mathbf{25 : x = 20 : 12} \qquad \mathbf{x = \dfrac{\cancel{25}^{5} \cdot \cancel{12}^{3}}{\cancel{20}_{4}} = 15}$

Se più termini di una proporzione sono espressi in funzione di una stessa incognita x,
la proporzione si può interpretare come un'equazione che permetterà di trovare il valore di x.

Applicare la Propr. Fondamentale è in questo caso un modo veloce e comodo per liberarsi dai denominatori.

Esempio:
$\mathbf{(x + 4) : 10 = (2x + 1) : 15}$
$\mathbf{(x + 4) \cdot 15 = 10 \cdot (2x + 1)}$
$15x + 60 = 20x + 10$
$-5x = -50; \; x = 10$

… In alternativa, si poteva trasformare in una "classica" equaz. coi denominatori:

$$(x+4) : 10 = (2x+1) : 15$$
$$\frac{x+4}{10} = \frac{2x+1}{15}; \quad \frac{3(x+4)}{\cancel{30}} = \frac{2(2x+1)}{\cancel{30}} \quad \text{ecc.}$$

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI (sul Vol. 1 trovi anche un paio di dimostrazioni, a titolo di esempio)

Le proporzioni godono di diverse altre **proprietà**, che permettono, a partire da una proporzione fissata **a : b = c : d**, di ricavarne altre, che saranno corrette anch'esse *se e solo se* lo è quella di partenza.

b : a = d : c (**invertire**) **a : c = b : d** (**permutare i medi**) **d : b = c : a** (**permutare gli estremi**)

$\left.\begin{matrix}\mathbf{(a \pm b) : a = (c \pm d) : c} \\ \mathbf{(a \pm b) : b = (c \pm d) : d}\end{matrix}\right]$ (**comporre e scomporre**) $\qquad$ $\left.\begin{matrix}\mathbf{(a \pm c) : (b \pm d) = a : b} \\ \mathbf{(a \pm c) : (b \pm d) = c : d}\end{matrix}\right]$ **(comporre e scomporre applicato agli antecedenti e ai conseguenti)**

Alle proprietà sopra elencate si può aggiungere la seguente, relativa alle "catene di rapporti uguali":
"**data una CATENA DI RAPPORTI UGUALI, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente**".

Es.: dalla catena $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ si possono ricavare le 3 proporzioni $(14+6+10) : (7+3+5) = \begin{cases} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{cases}$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90 e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$x : 4 = y : 11 = z : 3 \quad (x+y+z) : (4+11+3) = x : 4 \quad 90 : 18 = x : 4 \quad x = \dfrac{90 \cdot 4}{18} = 20$ ... e analogamente per y, z

Il quarto termine di una proporzione è detto
"QUARTO PROPORZIONALE dopo i primi tre termini".

Ad esempio, nella proporzione 8:6 = 12:9 abbiamo che 9 è il quarto proporzionale dopo 8, 6, 12.

- *Trovare il quarto proporzionale dopo* 24, 6, 8

  $\boxed{24 : 6 = 8 : x}$ da cui $x = \dfrac{6 \cdot 8}{24} = 2$ (anche molto più semplicemente: 24 è il quadruplo di 6; e 8 a sua volta è il quadruplo ... di cosa? Di 2, è ovvio!)

Una proporzione in cui i due medi sono uguali si dice "PROPORZIONE CONTINUA".

Ad esempio, 9:6 = 6:4 è una proporzione continua.

In una proporzione continua, ciascuno dei due medi uguali si dice
"MEDIO PROPORZIONALE fra il 1° e il 4° termine".

Ad esempio, in 9:6 = 6:4 , il 6 è medio proporzionale fra 9 e 4.

- *Trovare il medio proporzionale fra* 2 *e* 32

  $\boxed{2 : x = x : 32}$ $\quad x^2 = 2 \cdot 32; \quad x^2 = 64; \quad x = 8$ (oppure $x = \pm 8$, a seconda del contesto)

ESERCIZI

1) Verifica che le seguenti proporzioni sono tutte corrette,
controllando che in ciascuna il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

a) $12:16=15:20$ b) $12:6=6:3$ c) $40:12=100:30$ d) $1,2:2,16=1,5:2,7$

2) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni,
pensando direttamente all'uguaglianza dei due rapporti e quindi *senza applicare le formule*
"prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"

a) $6:3=x:5$ b) $6:3=5:x$ c) $15:3=35:x$ d) $15:3=x:4$
e) $1:2=2:x$ f) $x:10=4:8$ g) $3:4=x:28$ h) $2:3=x:10$
i) $4:3=x:12$ j) $x:4=6:30$ k) $40:50=x:2$ l) $18:x=30:40$
m) $7:y=6:3$ n) $24:8=z:11,25$ o) $t:2,6=12:8$ p) $0,05:5=x:0,2$

3) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, *applicando le formule*
"prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"

a) $12:20=18:x$ b) $10:25=x:10$ c) $x:3=4:5$ d) $15:x=35:30$
e) $12:5=x:8$ f) $x:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ g) $x:2,4=3,2:5$ h) $0,8:0,2=0,1:x$

4) Le seguenti proporzioni contengono più volte un'incognita. Determina il valore di questa.

a) $18:(x+4)=15:x$ b) $(x+2):14=(x+3):16$ c) $x:(x+1)=(x+2):(x+7)$
d) $h:(h-2)=(h-3):h$ e) $(w+1,2):4=(w-1,2):3$ f) $a:(2a+3)=5:10$

5) Determina il *quarto proporzionale* dopo:

a) 4, 8 e 10 b) 5, 15 e 15 c) 40, 25 e 32 d) 3, 4 e 5
e) 3; 3,3; 4 f) 2,5; 3,6; 4,7 g) 3^7, 3^{11}, 3^{10} h) $5\cdot10^{12}$, $3\cdot10^{13}$, $2\cdot10^8$

6) Determina il *medio proporzionale* (positivo) fra:

a) 3 e 48 b) 24 e 6 c) 2 e 3 d) 2,5 e 6,4
e) 3^7 e 3^{11} f) 3,3 e $3,\overline{3}$ g) 1 e 5^6 h) 100 e 1000

7) **Dividere un numero in parti proporzionali a due numeri dati**

Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri x, y tali che
a. $x+y=30$
b. $x:5=y:7$.

Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti",
si ottiene $\underbrace{(x+y)}_{30}:(5+7)=\begin{cases}x:5\\y:7\end{cases}$ da cui $x=12,5;\ y=17,5$

In generale, comunque, per dividere un numero c in due parti proporzionali ai due numeri a e b,
basta dividere c per la somma $a+b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per a poi per b.

Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:

a) 30; 1 e 4 b) 30; 2 e 3 c) 100; 2 e 3 d) 1; 9 e 11
e) 0,07; 5 e 9 f) 30; 5 e 2 g) 72; 2, 3 e 4 h) 72; 2 e 3

8) ♥ Pierino, alla richiesta di determinare x nella proporzione $(x+3):x=2x:25$, scrive: $x=\frac{25(x+3)}{2x}$,
ma non è molto convinto di questo procedimento. Cosa gli consiglieresti?

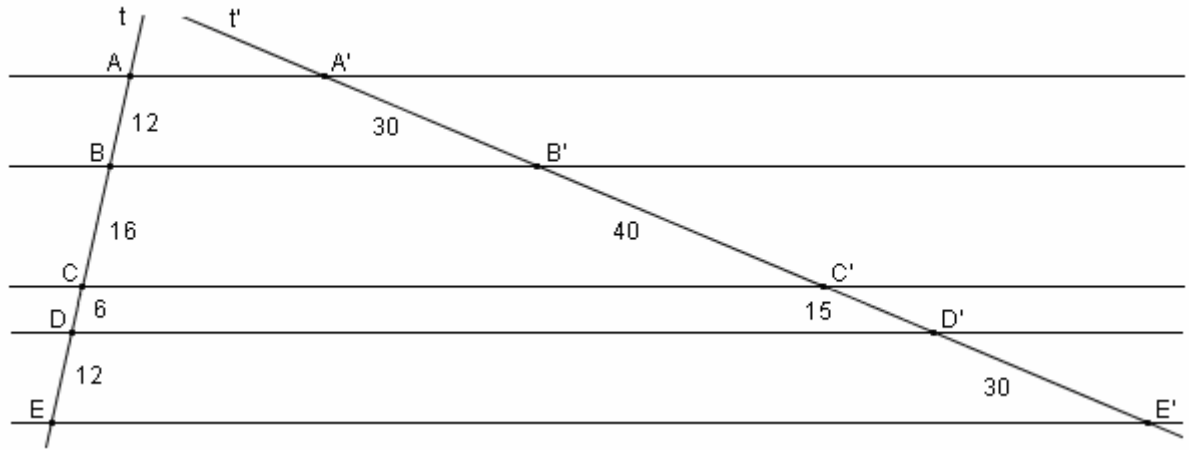
RISULTATI

2a) 10 2b) 2,5 2c) 7 2d) 20 2e) 4 2f) 5 2g) 21 2h) 20/3
2i) 16 2j) 4/5 2k) 8/5 2l) 24 2m) 3,5 2n) 33,75 2o) 3,9 2p) 0,002
3a) 30 3b) 4 3c) 12/5 3d) 90/7 3e) 96/5 = 19,2 3f) 5/8 3g) 1,536 3h) 0,025
4a) 20 4b) 5 4c) 1/2 4d) 6/5 4e) 8,4 4f) impossibile
5a) 20 5b) 45 5c) 20 5d) 20/3 5e) 4,4 5f) 6,768 5g) 3^{14} 5h) $1,2\cdot10^9$
6a) 12 6b) 12 6c) $\sqrt{6}\approx2,45$ 6d) 4 6e) 3^9 6f) $\sqrt{11}\approx3,317$ 6g) 5^3 6h) $\sqrt{100000}\approx316$
7a) 6 e 24 7b) 12 e 18 7c) 40 e 60 7d) 0,45 e 0,55 7e) 0,025 e 0,045 7f) $150/7\approx21,4$ e $60/7\approx8,6$
7g) 16, 24 e 32 7h) 28,8 e 43,2 8) Di fare *prodotto dei medi = prodotto degli estremi* poi risolvere l'equazione

9.2 - SIMILITUDINI

❑ IL TEOREMA DI TALETE (= "Grande" Teorema di Talete)

Quando un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali,
i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali



Vale a dire, con riferimento alla figura:

(1) $AB : CD = A'B' : C'D'$

o anche, applicando la proprietà del permutare:

(2) $AB : A'B' = CD : C'D'$

Il "Teorema di Talete" è dunque una **generalizzazione** dell'enunciato che avevamo chiamato "**Piccolo Teorema di Talete**" e che affermava:

"*Se un fascio di parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull'altra*".

I DUE MODI ALTERNATIVI DI "VEDERE" LA PROPORZIONALITA'

Dicendo "**i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali**", voglio intendere che:

♪ **un segmento (sulla 1ª trasversale) sta ad un altro segmento (sempre sulla 1ª trasversale) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo**
(vedi **proporzione 1)**

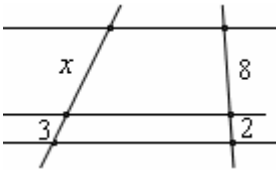
oppure, in modo PERFETTAMENTE EQUIVALENTE:

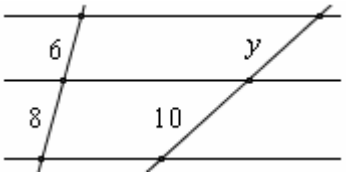
♫ **un segmento (sulla 1ª trasversale) sta al suo corrispondente (sulla 2ª trasversale) come un altro segmento (sulla 1ª trasversale) sta al suo corrispondente (sulla 2ª trasversale)**
(vedi **proporzione 2)**

Dimostrazione del Teorema di Talete

Quando un fascio di parallele è tagliato da due trasversali t e t',
si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme S dei segmenti giacenti su t
(S è una classe di grandezze, "sottoclasse" della più generale classe di tutti i segmenti del piano)
e l'insieme S' dei segmenti che giacciono su t'.
E' noto da un teorema precedente che
"a segmenti uguali su una trasversale, corrispondono segmenti uguali sull'altra";
ed è evidente che
"a un segmento, su una trasversale, che sia somma di due certi segmenti,
corrisponde quel segmento, sull'altra trasversale, che è la somma dei rispettivi corrispondenti"
(ad es. nella figura, al segmento AC, che è la somma AB+BC, corrisponde il segmento A'C',
che è proprio la somma di A'B' (corrispondente di AB) con B'C' (corrispondente di BC).
Allora sono verificate le condizioni del "Criterio di Proporzionalità" (cap. 7, pag. 195),
per cui la tesi è dimostrata.

Due esercizietti sul Teorema di Talete: determina x e y.





Soluzioni

$x : 3 = 8 : 2$ oppure $x : 8 = 3 : 2$
da cui $x = 12$

$6 : 8 = y : 10$ oppure $6 : y = 8 : 10$
da cui $y = 15/2 = 7{,}5$

❑ POLIGONI SIMILI

Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono "simili" se sono uno l'ingrandimento dell'altro.

Specifichiamo meglio, cercando di dare una veste matematica precisa a questa idea.

Se ti sforzi di disegnare due poligoni, ad esempio due quadrilateri,
in modo che **uno di essi appaia come l'ingrandimento dell'altro**,
ti renderai conto che dovrai innanzitutto disegnarli
con **gli angoli rispettivamente uguali**;
… ma ciò **non sarà sufficiente**:
ci vorrà qualcosa in più, e precisamente dovrai fare in modo che **i lati siano in proporzione**.

I due poligoni della figura sottostante
hanno gli angoli rispettivamente uguali.
Eppure, evidentemente,
NON sono "uno l'ingrandimento dell'altro"…

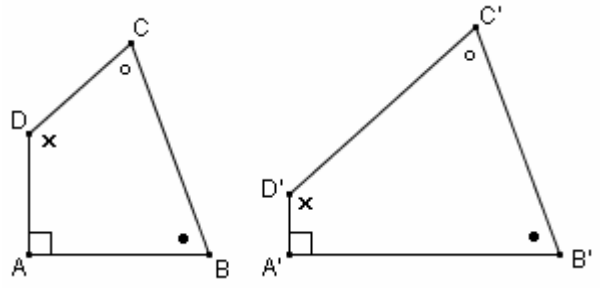


Figura 1

… Invece i due poligoni di quest'altra figura,
oltre ad avere gli angoli rispettivamente uguali,
hanno pure i lati proporzionali,
perché ciascun lato del primo poligono
è i 2/3 del lato che gli corrisponde
nel secondo poligono.
In questa Figura 2, i due poligoni in gioco appaiono
"uno l'ingrandimento dell'altro".

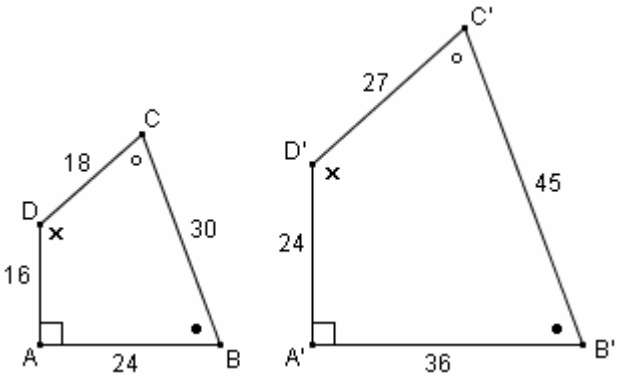


Figura 2

Da queste considerazioni discende la seguente

DEFINIZIONE

Due poligoni aventi lo stesso numero di lati si dicono SIMILI se hanno:

I) gli angoli rispettivamente uguali

II) e i lati corrispondenti proporzionali

Dire che "hanno i lati corrispondenti proporzionali" significa dire
che il rapporto fra due lati corrispondenti è lo stesso per ogni coppia di lati corrispondenti.

Con riferimento alla *Figura 2*,

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A' .$$

Tale rapporto costante si dice
"**rapporto di similitudine**".

Ad es., in *Figura 2*, il rapporto di similitudine dei due quadrilateri ABCD, A'B'C'D' (presi in quest'ordine), è 3/2 (prendendoli invece nell'ordine opposto, il rapporto di similitudine sarebbe 2/3)

$$\textit{rapporto di similitudine} = \frac{\textit{lato poligono pensato per secondo}}{\textit{lato poligono pensato per primo}}$$

per cui se il rapporto di similitudine è
< 1*, il secondo è rimpicciolito rispetto al primo;*
> 1*, il secondo è ingrandito rispetto al primo.*

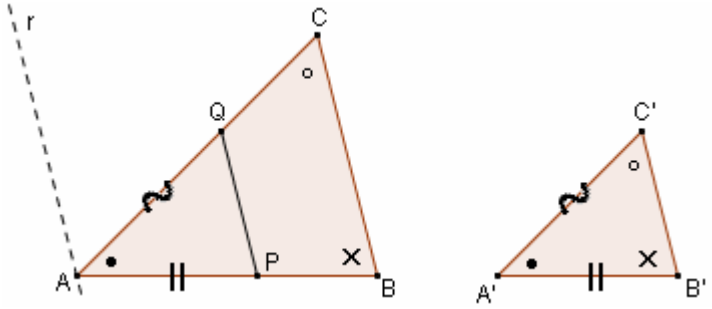
❑ TRIANGOLI SIMILI

Abbiamo visto che due poligoni si dicono simili
se hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati corrispondenti proporzionali.

Nel caso dei triangoli, tuttavia, **questa definizione si rivela sovrabbondante**,
perché si può dimostrare che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali,
allora hanno SENZ'ALTRO anche i lati corrispondenti proporzionali;
cosa che invece non necessariamente accade per i poligoni con più di tre lati.

Questo enunciato prende il nome di "Primo Criterio di Similitudine".

TEOREMA (1° Criterio di Similitudine):
Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora sono simili, cioè hanno anche i lati corrispondenti proporzionali



IPOTESI
$\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$

TESI
ABC è simile con A'B'C',
cioè vale anche la proporzione
AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'

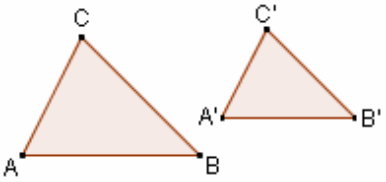
Dimostrazione (per la prima proporzione; per le altre si procede in modo analogo)

Prendiamo sulla semiretta AB un segmento AP = A'B', e sulla semiretta AC un segmento AQ = A'C'. Il triangolo APQ risulterà uguale al triangolo A'B'C' per il Primo Criterio di Uguaglianza dei Triangoli (è infatti $\hat{A} = \hat{A}'$ per ipotesi). Pertanto $A\hat{P}Q = \hat{B}' = \hat{B}$ e quindi le due rette PQ e BC, formando con la trasversale AB due angoli corrispondenti uguali, sono parallele. Tracciamo ora per A un'altra retta r parallela a PQ e BC. Per il Teorema di Talete avremo AB : AP = AC : AQ
e quindi anche, essendo AP = A'B' e AQ = A'C', AB : A'B' = AC : A'C'

Il 1° Criterio di Similitudine è un teorema che si applica con **grandissima frequenza** negli esercizi. Osserviamo fra l'altro che si può subito concludere che due triangoli dati sono simili anche se si sa (per ipotesi o per precedente dimostrazione) che hanno **DUE angoli rispettivamente uguali**, perché **allora (per differenza rispetto a 180°) saranno certo uguali anche gli angoli rimanenti**.

♥ **PUNTUALIZZAZIONE: DUE MODI ALTERNATIVI DI "VEDERE" LA PROPORZIONALITA'**

Quando so che due certi triangoli ABC e A'B'C' sono simili, allora posso impostare le proporzioni
AB : A'B' = AC : A'C'; AB : A'B' = BC : B'C'; AC : A'C' = BC : B'C'
Permutando i medi in ciascuna delle tre, esse diventano:
AB : AC = A'B' : A'C'; AB : BC = A'B' : B'C'; AC : BC = A'C' : B'C'

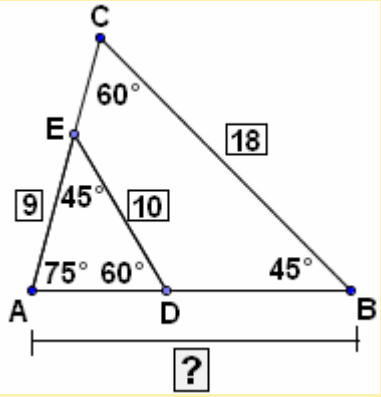


Quindi **se abbiamo due triangoli simili, l'affermazione che "i lati corrispondenti sono proporzionali" può essere interpretata indifferentemente in due modi, perfettamente equivalenti fra loro.**

♪ Si può interpretare nel senso che il rapporto tra due lati corrispondenti è costante, cioè che
"un lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente, come un altro lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente"…

♫ … ma si può anche interpretare nel senso che il rapporto di due lati del 1° triangolo è uguale al rapporto dei due lati corrispondenti del 2° triangolo (presi nello stesso ordine), cioè che
"un lato (del 1° triangolo) sta ad un altro lato (sempre del 1° triangolo) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo".

♥ ESEMPIO DI ESERCIZIO



Nella figura, i due triangoli ABC, ADE sono simili per il 1° Criterio. Dunque, per determinare AB, imposteremo *una qualunque* fra le proporzioni che coinvolgono AB insieme con segmenti noti, ad esempio

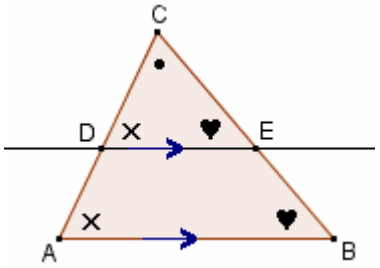
- ❑ AB : AE = BC : DE ("un lato, del 1° triangolo, sta al suo corrispondente, come un altro lato, del 1° triangolo, sta al suo corrispondente"; AB e AE si corrispondono perché entrambi opposti a un angolo di 60°)
- ❑ OPPURE AB : BC = AE : DE (un lato, del 1° triangolo, sta a un altro lato, sempre del 1° triangolo, come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo")

♥ **In due triangoli simili, sono corrispondenti ("omologhi") due lati che stiano opposti ad angoli uguali, o allo stesso angolo**

Bene; prendiamo una qualsiasi delle proporzioni, ad es. AB : AE = BC : DE e sostituiamo al posto degli elementi noti, AE, BC e DE, la loro misura (AB fa da "*x*", ma è inutile una nuova lettera in questo caso: lasceremo AB).

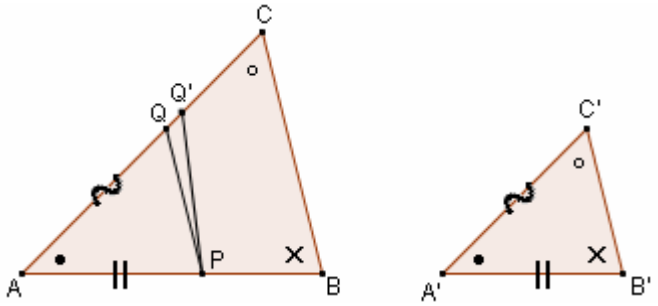
Avremo così $AB : 9 = 18 : 10$ da cui $AB = \frac{9 \cdot 18}{10} = \frac{162}{10} = 16,2$

COROLLARIO del 1° Criterio di Similitudine:
Una retta parallela ad un lato di un triangolo stacca da questo un triangolo simile al dato



Con riferimento alla figura qui a fianco:
basta tener presente che,
quando si hanno due parallele con trasversale,
gli angoli corrispondenti sono uguali …

TEOREMA (2° Criterio di Similitudine):
Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali, allora sono simili



IPOTESI
$AB : A'B' = AC : A'C'$
$\hat{A} = \hat{A}'$

TESI
ABC simile con $A'B'C'$

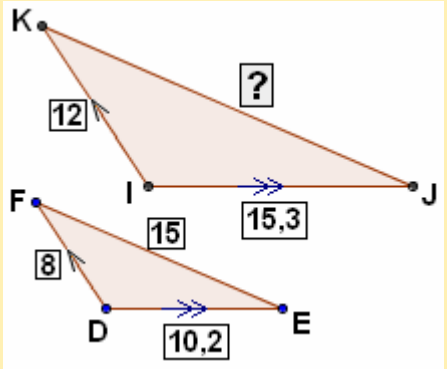
Dimostrazione
Prendiamo sulla semiretta AB il segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC il segmento $AQ = A'C'$. Ora il triangolo APQ risulterà uguale ad $A'B'C'$ per il 1° Crit. di Uguaglianza dei Triangoli ($\hat{A} = \hat{A}'$ per ipotesi).
Basterà dunque dimostrare che ABC è simile ad APQ; e a tale scopo, tenendo presente il Corollario del Primo Criterio di Similitudine, basterà far vedere che PQ è parallela a BC.
Per assurdo. Se PQ *NON* fosse parallela a BC, la parallela a BC condotta da P taglierebbe AC in un punto Q' distinto da Q; i due triangoli ABC, APQ' risulterebbero simili e si avrebbe
(1) $AB : AP = AC : AQ'$
D'altra parte, per ipotesi e per la costruzione effettuata, vale pure la proporzione
(2) $AB : AP = AC : AQ$. Ma

**se due proporzioni hanno ordinatamente uguali tre termini,
allora hanno necessariamente uguale anche il termine rimanente**
("**UNICITA' DELLA QUARTA PROPORZIONALE**": vedi NOTA)

Quindi, dal fatto che valgano contemporaneamente le due proporzioni (1) e (2), si trae $AQ' = AQ$, e quindi $Q' \equiv Q$, contro quanto supposto.

NOTA
Se è $\boxed{a : b = c : d}$ e contemporaneamente $\boxed{a : b = c : e}$ allora si ha $\mathbf{d = \frac{bc}{a}}$ ma anche $\mathbf{e = \frac{bc}{a}}$ quindi sarà $\boxed{d = e}$ **(UNICITA' DELLA QUARTA PROPORZIONALE, O DEL QUARTO PROPORZIONALE)**

♥ **ESEMPIO**



In figura, i due angoli $E\hat{D}F$, $J\hat{I}K$ hanno i lati paralleli e concordi, quindi sono fra loro uguali.
Inoltre $12 : 8 = 15{,}3 : 10{,}2$ (i due rapporti valgono entrambi 3/2).
Di conseguenza si può affermare che i due triangoli EDF, JIK sono simili per il 2° Criterio di Similitudine.
Potremo perciò, per determinare JK, scrivere una qualunque proporzione che coinvolga JK e segmenti noti, ad esempio

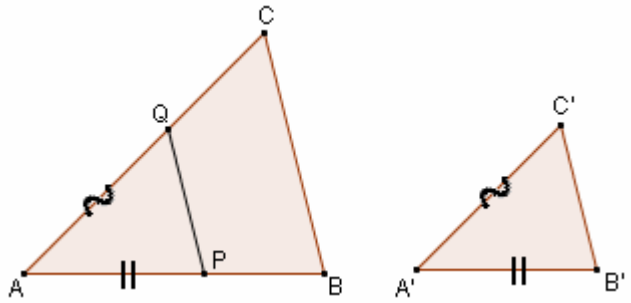
$$JK : EF = IK : DF \quad \text{da cui} \quad JK = \frac{EF \cdot IK}{DF} = \frac{15 \cdot \cancel{12}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,2}} = \frac{45}{2} = 22{,}5$$

(è possibile, se si preferisce, anche scrivere
$JK : EF = IK : DF \rightarrow JK : 15 = 12 : 8 \rightarrow JK = 15 \cdot 12 / 8 = 22{,}5$).

Più rapidamente, osservato che i lati del triangolo grande sono una volta e mezza quelli del triangolo piccolo,

$$JK = \frac{3}{2} EF = \frac{3}{2} \cdot 15 = \frac{45}{2} = 22{,}5$$

TEOREMA (3° Criterio di Similitudine):
Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente proporzionali, allora sono simili



HP $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

TH ABC simile con $A'B'C'$

OSSERVAZIONE

Quindi, considerate le due condizioni
che nei *poligoni* definiscono la similitudine:

1) uguaglianza degli angoli corrispondenti
2) proporzionalità dei lati

- il Terzo Criterio ci dice che,
  NEI TRIANGOLI, è sufficiente la SECONDA,
- mentre il Primo Criterio ci diceva che,
  sempre NEI TRIANGOLI,
  è sufficiente la PRIMA.

Dimostrazione

Prendiamo sulla semiretta AB il segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC il segmento $AQ = A'C'$.
Essendo

$AB : A'B' = AC : A'C'$

si avrà anche

$AB : AP = AC : AQ$

I due triangoli ABC, APQ sono perciò simili per il 2° Criterio di Similitudine; quindi sarà pure

(1) $AB : AP = BC : PQ$

D'altra parte, essendo, per ipotesi, $AB : A'B' = BC : B'C'$ e, per costruzione, $AP = A'B'$, si ha altresì

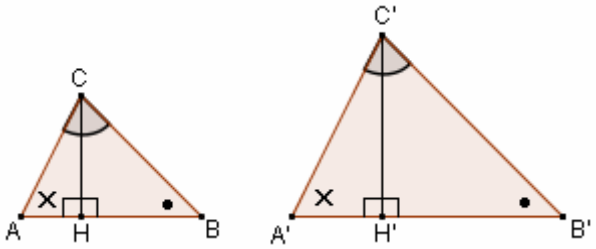
(2) $AB : AP = BC : B'C'$

Confrontando le due proporzioni (1) e (2), per l'unicità della quarta proporzionale si trae

$PQ = B'C'$.

Allora i due triangoli APQ, $A'B'C'$ sono uguali per il 3° Criterio di uguaglianza dei triangoli,
ed essendo ABC simile ad APQ, sarà pure ABC simile ad $A'B'C'$, come volevasi dimostrare.

TEOREMA
In due triangoli simili, le basi stanno fra loro come le rispettive altezze



IPOTESI

ABC simile con $A'B'C'$
$CH \perp AB$, $C'H' \perp A'B'$

TESI

$AB : A'B' = CH : C'H'$

Dimostrazione

Dalla similitudine di ABC e $A'B'C'$
segue

$AB : A'B' = AC : A'C'$

Inoltre, poiché per ipotesi si ha $\hat{A} = \hat{A}'$,
anche i due triangoli rettangoli ACH e $A'C'H'$
sono simili, da cui

$AC : A'C' = CH : C'H'$.

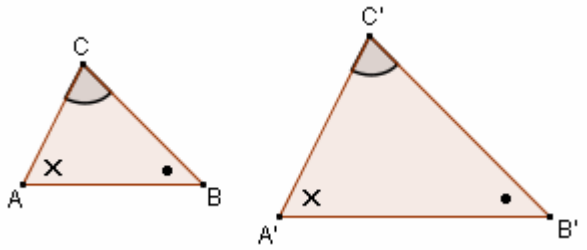
Confrontando le due proporzioni, segue subito la tesi.

OSSERVAZIONE

Perciò, se due triangoli sono simili,
qualora, ad esempio,
ogni lato del primo
sia i 2/3 del lato che gli corrisponde nel secondo
(con rapporto di similitudine 3/2, quindi),
anche ogni altezza del primo
sarà i 2/3 dell'altezza
che gli corrisponde nel secondo.

Insomma, il rapporto fra
due qualsiasi lati corrispondenti
finisce per essere anche il rapporto
fra due qualsiasi *altezze* corrispondenti.

TEOREMA. In due triangoli simili, i perimetri stanno fra loro come due lati omologhi



IPOTESI

ABC simile con $A'B'C'$

TESI

$2p(ABC) : 2p(A'B'C') = AB : A'B'$

$(= AC : A'C' = BC : B'C')$

Dimostrazione

Semplicissima. Poiché, per ipotesi, ABC e $A'B'C'$ sono simili, si avrà $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$.
Applicando a questa catena di rapporti uguali
la proprietà del comporre gli antecedenti e i conseguenti (NOTA),
si otterrà $(AB + AC + BC) : (A'B' + A'C' + B'C') = AB : A'B'$ $(= AC : A'C' = BC : B'C')$, cioè la tesi.

NOTA. Questa proprietà afferma:

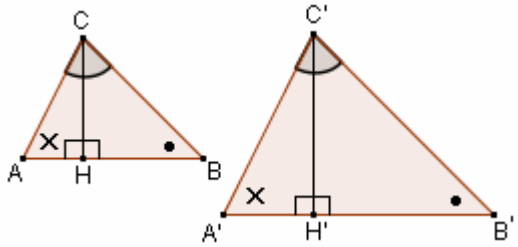
**"data una catena di rapporti uguali,
la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti
come ciascun antecedente sta al proprio conseguente"**

Ad esempio, da $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ ricaviamo $(14 + 6 + 10) : (7 + 3 + 5) = \begin{cases} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{cases}$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90
e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$x : 4 = y : 11 = z : 3$ $(x + y + z) : (4 + 11 + 3) = x : 4$ $90 : 18 = x : 4$ $x = \frac{90 \cdot 4}{18} = 20$ ... e analogamente per *y*, *z*

TEOREMA
In due triangoli simili, le aree stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi (NOTA)



IPOTESI

ABC simile con $A'B'C'$

TESI

$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$

Dimostrazione

Poiché, come già dimostrato,
in due triangoli simili le basi stanno fra loro come le rispettive altezze, si avrà

$AB : A'B' = CH : C'H'$ $\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{CH}{C'H'}\right)$

da cui

$$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{\frac{AB \cdot CH}{2}}{\frac{A'B' \cdot C'H'}{2}} = \frac{AB \cdot CH}{A'B' \cdot C'H'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CH}{C'H'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

OSSERVAZIONE RIASSUNTIVA

Nel passaggio da un triangolo a un altro simile, *ogni lato viene moltiplicato per k*?
Allora risulteranno moltiplicati anche

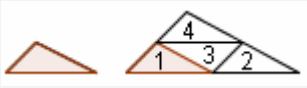
- il PERIMETRO per k,
- ciascuna ALTEZZA per k,
- l'AREA invece per il numero k^2.



NOTA

Quindi, se nel passaggio da un triangolo ad un altro simile il lato, ad esempio, **raddoppia**, allora l'area diventa il **quadruplo**!

Osserva d'altronde la figura …

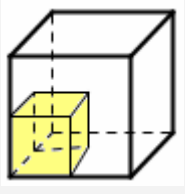


Se poi il lato triplica, l'area diventa 9 volte, ecc.
Questo vale, più in generale,
per tutti i poligoni, anzi per tutte le figure piane sottoposte a dilatazione o contrazione.

Nello **spazio tridimensionale**,
avviene qualcosa del genere … però …

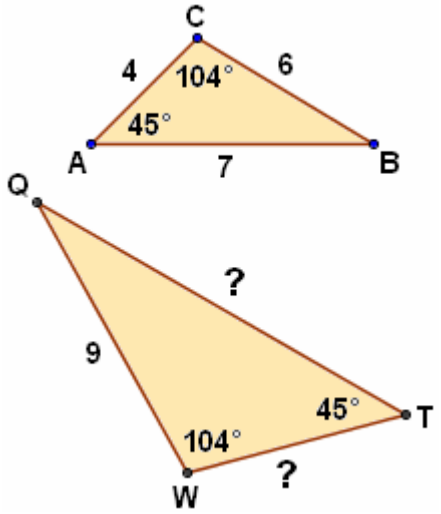
**In due figure solide simili,
i volumi stanno fra loro
come i CUBI di due lati omologhi.**

Se un solido subisce, ad es., una dilatazione in modo che ogni misura lineare raddoppi, il suo volume diventerà 8 volte tanto.

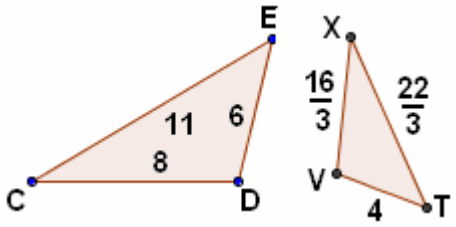


Il cubo di lato doppio richiede 8 cubetti piccoli per essere riempito.
Quindi il suo volume è 8 volte il volume del cubetto piccolo.

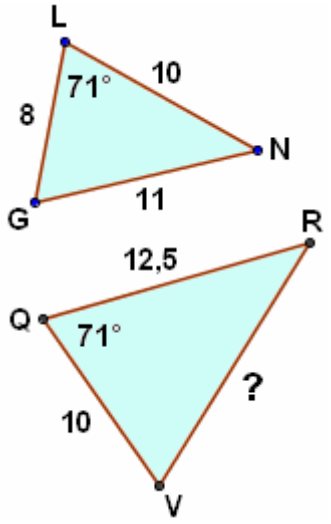
ESERCIZI sui triangoli simili



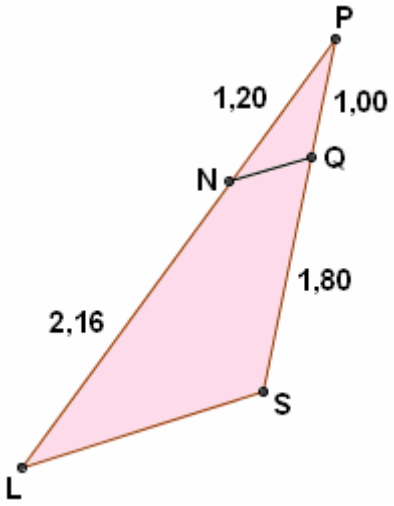
1) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli ABC, WTQ sono simili?
Quanto misurano i lati indicati col punto interrogativo?
Quanto vale il rapporto di similitudine?



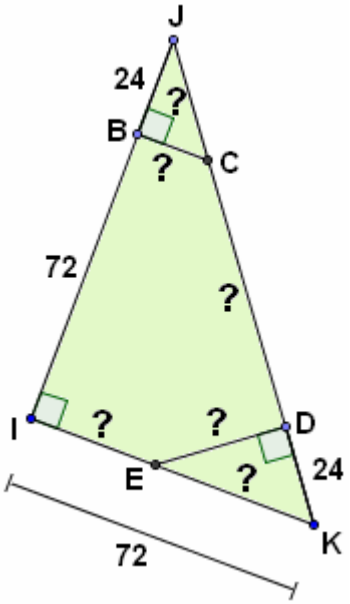
2) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli CDE, VTX sono simili?
Quanto vale il rapporto di similitudine?



3) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli GNL, QVR sono simili?
Quanto vale il rapporto di similitudine?
Quanto misura il lato indicato col punto interrogativo?



4) Siamo certi che NQ sia parallela a LS?

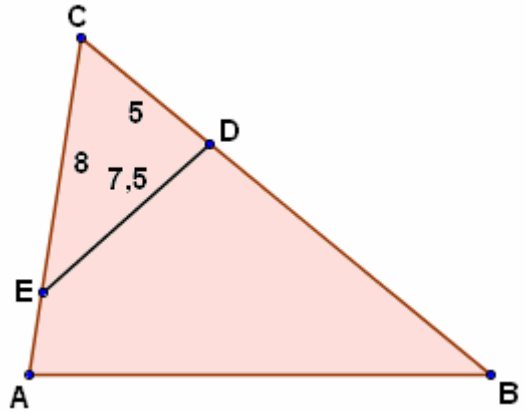


5) Quanto misura, innanzitutto, l'ipotenusa del triangolo rettangolo IJK?

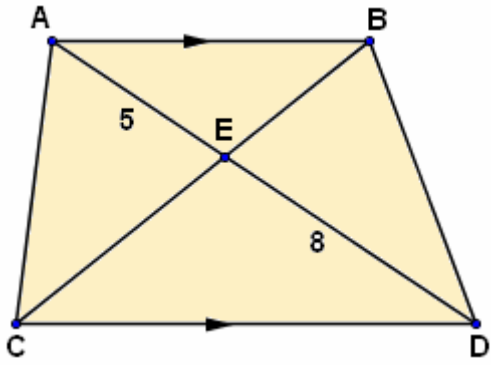
Quale teorema ci garantisce che i triangoli IJK, BJC sono simili?
Quanto vale il loro rapporto di similitudine?

Quale teorema ci garantisce che i triangoli IJK, DEK sono simili?
Quanto vale il loro rapporto di similitudine?

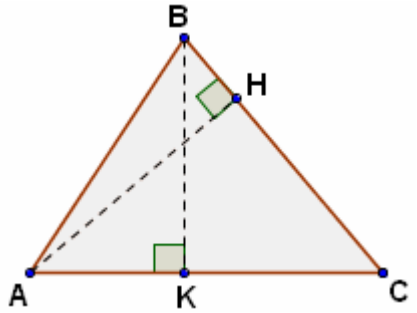
Quanto misurano i segmenti indicati col punto interrogativo?



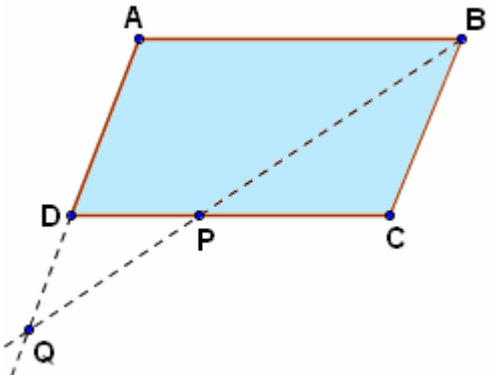
6) Sapendo che CA = 10 e CB = 16, è possibile dedurre che EDC è simile ad ABC, e determinare la misura di AB: perché?



7) AD, BC sono le diagonali di un trapezio e si tagliano in E.
I due triangoli AEB, CED sono simili?
E i due triangoli AEC e BED?
Qual è il rapporto fra i perimetri dei triangoli AEB, CED?
Qual è il rapporto tra le loro aree?
Se CB misurasse 12 cm, quanto misurerebbero CE ed EB?



8) In un triangolo ABC,
siano AH e BK
due altezze.
Dimostra che
$AC \cdot CK = BC \cdot CH$



9) Dal vertice B di un parallelogrammo ABCD
si traccia una semiretta BP,
essendo P un punto sul lato DC;
questa semiretta va a intersecare
la retta AD in Q.
I due triangoli BPC e ABQ sono simili:
perché?
Se AB = 10, AD = 6 e DP = 4,2
quanto misurerà DQ?

Problemi vari sulle similitudini sono proposti a partire da pagina 258

RISPOSTE

1) Il 1° Criterio di Similitudine; $WT : AC = WQ : BC \rightarrow WT : 4 = 9 : 6$ oppure $WT : WQ = AC : BC \rightarrow \ldots$
$WT = 6$ e $QT = 10{,}5$; rapporto di similitudine 3/2 (2/3 se i triangoli venissero pensati in ordine inverso)

2) Il 3° Criterio; 2/3 3) Il 2° Criterio; 5/4 = 1,25; 13,75

4) Sì, il parallelismo è certo. Uno dei modi di giustificare l'affermazione è il seguente:
i due triangoli PNQ, PLS sono simili per il 2° Criterio (con rapporto di similitudine 2,8);
ma allora, ad esempio, si ha $P\hat{N}Q = P\hat{L}S$; ed essendo questi due angoli in posizione di corrispondenti rispetto alle due rette NQ ed LS tagliate dalla trasversale LP, tali due rette sono fra loro parallele.

5) 120; il 1° Crit.; 1/4; il 1° Crit.; 1/3; BC = 18; JC = 30; DE = 32; EK = 40; IE = 32; CD = 66

6) Poiché 5:10 = 8:16, i due lati che formano l'angolo $\hat{C}$ sono proporzionali
e si può invocare il 2° Criterio di Similitudine. AB misurerà 15.

7) AEB e CED sono simili per il 1° Criterio (due angoli alterni interni di rette parallele con trasversale sono uguali); invece AEC e BED, in generale, *non* sono simili.
Il rapporto fra i perimetri dei triangoli AEB e CED è 5/8 e il rapporto tra le loro aree è 25/64.
CE misurerebbe cm $12 \cdot 8/13 = 96/13$ ed EB misurerebbe cm $12 \cdot 5/13 = 60/13$.

8) I due triangoli ACH e BCK sono simili per il 1° Criterio, e dalla proporzione $AC : BC = CH : CK$
segue la tesi (in una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi).

9) 1° Criterio: $C\hat{B}P = A\hat{Q}B$ perché alterni interni rispetto a due parallele con trasversale,
$C\hat{P}B = A\hat{B}Q$ per la stessa ragione; oppure, $\hat{C} = \hat{A}$ perché angoli opposti in un parallelogrammo.
Anche: per ovvie ragioni BPC è simile con QPD che a sua volta è simile con ABQ, quindi …
DQ misurerà 4,345 circa (similitudine fra QPD e BPC)

9.3 - APPLICAZIONI DELLE SIMILITUDINI

TEOREMA DELLA BISETTRICE

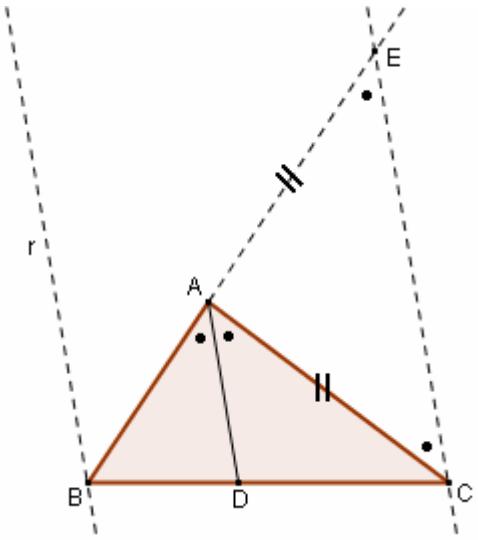
La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati

IPOTESI

$D\hat{A}B = D\hat{A}C$

TESI

$BD : DC = AB : AC$



Dimostrazione

Da C tracciamo la parallela alla bisettrice AD,
e sia E il punto di intersezione
fra tale parallela e la retta del lato AB.
Osserviamo che il triangolo ACE è isoscele (AE = AC).
Infatti, gli angoli $A\hat{C}E$, $A\hat{E}C$ sono uguali perché:

$A\hat{C}E = D\hat{A}C$ (alterni interni, AD || CE, trasv. AC)

$D\hat{A}C = D\hat{A}B$ (ipotesi)

$D\hat{A}B = A\hat{E}C$ (corrispondenti, AD || CE, trasv. BE)

Ora, per B tracciamo una terza parallela ad AD e CE.
Per il Teorema di Talete avremo:

$BD : DC = AB : AE$

e quindi, essendo AE = AC,

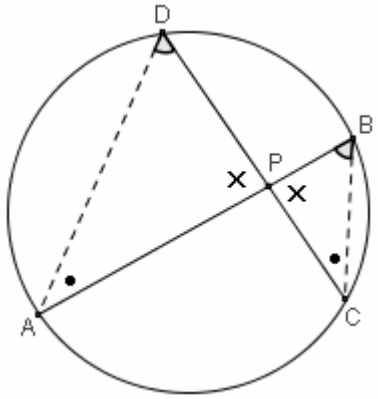
$BD : DC = AB : AC$, c.v.d.

TEOREMA DELLE DUE CORDE

Se due corde di una circonferenza si tagliano,
le due parti dell'una formano i medi e le due parti dell'altra gli estremi di una proporzione

IPOTESI
Le due corde AB, CD si tagliano in P

TESI
$PA : PC = PD : PB$
(o qualunque altra proporzione che abbia
PA, PB come estremi e PC, PD come medi,
o viceversa)



Dimostrazione

Tracciamo AD e BC.
I due triangoli APD, CPB sono simili perché:

$A\hat{P}D = C\hat{P}B$ (opposti al vertice)

$D\hat{A}B = D\hat{C}B$ (sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{BD}$)

$A\hat{D}C = A\hat{B}C$ (per diff. rispetto a 180°, oppure perchè angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AC}$)

Sussiste dunque la proporzione

$PA : PC = PD : PB$,

dalla quale, applicando la proprietà del permutare ai medi e agli estremi, e la proprietà dell'invertire,
si possono ricavare tutte quelle proporzioni, caratterizzate dal fatto di avere
PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa.

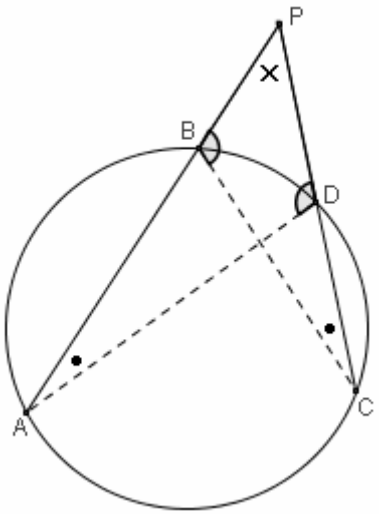
ENUNCIATO EQUIVALENTE:

"Se due corde di una circonferenza si tagliano,
il prodotto delle due parti dell'una
è uguale al prodotto delle due parti dell'altra ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$) "

TEOREMA DELLE DUE SECANTI

**Condotte da un punto esterno ad una circonferenza due secanti,
un'intera secante (NOTA) e la sua parte esterna formano i medi
e l'altra intera secante e la sua parte esterna gli estremi di una proporzione**

*NOTA: per "secante" si intende qui quel "pezzo" della retta secante,
compreso fra il punto esterno e l'intersezione con la circonferenza,
più lontana da questo.*



IPOTESI PA, PC secanti

TESI $PA : PC = PD : PB$ (o qualunque altra proporzione che abbia PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa)

Dimostrazione

Tracciamo AD e BC. I due triangoli APD, CPB sono simili per avere:

$\hat{P}$ in comune

$B\hat{A}D = B\hat{C}D$ (angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{BD}$)

$A\hat{D}P = C\hat{B}P$ (per differenza rispetto a 180°)

Sussiste dunque la proporzione $PA : PC = PD : PB$, dalla quale, applicando la proprietà del permutare ai medi e agli estremi, e quella dell'invertire, si possono ricavare tutte quelle proporzioni, caratterizzate dal fatto di avere PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa

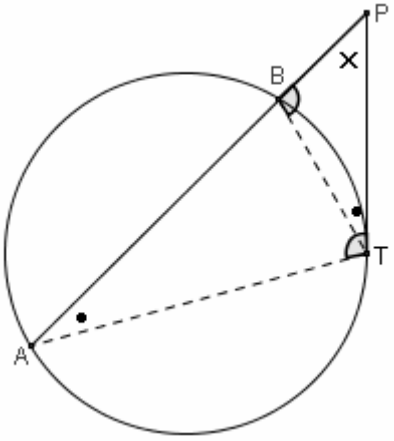
ENUNCIATO EQUIVALENTE:

**"Condotte da un punto esterno ad una circonferenza due secanti,
il prodotto di un'intera secante per la sua parte esterna è uguale
al prodotto dell'altra secante per la sua parte esterna ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$) "**

TEOREMA DELLA TANGENTE E DELLA SECANTE

**Condotte da un punto esterno ad una circonferenza una tangente ed una secante,
la tangente (NOTA) è media proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna**

NOTA: *per "tangente" si intende qui il segmento di tangente,
compreso fra il punto esterno e punto di contatto.*



IPOTESI PA secante, PT tangente

TESI $PA : PT = PT : PB$

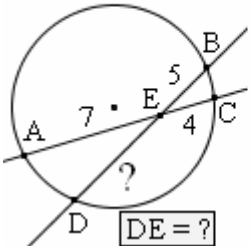
Dimostrazione

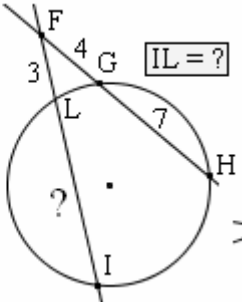
Tracciamo AT, BT. Dico che i due triangoli APT, BPT sono simili.
Essi infatti hanno, innanzitutto, l'angolo $\hat{P}$ in comune;
per dimostrare un'altra uguaglianza fra angoli
bisogna questa volta ricordare che esistono anche
gli "angoli alla circonferenza di 2^a specie"
(quelli che hanno un lato secante e l'altro tangente).
$B\hat{T}P$ è, appunto, un angolo alla circonferenza di 2^a specie, che insiste sull'arco $\overset{\frown}{BT}$, ed è perciò uguale a $B\hat{A}T$, angolo alla circonferenza di 1^a specie che insiste sullo stesso arco.
Dimostrata così la similitudine fra APT e BPT, si ha subito la tesi: $PA : PT = PT : PB$, c.v.d.

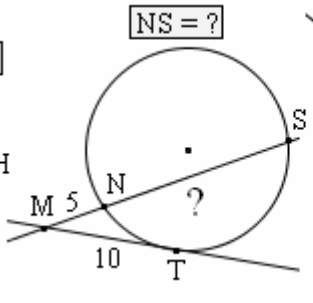
ENUNCIATO EQUIVALENTE:

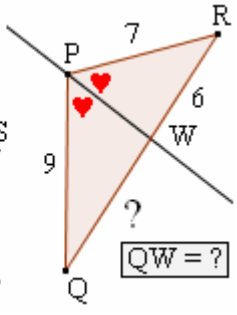
**"Condotte da un punto esterno ad una circonferenza una tangente e una secante,
il quadrato del segmento di tangente è uguale
al prodotto dell'intera secante per la sua parte esterna ($PT^2 = PA \cdot PB$) "**

ESERCIZI









RISPOSTE

DE = 28/5; IL = 35/3;
NS = 15; QW = 54/7

Questa bella **figura dinamica GEOGEBRA** mostra bene il legame di "continuità" fra gli ultimi 3 teoremi ⇨

Altri problemi sulle applicazioni delle similitudini si trovano a pagina 223, altri ancora a pagina 266

AIUTO AL RIPASSO, ESERCIZI sulle similitudini

1) RIEMPI I PUNTINI

1° Criterio di Similitudine:
……
……
2° Criterio di Similitudine:
……
……
3° Criterio di Similitudine:
……
……

In due triangoli simili, le basi stanno fra loro come ……..

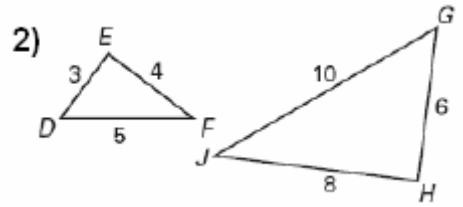
In due triangoli simili, i perimetri stanno fra loro come ……

In due triangoli simili, le aree stanno fra loro come ……..

Perché il perimetro di un triangolo triplichi, devo ingrandirlo "in scala" moltiplicando ciascun lato per …
mentre se voglio che triplichi l'area, devo ingrandirlo "in scala" moltiplicando ciascun lato per …
Affinché il volume di un cubo triplichi, dovrò moltiplicare il lato per il numero …
Se due triangoli simili hanno le aree una 6400 volte l'altra, qual è il rapporto di similitudine? …

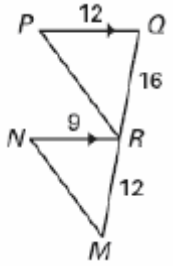
Dal sito www.getbookee.org

2)



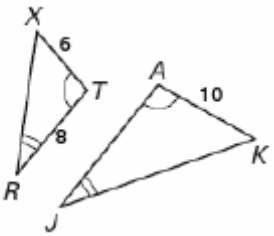
Quale teorema ci assicura che sono simili?
A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.
Qual è il fattore di scala? …

3)



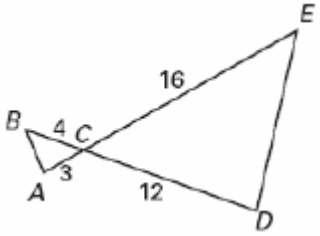
Quale teorema ci assicura che sono simili?
A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.
Qual è il fattore di scala? …

4)



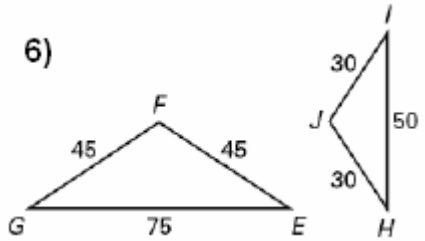
Quale teorema ci assicura che sono simili?
A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.
Qual è il fattore di scala? …

5)



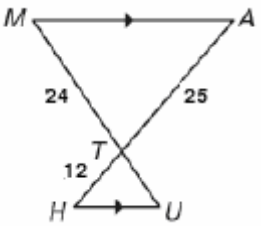
Quale teorema ci assicura che sono simili?
A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.
Qual è il fattore di scala? …

6)



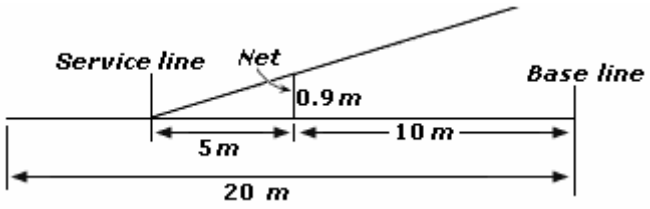
Quale teorema ci assicura che sono simili?
A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.
Qual è il fattore di scala? …

7)



Quale teorema ci assicura che sono simili?
A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.
Qual è il fattore di scala? …

Dal sito http://worksheets.tutorvista.com



8) On a given tennis court, the distance between the base line and the net is 10 m and the distance between the service line and the net is 5 m. The net is 0.9 m high. A player serves the ball directly above the base line (assume the ball travels in a straight line). What is the minimum height that the ball can be hit at so as to ensure the ball lands in the service area?

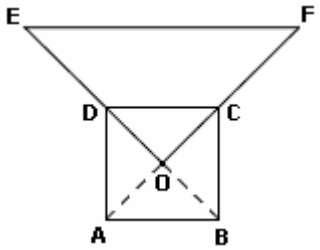
A) 1,65 m B) 2,7 m C) 5,9 m D) 1,8 m

9) The ratio of the corresponding sides of two similar triangles is 3:2. The ratio of their corresponding heights is

A) 3:2 B) 3:9
C) 2:3 D) 4:9

10) ABCD is a square → with each side 2 cm long. BD and AC are extended to E and F such that $EF \parallel DC$. EF = 8 cm. Find the area of CDEF.

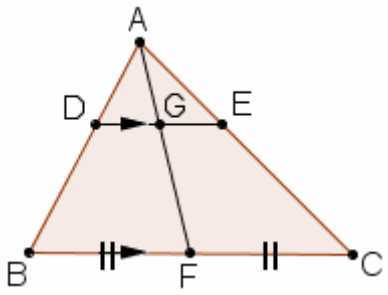
NOTA: la figura non è in "scala"



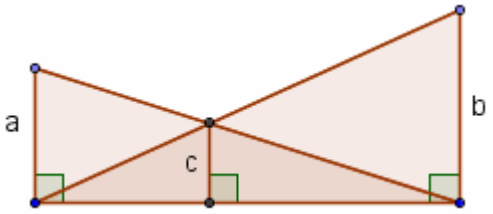
A) 12 cm² B) 14 cm²
C) 15 cm² D) 16 cm²

I seguenti due problemi sono tratti da www.cbseguess.com

11) Bello: nella figura a destra, DE è parallelo a BC e F è il punto medio di BC. Dimostra che DG = GE.

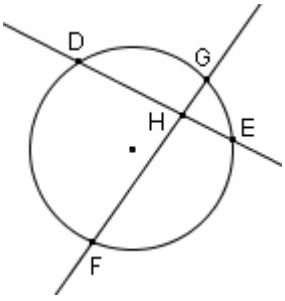


12) Molto bello: dimostra che, nella figura qui sotto, si ha $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$



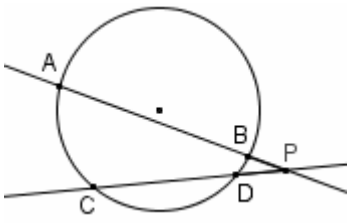
Enuncia, a PAROLE e tramite FORMULE riferite alle figure, i teoremi seguenti, e risolvi i problemini:

13) Teorema delle due corde:
…



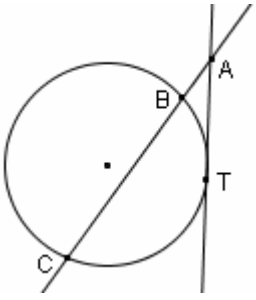
Se ad esempio DE = 10 (DH>HE), FG = 11, HG = 3, quanto misura HE?

14) Teorema delle due secanti:
…



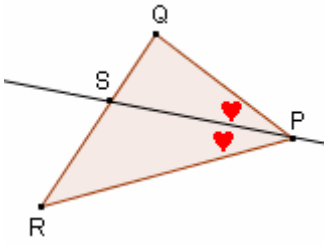
Se ad esempio fosse CD = 8, PD = 4, PB = 3, quanto misurerebbe AB?

15) Teorema della tangente e secante:
…



Ad esempio: AB = 3, BC = 9. AT = ?

16) Teorema della bisettrice:
…



Ad esempio: RQ = 7, RS = 4, PQ = 6,3 PR = ?

RISPOSTE

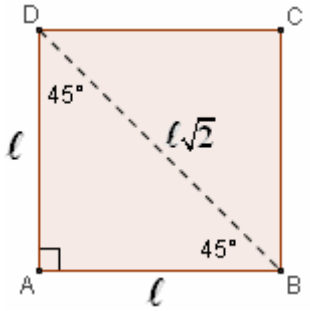
1) Ultimi quattro quesiti, nell'ordine: 3; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{3}$; 80 (o 1/80) 2) C; 2 3) B; 3/4 4) A; 5/3 5) B; 4
6) C; 2/3 7) A; 12/25 8) B 9) A 10) C 11) ⇨ 12) ⇨ 13) 4 14) 13 15) 6 16) 8,4

Cap. 10: POLIGONI REGOLARI; COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

10.1 - TRIANGOLI RETTANGOLI PARTICOLARI

A) FORMULE RIGUARDANTI IL QUADRATO
(e il triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 45°)

Consideriamo un quadrato ABCD.



Se conosciamo la misura del lato: $AB = BC = CD = DA = \ell$, quanto misurerà la diagonale?

Applicando il Teorema di Pitagora otteniamo:

$$\boxed{\text{diagonale} = BD} = \sqrt{AB^2 + AD^2} =$$
$$= \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2\ell^2} = \boxed{\ell\sqrt{2}}$$

Perciò:

in un QUADRATO,

DIAGONALE = LATO $\cdot \sqrt{2}$

e quindi

$$\textbf{LATO} = \frac{\textbf{DIAGONALE}}{\sqrt{2}}$$

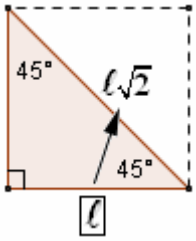
Angoli acuti di 45°:
può intervenire $\sqrt{2} \approx 1{,}4$

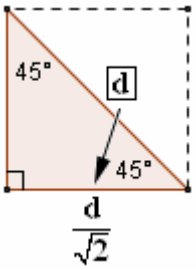
Conseguenza:

♥ **in un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 45°**
(che può essere visto come la metà di un quadrato)

- ❑ **L'IPOTENUSA E' UGUALE AL CATETO MOLTIPLICATO $\sqrt{2}$**
- ❑ **IL CATETO E' UGUALE ALL'IPOTENUSA DIVISO $\sqrt{2}$**

Ricordiamo che $\boxed{\sqrt{2} = 1{,}41421... \approx 1{,}4}$





Nella seconda figura
si suppone di partire dalla misura d *dell'ipotenusa (ipotenusa per il triangolo, diagonale per il quadrato).*

Essendo $d = \ell\sqrt{2}$, *invertendo si ha:* $\ell = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

E' possibile, volendo, razionalizzare, ottenendo:

$$\ell = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Ma … razionalizzare è proprio "obbligatorio"?
No! E' però spesso conveniente,

♪ *o per rendere più semplice l'espressione (ad es., se è* $d = 6$, *si avrà*

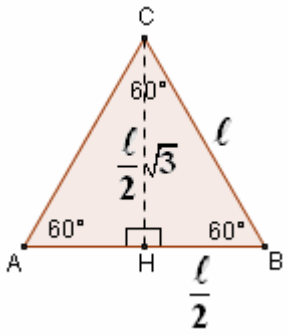
$$\ell = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{^{3}\cancel{6}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 3\sqrt{2}\ )$$

♫ *oppure per rendere più semplici eventuali calcoli successivi sul valore trovato.*

B) FORMULE RIGUARDANTI IL TRIANGOLO EQUILATERO
(e il triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°)

Consideriamo un triangolo equilatero ABC.

Se conosciamo la misura del lato:
$AB = BC = CA = \ell$,
quanto misurerà l'altezza CH?



Applicando il Teorema di Pitagora otteniamo:

$$\boxed{\text{altezza} =}\ CH = \sqrt{CB^2 - HB^2} =$$

$$= \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\ell^2 - \ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \boxed{\frac{\ell}{2}\sqrt{3}}$$

Perciò **in un TRIANGOLO EQUILATERO**,

ALTEZZA = $\frac{\text{LATO}}{2}\sqrt{3}$

Angoli acuti di 30° e 60°: può intervenire $\sqrt{3} \approx 1{,}7$

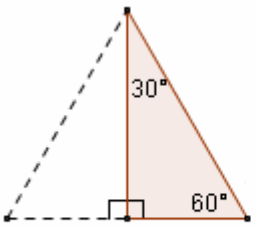
Conseguenze:

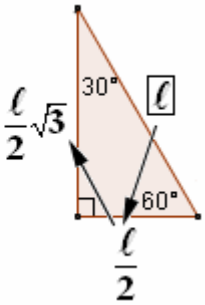
♥ **in un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 30° e 60°**
(che può essere visto come la metà di un triangolo equilatero)

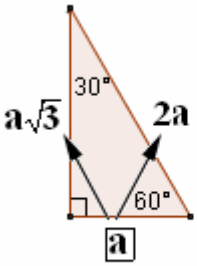
- **IL CATETO MINORE E' META' DELL'IPOTENUSA**
  (e quindi l'ipotenusa è il doppio del cateto minore)
- **IL CATETO MAGGIORE E' UGUALE AL CATETO MINORE MOLTIPLICATO $\sqrt{3}$**
  (e quindi: il cateto maggiore è uguale a metà ipotenusa moltiplicato $\sqrt{3}$
  mentre il cateto minore è uguale al cateto maggiore diviso $\sqrt{3}$)

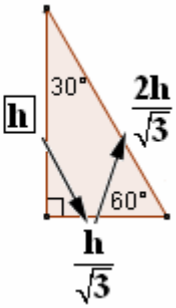
Ricordiamo che $\boxed{\sqrt{3} = 1{,}73205... \approx 1{,}7}$

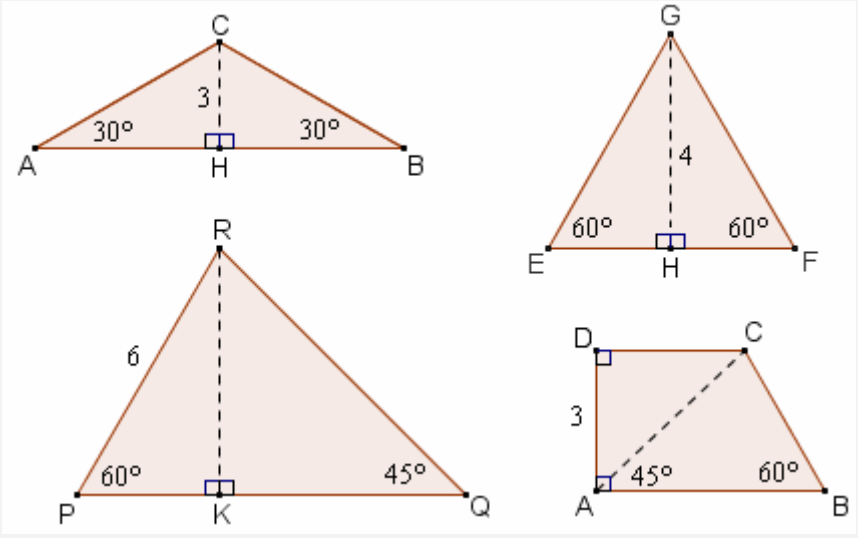
Le figure seguenti riassumono le situazioni che si possono incontrare nei problemi:
dato un lato di un triangolo rettangolo "particolare" 90°–30°–60°,
determinare i lati rimanenti, utilizzando le formule apprese o eventualmente invertendole.











ESERCIZI

Con riferimento alle figure qui a fianco, calcola i perimetri dei tre triangoli e del trapezio, verificando che è:

$2p(ABC) = 12 + 6\sqrt{3}$

$2p(PQR) = 9 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$

$2p(EFG) = 8\sqrt{3}$

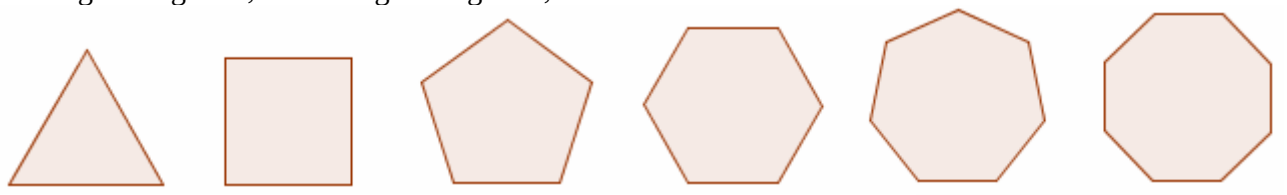
$2p(ABCD) = 9 + 3\sqrt{3}$

Problemi vari con triangoli rettangoli particolari sono proposti alle pagine 252 e 253

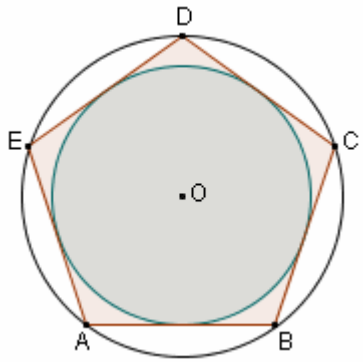
10.2 - POLIGONI REGOLARI

Si dice REGOLARE un poligono che abbia tutti i lati e tutti gli angoli uguali.

Sono poligoni regolari:
il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare, l'esagono regolare,
l'eptagono regolare, l'ottagono regolare, l'ennagono regolare, il decagono regolare,
l'undecagono regolare, il dodecagono regolare, ecc.

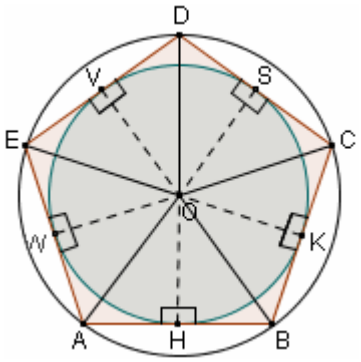


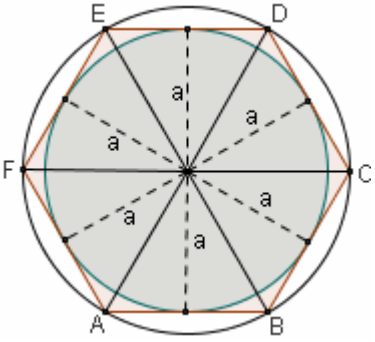
Si può dimostrare che **un poligono regolare**
è inscrivibile in una circonferenza,
e circoscrivibile ad un'altra circonferenza;
e che
tali due circonferenze circoscritta e inscritta
hanno lo stesso centro
(tale punto viene detto, semplicemente,
"il centro del poligono regolare").



In un poligono regolare, congiungendo il centro con i vertici,
si ottengono tanti triangoli quanti sono i lati del poligono.
Essi sono tutti uguali fra loro (3° Criterio)
e le loro altezze, condotte dal centro O,
sono anch'esse tutte uguali fra loro.
Una qualsiasi di tali altezze viene detta
"**apotema**" del poligono regolare.

Possiamo dire, in definitiva, che in un poligono regolare l'"apotema"
è la distanza del centro O da uno qualsiasi dei lati.
L'apotema coincide col raggio della circonferenza inscritta.





Per calcolare l'**area** di un poligono regolare,
si possono sommare le aree dei triangoli
ottenibili congiungendo il centro coi vertici.
Con riferimento alla figura qui a sinistra, abbiamo

$$S = \frac{AB \cdot a}{2} + \frac{BC \cdot a}{2} + \frac{CD \cdot a}{2} + \frac{DE \cdot a}{2} + \frac{EF \cdot a}{2} + \frac{FA \cdot a}{2} =$$
$$= \frac{(AB + BC + CD + DE + EF + FA) \cdot a}{2}$$

In definitiva, in un poligono regolare l'area è data dalla formula:

$$\mathbf{S = \frac{perimetro \cdot apotema}{2}}$$

Per stabilire quanto misura uno degli **angoli** di un dato poligono regolare,
basterà ricordare che la somma degli angoli di un poligono di n lati è $(n-2)\cdot 180°$
e tener presente che in un poligono regolare gli angoli sono tutti uguali tra loro, per ottenere

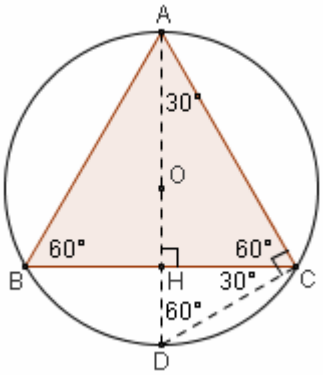
$$\boldsymbol{\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°}$$

Avremo dunque, ad esempio: $\alpha_5 = 108°$, $\alpha_6 = 120°$, $\alpha_8 = 135°$, $\alpha_{10} = 144°$, ecc.

MISURA DEL LATO DI UN POLIGONO REGOLARE, IN FUNZIONE DEL RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO

Proponiamoci ora di determinare quanto misuri il lato di un poligono regolare rispettivamente di 3, 4, 5, 6, 8, 10 lati (sono questi i casi più rilevanti), che sia inscritto in un cerchio di raggio noto R
("**misura ℓ_n del lato di un poligono regolare di n lati, espressa in funzione del raggio R del cerchio circoscritto**").

TRIANGOLO EQUILATERO



Tracciamo il diametro AD; avremo:

$AD = 2R$;

$A\hat{C}D = 90°$ (perchè inscritto in una semicirconferenza);

$A\hat{D}C = 60°$ (perchè $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AC}$; e $A\hat{B}C = 60°$)

Quindi, considerando il triangolo rettangolo "particolare" ACD, si avrà

$$AC = \frac{AD}{2}\sqrt{3} = \frac{2R}{2}\sqrt{3} = R\sqrt{3}$$

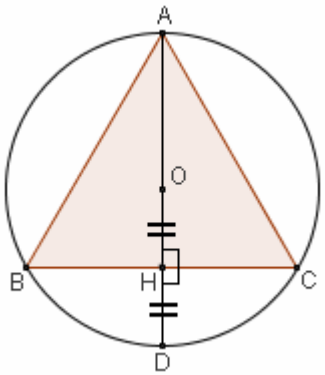
Resta così stabilito che

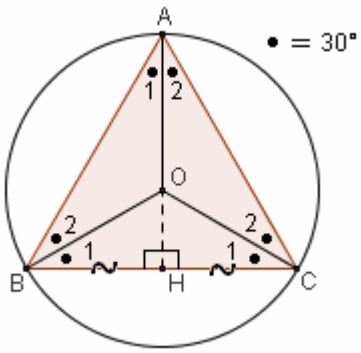
$$\boxed{\ell_3 = R\sqrt{3}}$$

Fra l'altro, osservando la figura sovrastante, è immediato dimostrare che $OH = HD = R/2$ *, e ciò suggerisce un metodo comodissimo per disegnare con precisione un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza (vedi figura qui a destra):*

si traccia un diametro qualunque AD, si prende il punto medio H del raggio OD e per H si traccia la perpendicolare ad AD fino ad incontrare la circonferenza in due certi punti B e C.

Questi, insieme con A, saranno i vertici di un triangolo equilatero.





Allo stesso importante risultato di cui sopra ($\ell_3 = R\sqrt{3}$) si sarebbe potuto anche pervenire nel modo seguente.
Congiungiamo O con A, B e C;
avremo AOB = AOC = BOC per il 3° Criterio.
Essendo poi tali triangoli, oltre che uguali, anche isosceli, si avrà

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{60°}{2} = 30°\,.$$

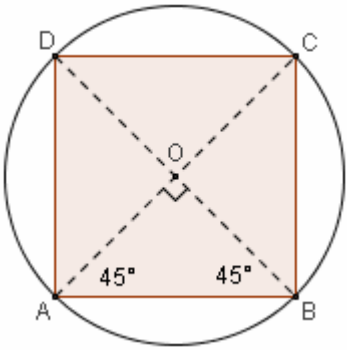
Tracciamo ora $OH \perp BC$: avremo $BH = HC = \frac{1}{2}BC$,

perché la perpendicolare a una corda condotta dal centro taglia la corda stessa in due parti uguali;

ed essendo BOH un triangolo rettangolo "particolare", risulterà

$$BH = \frac{BO}{2}\sqrt{3} = \frac{R}{2}\sqrt{3} \quad \text{da cui} \quad \ell_3 = BC = 2\,BH = R\sqrt{3}$$

QUADRATO



E' chiaro che il punto O di intersezione delle diagonali
di un quadrato inscritto in un cerchio
coincide col centro del cerchio stesso
(basta ricordare che in un quadrato le diagonali sono uguali
e si tagliano scambievolmente per metà,
per concludere che $OA = OB = OC = OD$
e dedurre quindi che O, essendo equidistante dai punti A, B, C e D,
è il centro del cerchio circoscritto al quadrato ABCD).
Ricordando poi che in un quadrato le diagonali
sono perpendicolari e bisettrici degli angoli,
e considerando il triangolo rettangolo particolare AOB, avremo:

$AB = OA \cdot \sqrt{2}$

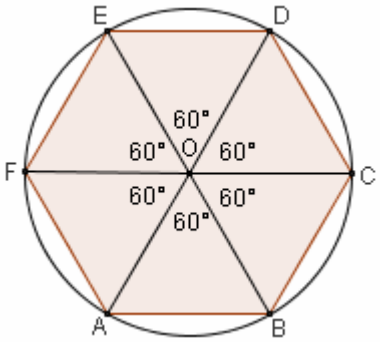
cioè

$$\boxed{\ell_4 = R\sqrt{2}}$$

Se si vuole disegnare perfettamente un quadrato inscritto,
basta disegnare due diametri perpendicolari:
le loro estremità saranno i quattro vertici del quadrato.

PENTAGONO REGOLARE: ne riparleremo dopo aver trattato il decagono regolare.

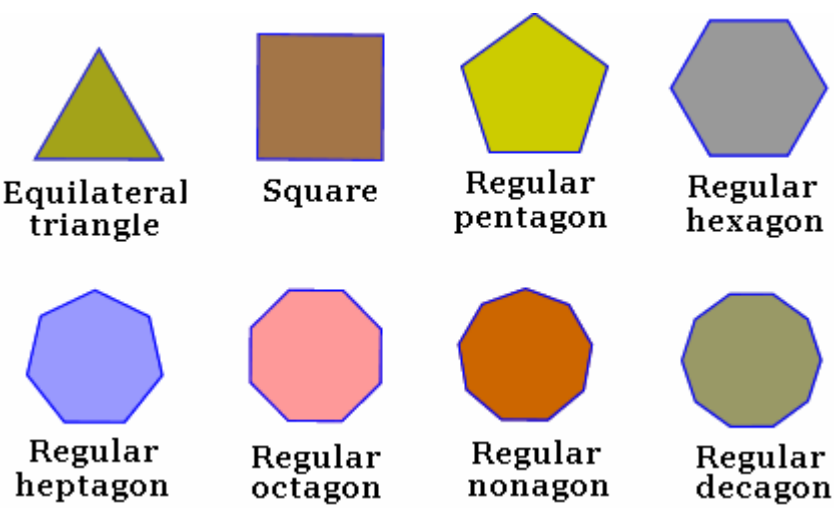
ESAGONO REGOLARE

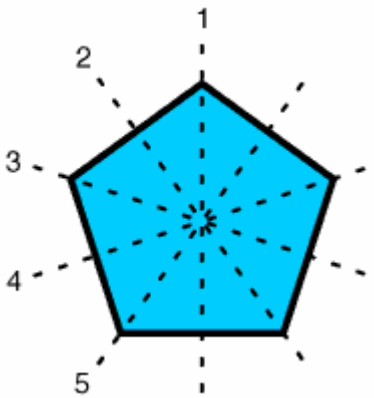


I 6 angoli di vertice O nella figura sono tutti uguali fra loro
(perché i 6 triangoli sono tutti uguali fra loro per il 3° Criterio;
oppure, perché sono angoli al centro che insistono
su corde uguali e quindi su archi uguali).
Allora ciascuno di questi 6 angoli misurerà $360°:6 = 60°$;
perciò ciascuno dei 6 triangoli,
essendo isoscele e avendo un angolo di 60°, sarà equilatero.
Pertanto è $AB = OA = OB = R$;
quindi,

$$\boxed{\ell_6 = R}$$

**"Il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza,
è uguale al raggio della circonferenza stessa"**



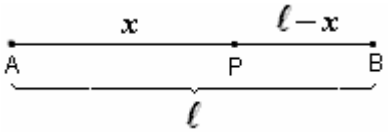


Five lines of symmetry
of a regular pentagon
(http://library.thinkquest.org)

SEZIONE AUREA

Definizione. **Si dice "sezione aurea" di un segmento, quella parte del segmento che è media proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente**

Preso un segmento AB di lunghezza ℓ, e detta AP la sua sezione aurea, avremo:
$AB : AP = AP : PB$
Posto ora $AP = x$, sarà $PB = \ell - x$ da cui:



$$\ell : x = x : (\ell - x)$$
$$x^2 = \ell(\ell - x)$$
$$x^2 = \ell^2 - \ell x$$
$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

e risolvendo:

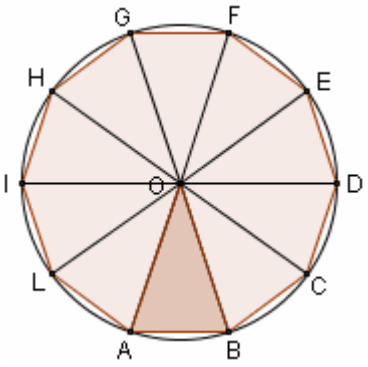
$$x_{1,2} = \frac{-\ell \pm \sqrt{\ell^2 + 4\ell^2}}{2} = \frac{-\ell \pm \sqrt{5\ell^2}}{2} = \frac{-\ell \pm \ell\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ell & \text{non accettabile perchè negativa} \\ \boxed{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ell} \end{cases}$$

Dunque **la sezione aurea di un segmento di lunghezza ℓ misura** $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ell}$

Essendo $\sqrt{5} \approx 2{,}236$, si ha che la sezione aurea di un segmento è lunga *circa* 0,618 volte il segmento stesso.

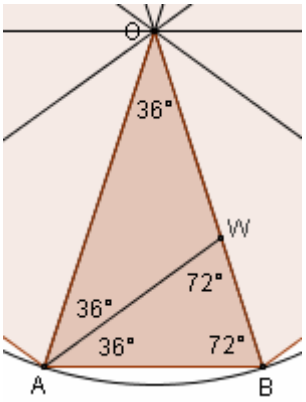
TEOREMA
Il lato del DECAGONO REGOLARE inscritto in una circonferenza è uguale alla sezione aurea del raggio

Delle due figure qui a fianco, la prima mostra un decagono regolare inscritto; quella sottostante evidenzia uno solo dei dieci triangolini isosceli uguali in cui il decagono regolare è suddiviso dai raggi che ne congiungono i vertici col centro.



Sopra: un decagono regolare inscritto.

Sotto: un particolare della figura.



Vogliamo dimostrare che AB è uguale alla sezione aurea del raggio OB.
Cominciamo col domandarci: quanto misura l'angolo $A\hat{O}B$?
Ovviamente, la risposta è 360°:10 = 36°.
E perciò avremo $O\hat{B}A = O\hat{A}B = \dfrac{180° - 36°}{2} = \dfrac{144°}{2} = 72°$.
Tracciando, ora, la bisettrice AW dell'angolo $O\hat{A}B = 72°$, risulterà $W\hat{A}O = W\hat{A}B = 72° : 2 = 36°$, e nel triangolo ABW si avrà $B\hat{W}A = 180° - W\hat{B}A - W\hat{A}B = 180° - 72° - 36° = 72°$.
Le misure angolari così ricavate garantiscono che:

- AWO è isoscele (AW = OW);
- ABW è isoscele (AB = AW = OW) e simile a BOA.

Da questa similitudine si trae la proporzione
OB : AB = AB : BW,
la quale, essendo AB = OW, può essere riscritta come
OB : OW = OW : BW.
Ma ciò prova che OW è la sezione aurea di OB;
ed essendo, appunto, AB = OW, il teorema è dimostrato.

E' pertanto $\boxed{\ell_{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R}$

SEZIONE AUREA: REALTÀ E LEGGENDA

Il numero da noi trovato $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803398...$

esprime il rapporto fra la sezione aurea *x* di un dato segmento, e il segmento stesso:

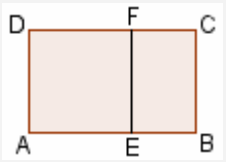
$$\frac{\text{sezione aurea}}{\text{intero segmento}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803398...$$

Il *reciproco* di tale numero esprimerà allora il rapporto fra l'intero segmento e la sua sezione aurea. Si usa indicare col simbolo Φ (lettera greca "fi" maiuscola) *quest'ultimo* numero, e denominarlo "**numero aureo**". Calcoliamolo:

$$\boxed{\Phi} = \frac{\text{intero segmento}}{\text{sezione aurea}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} \boxed{= \frac{\sqrt{5}+1}{2}} = 1,61803398...$$

La sezione aurea e il "numero aureo" godono di diverse - belle e armoniose - proprietà, fra cui le seguenti.

- *Il "numero aureo" Φ e il suo inverso (= quello che esprime la "sezione aurea" di un segmento unitario) hanno le stesse cifre dopo la virgola. Ed è facilissimo spiegare il perché, vero?*
- *Vale l'uguaglianza $\Phi^2 = \Phi + 1$ (puoi provarlo col calcolo diretto: è un semplice esercizio coi radicali)*
- *Se dividiamo un segmento nella sua sezione aurea e nella "parte rimanente", questa "parte rimanente" è a sua volta uguale … alla sezione aurea della sezione aurea! Dimostralo, ponendo per semplicità la lunghezza dell'intero segmento uguale a 1. Quindi (figura qui a fianco) se ABCD è un "rettangolo aureo" (AD = sez. aurea di AB) e AEFD è un quadrato, allora anche EBCF è un rettangolo aureo!*



Una proprietà interessantissima del "numero aureo" è quella che andiamo ad esporre qui di seguito, ossia la **relazione fra il "numero aureo" e la "successione di Fibonacci".**
Si dice "successione di Fibonacci" quella sequenza di interi che inizia con la coppia di numeri 0 1 e prosegue poi in modo che ciascun termine sia costruito facendo la somma dei due che lo precedono, quindi:

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 …

Abbiamo dunque, detto f_n il generico termine di questa successione, che dal terzo termine in poi è

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,.$$

Bene: **si può dimostrare che, nella successione di Fibonacci, il rapporto $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ fra un termine e quello che lo precede "tende", "si avvicina" (al tendere di n a infinito), al numero aureo!**

n	f_n	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$
0	0	
1	1	
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,666666667
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,615384615
9	34	1,619047619
10	55	1,617647059
11	89	1,618181818
12	144	1,617977528
13	233	1,618055556
14	377	1,618025751
15	610	1,618037135
16	987	1,618032787
…	…	…



La successione di Fibonacci compare con una certa frequenza in fenomeni naturali.
L'esempio forse più significativo è quello dei **girasoli**, e delle **pigne**.
Osservando un girasole o una pigna, possiamo distinguere

- ♪ un certo numero di spirali che girano in senso orario,
- ♫ e un certo altro numero di spirali che girano in senso antiorario …

Bene, tali due numeri sono sempre due numeri di Fibonacci consecutivi!
Nel girasole, possiamo avere

- 21 spirali che girano in senso orario e 34 che girano in senso antiorario,
- o rispettivamente 34 e 55 spirali,
- o più raramente 55 e 89, oppure 89 e 144.
- Si è anche registrato il caso di un girasole che portava rispettivamente 144 e 233 spirali.

La questione è stata studiata con cura dai ricercatori, che hanno compreso come i numeri consecutivi di Fibonacci abbiano a che fare con la massimizzazione del numero di semi presenti sulla superficie del fiore o della pigna.

In altre situazioni in cui i numeri di Fibonacci o il numero aureo compaiono in natura (ad esempio, la spirale della conchiglia Nautilus, oppure la disposizione delle foglie intorno al fusto in una pianta), questa comparsa è analogamente legata al raggiungimento della massima efficienza nell'accrescimento di un organismo, o ad altre questioni non semplici ma pur sempre spiegabili.

A partire da **Luca Pacioli**, autore del trattato *De Divina Proportione* illustrato dal contemporaneo Leonardo da Vinci, è nato un convincimento diffuso che la mente umana coglierebbe un senso di particolare armonia nel contemplare la sezione aurea e i rettangoli le cui due dimensioni abbiano rapporto uguale al "numero aureo", e soprattutto è nata la diceria - non suffragata da prove - secondo cui tale numero sarebbe stato utilizzato ripetutamente fin dall'antichità in modo intenzionale nell'architettura e nell'arte. Ad esempio, è frequente sentir affermare che la facciata del Partenone, il tempio ateniese che può essere considerato uno dei simboli dell'architettura greca antica, rivelerebbe uno sforzo, da parte del progettista, di far sì che i rapporti fra le lunghezze di vari elementi siano prossimi al "numero aureo"; si dice spesso che certe piramidi egizie sarebbero state realizzate in modo da far entrare consapevolmente il "numero aureo" nei loro rapporti dimensionali, ecc.

Tuttavia, queste affermazioni **non sono sufficientemente provate**, sia perché simili lunghezze e relativi quozienti non possono essere fissati in modo univoco (da dove partiamo, esattamente, per misurare? dove arriviamo? Sovente si ha una certa discrezionalità in questo) sia perché, nel fare tante misure su tante costruzioni, è del tutto prevedibile che almeno in qualche caso si giunga a calcolare un rapporto fra lunghezze prossimo a 1,6; ma sarebbe arbitrario voler vedere a tutti i costi, in casi siffatti e senza una prova certa, una volontà deliberata di giungere al "numero aureo" da parte del progettista.
Tanto più che probabilmente è vero che la mente umana coglie per istinto una maggiore piacevolezza in quei rapporti fra lunghezze che sono compresi all'incirca nell'intervallo fra 1,5 e 1,8; ed è questo il motivo per cui, realisticamente, rettangoli troppo "bislunghi" o "tozzi" tendono ad essere meno sfruttati da architetti ed artisti.

La "sezione aurea" e il "numero aureo" sono stati oggetto di grande interesse anche da parte di scrittori opportunisti, o di pseudo-ricercatori superficiali, i quali hanno cercato a tutti i costi di scovare il "numero aureo" un po' dappertutto nell'Arte e nella Natura - anche dove in realtà non interviene, ma intervengono solo, fortuitamente, valori ad esso più o meno vicini.
Questi mediocri hanno cercato di presentare il numero aureo quasi fosse la "firma" di qualche misterioso spiritello, e di inventare di sana pianta l'intervento di sette esoteriche in tutte quelle realizzazioni dell'ingegno umano che con esso potevano (mah …) sembrare coinvolte.

In realtà, **il ruolo effettivo della sezione aurea nell'architettura e nella pittura è molto più limitato di quanto si vorrebbe far credere …** e **per quanto riguarda i fenomeni naturali**, se la sezione aurea è un marchio di armonia e di bellezza che sovente si ripete nella realtà che ci circonda, come abbiamo accennato ciò è legato a **motivazioni ben precise e per nulla "misteriose"**, anche se ardue da descrivere a chi non ha una conoscenza approfondita delle Scienze e della Matematica.

LINK SELEZIONATI

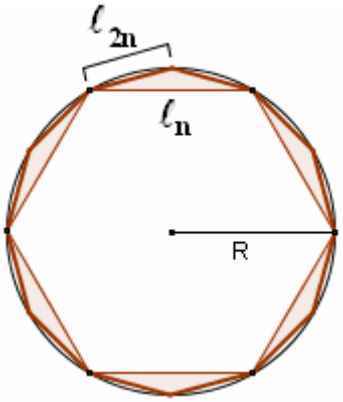
- Di Keith Devlin, docente alla Stanford University: **Good stories, pity they're not true** ⇨
- Di Alessandro Zocchi, psicobiologo e psicofarmacologo:
  Gli esperimenti psicologici per verificare la bellezza del rapporto aureo ⇨
- Da www.maths.surrey.ac.uk:
  - ♪ **The Fibonacci numbers and the golden section in Nature** ⇨
  - ♫ **The Fibonacci numbers and the golden section in Art, Architecture and Music** ⇨

  ("*All the other pages are factual and verifiable - the material here is a often a matter of opinion. What do YOU think*?")

L'immagine del girasole è tratta dal sito http://britton.disted.camosun.bc.ca/home.htm di Jill Britton, che ringrazio.

LA FORMULA $\ell_n \to \ell_{2n}$

Risolviamo infine il seguente problema (**formula $\ell_n \to \ell_{2n}$**):
nota la misura ℓ_n
del lato di un poligono regolare di n lati,
inscritto in un cerchio di raggio R,
determinare la misura ℓ_{2n}
del lato del poligono regolare inscritto,
avente un numero di lati doppio.

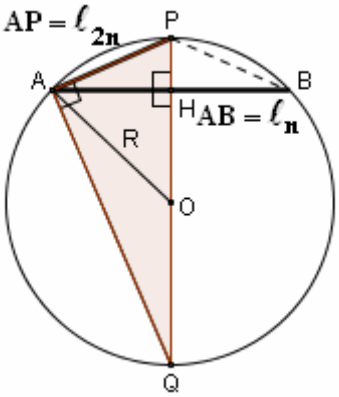


Sia $AB = \ell_n$ (vedi figura qui a fianco).
Il diametro PQ perpendicolare ad AB
divide in metà tanto la corda quanto l'arco di estremi A e B;
si avrà pertanto $AP = \ell_{2n}$.
Applicando Pitagora al triangolo rettangolo AHO, si trae

$$OH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\ell_n\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\ell_n{}^2} = \sqrt{\frac{4R^2 - \ell_n{}^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n{}^2}$$

da cui

$$PH = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n{}^2}$$



Applichiamo ora il Primo Teorema di Euclide
al triangolo PAQ, che è rettangolo in A
perché inscritto in una semicirconferenza:

$$\ell_{2n}{}^2 = AP^2 = PQ \cdot PH = 2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n{}^2}\right) = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n{}^2}$$

da cui la formula cercata:

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n{}^2}}} \quad \textbf{FORMULA } \ell_n \to \ell_{2n}$$

ESERCIZIO AL COMPUTER
Con un *foglio elettronico*
calcola, a partire da $\ell_6 = 1$
(supponendo $R = 1$:
come sappiamo, il lato
dell'esagono regolare inscritto
è uguale al raggio),
i valori di $\ell_{12}, \ell_{24}, \ell_{48}, \ldots$

APPLICAZIONI DELLA FORMULA

♪ Per esempio, siccome sappiamo che $\ell_4 = R\sqrt{2}$, avremo:

$$\ell_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_4{}^2}} =$$

$$= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$\boxed{\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ **(lato dell'OTTAGONO REGOLARE inscritto in un cerchio di raggio R)**

♫ Per determinare poi ℓ_5, potremo partire dalla formula $\ell_{10} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_5{}^2}}$,

risolvendola rispetto a ℓ_5 e poi sostituendo al posto di ℓ_{10} il valore noto $\ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

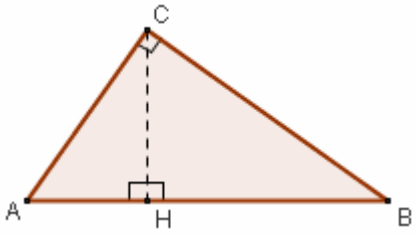
Prova a fare i calcoli: otterrai alla fine

$\boxed{\ell_5 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}R}$ **(lato del PENTAGONO REGOLARE inscritto in un cerchio di raggio R)**

10.3
UNA RELAZIONE INTERESSANTE FRA CATETI, IPOTENUSA E ALTEZZA RELATIVA ALL'IPOTENUSA, IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO

In un triangolo rettangolo (ABC nella figura),
per calcolare l'area S, possiamo utilizzare indifferentemente l'una o l'altra delle due formule

$$S = \frac{AB \cdot CH}{2}; \quad S = \frac{CA \cdot CB}{2}$$



Vale quindi l'uguaglianza

$$\frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{CA \cdot CB}{2}$$

da cui si trae

$$AB \cdot CH = CA \cdot CB$$

e infine

$$CH = \frac{CA \cdot CB}{AB}$$

ovvero

altezza relativa all'ipotenusa = $\frac{\text{cateto} \cdot \text{altro cateto}}{\text{ipotenusa}}$

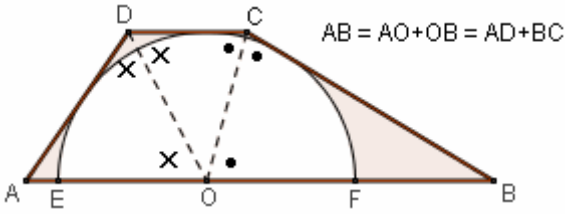
Ad esempio, nel triangolo rettangolo i cui lati misurano 3, 4 e 5 cm, l'altezza relativa all'ipotenusa misura

$$cm\ \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$$

10.4 - IL TRAPEZIO CIRCOSCRITTO AD UNA SEMICIRCONFERENZA

La figura qui a fianco mostra un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza, ossia un trapezio con:

- la base maggiore giacente sulla retta del diametro;
- i lati obliqui e la base minore tangenti alla semicirconferenza.



Si può provare che

**in un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza,
la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui**

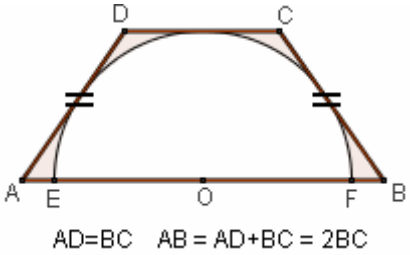
Congiungiamo infatti il centro O con le estremità C e D della base minore. Vediamo che

- $A\hat{O}D = C\hat{D}O$ perché alterni interni rispetto a due parallele con trasversale;
- $C\hat{D}O = A\hat{D}O$ perché è noto che, quando da un punto esterno a una circonferenza (D) si tracciano le due tangenti (DA, DC), la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice dell'angolo che queste formano ($A\hat{D}C$).

Quindi è $A\hat{O}D = A\hat{D}O$ per cui il triangolo AOD è isoscele: $AO = AD$.
Analogamente si dimostra che è isoscele il triangolo BOC: $OB = BC$.
Dalle due uguaglianze di cui sopra segue

$$AB = AO + OB = AD + BC, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO
**In un trapezio ISOSCELE
circoscritto ad una semicirconferenza,
la base maggiore è il doppio del lato obliquo,
e quindi il lato obliquo è la metà della base maggiore**

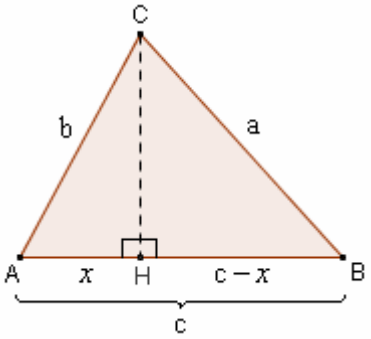


10.5 - LA FORMULA DI ERONE

Questa celebre formula **esprime l'area di un triangolo, in funzione delle misure dei suoi lati**.

Sia ABC un triangolo qualunque.
Adottando una simbologia molto efficace, e molto utilizzata, indichiamo con:

- a la misura del lato opposto al vertice A,
- b la misura del lato opposto al vertice B,
- c la misura del lato opposto al vertice C.



Il nostro obiettivo è di esprimere l'area S del triangolo in funzione delle tre misure a, b, c.

A tale scopo, proponiamoci innanzitutto di determinare la misura dell'altezza CH relativa alla base AB.

Posto AH = x, avremo:
$CH^2 = b^2 - x^2$ (Pitagora su AHC),
ma anche:
$CH^2 = a^2 - (c-x)^2$ (Pit. su BHC).

Sarà dunque, per la proprietà transitiva,
$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$
e da questa equazione potremo ricavare x:

$b^2 \cancel{-x^2} = a^2 - c^2 + 2cx \cancel{-x^2}$

$2cx = b^2 - a^2 + c^2$

$x = \dfrac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$

Ora che abbiamo determinato AH = x, andiamo a calcolare CH applicando Pitagora al triangolo rettangolo AHC
(vedi colonna qui a fianco) →

$$CH = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{\left(b^2 - a^2 + c^2\right)^2}{4c^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4b^2c^2 - \left(b^2 - a^2 + c^2\right)^2}{4c^2}} = \frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - \left(b^2 - a^2 + c^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{\left(2bc + \left(b^2 - a^2 + c^2\right)\right)\left(2bc - \left(b^2 - a^2 + c^2\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{\left(2bc + b^2 - a^2 + c^2\right)\left(2bc - b^2 + a^2 - c^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{\left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)} =$$

Ponendo a questo punto $\boxed{a+b+c} = \text{perimetro} \boxed{=2p}$ potremo scrivere

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)} = \frac{1}{2c}\sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{\cancel{2}c} \cdot \cancel{4}^{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

E' quindi

$$S = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{c} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{c}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

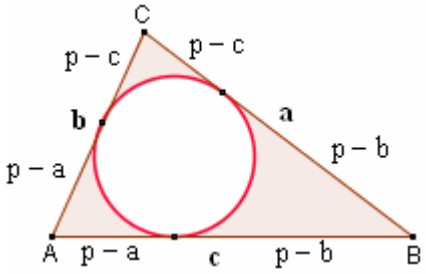
Abbiamo così costruito la bella

FORMULA DI ERONE (area di un triangolo in funzione dei lati) :
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ a, b, c misure dei lati; p SEMIperimetro

Ad **ESEMPIO**,
l'area di un triangolo
di lati 7, 8 e 9 cm,
e quindi
di semiperimetro
(7+8+9)/2=12 cm,
misura cm^2
$\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$.

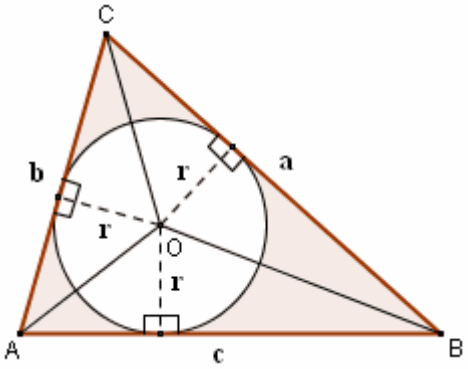
ovvero
cm^2 $\sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$.

A PROPOSITO
Detti A, B, C *i vertici di un triangolo,*
a, b, c *i lati rispettivamente opposti,*
e indicato con p *il SEMIperimetro del triangolo,*
le distanze dei punti di contatto della circonferenza inscritta dai tre vertici A, B, C *valgono rispettivamente*
p − a, p − b, p − c,
come indicato in figura:
dimostra questo bell' enunciato! ⇨



10.6 - IL RAGGIO DEL CERCHIO INSCRITTO IN UN TRIANGOLO, ESPRESSO IN FUNZIONE DEI LATI

Sia ABC un triangolo qualunque,
e siano a, b, c le misure dei suoi lati.



Indichiamo con r la misura del raggio del cerchio inscritto.
Il nostro obiettivo è di esprimere r in funzione di a, b, c.

Innanzitutto, osserviamo che, detta S l'area di ABC, è

$$S = S(BCO) + S(ACO) + S(ABO) =$$

$$= \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2} = \frac{\text{perimetro} \cdot r}{2}$$

Ora, dalla formula

$$S = \frac{\text{perimetro} \cdot r}{2}$$

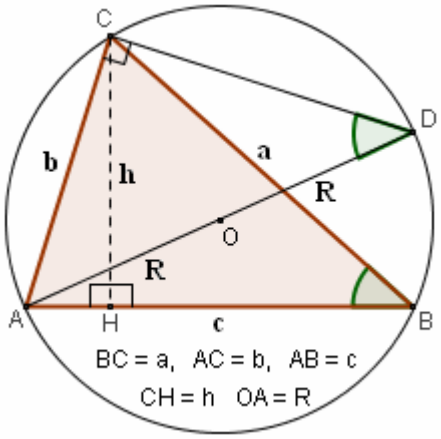
ricaviamo, invertendo:

$$\mathbf{r = \frac{2S}{perimetro} = \frac{2S}{a+b+c}}$$

che è sostanzialmente la formula cercata,
vista la possibilità, volendo,
di esprimere l'area S in funzione dei lati a, b, c tramite la Formula di Erone.

10.7 - IL RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO AD UN TRIANGOLO, ESPRESSO IN FUNZIONE DEI LATI

Sia ABC un triangolo qualunque,
e siano a, b, c le misure dei suoi lati.



Indichiamo con R la misura del raggio
del cerchio circoscritto.
Il nostro obiettivo è di esprimere R in funzione di a, b, c.

Nella figura, abbiamo disegnato il diametro AD: $AD = 2R$.

Osserviamo inoltre che l'angolo $A\hat{C}D$ è retto
perché inscritto in una semicirconferenza.

Abbiamo anche tracciato l'altezza CH relativa alla base AB,
e posto, per comodità,
$CH = h$.

I due angoli $\hat{B}$ e $\hat{D}$ sono uguali perché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco;
allora i due triangoli CHB, ACD sono simili (entrambi rettangoli, e con un angolo acuto uguale).
Vale dunque la proporzione

$$CH : AC = BC : AD$$

$$h : b = a : 2R$$

da cui si ricava

$$2R = \frac{ab}{h} = \frac{ab}{h} \cdot \frac{c}{c} = \frac{abc}{ch} = \frac{abc}{2 \cdot \frac{ch}{2}} = \frac{abc}{2S} \rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

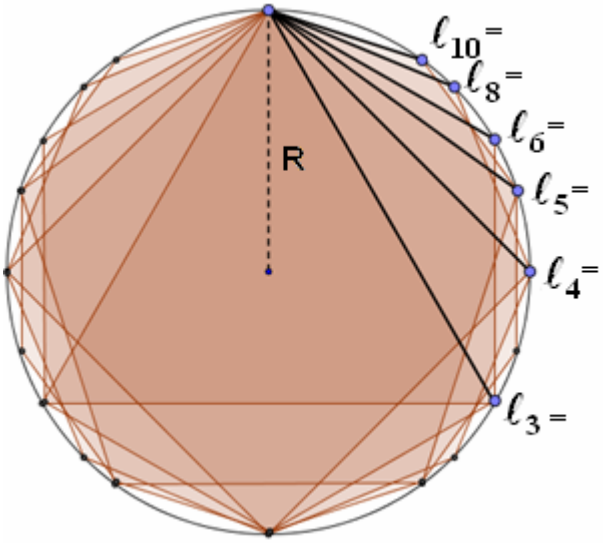
La formula cercata è, in definitiva,

$$\mathbf{R = \frac{abc}{4S}}$$

RIPASSO dei Complementi di Geometria, ed ESERCIZI geometrici vari

Alcuni problemi sui poligoni regolari si trovano a pagina 267

1) Scrivi, nella figura a fianco, le misure dei lati dei vari poligoni regolari inscritti nel cerchio di raggio R



2) Scrivi la formula $\ell_n \to \ell_{2n}$ e servitene per ricavare, a partire da $\ell_3 = R\sqrt{3}$, ℓ_6 (dal valore ben noto!) e ℓ_{12}

3) Si dice "sezione aurea" di un segmento AB …



AB : AP = ...

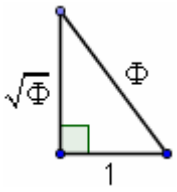
4) Se la lunghezza di un segmento è ℓ, la sua sezione aurea misura …

Ricavala, a partire dalla proporzione scritta all'esercizio 3)

5) Dimostra che, indicato con Φ il numero

$$\boxed{\Phi} = \frac{\text{intero segmento}}{\text{sezione aurea}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

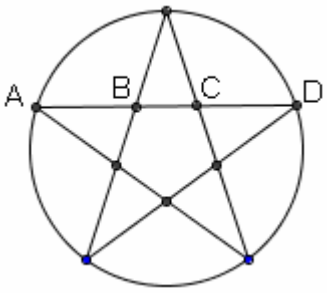
se un triangolo rettangolo ha un cateto uguale a 1 e l'altro cateto uguale a $\sqrt{\Phi}$, la sua ipotenusa misurerà Φ.



6) Dimostra che qualsiasi segmento è la sezione aurea della somma del segmento stesso con la propria sezione aurea.

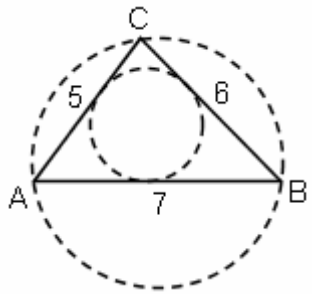
7) A pagina 229, occupandoci del decagono regolare inscritto, abbiamo dimostrato che in un triangolo isoscele con gli angoli di 36°, 72° e 72° la base è uguale alla sezione aurea del lato obliquo. Serviti di questo risultato e di quanto dimostrato all'esercizio 6 per provare che in un triangolo con gli angoli di 108°, 36° e 36° il lato più corto è uguale alla sezione aurea di quello più lungo.

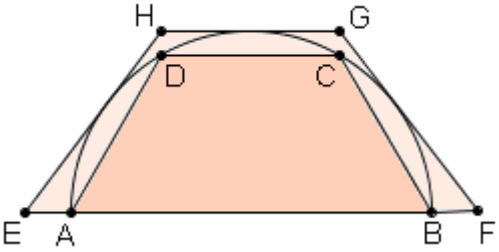
8) Serviti degli esercizi 6) e 7) per dimostrare che in questa figura (dove i 5 archi di circonferenza sono tutti uguali fra loro)



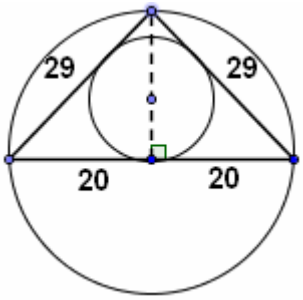
- BC è la sezione aurea di AB,
- AB è la sezione aurea di AC,
- e AC a sua volta è la sezione aurea di AD.

9) Un triangolo ha i tre lati che misurano 5, 6 e 7. Quanto misurano i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta?

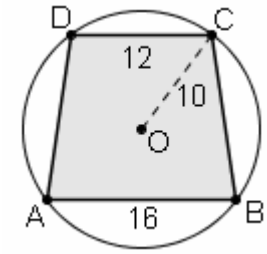




10) Il raggio di una semicirconferenza misura 5 cm; ABCD è un trapezio inscritto, EFGH un trapezio circoscritto, e le basi minori di entrambi i trapezi misurano 6 cm. Determina il lato obliquo di ciascuno dei trapezi.

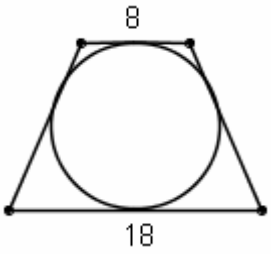


11) Un triangolo isoscele ha la base di 40 cm
e il lato obliquo di 29 cm.
Determina la sua area con la formula di Erone,
poi fai nuovamente il calcolo dopo aver determinato l'altezza.
Quanto misurano i raggi
del cerchio inscritto e del cerchio circoscritto?



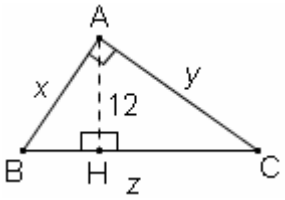
12) Da http://mathcentral.uregina.ca:

Question from Abby, a student:
An isosceles trapezoid whose bases have lengths 12 and 16
is inscribed in a circle of radius 10.
The center of the circle lies in the interior of the trapezoid.
Find the area of the trapezoid.

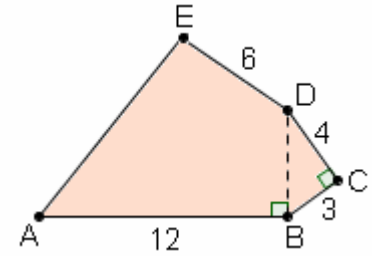


13) Da http://gmatclub.com:

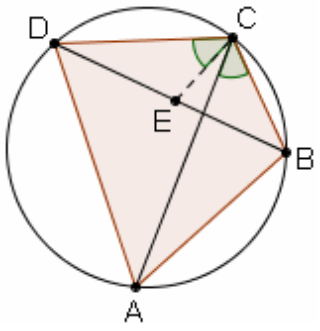
A circle is inscribed in an isosceles trapezoid with bases 8 and 18.
What is the area of the circle?
A. 36 pi B. 49 pi C. 64 pi D. 81 pi (pi = "pi greco")



14) Determina i tre lati *x*, *y*, *z* di un triangolo ABC, rettangolo in A,
sapendo che il suo perimetro misura 60 cm
e l'altezza relativa all'ipotenusa 12 cm.



15) Il poligono ABCDE della figura (osserva i due angoli retti)
ha area uguale a $6\left(6+\sqrt{30}\right)$. Quanto misura il lato AE?



16) (*Impegnativo*!)
Il "**Teorema di Tolomeo**" afferma:
"in un quadrilatero ABCD inscrivibile in una circonferenza,
vale la relazione

$$AB\cdot CD + BC\cdot AD = AC\cdot BD$$

ossia, la somma dei prodotti dei lati opposti
è uguale al prodotto delle diagonali".

La dimostrazione si può effettuare in più modi, fra cui il seguente:
si prende, sulla diagonale BD, il punto E tale che $B\hat{C}A = D\hat{C}E$.
Si hanno così le coppie di triangoli simili
$ABC \sim DEC$ (perché?) e $BCE \sim ACD$ (perché?), e allora …

QUALCHE RISPOSTA

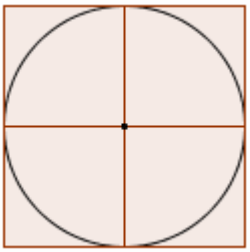
9) $r=\frac{2}{3}\sqrt{6},\ R=\frac{35}{24}\sqrt{6}$ 10) *lato obliquo trapezio inscritto* $= cm\ 2\sqrt{5}$; *lato obliquo trapezio circoscritto* $= cm\ \frac{17}{3}$

11) $r = cm\ \frac{60}{7}$; $R = cm\ \frac{841}{42}$

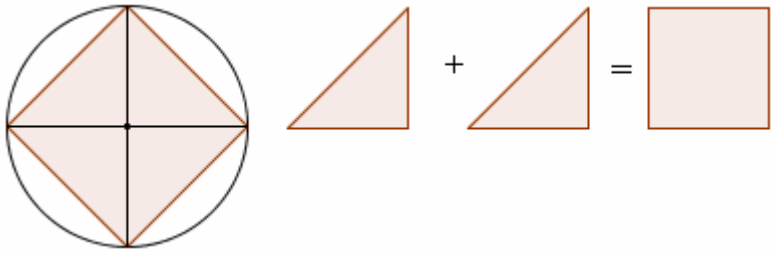
12) 196 13) A 14) 15, 20, 25 *cm* 15) *Ci sono due possibilità: può misurare* 11 *o* 17 16) ⇨

10.8 - AREA DEL CERCHIO, LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA IL NUMERO "PI GRECO" π

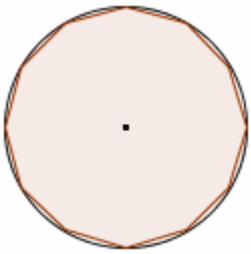
Un cerchio è *minore del quadruplo* del quadrato che ha per lato il raggio …



… ma è *maggiore del doppio* di questo quadrato.



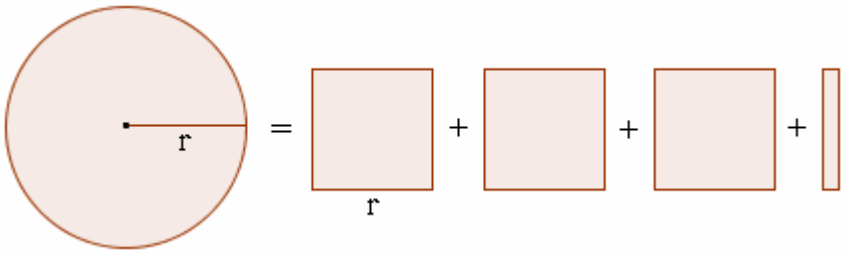
Qual è il numero *esatto* che ci dice
"quante volte il quadrato che ha per lato il raggio è contenuto nell'intero cerchio"?
Insomma, qual è il numero *esatto* che esprime
"il rapporto fra il cerchio e il quadrato che ha per lato il raggio"?



Possiamo avvicinarci al valore di questo numero se consideriamo un cerchio di raggio 1 (per il quale, quindi, l'area del quadrato costruito sul raggio sarà $1^2 = 1$) e calcoliamo, ad esempio, l'area di un poligono regolare inscritto con molti lati.
Tale area approssimerà bene (per difetto) l'area del cerchio,
e ci darà quindi una buona approssimazione (per difetto) del numero cercato.

Fra l'altro, in calcoli di questo tipo ci può tornare molto utile la formula $\ell_n \to \ell_{2n}$ (par. 10.2): a partire ad esempio dall'esagono regolare inscritto, che ha 6 lati (n=6) ognuno dei quali, come è noto, ha lunghezza uguale a quella del raggio, quindi nel nostro caso 1 ($\ell_n = \ell_6 = 1$) possiamo ricavare il lato – perciò, poi, anche l'apotema e l'area – del dodecagono regolare inscritto (n=12), poi da questo il lato del poligono regolare inscritto di 24 lati (n=24), ecc. ecc.
Ad esempio, preso un poligono regolare di 24 lati, inscritto in un cerchio di raggio 1, si vede col calcolo che la sua area è uguale a 3,1058285…;
se passiamo al poligono regolare inscritto di 48 lati otteniamo che la sua area vale 3,1326286…
Studi più approfonditi (appassionanti, ma non facili!) portano a stabilire che, in definitiva, il numero che esprime il rapporto fra un cerchio e il quadrato che ha per lato il raggio è un numero *irrazionale* un po' maggiore di 3,14.
Questo numero è stato chiamato dai matematici π ("pi greco").
Dunque

Area cerchio = $\pi \cdot$ raggio^2 $\left(S = \pi r^2\right)$



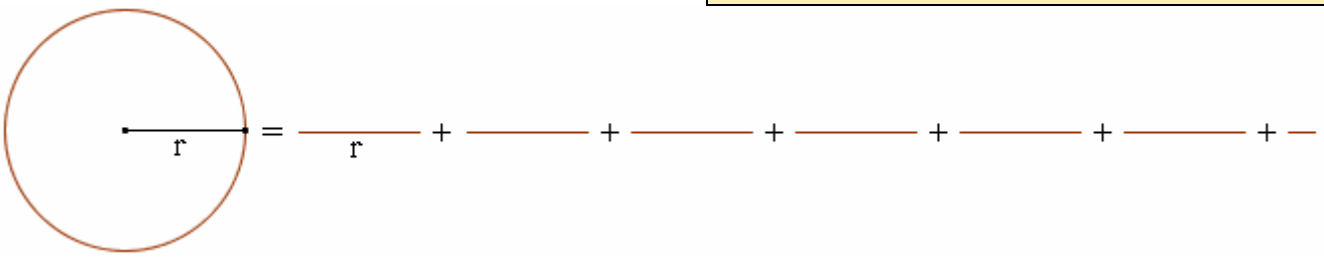
Per quanto riguarda la lunghezza della **circonferenza**, si ha

Lunghezza circonferenza = $2\pi \cdot$ raggio $\left(L = 2\pi r\right)$

ossia, la circonferenza è uguale a circa 6,28 volte il suo raggio (o anche: a circa 3,14 volte il suo diametro).

ESERCIZIO AL COMPUTER

Utilizza un *foglio elettronico* per calcolare, partendo da $\ell_6 = 1$, i valori di ℓ_{12}, ℓ_{24}, ℓ_{48}, ... e quelli dei SEMIperimetri dei rispettivi poligoni; tali semiperimetri approssimeranno π.



Un'**approssimazione più precisa** di π (con 50 cifre dopo la virgola) è:
π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 ...

Comunque **π, essendo irrazionale (come fu dimostrato dal matematico francese Lambert nel 1761), ha dopo la virgola infinite cifre, e la successione delle cifre non presenta un "periodo"** (= gruppo che si ripete).

Anzi è stato dimostrato (Lindemann, tedesco, 1882) che π è addirittura "trascendente",
il che significa che **non esiste alcuna equazione a coefficienti razionali, di cui π possa essere soluzione**.

Importante conseguenza di questo fatto è l'impossibilità di effettuare la "quadratura del cerchio",
tanto a lungo inutilmente perseguita nell'antichità,
ossia di costruire, utilizzando esclusivamente la riga e il compasso per un numero finito di volte,
un quadrato la cui estensione sia esattamente uguale all'estensione di un cerchio assegnato.

ALCUNE FORMULE CHE COINVOLGONO π IN GEOMETRIA

- ❑ AREA CERCHIO = πr^2
- ❑ LUNGHEZZA CIRCONFERENZA = $2\pi r$
- ❑ VOLUME SFERA = $\frac{4}{3}\pi r^3$
- ❑ AREA SUPERFICIE SFERICA = $4\pi r^2$

ALCUNE FAMOSE E BELLE FORMULE PER IL CALCOLO DEL VALORE DI π

- ❑ $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-...=\frac{\pi}{4}$ (Leibniz)
- ❑ $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot...=\frac{\pi}{2}$ (Wallis)
- ❑ $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{9\cdot11}+\frac{1}{13\cdot15}+\frac{1}{17\cdot19}+...=\frac{\pi}{8}$
- ❑ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$ (Eulero)

In queste ultime formule, si hanno
delle "somme infinite" (nel senso di: "somme di infiniti addendi")
o dei "prodotti infiniti" (nel senso di: "prodotti di infiniti fattori")
e prendendo un certo numero di termini a partire da quello iniziale (esempio: i primi 5)
si ottiene un valore approssimato di π, con l'approssimazione che diventa
via via più precisa quanto più si fa alto il numero dei termini considerati.

Su π si potrebbero dire tantissime cose.
Se l'argomento ti incuriosisce, puoi fare una ricerca su Internet, dove ad esso sono dedicati tantissimi siti.
Potresti cominciare da Wikipedia, l'enciclopedia libera.
Se vuoi fare delle ricerche su siti Inglesi, tieni presente che **in lingua inglese π si dice "pi" (pronuncia: pai)**.
π è spesso coinvolto in formule che attengono alla Fisica o alla Probabilità,
e in questioni matematiche di livello superiore.

Da tempo, con l'uso dei computer, è stato calcolato un numero colossale di cifre dopo la virgola di π.
Già nel 1997 erano state trovate più di 1000 miliardi di cifre dopo la virgola!
La ricerca di ulteriori cifre dopo la virgola di π prosegue,
ma ormai, dato il colossale numero di cifre già noto,
si tratta più che altro di una sfida matematico-tecnica
e di un'occasione per utilizzare e mettere alla prova i supercomputer.

Da Wikipedia:

la più pressante questione aperta su π riguarda il fatto che sia o meno "normale",
cioè se la frequenza con cui è presente ogni sequenza di cifre sia la stessa che ci si aspetterebbe
se le cifre fossero completamente casuali.
Questo, nel caso sia vero, deve essere vero in ogni base, non solo in base 10.
Non sappiamo molto, attualmente, a riguardo.

QUESITO (presente su parecchi siti Internet)



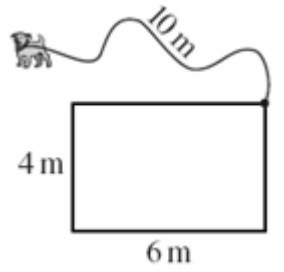
Una corda lunga quanto la circonferenza terrestre (cioè all'incirca 40000 km)
si trova distesa lungo l'equatore.
Si prende questa corda, la si taglia, se ne aggiunge 1 metro e la si redistribuisce attorno
all'equatore in modo che la sua distanza dalla superficie terrestre si mantenga costante.
Quale dei seguenti tre animali può passare di misura nello spazio interposto tra la corda
e la superficie: un elefante, un gatto o una formica? ⇨





QUESITI SU CERCHI E CIRCONFERENZE, TRATTI DA GARE MATEMATICHE

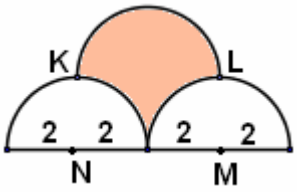
Ispirato a un quesito del Kangourou des Mathématiques



1) Una corda di 10 metri ha un'estremità fissata a un angolo di una casa rettangolare di lati 6 metri e 4 metri. Un cane ha il suo collare agganciato all'altra estremità della corda. Qual è l'area della superficie che può percorrere il cane?

A) 44π m^2 B) 68π m^2 C) 88π m^2 D) 176π m^2 E) 112π m^2

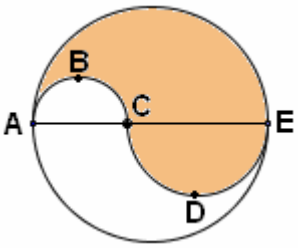
Kangourou des Mathématiques 2005



2) La figura mostra tre semicerchi di raggio 2. KLMN è un rettangolo. Qual è l'area della parte ombreggiata?

A) 2π B) 7 C) $2\pi+1$ D) 8 E) $2\pi+2$

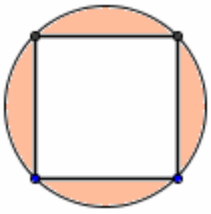
Olimpiadi matematiche colombiane 1998



3) Il diametro AE è diviso dal punto C nel rapporto 2:3. I due semicerchi ABC e CDE dividono la regione circolare in due parti: una superiore, ombreggiata, e una inferiore non ombreggiata. Il rapporto fra l'area della regione superiore e quella della regione inferiore è:

A) 2:3 B) 1:1 C) 3:2 D) 9:4 E) 5:2

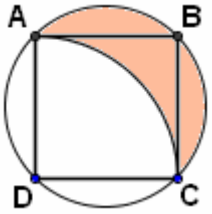
University of New Brunswick,
Junior High School Mathematics Competition 1990



4) Quale frazione dell'area del cerchio rappresenta la regione ombreggiata esterna al quadrato?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{\pi-2}{\pi}$ D) $\frac{1}{3}$ E) Dipende dal raggio del cerchio

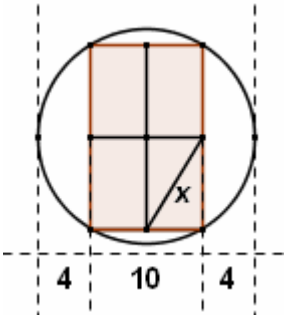
Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi



5) Nella figura, il lato del quadrato misura 1. Qual è l'area della regione ombreggiata?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $1-\frac{\pi}{4}$ E) $1-\frac{\pi}{2}$

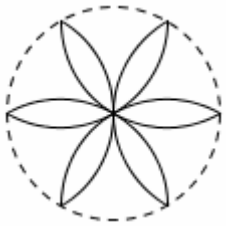
Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi



6) Quanto vale la lunghezza *x* nella figura?

A) $\sqrt{116}$ B) $4\sqrt{10}$ C) 9 D) 12 E) 18

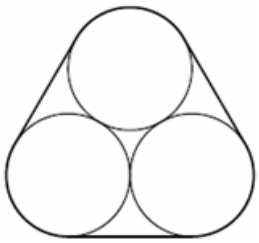
Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi



7) All'interno di un cerchio, mantenendo la stessa apertura del compasso, è stato disegnato un fiore.
Se il contorno del fiore ha lunghezza 2, qual è il raggio del cerchio?

A) $\frac{1}{2\pi}$ B) $\frac{1}{4\pi}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{8}$

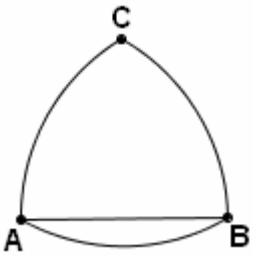
British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2010



8) Tre monete circolari di raggio 1 cm sono a due a due tangenti.
Una banda elastica le allaccia strettamente.
Trovare la lunghezza in centimetri della banda.

A) 12 B) 6 C) $6+2\pi$ D) 4π E) $2\sqrt{3}+2\pi$

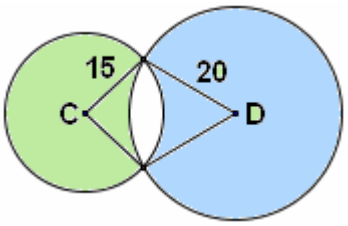
Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi



9) Nella figura,
$\overset{\frown}{AB}$ è un arco di circonferenza di centro C,
$\overset{\frown}{BC}$ è un arco di circonferenza di centro A,
$\overset{\frown}{AC}$ è un arco di circonferenza di centro B.
Se il segmento AB misura 1, qual è l'area della figura?

A) $2\sqrt{2}+\frac{5}{\sqrt{3}}$ B) $3\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\pi\left(\sqrt{3}+5\right)$ D) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ E) $\pi-5\frac{\sqrt{3}}{2}$

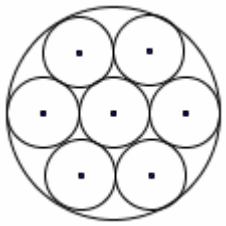
British Columbia Colleges
Junior High School Mathematics Contest Preliminary Round 1997



10) Nel diagramma, un cerchio di centro C e raggio 15 è parzialmente sovrapposto a un altro cerchio, di centro D e raggio 20.
Di quante unità quadrate è più grande la regione ombreggiata di destra rispetto a quella di sinistra?

A) 400π B) $400\pi-400$ C) $175\pi-400$ D) 175π E) $225\pi-400$

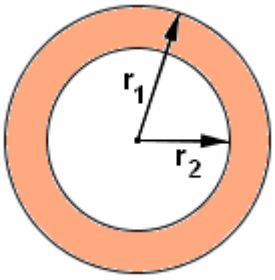
British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2010



11) Una grande finestra circolare contiene sette finestrelle identiche, come in figura. Se la circonferenza della maggiore è di 3 metri, allora la somma delle lunghezze dei contorni di tutti e otto i cerchi è:

A) $\frac{7\pi}{2}$ B) 7π C) $\pi\left(3+3\sqrt{3}\right)$ D) 7 E) 10

University of New Brunswick,
Junior High School Mathematics Competition 1991



12) Le due regioni ombreggiata e non ombreggiata nella figura hanno la stessa area.

Qual è il rapporto $\frac{r_1}{r_2}$ fra il raggio maggiore e il minore?

A) $\frac{\pi}{1}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{1}$ D) $\frac{4}{\pi^2}$ E) $\frac{\sqrt{2}-1}{1}$

RISPOSTE 1C2D3C4C5C6C7A8C9D10D11E12C

PROBLEMI GEOMETRICI

PROBLEMI GEOMETRICI DI 1° GRADO - ESEMPI SVOLTI

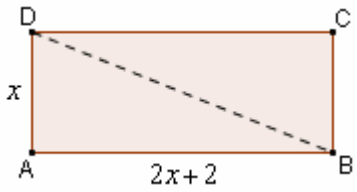
▫ In un rettangolo, la base supera di 2 cm il doppio dell'altezza e il perimetro è di 34 cm.
Trovare l'area e la diagonale.

Facciamo il **disegno,**
cercando di restare più fedeli possibile
ai dati del problema.

In questo caso, ad esempio,
occorrerà disegnare la base
in modo che sia lunga più del doppio dell'altezza …

Accanto ad disegno,
scriviamo tutti i dati,
sia quelli geometrici che quelli numerici.

E scriviamo anche,
con accanto dei punti interrogativi,
quali sono **le richieste del problema**.



ABCD rettangolo
$AB = 2AD + 2\ cm$
$2p(ABCD) = 34\ cm$
$S(ABCD) = ?\quad BD = ?$

Valgono le solite indicazioni generali date in relazione ai problemi di soggetto qualsiasi:
la risoluzione di un problema a una incognita si può suddividere in 3 fasi 1), 2), 3)

1) Pongo la *x* :
$\boxed{AD = x}$

♥ **La *x* non deve per forza coincidere con una delle richieste del problema; va scelta in modo che sia poi facile esprimere gli altri segmenti in gioco, per mezzo di *x***

2) Esprimo gli altri segmenti in gioco per mezzo ("in funzione") di *x* :
$\boxed{AB = 2x + 2}$

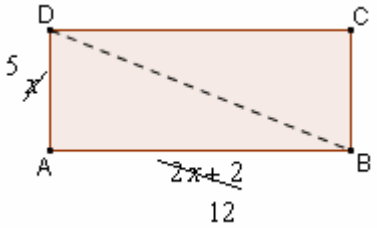
♥ **E' ESTREMAMENTE UTILE**
riportare sul disegno, in matita,
sia la *x* che le varie espressioni contenenti *x* via via ricavate.

3) Imposto l'equazione risolvente :
$\boxed{2(2x+2) + 2x = 34}$
$4x + 4 + 2x = 34$
$6x = 30$
$x = 5$

♥ **L'equazione risolvente si imposta utilizzando un dato che non sia mai stato sfruttato fino a quel momento** *(nel nostro caso, il perimetro).*
Se ci servissimo, per l'equazione risolvente,
di un'informazione già utilizzata prima,
ci ritroveremmo fra le mani un'equazione *indeterminata*!

Quindi
$AD = 5\ cm$,
$AB = 2x + 2 = 10 + 2 = 12\ cm$ (NOTA 1)

Converrà a questo punto riportare
sulla figura i valori ottenuti!



$\boxed{S =}\ AB \cdot AD = 12 \cdot 5 = \boxed{60\ cm^2}$ (NOTA 2)

$\boxed{BD =}\ \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$
$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = \boxed{13\ cm}$ (NOTA 3)

NOTA 1
A stretto rigore, l'unità di misura andrebbe indicata in tutti gli anelli della catena e non solo nell'ultimo, scrivendo quindi, in questo caso,
$AB = (2x+2)\ cm = (10+2)\ cm = 12\ cm$
Tuttavia noi, per brevità, la scriveremo solo alla fine.

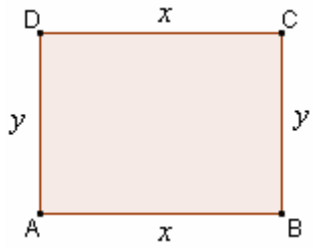
NOTA 2
L' "area" si può indicare con A oppure con S
(il termine "superficie" è usato, seppure impropriamente, anche per indicare l' "area di una superficie").
A rigore, "superficie" indica invece l'entità ***geometrica****,*
"area" il ***numero*** *che esprime*
la misura dell'estensione di una superficie.

NOTA 3
Qui abbiamo applicato il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD.

Certo, **sovente sono possibili più risoluzioni alternative**!
Anche nel nostro caso: il dato *perimetro = 34* ci diceva che la somma *base+altezza* era *17*,
quindi avremmo potuto, ad es., porre
base $= x$; *altezza* $= 17 - x$ da cui l'equazione risolvente : $x = 2(17 - x) + 2$; ... $x = 12$ *eccetera*

❑ Trovare le dimensioni di un rettangolo nel quale
il perimetro supera di 10 cm il triplo dell'altezza,
e la differenza fra il triplo della base e il doppio dell'altezza è 12 cm.

Disegno



Dati

ABCD rettangolo
$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$
$3\text{AB} - 2\text{AD} = 12\ cm$
$\text{AB} = ?\quad \text{AD} = ?$

Questa volta i dati sono tali che, comunque si ponga la *x*,
sarebbe poi un po' scomodo esprimere l'altro segmento in gioco per mezzo di *x*.
In questi casi è preferibile PORRE PIU' INCOGNITE e impostare un SISTEMA,
costituito da TANTE EQUAZIONI, QUANTE SONO LE INCOGNITE POSTE.

$$\boxed{\begin{aligned}\text{AB} &= \text{DC} = x\\ \text{AD} &= \text{BC} = y\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{cases}2x + 2y = 3y + 10\\ 3x - 2y = 12\end{cases}}$$

Risolvendo ora il sistema, otteniamo:

$$2\cdot\begin{cases}2x - y = 10\\ 3x - 2y = 12\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x - 2y = 20\\ 3x - 2y = 12\end{cases}$$

$$(1)-(2)\begin{cases}x = 8\\ (1)\ \ 2\cdot 8 - y = 10;\ \ 16 - y = 10;\ \ y = 6\end{cases}$$

Quindi
$\text{AB} = \text{DC} = 8\ cm$
$\text{AD} = \text{BC} = 6\ cm$

♥ **La risoluzione in più incognite è consigliabile quando, comunque si ponga la *x*, è poi difficoltoso o se non altro scomodo esprimere per mezzo della *x* scelta, le altre quantità in gioco.**

In tal caso, si pongono due o più incognite, e si scrive un sistema, nel quale LE EQUAZIONI SIANO TANTE QUANTE LE INCOGNITE PRESENTI.

L'eventualità che il numero delle equazioni, indipendenti fra loro, che si possono impostare, sia diverso dal numero delle incognite, è assai rara nei problemi "scolastici".

Volendo, avremmo anche potuto risolvere con una incognita sola: se si osservano i dati

$$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$$
$$3\text{AB} - 2\text{AD} = 12\ cm$$

si capisce che nell'ultima uguaglianza si può isolare con un paio di passaggi AB, ottenendo

$$3\text{AB} = 2\text{AD} + 12\ cm$$
$$\text{AB} = \frac{2\text{AD} + 12\ cm}{3}$$

per cui, se si pone ora $\boxed{\text{AD} = x}$,

si ha $\boxed{\text{AB} = \frac{2x + 12}{3}}$

e si può scrivere dunque l'equazione risolvente

$$2p(\text{ABCD}) = 3\text{AD} + 10\ cm$$
$$\boxed{2\cdot\frac{2x + 12}{3} + 2x = 3x + 10}$$

con la quale si trova $\boxed{x = \text{AD} = 6}$.

Se confrontiamo i due metodi di risoluzione, vediamo che per *questo* particolare problema, pur essendo possibile risolvere con 1 sola incognita, la risoluzione con più incognite e quindi col sistema risulta essere più comoda, anche per la possibilità di risolvere il sistema col simpatico metodo di riduzione.

In generale, comunque, di fronte a un problema geometrico *la risoluzione con una incognita sola è preferibile*, perché di norma è più rapida, e perché mette maggiormente in risalto le interrelazioni fra le varie quantità.

Tranne, ribadiamolo, in quei casi in cui sia eccessivamente laborioso esprimere tutte le quantità in gioco, in funzione di una sola di esse.

❑ PROBLEMI GEOMETRICI DI PRIMO GRADO

1) ⇨ In un triangolo isoscele il lato obliquo è i 5/6 della base, e la differenza fra base e lato obliquo è di 3 cm. Quanto misura il perimetro? E l'area?

2) In un triangolo isoscele, di perimetro 72 cm, il lato obliquo supera la base di 6 cm. Determina i tre lati.

3) Di un triangolo si conosce il perimetro (48 cm), e si sa che due dei lati hanno per somma 27 cm e per rapporto 4/5. Quanto misura ciascuno dei tre lati?

4) ⇨ In un triangolo isoscele, la somma del triplo della base col doppio del lato obliquo misura 82 cm mentre è di 19 cm la diff. fra il triplo del lato obliquo e il doppio della base. Determina il perimetro.

5) In un triangolo isoscele il lato obliquo è inferiore di 4 cm rispetto alla base. Il perimetro è di cm 64. Trovare i lati, l'area, l'altezza relativa al lato obliquo.

6) In un triangolo rettangolo i cateti sono uno i ¾ dell'altro, e la loro somma misura cm 21. Quanto misura il perimetro?

7) In un triangolo isoscele DEF, di base EF, si ha $EF + DE = m\ 11$, e $2EF + 3DE = m\ 27$. Determina i lati del triangolo e la sua area.

8) Se il perimetro di un quadrato aumentasse di 8 cm, l'area aumenterebbe di $36\,cm^2$. Quanto misura il lato del quadrato?

9) In un triangolo PQR i due angoli più ampi sono rispettivamente il doppio e il quintuplo del più piccolo. Quanto misurano i tre angoli?

10) In un triangolo ABC si sa, riguardo agli angoli interni, che $3\hat{A} + 2\hat{B} = 195°$ e che $4\hat{B} - 3\hat{C} = 30°$. Quanto misurano i tre angoli?

11) Determinare perimetro e area di un rombo del quale si conoscono la somma delle diagonali (62 cm) e la loro differenza (34 cm).

12) Un trapezio isoscele ha la base minore uguale al lato obliquo. Il perimetro del trapezio misura 52 cm, e la somma della quinta parte del lato obliquo con la metà della base maggiore vale 13 cm. Determinare le misure dei quattro lati e dell'area.

13) ABCD è un trapezio rettangolo.
La base maggiore AB supera di 4 cm la somma di altezza e lato obliquo; questi differiscono di 8 cm, mentre la differenza fra base maggiore e lato obliquo è di 9 cm.
Determinare il perimetro e l'area.

14) Di un trapezio isoscele si conoscono:
l'area $(44\ cm^2)$, l'altezza $(4\ cm)$ e il rapporto fra le due basi $(4/7)$. Quanto vale il perimetro?

15) Un parallelogrammo ha il perimetro di 2 m; un lato supera l'altro di 22 cm.
Quanto misurano i due lati?
Sapendo inoltre che la proiezione del lato magg. sul minore vale 11 cm, determinare l'area della figura.

16) Un rombo, nel quale le diagonali sono una i ¾ dell'altra, ha il perimetro di 60 cm.
Quanto misura l'area?

17) Un trapezio isoscele è circoscritto ad un cerchio.
Il suo perimetro è di cm 52, mentre la differenza fra le basi è di cm 10.
Determinare i lati e l'area del trapezio, nonché il raggio del cerchio inscritto.
(Occorre ricordare la proprietà che caratterizza ogni quadrilatero circoscritto a una circonferenza)

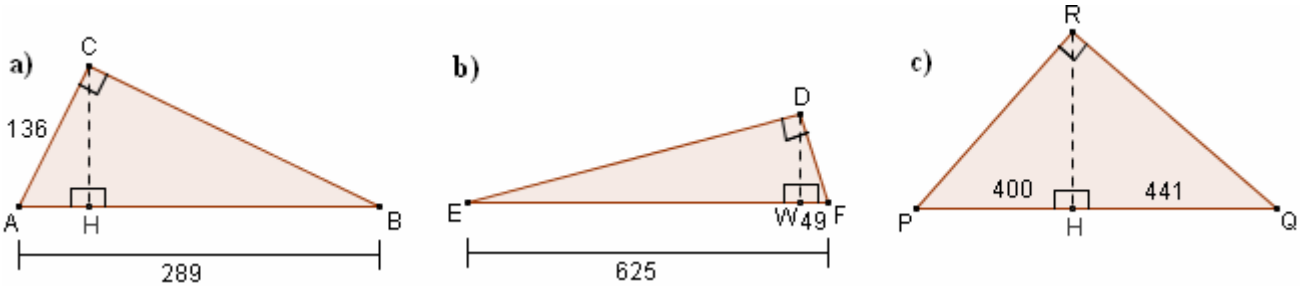
18) Un trapezio isoscele è circoscritto ad un SEMIcerchio.
Sapendo che la somma delle basi misura 38 cm, e che il lato obliquo supera di 13 cm la base minore, determinare i lati del trapezio, e il diametro del semicerchio.
(Ricordare la proprietà che caratterizza il trapezio isoscele circoscritto a una semicirconferenza)

SOLUZIONI

1) 48 cm; $108\ cm^2$ 2) 20 cm, 26 cm, 26 cm 3) 12 cm, 15 cm, 21 cm 4) 50 cm
5) lato obliquo = cm 20, base = cm 24, area = cm^2 192, h = cm 19,2 6) 2p = 36 cm
7) EF = m 6, DE = DF = m 5, $S = m^2\,12$ 8) 8 cm 9) 22°30', 45°, 112°30' 10) 15°, 75°, 90°
11) 100 cm, $336\ cm^2$ 12) 10 cm, 10 cm, 10 cm, 22 cm, $128\ cm^2$ 13) 50 cm, $80\ cm^2$ 14) 32 cm
15) 61 cm e 39 cm; $2340\ cm^2$ 16) $216\ cm^2$
17) 13 cm, 13 cm, 18 cm, 8 cm, $156\ cm^2$, 6 cm 18) 17 cm, 17 cm, 34 cm, 4 cm; 16 cm

❑ PROBLEMI CON APPLICAZIONE DEI TEOREMI DI EUCLIDE E PITAGORA

1) Determinare tutti i segmenti che compaiono nelle seguenti figure, senza mai utilizzare il Teorema di Pitagora.



2) ⇨ In un triangolo rettangolo i cateti misurano rispettivamente 65 cm e 156 cm. Utilizzare il Teorema di Pitagora per calcolare la misura dell'ipotenusa, dopodiché determinare le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e dell'altezza relativa all'ipotenusa mediante i teoremi di Euclide.

3) Senza mai utilizzare il teorema di Pitagora, determinare il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa misura m 24 e una delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa m 18.

4) Sapendo che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo misurano cm 4,5 e cm 8, trovare i lati, l'altezza relativa all'ipotenusa e l'area del triangolo, senza mai utilizzare Pitagora.

5) Dato il triangolo rettangolo di cateti a, b, determinare le misure:
dell'ipotenusa, delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, dell'altezza relativa all'ipotenusa.

6) Determinare i lati, l'altezza relativa all'ipotenusa e l'area di un triangolo rettangolo, conoscendo le proiezioni a, b dei cateti sull'ipotenusa.

7) In un triangolo rettangolo, un cateto è inferiore di 10 cm all'ipotenusa, mentre la sua somma con l'ipotenusa dà un segmento lungo 40 cm.
Determinare l'altro cateto, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, e l'altezza relativa all'ipotenusa.

8) ⇨ Un trapezio rettangolo ha la base minore uguale all'altezza. Il lato obliquo supera di 2 cm la base minore, mentre la differenza fra le due basi è di 8 cm. Sapresti determinare i quattro lati?
(In questo problema si può applicare il Teorema di Pitagora per impostare l'equazione risolvente)

9) Se in un triangolo rettangolo le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa sono, rispettivamente, una inferiore di 6 cm e l'altra maggiore di 8 cm rispetto all'altezza relativa all'ipotenusa, quanto misurano i lati del triangolo?
(Si può utilizzare il II° Teorema di Euclide per impostare l'equazione risolvente)

10) Il cateto maggiore di un triangolo rettangolo supera di 4 cm la sua proiezione sull'ipotenusa; quest'ultima, a sua volta supera di 5 cm il cateto maggiore. Determinare i lati del triangolo e, successivamente, le misure dei raggi dei due cerchi inscritto e circoscritto.

11) Sapendo che la mediana CM relativa all'ipotenusa AB di un triangolo rettangolo ABC supera di 18 cm la propria proiezione HM sull'ipotenusa, e che l'altezza CH relativa all'ipotenusa misura 24 cm, determinare perimetro e area di ABC.

12) ⇨ Trovare il perimetro di un triangolo isoscele di area 108 cm^2, sapendo che il lato è i 5/8 della base.
(In questo problema si può applicare il teorema di Pitagora per esprimere un segmento in funzione di x; l'equazione risolvente non è di primo grado, ma è comunque di risoluzione immediata)

13) In un triangolo rettangolo ABC le proiezioni BH, HC dei cateti sull'ipotenusa differiscono di 7 cm. Determinare l'ipotenusa BC sapendo che $AH^2 - BH^2 = 63\ cm^2$.
(In questo problema si può applicare il II° Teor. di Euclide per esprimere un segmento in funzione di x)

SOLUZIONI

1) a) AH = 64, HB = 225, CH = 120, CB = 255
b) DF = 175, EW = 576, DW = 168, ED = 600
c) RH = 420, PQ = 841, PR = 580, RQ = 609

2) 169 cm, 25 cm, 144 cm, 60 cm

3) m 120

4) 12,5 cm; 7,5 cm; 10 cm; 6 cm; 37,5 cm^2

5) $\sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6) $a+b$, $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$

7) 20 cm, 9 cm, 16 cm, 12 cm

8) 15, 15, 23 e 17 cm

9) 30, 40, 50 cm

10) 15, 20, 25 cm; r = 5 cm; R = 12,5 cm

11) 120 cm; 600 cm^2

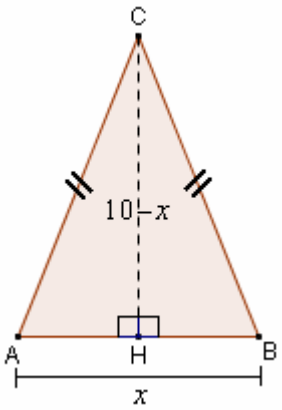
12) 54 cm

13) 25 cm

PROBLEMI GEOMETRICI DI 2° GRADO - ESEMPI SVOLTI

- In un triangolo isoscele la somma di base e altezza è 10 cm, e l'area è di $12\ \text{cm}^2$.
  Trovare il perimetro.

Disegno



Dati e richieste del problema

$CA = CB$
$CH \perp AB$
$AB + CH = 10\ \text{cm}$
$S(ABC) = 12\ \text{cm}^2$
$2p(ABC) = ?$

Risoluzione

1) Pongo la x : $\boxed{AB = x}$

2) Esprimo gli altri segmenti che mi servono in funzione di x :

$\boxed{CH = 10 - x}$

3) Imposto l'equazione risolvente :

$\boxed{\dfrac{x(10-x)}{2} = 12}$ $(area = 12)$

$x(10-x) = 24$

$10x - x^2 = 24$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$(x-6)(x-4) = 0$

$\boxed{x = 6 \vee x = 4}$

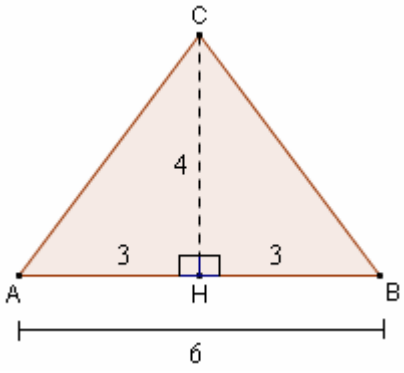
In questo caso il problema, che ha un'equazione risolvente di 2° grado, possiede *due* soluzioni, ma non sempre è così:

- a volte è $\Delta = 0$, quindi le soluzioni sono coincidenti, è come se ce ne fosse una sola;
- a volte è $\Delta < 0$, e il problema è impossibile;
- altre volte l'equazione ha, sì, due soluzioni, ma poi … una di esse è "non accettabile", da scartare (potrebbero essere anche entrambe non accettabili …)

Negli esercizi proposti potrai sperimentare una casistica molto varia.

Perciò **si hanno due possibilità, ci sono due distinti triangoli che risolvono il problema**:

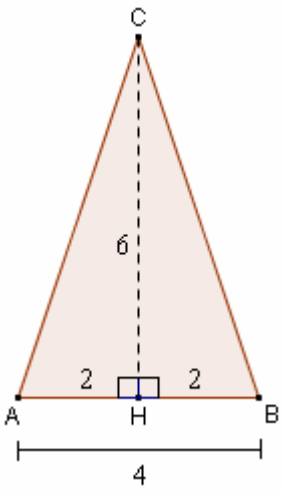
$AB = 6\ \text{cm}$,
$CH = 10 - 6 = 4\ \text{cm}$



$$CA = \sqrt{CH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\ \text{cm}$$

$\boxed{2p =}\ 5 + 5 + 6 = \boxed{16\ \text{cm}}$

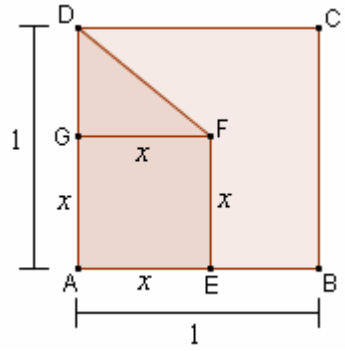
$AB = 4\ \text{cm}$,
$CH = 10 - 4 = 6\ \text{cm}$



$$CA = \sqrt{CH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ \text{cm}$$

$\boxed{2p =}\ 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 4 = 4\sqrt{10} + 4 = \boxed{4\left(\sqrt{10}+1\right)\ \text{cm}}$

- Un quadrato ABCD ha lato unitario.
  All'interno del lato AB è stato preso un punto E costruendo poi, internamente ad ABCD, un altro quadrato AEFG; infine si è congiunto F con D.
  L'area del trapezio AEFD risulta essere i 3/8 dell'area di ABCD.
  Quanto misura AE?



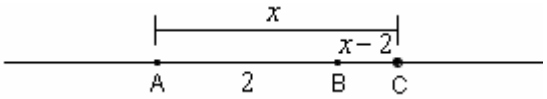
ABCD quadrato
AB = BC = CD = DA = 1
AEFG quadrato
$S(AEFD) = \frac{3}{8} \cdot S(ABCD)$
AE = ?

$AE = EF = FG = GA = x; \qquad S(AEFD) = \frac{(AD + EF) \cdot AE}{2} = \frac{(1+x) \cdot x}{2}$

Equazione risolvente: $\frac{(1+x) \cdot x}{2} = \frac{3}{8} \cdot 1^2; \quad \frac{x + x^2}{2} = \frac{3}{8}; \quad 4x + 4x^2 = 3; \quad 4x^2 + 4x - 3 = 0; \quad x_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

La soluzione negativa è evidentemente da scartare (si dice anche che è NON ACCETTABILE).

- Su di una retta r ci sono due punti, A e B, a distanza 2 l'uno dall'altro.
  Alla retta appartiene anche un terzo punto C, per il quale si ha $2CA^2 + CB^2 = 8$. Dove si trova C?



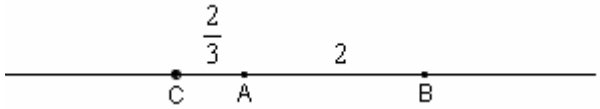
AB = 2
$2CA^2 + CB^2 = 8$
Dove si trova C?

$AC = x, \quad AB = 2, \quad CB = x - 2$

Equazione risolvente: $2x^2 + (x-2)^2 = 8; \quad 2x^2 + x^2 - 4x + 4 = 8; \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0; \quad x_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$

La soluzione $x = 2$ corrisponde alla situazione in cui C coincide con B, è sovrapposto a B:
in effetti, in questo caso è $CA = AB = 2$ e $CB = 0$,
quindi si ha proprio $2CA^2 + CB^2 = 2 \cdot 2^2 + 0^2 = 8 + 0 = \boxed{8}$.

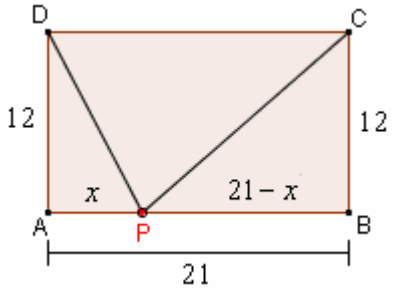
Ma PER QUESTO PROBLEMA ANCHE LA SOLUZIONE NEGATIVA E' ACCETTABILE:
essa corrisponde infatti al punto C posizionato A SINISTRA del punto A



e in questo caso si ha ancora $2CA^2 + CB^2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + 2\right)^2 = 2 \cdot \frac{4}{9} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = \boxed{8}$

In definitiva, di fronte alle soluzioni trovate per un problema,
bisogna sempre chiedersi se siano accettabili oppure no:
si tratta di andare a vedere quali sono, per il problema, le limitazioni alle quali è soggetta la nostra "*x*";
e **a volte, anche una soluzione negativa può avere una "interpretazione",**
e magari, per taluni problemi, risultare accettabile! **Approfondimento:** ⇨

- Un rettangolo ABCD ha base AB = 21 cm e altezza AD = 12 cm.
  Determinare, sul segmento AB, un punto P **IN MODO CHE** risulti: $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$.



$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

$AB = 21\ cm, \quad AD = 12\ cm$

? P su AB **in modo che** $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$
CONDIZIONE

Attenzione! Questo è un problema "D.O.C"!



I problemi di questa tipologia, nei quali è richiesto di **determinare un punto** (su di un segmento, o una semiretta, o una retta, o una circonferenza, ecc. ecc.) **IN MODO CHE sia verificata una certa CONDIZIONE**, sono particolarmente importanti.

Sono anche, fortunatamente, problemi "strutturalmente facili", ossia la loro risoluzione consiste sempre in un medesimo **procedimento "standard"**.
Si tratta di:

1) **PORRE l'incognita *x***
2) **ESPRIMERE per mezzo di *x*, tutte le quantità che compaiono nella *CONDIZIONE***
3) **SOSTITUIRE** nella ***CONDIZIONE*** le espressioni trovate, **ottenendo così l'equazione risolvente**.

Nel nostro caso:

1) è richiesto di localizzare la posizione che deve occupare il punto P, sul segmento AB, affinché ecc.ecc. E' chiaro che la posizione di P è individuata quando si conosca la sua distanza da una qualsiasi delle due estremità di AB. Quindi, porremo come incognita AP oppure PB.

Ad esempio, possiamo **porre** $\boxed{AP = x}$.

2) Ora dobbiamo **esprimere** per mezzo di *x* i due segmenti PD e PC, o meglio i loro quadrati.
Con Pitagora su APD e BPC, otteniamo:

$$\boxed{\begin{aligned} PD^2 &= AP^2 + AD^2 = x^2 + 144 \\ PC^2 &= PB^2 + BC^2 = (21 - x)^2 + 144 \end{aligned}}$$

3) Non ci resta che **sostituire** le espressioni trovate nella condizione $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$
ed ecco la nostra l'equazione risolvente:

$$\boxed{x^2 + 144 + (21 - x)^2 + 144 = 569}$$

$$x^2 + 144 + 441 - 42x + x^2 + 144 = 569$$

$$2x^2 - 42^{21}x + 160^{80} = 0$$

$$\boxed{x_{1,2} =} \quad \frac{21 \pm \sqrt{441 - 320}}{2} = \frac{21 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{21 \pm 11}{2} = \begin{cases} \boxed{5} \\ \boxed{16} \end{cases}$$

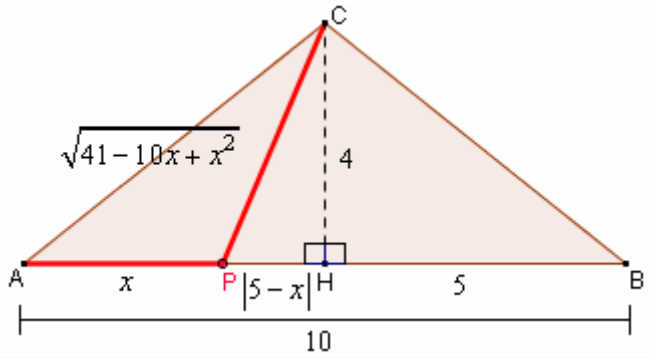
Dunque, affinché risulti $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$, dev'essere $\boxed{AP = 5\ cm}$ o in alternativa $\boxed{AP = 16\ cm}$.

Come istruttiva verifica, calcola i valori di PD^2 e di PC^2 nell'ipotesi che sia $AP = 5\ cm$: constaterai che si ha proprio $PD^2 + PC^2 = 569\ cm^2$. E analogamente supponendo $AP = 16\ cm$.

Il fatto che si siano trovate due soluzioni, corrispondenti a due posizioni di P *alla medesima distanza* da una delle estremità di AB, era *prevedibile* considerando l'evidente "*simmetria*" del problema: prese due posizioni di P, una a una certa distanza da A e l'altra a distanza uguale, ma da B, i valori delle lunghezze dei due segmenti PD e PC si scambiano, quindi la somma dei quadrati di tali valori resta invariata.
Fin dall'inizio si poteva quindi capire che questo problema, nel caso ammettesse una soluzione, *doveva* necessariamente averne anche una seconda, "gemella" rispetto alla prima.

❑ Sulla base AB = 10 cm di un triangolo isoscele ABC, la cui altezza CH misura 4 cm, determinare un punto P **in modo che** risulti $PA^2 + 5PC^2 = 129\ cm^2$

Disegno



Dati e richieste del problema

$CA = CB$
$AB = 10$ cm
$CH = 4$ cm $(CH \perp AB)$
? P su AB **in modo che**
$PA^2 + 5PC^2 = 129\ cm^2$

Risoluzione

1) PONGO la *x* : $\boxed{PA = x}$

2) ESPRIMO gli altri segmenti che mi servono in funzione di *x* :

$AH = \frac{AB}{2} = 5$

$PH = \boxed{|5-x|}$ (NOTA)

$PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{|5-x|^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25 - 10x + x^2 + 16} = \boxed{\sqrt{41 - 10x + x^2}}$

3) SOSTITUISCO nella relazione data per impostare l'equazione risolvente :

$\boxed{x^2 + 5\left(41 - 10x + x^2\right) = 129}$

$x^2 + 205 - 50x + 5x^2 = 129$

$6x^2 - 50x + 76 = 0; \quad 3x^2 - 25x + 38 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 456}}{6} = \frac{25 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{25 \pm 13}{6} = \left\langle \begin{matrix} \boxed{2} \\ \boxed{\frac{19}{3}} \end{matrix} \right.$$

Quindi può essere $\boxed{PA = 2\ cm}$ oppure $\boxed{PA = cm\frac{19}{3}}$

Facciamo la **verifica**.

Con **PA = 2** avremmo

$PH = 3$ e $PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, da cui

$\mathbf{PA^2 + 5PC^2} = 2^2 + 5 \cdot 5^2 = 4 + 5 \cdot 25 = 4 + 125 = \mathbf{129}$, ok

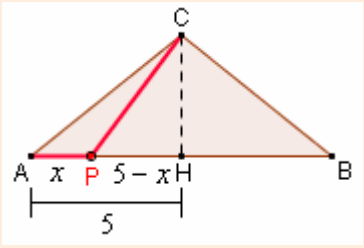
Con $\mathbf{PA = \frac{19}{3}}$ avremmo

$PH = 19/3 - 5 = 4/3$

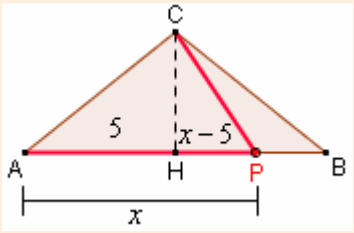
$PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, da cui

$\mathbf{PA^2 + 5PC^2} = \left(\frac{19}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{160}{9} = \ldots = \frac{1161}{9} = \mathbf{129}$, ok

NOTA
Certamente ti chiederai perché abbiamo introdotto il **valore assoluto** scrivendo $PH = |5-x|$ anziché $PH = 5 - x$.
Il fatto è che noi **non sappiamo se il punto P**, affinché sia verificata l'uguaglianza richiesta, **deve trovarsi a sinistra di H oppure a destra di H**.
Nel primo caso avremmo



mentre nel secondo caso sarebbe



Quindi, in pratica,
il valore corretto per il segmento PH si ottiene facendo la differenza fra 5 e *x* "dal maggiore al minore", o anche: facendo la differenza fra 5 e *x* e, nel caso si ottenga un numero negativo, mutando questo risultato in positivo; ma ciò equivale, appunto, a fare $|5-x|$ (o, il che è lo stesso, $|x-5|$).

Notiamo tuttavia che in *questo* particolare problema il segmento in questione è utilizzato esclusivamente "al quadrato", e siccome

$|5-x|^2 = |x-5|^2 = (x-5)^2 = (5-x)^2$

se anche uno studente dimenticasse di mettere le stanghette di valore assoluto, farebbe giusto lo stesso.

❑ PROBLEMI GEOMETRICI DI SECONDO GRADO

1) ⇨ Determinare base e altezza di un rettangolo di area $60\ cm^2$
sapendo che la somma dell'altezza col triplo della base dà 27 cm.

2) ⇨ In un triangolo isoscele ABC, di base AB, il perimetro misura 16 cm,
e la somma dei quadrati costruiti sui tre lati misura $86\ cm^2$. Determinare i lati e l'area di ABC.

3) Un quadrato ABCD ha il lato che misura 2a.
All'interno dei lati del quadrato, procedendo sempre nello stesso senso (ad es., in senso antiorario)
prendi quattro segmenti: AE; $BF = 2 \cdot AE$; $CG = 3 \cdot AE$; $DH = 4 \cdot AE$.
Quanto deve misurare il segmento AE affinché l'area del quadrilatero irregolare EFGH misuri $2a^2$?

4) Da un foglio rettangolare lungo cm 12 e largo cm 9,
si ritaglia, lungo ciascuno dei 4 lati, una striscia di larghezza *x*.
Quanto deve valere *x* se si vuole che l'area del rettangolo ottenuto dopo il ritaglio sia di $54\ cm^2$?

5) ⇨ Nel trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 10 cm e la base minore CD 16 cm.
La somma dell'altezza con la base maggiore vale cm 30. Determinare l'area del trapezio.
(In questo problema si può applicare il teorema di Pitagora per impostare l'equazione risolvente)

6) Determinare il lato obliquo AC = BC di un triangolo isoscele ABC di perimetro 36 cm,
in modo che (vedi pag. 248 per un esempio di problema di questo tipo) si abbia: $AB^2 + AC^2 = 269\ cm^2$.

7) Sul diametro AB = 10 cm di una semicirconferenza, determinare un punto P in modo che,
tracciata da P la perpendicolare ad AB fino ad incontrare la semicirconferenza in Q,
il quadrato costruito sul segmento PQ abbia l'area di $16\ cm^2$.

8) In un trapezio rettangolo in cui base maggiore e altezza misurano entrambe cm 4,
la somma dei quadrati dei quattro lati vale $cm^2\ 58$. Trovare la base minore.

9) In un triangolo isoscele il lato supera l'altezza relativa alla base di 8 cm,
e a sua volta la base supera il lato di 11 cm. Trovare le misure della base e del lato obliquo.

10) In un trapezio di area $96\ cm^2$ la base minore è doppia dell'altezza.
Determinare le due basi, sapendo che la loro differenza è di 8 cm.

11) Un rettangolo ABCD ha la base AB lunga 14 cm, mentre l'altezza AD misura 8 cm.
Si chiede di determinare, sulla retta AB, un punto P in modo che si abbia: $3AP^2 + PC^2 = 292\ cm^2$.

12) In un trapezio isoscele ABCD, con la base maggiore AB doppia dell'altezza, la base minore misura 2a,
e la somma dei quadrati dei quattro lati vale $118a^2$. Determinare il perimetro.

13) Internamente ad un segmento AB = 10k, determinare un punto P (con AP < PB) tale che,
costruendo su AP e su PB rispettivamente il quadrato APCD e il quadrato PBEF
(entrambi dalla stessa parte rispetto ad AB), l'area del pentagono irregolare ABEFD misuri $64k^2$.

14) La somma dei cateti di un triangolo rettangolo misura 27b, e l'area $63b^2$. Determinare i cateti.

15) Dividere un segmento di lunghezza 12a in due parti
tali che la somma dei quadrati costruiti su ciascuna di esse sia $80a^2$.

16) In un trapezio circoscrivibile ad una circonferenza i lati obliqui misurano rispettivamente 9 e 11 cm.
Determinare le basi sapendo che la somma del quadrato di una di esse col triplo del quadrato dell'altra
vale $cm^2\ 300$.

17) Risolvere il problema precedente sostituendo al posto del dato "$cm^2\ 300$" il dato "$cm^2\ 800$".

18) Determinare il perimetro di un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa 20a,
nel quale l'altezza CH relativa all'ipotenusa supera di 4a il segmento AH.

19) E' data una semicirconferenza di diametro AB = 2r.
Si vuole determinare, su AB, un punto P in modo che, alzata da P la perpendicolare al diametro
fino ad incontrare la semicirconferenza in C, valga la relazione

$$CA^2 + CP^2 = \frac{19}{25} r^2 .$$

(Indicazione: congiungere C con le estremità del diametro;
essendo il triangolo ABC rettangolo in C perché …, si potranno applicare i teoremi di Euclide)

20) Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di diametro 2r.
Determinarne la base minore, sapendo che la somma dei quadrati dei quattro lati misura $7r^2$.

21) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di diametro 2r.
Determinarne la base minore, sapendo che questa è uguale alla quinta parte della base maggiore.

22) Un trapezio isoscele è inscritto in una circonferenza di diametro 2r. Determinarne le basi sapendo che esse hanno distanze dal centro una doppia dell'altra, e che la differenza dei loro quadrati misura $4/3\ r^2$.

SOLUZIONI

1) base = 4 cm e altezza = 15 cm *oppure* base = 5 cm e altezza = 12 cm

2) lato obliquo = 5 cm, base = 6 cm, area = 12 cm^2,
oppure lato obliquo = cm $\frac{17}{3}$, base = cm $\frac{14}{3}$, area = cm^2 $\frac{28}{9}\sqrt{15}$

3) a/3 oppure a/2

4) 1,5 cm (si trova anche un'altra soluzione, $x = 9$, evidentemente non accettabile)

5) area = 152 cm^2 (base maggiore = cm 22, altezza = cm 8),
oppure area = 120 cm^2 (base maggiore = cm 24, altezza = cm 6)

6) AC = 13 cm *oppure* AC = 15,8 cm

7) AP = 2 cm *oppure* AP = 8 cm

8) Può misurare 1 cm *oppure* 3 cm

9) Porre *altezza* = *x*;
altezza = 5 cm, base = 24 cm, lato obliquo = 13 cm,
oppure: altezza = 21 cm, base = 40 cm, lato obliquo = 29 cm

10) Posto *x* = altezza, si trova:
$x = -8$ (soluzione ovviamente non accettabile, in quanto non avrebbe senso un'altezza negativa)
oppure $x = 6$ (da cui: base minore = 12 cm, base maggiore = 20 cm)

11) Posto AP = *x* , si trova: $x = 8 \vee x = -1$
In questo caso anche la soluzione negativa è accettabile: corrisponde ad una situazione in cui il punto P si trova, non sul segmento AB, ma sul suo prolungamento dalla parte di A.
Il testo del problema richiedeva che il punto P si trovasse sulla RETTA AB, non sul SEGMENTO AB. Se il testo avesse invece parlato del SEGMENTO AB, la soluz. negativa non sarebbe stata accettabile.

12) Posto *x* = altezza, si trova $x = -\frac{7}{2}a$ (non accettabile) *oppure* $x = 4a$ (da cui: $2p = 20a$)

13) Posto AP = *x*, si trova *x* = 3k (l'altra soluzione *x* = 12k non è accettabile,
perché P andrebbe a cadere fuori dal segmento AB, mentre il testo dice che deve cadere all'interno).

14) Indicata con *x* la misura incognita di uno dei cateti, si trova
x = 6b (e quindi: altro cateto = 21b) *oppure* *x* = 21b (e quindi: altro cateto = 6b)
Perciò, in questo caso, sebbene l'equazione risolvente abbia due soluzioni distinte,
in pratica esiste un solo triangolo che risolve il problema: quello i cui cateti misurano 6b e 21b.

15) Le due parti misurano: una 4a e l'altra 8a.

16) Si trova un'equazione risolvente con $\Delta = 0$, quindi con due soluzioni coincidenti
(se si preferisce: una sola soluzione). Le basi misurano 15 cm e 5 cm.

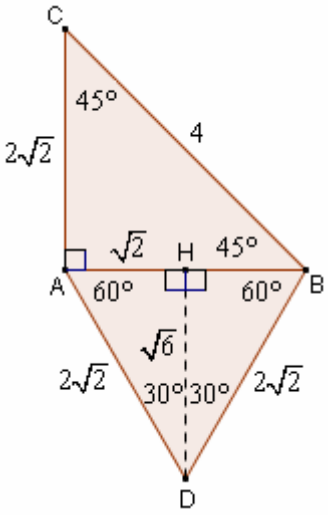
17) L'equazione risolvente ammette due soluzioni distinte, da cui si traggono come valori per le basi
$5\left(3-\sqrt{5}\right),\ 5\left(1+\sqrt{5}\right)$
in quanto l'altra coppia $5\left(3+\sqrt{5}\right),\ 5\left(1-\sqrt{5}\right)$ non è accettabile, essendo $5\left(1-\sqrt{5}\right) < 0$.

18) $AH = 2a,\ CH = 6a,\ HB = 18a \rightarrow 2p(ABC) = 4a\left(5+2\sqrt{10}\right)$
oppure $AH = 4a,\ CH = 8a,\ HB = 16a \rightarrow 2p(ABC) = 4a\left(5+3\sqrt{5}\right)$

19) $AP = \frac{r}{5}$ 20) base min. = r 21) base min. $= \frac{2}{3}r$ 22) base magg. $= \frac{4}{3}r\sqrt{2}$, base min. $= \frac{2}{3}r\sqrt{5}$

PROBLEMI CON TRIANGOLI RETTANGOLI PARTICOLARI - ESEMPI SVOLTI

- Sul lato AB del triangolo ABC, rettangolo in $\hat{A}$ e isoscele, si costruisce il triangolo equilatero ABD.
  E' noto che $BC = 4$ cm ; si desidera determinare perimetro e area del quadrilatero ACBD.



$B\hat{A}C = 90°$

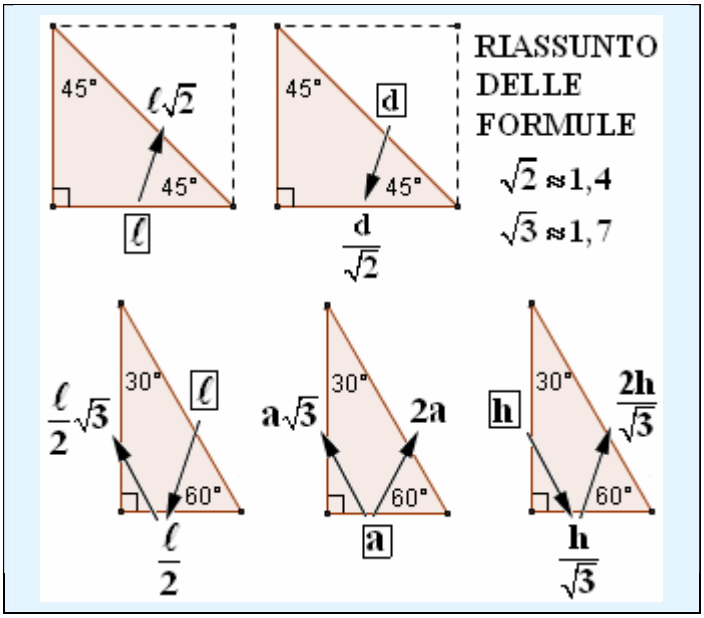
$AB = AC$

$AD = DB = AB$

$BC = 4$ cm

$2p(ACBD) = ?$

$S(ACBD) = ?$



Innanzitutto, il triangolo ABC, essendo *rettangolo* e *isoscele*, ha gli angoli acuti di 45°.

$AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{^{2}\cancel{4}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 2\sqrt{2}$ cm , e allora anche $AD = DB = 2\sqrt{2}$ cm .

Tracciata l'altezza DH di ABD, avremo $AH = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$ cm

ed essendo AHD un triangolo rettangolo "particolare" (90°, 60°, 30°) sarà: $HD = AH\sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ cm .

Ora $\boxed{2p(ACBD) =}\ 4 + 3 \cdot 2\sqrt{2} = 4 + 6\sqrt{2} = \boxed{2\left(2 + 3\sqrt{2}\right) \text{ cm}}$ e, per quanto riguarda l'area,

$$\boxed{S(ACBD)} = S(ABC) + S(ABD) = \frac{\cancel{2}\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{\cancel{2}} = 2 \cdot 2 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3} = \boxed{2\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2}.$$

- Un triangolo ABC ha i due angoli di vertice A e B che misurano 45° e 30° rispettivamente.
  Si sa che il perimetro del triangolo misura $2a\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$. Quanto misura la sua area?

Tracciando l'altezza CH relativa ad AB
il triangolo ABC ne risulta spezzato
in due triangoli rettangoli "particolari" ...

Per questo problema,
è necessario porre una incognita,
e conviene scegliere $CH = x$.

Si avrà

$AH = CH = x$,

poi $AC = x\sqrt{2}$ (AHC : 90°, 45°, 45°)

e $CB = 2x$, $HB = x\sqrt{3}$ (CHB : 90°, 30°, 60°)

Equazione risolvente:

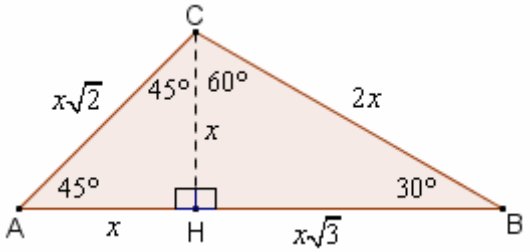
$x\sqrt{2} + x + x\sqrt{3} + 2x = 2a\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$;

$x\sqrt{2} + x\sqrt{3} + 3x = 2a\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$;

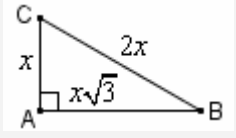
$x\cancel{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3\right)} = 2a\cancel{\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}$

da cui $CH = 2a$, $AB = 2a + 2a\sqrt{3} = 2a\left(1 + \sqrt{3}\right)$

$$\boxed{S(ABC)} = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{\cancel{2}a\left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot 2a}{\cancel{2}} = \boxed{2a^2\left(1 + \sqrt{3}\right)}$$



Un errore che si può commettere in problemi di questo tipo è di esprimere tutti e tre i lati di un triangolo rettangolo "particolare" con l'uso delle formule, poi applicare Pitagora per impostare l'equazione risolvente.
Purtroppo però l'equazione così ottenuta …
non porta da nessuna parte perché è indeterminata!
Infatti *le formule stesse* sono state ricavate tramite il teorema di Pitagora, quindi il procedimento equivale a riutilizzare la stessa informazione per due volte!!!



$x^2 + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = (2x)^2$

$x^2 + 3x^2 = 4x^2$

$4x^2 = 4x^2$ *INDETERMINATA*! ☹

❑ PROBLEMI CON TRIANGOLI RETTANGOLI "PARTICOLARI" (90°/30°/60°, 90°/45°/45°)

1) ⇨ Nel triangolo ABC è $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 45°$, e l'altezza CH misura cm 6. Trova perimetro e area di ABC.

2) Un trapezio isoscele ABCD ha gli angoli adiacenti alla base maggiore AB uguali a 60°, e AD = DC = CB = 10 cm. Determinarne perimetro e area.

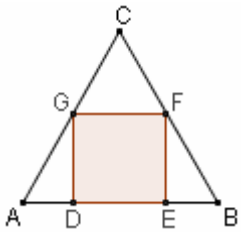
3) Calcolare perimetro e area di un trapezio rettangolo ABCD, in cui altezza e base minore sono uguali, l'angolo acuto $\hat{B}$ misura 30°, e la diagonale minore AC è lunga $a\sqrt{6}$.

4) ⇨ Sapendo che in un triangolo di area $8k^2\sqrt{3}$ due lati sono uno il doppio dell'altro e formano un angolo di 120°, determinare il terzo lato.

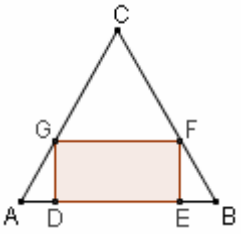
5) Il triangolo isoscele ABC ha la base maggiore AB che supera di 1 cm il lato obliquo. Determina i lati di ABC, sapendo che la somma delle aree dei tre triangoli equilateri costruiti sui suoi lati vale $\text{cm}^2\,\frac{43}{2}\sqrt{3}$.

6) ⇨ Sul lato AB di un triangolo equilatero ABC si prende il punto P tale che sia AP = 2PB. Da P si traccia poi la parallela al lato BC, fino ad incontrare il lato AC in Q. Determinare il lato del triangolo equilatero in modo che la diagonale del trapezio BCQP misuri $a\sqrt{7}$.

7) Quanto misura il lato del quadrato inscritto (vedi figura) in un triangolo equilatero di lato 1 m?



8) In un triangolo equilatero di lato unitario, si inscrive (vedi figura) un rettangolo la cui base è doppia dell'altezza. Quanto misura l'area del rettangolo?



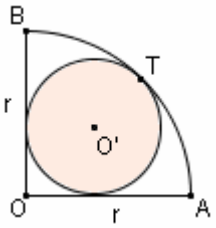
9) Dato un segmento AB di lunghezza a, determinare al suo interno un punto P in modo che, costruiti (dalla stessa parte rispetto ad AB) i due triangoli equilateri APC e PBD, e congiunto C con D, il triangolo CPD risulti i 3/16 del triangolo equilatero di lato AB.

10) Disegna un triangolo equilatero ABC il cui lato misuri ℓ. In ABC inscrivi un rettangolo DEFG (la base DE del rettangolo è una parte del segmento AB; F sta su BC, G sta su CA). Traccia le diagonali DF, EG del rettangolo e indica con O il punto in cui si tagliano. Determina ora il segmento AD = x in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo DOG misuri $\ell^2/2$.

11) Sulla diagonale AC di un quadrato ABCD, di lato 4a, determinare un punto P in modo che il quadrilatero ABPD sia equivalente ad un triangolo equilatero, avente il lato uguale al lato del quadrato.

12) All'interno di un quadrato ABCD di lato ℓ si disegna il triangolo equilatero ABE. La diagonale AC del quadrato taglia il segmento BE in F. Quanto misurano i due segmenti FB, FE?

13) Quanto misura il raggio di un cerchio, inscritto in un quadrante (= quarta parte di cerchio: vedi figura) di raggio r?



♥ *Controlla sempre se il valore della soluzione da te trovata è "plausibile", cioè se può andar d'accordo con le misure nella figura, tenendo conto che* $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ *e* $\sqrt{3} \approx 1{,}7$

14) E' dato un triangolo equilatero ABC di lato ℓ. Sul lato AB si prenda un punto P tale che, dette H e K le proiezioni di P su CA e su CB rispettivamente, il triangolo PHK sia equivalente a 1/6 di ABC.

SOLUZIONI

1) $2p = \text{cm}\ 6\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $S = \text{cm}^2\ 6\left(\sqrt{3}+3\right)$ 2) $2p = \text{cm}\ 50$, $S = \text{cm}^2\ 75\sqrt{3}$

3) $2p = a\left(3+5\sqrt{3}\right)$; $S = \frac{3}{2}a^2\left(2+\sqrt{3}\right)$ 4) $4k\sqrt{7}$ 5) CA = CB = 5 cm, AB = 6 cm

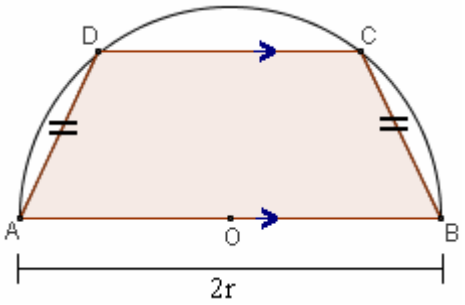
6) 3a 7) lato quadrato $= m\left(2\sqrt{3}-3\right)$ 8) $S = \frac{3}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)$ 9) $AP = \frac{1}{4}a \vee AP = \frac{3}{4}a$

10) $x = \frac{4}{13}\ell \vee x = 0$ (soluz. "degenere", quest'ultima, che sta alla nostra discrezione di accettare o scartare)

11) $AP = a\sqrt{6}$ 12) $FB = \ell\left(\sqrt{3}-1\right)$; $FE = \ell\left(2-\sqrt{3}\right)$ 13) $r\left(\sqrt{2}-1\right)$ 14) $AP = \frac{1}{3}\ell \vee AP = \frac{2}{3}\ell$

PROBLEMI GEOMETRICI CON EQUAZIONE RISOLVENTE IRRAZIONALE
ESEMPIO SVOLTO

- In una semicirconferenza di diametro 2r, inscrivere un trapezio isoscele di perimetro $\frac{19}{4}r$.



Si può interpretare come un "problema IN MODO CHE":
"in una semicirconferenza di diametro 2r,
inscrivere un trapezio isoscele
in modo che il perimetro di tale trapezio misuri $\frac{19}{4}r$".

Ma *che cosa* domanda, in definitiva, il problema?
Che cosa intende che noi dobbiamo determinare?
Beh, il problema ci richiede di determinare un segmento, noto il quale sia
individuato in modo univoco quel trapezio isoscele inscritto, il cui perimetro valga proprio $\frac{19}{4}r$.

L'incognita dev'essere dunque "un elemento che individui la figura",
ossia un segmento a partire dal quale la figura sia tracciabile senza alcuna ambiguità.

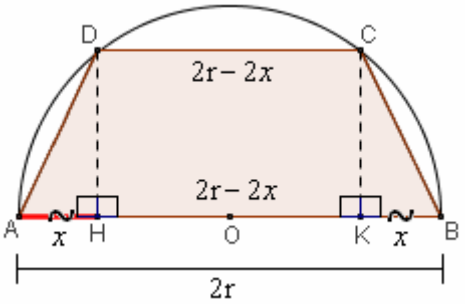
Nel caso dei problemi sulla semicirconferenza, l'esperienza mostra che
è conveniente, di norma, porre come incognita un segmento giacente sul diametro.

Ad esempio, **un'ottima scelta è porre AH = *x*** .

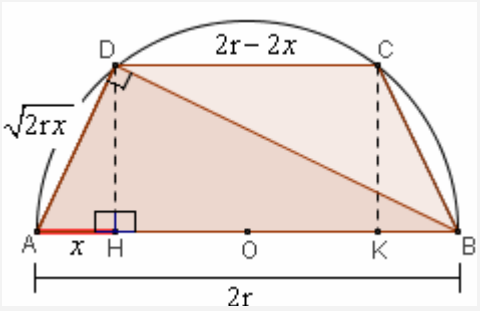
Ora si tratta di esprimere, in funzione della *x* scelta,
i segmenti che compaiono nel perimetro
(a parte, ovviamente, AB che è già noto e vale 2r).

Abbiamo subito
$DC = HK = AB - (AH + KB) = AB - 2AH = 2r - 2x$,
e così la base minore è "sistemata".

Per quanto riguarda il **lato obliquo**,
possiamo procedere in **due modi**:

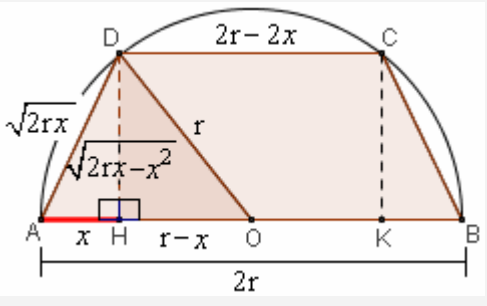


I° modo
Tracciamo la congiungente DB.



$A\hat{D}B = 90°$ perché inscritto in una semicirconferenza!
Dunque il triangolo ADB è rettangolo,
DH ne è l'altezza relativa all'ipotenusa,
e possiamo applicare il 1° Teorema di Euclide
ottenendo:
$AD = \sqrt{AB \cdot AH} = \sqrt{2r \cdot x}$

II° modo
Tracciamo il raggio OD.



Dapprima, con Pitagora su OHD, otteniamo :

$$DH = \sqrt{OD^2 - OH^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} =$$
$$= \sqrt{\cancel{r^2} - \cancel{r^2} + 2rx - x^2} = \sqrt{2rx - x^2}$$

poi, nuovamente con Pitagora ma su AHD,

$$AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2rx - x^2}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\cancel{x^2} + 2rx \cancel{- x^2}} =$$
$$= \sqrt{2rx}$$

Bene!

In un modo o nell'altro, si trova dunque sempre $AD = \sqrt{2rx}$.

Scriviamo ora l'**equazione risolvente**:

$$AB + DC + 2AD = \frac{19}{4}r \qquad \underbrace{2r}_{AB} + \underbrace{2r - 2x}_{DC} + 2\underbrace{\sqrt{2rx}}_{AD} = \frac{19}{4}r$$

$$\boxed{4r - 2x + 2\sqrt{2rx} = \frac{19}{4}r}$$ equazione risolvente (irrazionale)

$$16r - 8x + 8\sqrt{2rx} = 19r$$

$$8\sqrt{2rx} = 3r + 8x$$

$$\left(8\sqrt{2rx}\right)^2 = (3r + 8x)^2$$

$$128rx = 9r^2 + 48rx + 64x^2$$

$$64x^2 - 80rx + 9r^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{40r \pm \sqrt{1600r^2 - 576r^2}}{64} = \frac{40r \pm \sqrt{1024r^2}}{64} = \frac{40r \pm 32r}{64} = \begin{cases} \frac{8r}{64} = \frac{1}{8}r \\ \frac{72}{64}r > r \text{ non accettabile} \end{cases}$$

ACCETTABILITA' GEOMETRICA

La soluzione $x = \frac{72}{64}r = \frac{9}{8}r$ non è geometricamente accettabile, perché maggiore del raggio r.

Quando poniamo un'incognita in un problema, dovremmo sempre pensare ai "confini" (molti scrivono "limiti", con scelta a mio avviso infelice perché questa parola è solitamente usata, in matematica, con un altro significato) **cui è soggetta l'incognita stessa**.

Nel nostro caso, abbiamo posto x = AH e , dato che il punto "mobile" H può, evidentemente, "viaggiare" soltanto fra l'estremo A e il centro O, dovrà essere $\mathbf{0 \le x \le r}$.

(Osserviamo per inciso che un'eventuale soluzione $x = 0$ o $x = r$ andrebbe valutata con attenzione, per decidere se accettarla o meno, perché corrisponderebbe a una figura "degenere")

ACCETTABILITA' ALGEBRICA

Resta ora ancora aperta la questione legata all'equazione irrazionale.

E' noto che nel caso di un'equazione irrazionale con radicali di indice pari, le soluzioni trovate alla fine potrebbero essere non accettabili.

Sottoponiamo dunque la soluzione "sopravvissuta" $x = r/8$ alla "verifica di accettabilità", sostituendola nell'equazione di partenza per stabilire se effettivamente la soddisfa:

$$4r - 2x + 2\sqrt{2rx} = \frac{19}{4}r$$

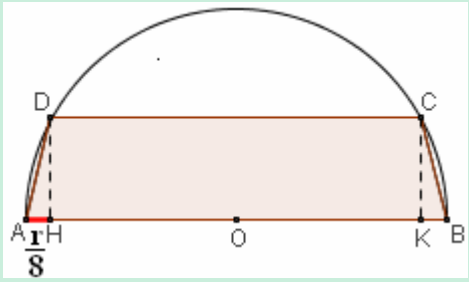
Con $x = \frac{1}{8}r$: $\quad 4r - 2\cdot\frac{1}{8}r + 2\sqrt{2r\cdot\frac{1}{8}r} = \frac{19}{4}r; \quad 4r - \frac{1}{4}r + 2\sqrt{\frac{1}{4}r^2} = \frac{19}{4}r;$

$$4r - \frac{1}{4}r + 2\cdot\frac{1}{2}r = \frac{19}{4}r; \quad 4r - \frac{1}{4}r + r = \frac{19}{4}r; \quad \frac{19}{4}r = \frac{19}{4}r \quad \boxed{\text{OK}}$$

♥ **LA "VERA" VERIFICA** (figura qui a destra)

Va detto che, indipendentemente dal fatto che l'equazione risolvente sia o non sia irrazionale, **la verifica più completa e sicura della soluzione trovata per un qualsivoglia problema, geometrico o non, andrebbe fatta** (ed è sempre molto utile e istruttivo) **andando a calcolare, per il valore di *x* trovato, le varie quantità in gioco**, al fine di stabilire se effettivamente la richiesta del problema è soddisfatta.

Nel nostro caso, tale verifica "globale" consiste nel disegnare nuovamente la figura, prendendo $AH = r/8$, e nel calcolare le corrispondenti misure dei lati di ABCD, per controllare che il suo perimetro abbia proprio il valore desiderato.

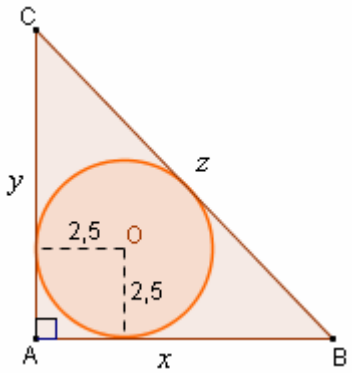


… *si trova:* base min. $= \frac{7}{4}r$, lato obliquo $= \frac{r}{2}$

e il perimetro è proprio $\frac{19}{4}r$, ***OK !!!***

PROBLEMI RISOLUBILI CON UN SISTEMA - ESEMPIO SVOLTO

- Determinare i lati di un triangolo rettangolo sapendo che il suo perimetro è 30 cm, e che il raggio del cerchio inscritto misura cm 2,5.



$B\hat{A}C = 90°$

$2p(ABC) = 30$ cm

$r = 2{,}5$ cm

$AB = ?\ \ AC = ?\ \ BC = ?$

La risoluzione con più incognite, e quindi col sistema, è consigliata quando non è semplice esprimere tutte le quantità in gioco mediante una sola di esse; specialmente se si prevede che il sistema impostato sarà poi algebricamente facile da risolvere.

Converrà utilizzare 3 incognite: $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ x+y=z+2\cdot 2{,}5 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

In un triangolo rettangolo, la somma dei cateti supera l'ipotenusa di un segmento uguale al diametro del cerchio inscritto

La terza condizione (qui si hanno 3 incognite: possibilmente, si devono porre 3 condizioni) è in questo caso la *relazione pitagorica*!

$$(2)\begin{cases} x+y=z+5 \\ (1)\ (z+5)+z=30;\ \ 2z=25;\ \ z=\dfrac{25}{2} \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{25}{2} \\ x+y=\dfrac{25}{2}+5;\ \ x+y=\dfrac{35}{2} \\ x^2+y^2=\left(\dfrac{25}{2}\right)^2;\ \ x^2+y^2=\dfrac{625}{4} \end{cases}$$

Le **equazioni** che formano il sistema devono, in generale, essere **tante quante le incognite**. In caso contrario il sistema sarà, almeno in generale,

- *impossibile* se si hanno più equazioni che incognite,
- *indeterminato* se si hanno più incognite che equazioni.

Ma nei problemi "scolastici" la norma è, ribadiamolo, che si abbiano tante equazioni quante incognite.

Attenzione, nello scrivere il sistema, a non "riciclare" due volte la stessa informazione: in tal caso, infatti, c'è da aspettarsi che il sistema risulti *indeterminato*.

$$\begin{cases} z=\dfrac{25}{2} \\ x+y=\dfrac{35}{2} \\ (x+y)^2-2xy=\dfrac{625}{4};\ \left(\dfrac{35}{2}\right)^2-2xy=\dfrac{625}{4};\ \ \dfrac{1225}{4}-2xy=\dfrac{625}{4};\ \ -2xy=-\dfrac{\overset{150}{\cancel{600}}}{\cancel{4}};\ \ xy=75 \end{cases}$$

Equazione per determinare due numeri sapendo che la loro somma è $s=\dfrac{35}{2}$ e il loro prodotto è $p=75$:

$$t^2-\frac{35}{2}t+75=0;\quad 2t^2-35t+150=0$$

$$t_{1,2}=\frac{35\pm\sqrt{1225-1200}}{4}=\frac{35\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{35\pm 5}{4}=\begin{cases}\dfrac{30}{4}=\dfrac{15}{2}\\ \dfrac{40}{4}=10\end{cases}$$

$$\begin{cases} z=25/2 \\ x=15/2 \\ y=10 \end{cases} \vee \begin{cases} z=25/2 \\ x=10 \\ y=15/2 \end{cases}$$

quindi, in definitiva,
i cateti misureranno cm 10 e cm $15/2 = 7{,}5$
e l'ipotenusa cm $25/2 = 12{,}5$

❑ PROBLEMI GEOMETRICI CON EQUAZIONE RISOLVENTE IRRAZIONALE

1) Un rettangolo è inscritto in una semicirconferenza di raggio 1.
   a) Esprimi l'area del rettangolo in funzione della lunghezza *x* della semibase
   b) Determina *x* in modo che l'area del rettangolo stesso valga 1
   c) Esprimi il perimetro del rettangolo in funzione della lunghezza *x* della semibase
   d) Determina *x* in modo che il perimetro del rettangolo stesso valga 4
   e) Quanto misura il lato del QUADRATO inscritto nella semicirconferenza?

2) ⇨ In un triangolo isoscele la somma di base e altezza è 11 cm, e il perimetro è di 18 cm. Trovare l'area.

3) Una circonferenza di centro O ha diametro AB = 2r; una seconda circonf. ha come diametro AO. Si determini sul diametro AO della circonferenza minore un punto P tale che, tracciata per P la perpendicolare ad AO, sulla quale la circonferenza minore stacca la corda CD e la maggiore stacca la corda EF, si abbia $CD + EF = 2r$.

4) Due circonferenze di ugual raggio (di misura 5a), hanno i centri che distano 14a l'uno dall'altro. Determina la misura del lato di un quadrato, avente due lati paralleli alla retta dei centri, due vertici su una delle due circonferenze e due vertici sull'altra.

5) ⇨ In una semicirconferenza di raggio r, inscrivere un trapezio isoscele di perimetro $4r$ (*soluzione "strana" …*)

6) ⇨ In una semicirconferenza di raggio unitario, inscrivere un trapezio isoscele di area unitaria (*poni x = proiezione del lato obliquo sulla base maggiore*; *equazione irrazionale, poi di 4° grado; Ruffini + risoluzione grafica*)

❑ PROBLEMI GEOMETRICI RISOLUBILI TRAMITE UN SISTEMA DI EQUAZIONI

7) ⇨ Determinare i lati di un triangolo rettangolo in cui la somma dei cateti misura 23a e l'area $60a^2$.

8) Determinare i lati di un triangolo rettangolo in cui il perimetro misura 60ℓ e l'ipotenusa 26ℓ.

9) Determinare i lati di un triangolo rettangolo sapendo che la sua area misura $84\,cm^2$ mentre l'ipotenusa è lunga 25 cm.

10) Determinare i lati di un triangolo rettangolo conoscendo il raggio r del cerchio inscritto (r = 4 cm) e il raggio R del cerchio circoscritto (R = 10 cm).

11) ⇨ Determinare i lati di un triangolo rettangolo conoscendone il perimetro (60 cm) e l'altezza relativa all'ipotenusa (12 cm).

12) ⇨ Determinare i lati di un triangolo ABC rettangolo in A sapendo che, dette AH e AM l'altezza e la mediana relative all'ipotenusa, il perimetro e l'area del triangolo AHM sono rispettivamente di cm 56 e di cm^2 84.

13) ⇨ Determinare i cateti di un triangolo rettangolo sapendo che la sua ipotenusa e la sua altezza relativa all'ipotenusa misurano, rispettivamente, $2\sqrt{5}$ e $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

14) Determinare le misure dei lati di un triangolo rettangolo la cui area misura $54\,cm^2$ e nel quale è inscritto un cerchio di raggio 3 cm.

SOLUZIONI

1) a) $S = 2x\sqrt{1-x^2}$ b) $x = \sqrt{2}/2$ c) $2p = 4x + 2\sqrt{1-x^2}$ d) $x = 3/5 \vee \underbrace{x = 1}_{\text{soluzione "degenere"}}$ e) lato quadrato $= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

2) $S = 15\ cm^2$ oppure $S = 12\ cm^2$ 3) $r/5$; r (soluz. "degenere") 4) Lato quadrato = 6a oppure 8a

5) L'unica soluz. è il "trapezio degenere" le cui due basi coincidono col diametro, e avente altezza nulla.

6) $x = 1 \vee$ (risol. grafica) $x \approx 0{,}16$

7) 8a, 15a, 17a 8) 10ℓ, 24ℓ, 26ℓ 9) 7 cm, 24 cm, 25 cm 10) 12 cm, 16 cm, 20 cm

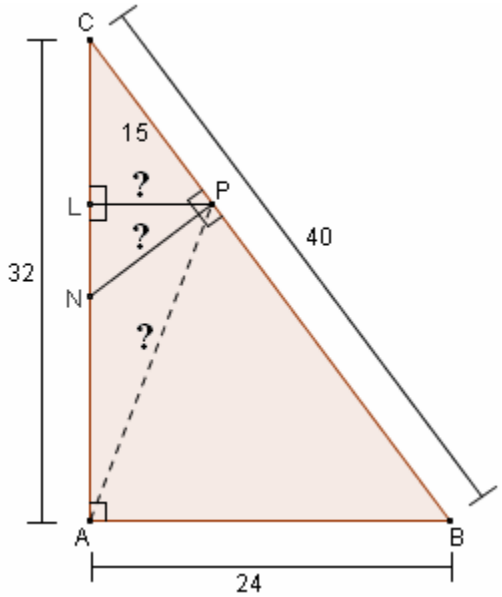
11) 15 cm, 20 cm, 25 cm 12) cm 30, cm 40, cm 50 oppure: cm $5\sqrt{2}$, cm $35\sqrt{2}$, cm 50

13) Le misure dei cateti sono: 2 e 4 14) 9, 12, 15 cm

PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI - ESEMPI SVOLTI

a) In un triangolo rettangolo ABC i due cateti AB e AC misurano rispettivamente 24 cm e 32 cm. Sull'ipotenusa BC si prende un segmento CP = 15 cm e per P si tracciano:
- la perpendicolare ad AC, fino ad incontrare AC in L
- e la perpendicolare a BC, fino ad incontrare AC in N.

Quanto misurano i tre segmenti PL, PN, PA?



$B\hat{A}C = 90°$
AB = 24 cm
AC = 32 cm
CP = 15 cm
PL ⊥ AC
PN ⊥ BC

PL = ?
PN = ?
PA = ?

TIENI SEMPRE PRESENTE CHE

♥ **In due triangoli simili, sono corrispondenti ("omologhi") due lati che stiano opposti ad angoli uguali, o allo stesso angolo**

$BC \underset{\text{Pitagora}}{=} \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40$ cm

(*Vedi anche l'approfondimento sulle* TERNE PITAGORICHE di pag. 205)

♥ **Il simbolo "simile con" è un serpentello: ~**

LPC ~ ABC (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

PL : AB = PC : BC *oppure* **PL : PC = AB : BC**

(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente)

(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

PL : 24 = 15 : 40

$\boxed{PL =} \dfrac{24^{3} \cdot 15^{3}}{40_{5}} = \boxed{9 \text{ cm}}$

PL : 15 = 24 : 40

$\boxed{PL =} \dfrac{15^{3} \cdot 24^{3}}{40_{5}} = \boxed{9 \text{ cm}}$

NOTA

Nei due triangoli considerati, i due lati PL ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

PNC ~ ABC (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

PN : AB = PC : AC *oppure* **PN : PC = AB : AC**

(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente)

(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

PN : 24 = 15 : 32

$\boxed{PN =} \dfrac{24^{3} \cdot 15}{32_{4}} = \boxed{\dfrac{45}{4} \text{ cm}}$

PN : 15 = 24 : 32

$\boxed{PN =} \dfrac{15 \cdot 24^{3}}{32_{4}} = \boxed{\dfrac{45}{4} \text{ cm}}$

NOTA

Nei due triangoli considerati, i due lati PN ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

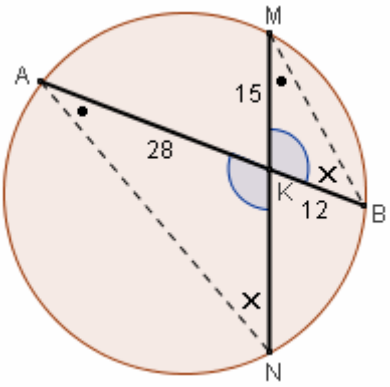
Per quanto riguarda PA, lo ricaveremo con Pitagora su APL, dopo aver calcolato AL:

$CL = \sqrt{PC^2 - PL^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ cm

$AL = AC - CL = 32 - 12 = 20$ cm

$\boxed{PA =} \sqrt{AL^2 + PL^2} = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{400 + 81} = \boxed{\sqrt{481} \text{ cm}}$

b) Due corde AB, MN di una stessa circonferenza si intersecano nel punto K.
Determinare la lunghezza della corda MN sapendo che AK = m 28, KB = m 12 e KM = m 15.



AK = m 28
KB = m 12
KM = m 15

MN = ?

Tracciamo i due segmenti AN e BM e **consideriamo i due triangoli AKN, MKB.**
Essi sono simili, in quanto

- $\hat{A} = \hat{M}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{BN}$
- $\hat{N} = \hat{B}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AM}$
- $A\hat{K}N = M\hat{K}B$ perché opposti al vertice (oppure per differenza rispetto a 180° nei due triangoli)

Quindi

NK : KB = AK : KM *oppure* **NK : AK = KB : KM**

(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente; vedi NOTA)

$NK : 12 = 28 : 15$

$\boxed{NK =} \dfrac{12^{4} \cdot 28}{15_{5}} = \boxed{\text{m}\,\dfrac{112}{5}}$

(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo; vedi NOTA)

$NK : 28 = 12 : 15$

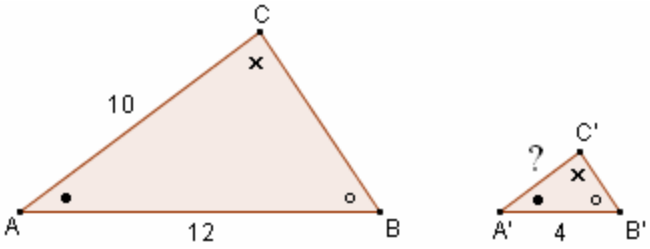
$\boxed{NK =} \dfrac{28 \cdot 12^{4}}{15_{5}} = \boxed{\text{m}\,\dfrac{112}{5}}$

NOTA
Nei due triangoli considerati,
i due lati NK e KB si corrispondono perché stanno opposti ad angoli uguali (i due angoli "puntino").
Analogamente sono corrispondenti (sinonimo: "omologhi") AK e KM, opposti ad angoli "crocetta".

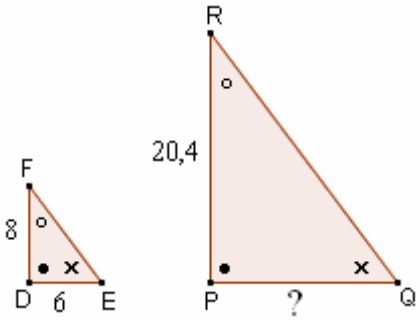
Dopodiché, $\boxed{MN =}\ MK + NK = 15 + \dfrac{112}{5} = \boxed{\text{m}\,\dfrac{187}{5} = \text{m}\,37{,}4}$

OSSERVAZIONE GENERALE, DI CARATTERE "PRATICO"

L'abbiamo già detto, ma lo ripetiamo perché è davvero importante.
Nell'operare con le proporzioni, conviene tenere presente che spesso si può risparmiare molto tempo.
Sovente si dimentica cosa significa, nel concreto, avere DUE RAPPORTI UGUALI!

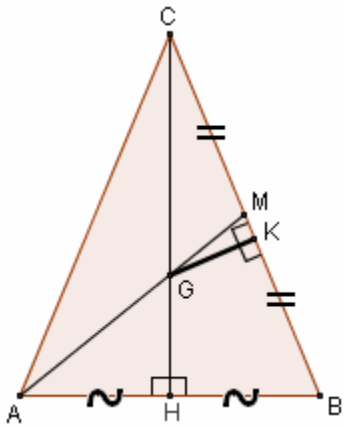


Osservando che A'B' è la terza parte di AB,
avremo subito che A'C' sarà la terza parte di AC,
cioè $A'C' = \dfrac{10}{3}$!



Così come DE è i 3/4 di DF,
il lato PQ sarà i 3/4 di PR.
Quindi $PQ = \dfrac{3}{4} \cdot 20{,}4 = 15{,}3$

c) Quanto misura la distanza del baricentro dal lato obliquo in un triangolo isoscele di perimetro 72 cm, nel quale il lato obliquo supera la base di 6 cm?



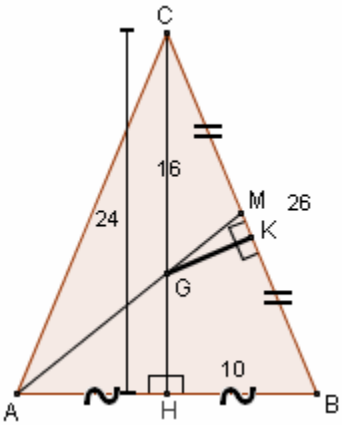
$CA = CB =$
$= AB + 6$ cm
$2p(ABC) = 72$ cm
$AH = HB$
$BM = MC$
$GK \perp BC$
$GK = ?$

Un baricentro si indica preferibilmente con la lettera G (da "Gravity center", centro di gravità).
Infatti il punto di incontro delle mediane di un triangolo viene chiamato "baricentro" (dal termine greco *bàros* = peso) perché coincide col "baricentro fisico" del triangolo, ossia col punto di applicazione della risultante delle forze peso agenti sulle varie parti del triangolo, se questo fosse realizzato in materiale rigido.
Ritagliando un triangolo nel cartoncino, se ne disegni le mediane, e poi appoggi il triangolo (collocandolo orizzontalmente) sopra un piccolo sostegno piazzato in corrispondenza del punto di incontro delle mediane stesse, vedrai che il triangolo sta in equilibrio. Provaci!

Inizialmente è necessario porre un'incognita, per determinare, tramite un'equazioncina, base e lato obliquo.

$AB = x, \quad CA = CB = x + 6$
$2p = 72$ cm
$x + 2(x + 6) = 72$
$x + 2x + 12 = 72; \quad 3x = 60; \quad x = 20$
$AB = 20$ cm, $\quad CA = CB = 26$ cm, $\quad AH = HB = 20/2 = 10$ cm
$CH = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ cm

NOTA



NOTA
Un modo brillante *per svolgere il calcolo* sarebbe qui di scomporre la *differenza di quadrati* in "*somma delle basi moltiplicato la loro differenza*":

$\sqrt{26^2 - 10^2} =$
$= \sqrt{(26+10)(26-10)} =$
$= \sqrt{36 \cdot 16} =$
$= \sqrt{36} \cdot \sqrt{16} =$
$= 6 \cdot 4 = 24$

Ora **CKG ~ CHB** (rettangoli, $H\hat{C}B$ in comune)
quindi potremo determinare GK sfruttando questa similitudine, a patto però di riuscire prima a stabilire la misura del segmento CG.
Ma a tale scopo basta ricordare la nota proprietà del baricentro:
"**il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra**".

Pertanto: $CG = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$ cm

$CKG \sim CHB$

GK : HB = CG : CB; $\quad GK : 10 = 16 : 26; \quad \boxed{GK =} \frac{10 \cdot \cancel{16}^{8}}{\cancel{26}_{13}} = \boxed{\frac{80}{13}\text{ cm}}$

PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI: LE TIPOLOGIE PIU' COMPLICATE

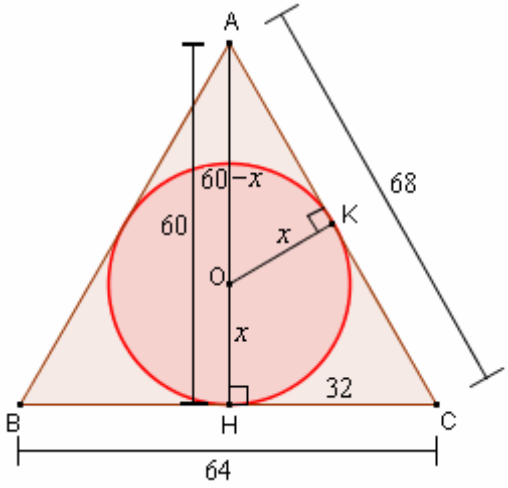
A volte, per risolvere un problema con le similitudini, non è sufficiente impostare una proporzione che abbia noti tre termini su quattro, come negli esempi precedenti: questa è la situazione più elementare, ma non sempre si presenta. Vediamo allora qualche problema più complesso.

Distingueremo fra:

- ♪ *problemi in cui la similitudine viene utilizzata per impostare l'equazione risolvente*
- ♫ *problemi in cui la similitudine viene utilizzata per esprimere un segmento in funzione di x*

PROBLEMI IN CUI LA SIMILITUDINE VIENE UTILIZZATA PER IMPOSTARE L'EQUAZIONE RISOLVENTE

d) Trovare il raggio del cerchio inscritto in un triangolo isoscele di base 64 cm e lato obliquo 68 cm, senza utilizzare la formula per il raggio del cerchio inscritto in un triangolo (che poi sarebbe r = doppia area/perimetro)



BC = 64 cm

AB = AC = 68 cm

r = ?

$HC = 64/2 = 32$ cm

$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{68^2 - 32^2} = \sqrt{(68+32)(68-32)} = \sqrt{100 \cdot 36} = 10 \cdot 6 = 60$ cm

$\boxed{OK = OH = x} \rightarrow AO = 60 - x$

AKO ~ AHC (rettangoli, $C\hat{A}H$ in comune)

OK : HC = AO : AC

$\boxed{x : 32 = (60 - x) : 68}$

La proporzione scritta, che contiene *x* due volte, costituisce l'equazione risolvente.

Possiamo liberarci istantaneamente **dai denominatori applicando la** "**proprietà fondamentale**": ***"una proporzione è corretta se e solo se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi"***

$\boxed{32(60 - x) = 68x}$

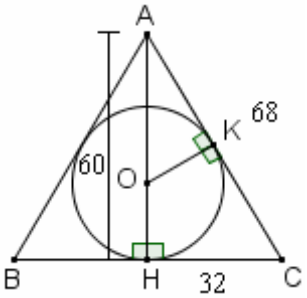
$^{8}\cancel{32}(60 - x) = {}^{17}\cancel{68}x$

$480 - 8x = 17x$

$^{5}25x = {}^{96}\cancel{480}$

$\boxed{x = \text{cm}\ \frac{96}{5}}$ $(= \text{cm}\ 19{,}2)$

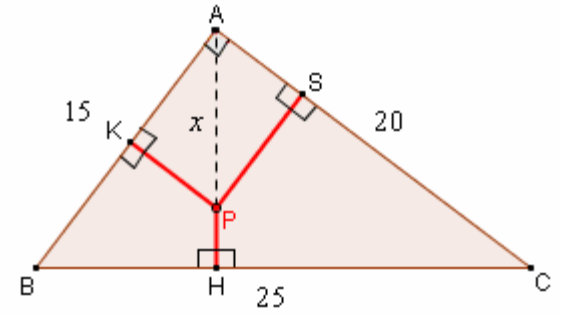
A dire il vero, questo problema avrebbe potuto essere risolto anche senza porre alcuna incognita, bensì impostando una proporzione nella quale fossero noti 3 fra i 4 termini. Infatti, a ben guardare … … quanto misura CK? Poi…



In effetti, a seconda di come si imposta la risoluzione, può darsi che un problema possa rientrare in più d'una delle tipologie che stiamo analizzando.

PROBLEMI IN CUI LA SIMILITUDINE VIENE UTILIZZATA PER ESPRIMERE UN SEGMENTO IN FUNZIONE DI *x*

e) Sull'altezza relativa all'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo ABC i cui cateti misurano 15 cm e 20 cm, determinare un punto P in modo che la somma delle sue distanze dai tre lati del triangolo rettangolo sia 15,2 cm.



$B\hat{A}C = 90°$

$AB = 15$ cm

$AC = 20$ cm

$AH \perp BC$

$PK \perp AB,\ \ PS \perp AC$

? P su AH / $PH + PK + PS = \text{cm } 15{,}2$

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$ cm

$AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{^{3}\cancel{15} \cdot \cancel{20}^{4}}{\cancel{25}_{5}} = 12$ cm (formula *altezza relativa all'ipotenusa* $= \dfrac{\textit{prodotto cateti}}{\textit{ipotenusa}}$)

$AP = x\,;\ \ PH = 12 - x$

Ci proponiamo ora di esprimere PK in funzione di *x*.

A tale scopo, sfrutteremo la similitudine

AKP ~ ABC

(infatti AKP ~ AHB e a sua volta AHB ~ ABC)

PK : AB = AP : BC

$PK : 15 = x : 25$

$PK = \dfrac{^{3}\cancel{15}x}{\cancel{25}_{5}} = \dfrac{3}{5}x$ (NOTA)

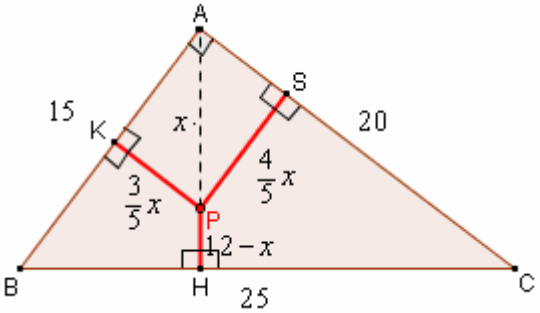
Poi esprimiamo PS in funzione di x.

ASP ~ ABC (ASP ~ AHC ~ ABC)

PS : AC = AP : BC

$PS : 20 = x : 25$

$PS = \dfrac{^{4}\cancel{20}x}{\cancel{25}_{5}} = \dfrac{4}{5}x$



♥ NOTA

Avremmo anche potuto procedere MOLTO PIU' RAPIDAMENTE!

Noi vogliamo mettere in relazione PK (cateto minore nel triangolo rettangolo AKP) con *x* (ipotenusa nello stesso triangolo).

Ma essendo i due triangoli AKP e ABC simili, questa relazione sarà la medesima relazione che lega cateto minore e ipotenusa *in ABC*!

E siccome in ABC le misure di cateto minore e ipotenusa sono 15 e 25, quindi il cateto minore è i 15/25 ossia i 3/5 dell'ipotenusa, lo stesso avverrà anche nel triangolo AKP; dunque, immediatamente,

$PK = \dfrac{3}{5}AP = \dfrac{3}{5}x$

Possiamo a questo punto scrivere l'equazione risolvente:

$PH + PK + PS = 15{,}2$

$12 - x + \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}x = 15{,}2$

$60 - 5x + 3x + 4x = 76$

$2x = 16 \quad x = 8 \quad AP = 8$ cm

❑ PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI

A) Problemi in cui la similitudine viene utilizzata semplicemente per fare dei calcoli, senza equazione (NOTA)

NOTA – *Un'equazione potrà eventualmente intervenire in altre fasi della risoluzione del problema, ma quando si sfrutterà la similitudine fra due triangoli per scrivere una proporzione, non sarà necessario impiegare un'incognita.*

1) ⇨
E' dato il rettangolo ABCD, in cui la base AB misura 12a e l'altezza AD misura 5a.
Sia P un punto, sulla diagonale AC, tale che $PC = 2AP + 4a$; tracciata per P la perpendicolare ad AC che incontri AB in S, si chiede di determinare il perimetro del triangolo APS.

2) In un triangolo isoscele ABC, nel quale il lato obliquo supera di 3 cm la base AB e la somma dei quadrati dei tre lati vale $594\ cm^2$, si tracci, a partire da A, una semiretta che formi con la base AB un angolo uguale all'angolo $\hat{C}$, e che tagli il lato BC in D. Trovare il perimetro del triangolo ABD.

3) Quanto misura la distanza del baricentro dal lato obliquo in un triangolo isoscele di base 2b e altezza h?

4) In una semicirconferenza di diametro $AB = cm\ 20$, si conducano due corde uguali $AC = BD = cm\ 16$, e sia E il loro punto di intersezione. Quant'è la distanza di E dal centro O della semicirconferenza?

5) E' dato il triangolo EFG, rettangolo in E, i cui cateti EF e GE misurano rispettivamente cm 18 e 24. Sull'ipotenusa FG si prenda un punto K, che divida l'ipotenusa stessa in parti proporzionali (vedi NOTA) ai numeri 4 e 11 (KG<KF).
Da K si conduca la perpendicolare ad FG fino ad incontrare in T il cateto EG.
Trovare l'area del quadrilatero EFKT e la misura del segmento FT.

> NOTA - *Dire che due segmenti a, b sono proporzionali ai due numeri m, n significa affermare che* $a : m = b : n$ *(oppure, indifferentemente,* $a : b = m : n$ *).*
> *Stesso significato ha la frase "due segmenti stanno fra loro come i numeri m, n ".*
> *Ad esempio, se due segmenti a, b sono proporzionali ai numeri 3 e 4, significa che* $a : 3 = b : 4$, $a : b = 3 : 4$, *il primo di questi segmenti è i ¾ dell'altro.*

6) E' dato un triangolo rettangolo ABC (AB ipotenusa, BC cateto maggiore), tale che $AB = 15a$ e $BC = AC+3a$.
Si prolunghi il cateto AC, dalla parte di C, di un segmento $CD = 3AC$.
Da C si tracci la parallela ad AB fino ad incontrare in E la congiungente BD.
Trovare le misure di CE e di BE.

7) Nel triangolo ABC, inscritto in una semicirconferenza di diametro AB = 20 cm, è $CA = ¾\ CB$.
Preso su CA il punto D tale che $CD = CA/6$, per D si traccia la corda EF parallela al diametro.
Quanto misura EF?

8) L'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo ABC misura cm 3,5; il cateto AB è i ¾ del cateto AC.
Un punto P, sul cateto AB, lo divide in due parti che stanno fra loro come 2:5 (AP<PB).
Tracciata per P la parallela a BC, che interseca AC in D, trovare il perimetro del triangolo APD.

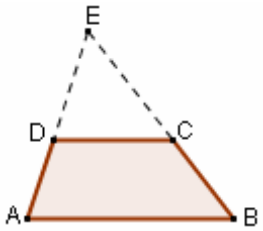
9) In un trapezio rettangolo ABCD le basi AB e DC misurano rispettivamente 21b e 15b, e l'altezza AD misura 8b. Trovare le misure dei due segmenti in cui la diagonale AC è divisa dalla parallela a BC condotta dal vertice D.

SOLUZIONI

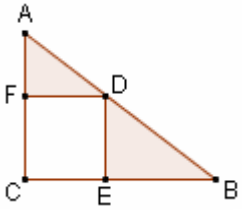
1) 15/2 a 2) 33,6 cm 3) $d = \frac{2bh}{3\sqrt{b^2+h^2}}$ 4) 7,5 cm 5) $192\ cm^2$; $cm\ 2\sqrt{130}$

6) 45a / 4; $3a\sqrt{97}\ /\ 4$ 7) cm 12 8) 2,4 cm 9) 34b/7; 85b/7

B) Problemi in cui la similitudine viene utilizzata per impostare l'equazione risolvente

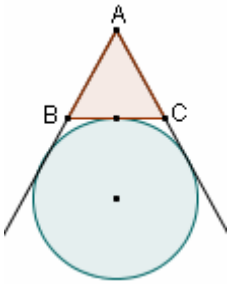


10) In un trapezio le basi misurano 15k e 10k, e i lati obliqui 7k e 9k.
Trovare il perimetro del triangolo che ha per lati
la base minore e i prolungamenti dei lati obliqui.



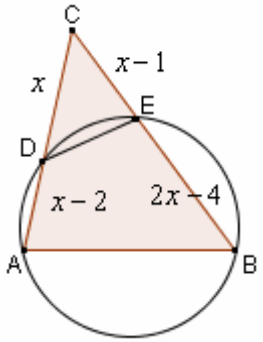
11) Dato un triangolo rettangolo
i cui cateti misurano rispettivamente 48 cm e 36 cm,
trovare la misura del lato del quadrato inscritto,
con due lati sui cateti (e un vertice sull'ipotenusa: vedi figura).

11') *Generalizzazione*: dato un triangolo rettangolo i cui cateti
misurano rispettivamente a e b, ecc. ecc.



12) ⇨ Nel triangolo isoscele ABC, di base BC,
l'area è di 108 cm^2, e il lato obliquo misura 15 cm.
Dopo aver determinato i lati del triangolo,
trovare il raggio della circonferenza "ex-inscritta",
tangente alla base del triangolo e ai prolungamenti dei lati obliqui.

12') *Generalizzazione*: determinare il raggio della circonferenza
supponendo che le misure di base e lato obliquo
siano $2b$ ed ℓ rispettivamente.



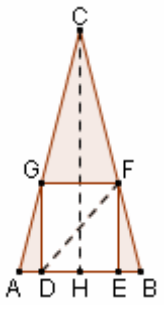
13) ⇨ Il lato AB di un triangolo è corda di una circonferenza,
e il vertice C è esterno a tale circonferenza (vedi figura).
I lati AC e BC intersecano la circonferenza rispettivamente in D e in E.
Dopo aver dimostrato che i due triangoli ABC e DEC sono simili,
determina x nell'ipotesi che sia
$CD = x,\ DA = x-2,\ CE = x-1,\ EB = 2x-4$.

C) Problemi in cui la similitudine viene utilizzata per esprimere un segmento in funzione di *x*

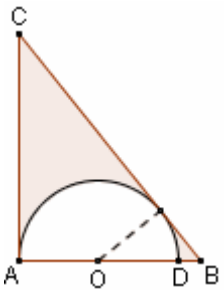
14) ⇨ In un triangolo isoscele, di base AB = 1 e altezza CH = 2,
inscrivere un rettangolo DEFG, con DE su AB, di diagonale unitaria.

15) In un triangolo ABC, rettangolo in A, il raggio della semicirconferenza tangente all'ipotenusa,
il cui diametro AD si trova sul cateto AB, è i 4/9 di AB.
Sapendo inoltre che l'area del triangolo ABC vale $96a^2$, trovare la misura di AB.

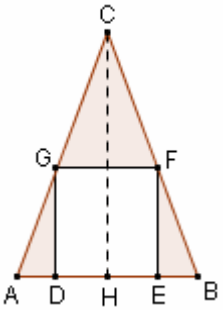
16) In un triangolo isoscele,
la base è i 5/3 del lato
del quadrato inscritto,
con un lato sulla base,
e il quadrato costruito sull'altezza
supera l'area del triangolo di $150a^2$.
Trovare la misura della base
del triangolo e quella del lato
del quadrato inscritto.



n.14



n.15



n.16

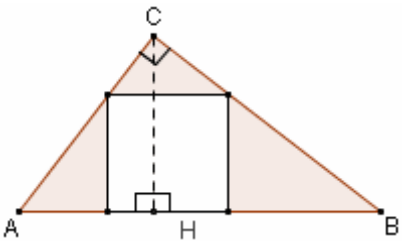
SOLUZIONI

10) 42k 11) cm $\frac{144}{7}$ 11') $\frac{ab}{a+b}$ 12) 18 cm oppure 36 cm 12') $\frac{b\sqrt{\ell^2-b^2}}{\ell-b}$ 13) $x=5$

14) DE = 3/5 ed EF = 4/5 oppure (caso "degenere) DE = 1 ed EF = 0 15) 12a 16) 10a, 6a

D) Problemi vari sulle similitudini

17) E' dato un triangolo rettangolo in cui i cateti misurano 6a, 8a.
Trovare la misura del lato del quadrato inscritto,
con un lato sull'ipotenusa (e due vertici sui cateti: vedi figura)

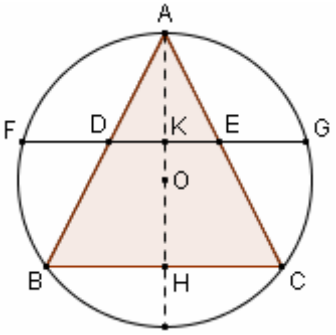


17') *Generalizzazione*:
supporre che le misure dei cateti siano a, b rispettivamente.

18) In una circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo isoscele,
la cui base BC è uguale all'altezza AH.

I) Trovare la misura di BC = AH

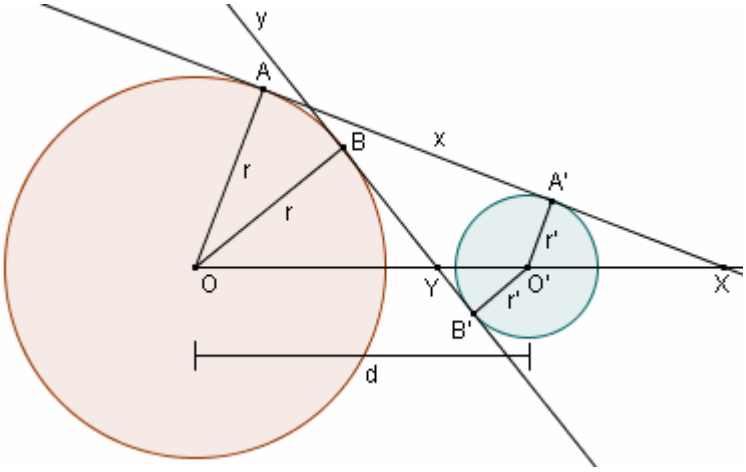
II) Determinare sul segmento AH un punto K in modo che,
condotta per K la perpendicolare ad AH,
che tagli AB in D, AC in E, e la circonferenza in F
(dalla parte di D) e in G (dalla parte di E),
sia verificata la relazione $DF + EG = r$ ⇨



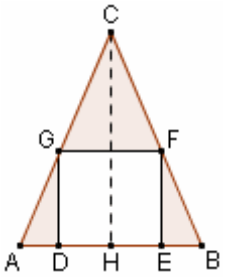
19) ⇨
I centri O e O' di due circonferenze,
di raggi r e r' rispettivamente
(con $r > r'$)
hanno distanza $OO' = d$ $(d > r + r')$.

Una tangente comune *x*
taglia il prolungamento
del segmento OO' nel punto X;
un'altra tangente comune *y*
taglia OO' internamente, in Y.

Determinare le misure dei segmenti
OX; O'X; OY; O'Y; YX.

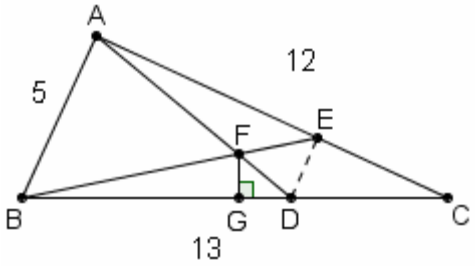


20) ⇨
In un triangolo
isoscele
di area 9 cm²
è inscritto
un quadrato
di lato 2 cm.
Quanto misura
la base
del triangolo?



21) Se voglio che l'area
di un triangolo raddoppi,
per quale numero devo moltiplicare
la lunghezza di tutti i lati?

22)
Il triangolo ABC
ha i lati di
5, 12 e 13 cm.
CD è la terza
parte di BC,
e CE è la terza
parte di AC.



a) Dimostra che ABC è rettangolo
b) Dimostra che DE è parallela ad AB
c) Determina la lunghezza di DE
d) Dimostra che i due segmenti AD e BE si tagliano
reciprocamente in due parti, una tripla dell'altra
e) Trova la misura della distanza FG di F da BC

SOLUZIONI

17) $\frac{120}{37}a$ 17') $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}$ 18) I) $BC = AH = \frac{8}{5}r$ II) $AK = \frac{r}{5} \vee AK = r$

19) $OX = \frac{rd}{r-r'}$ $O'X = \frac{r'd}{r-r'}$ $OY = \frac{rd}{r+r'}$ $O'Y = \frac{r'd}{r+r'}$ $YX = \frac{2rr'd}{r^2-r'^2}$

20) La base del triangolo può misurare 3 cm oppure 6 cm 21) $\sqrt{2}$

22) a) ABC è rettangolo (in A) per l'inverso del Teorema di Pitagora, essendo $5^2+12^2=13^2$
b) 2° Criterio di Similitudine … c) DE = 5/3 d) Anche i due triangoli ABF, DEF sono simili …
e) FG = 15/13 (dopo aver tracciato …)

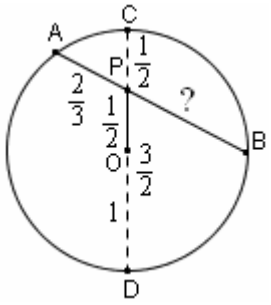
❑ PROBLEMI SULLE APPLICAZIONI DELLE SIMILITUDINI

ESEMPI SVOLTI

❑ Una circonferenza ha centro O e raggio unitario.
Per un punto P passa una retta che interseca la circonferenza in A e B rispettivamente.
Supponendo che la misura del segmento PA sia 2/3, trovare la misura di PB nell'ipotesi che sia

a) $PO = \frac{1}{2}$ b) $PO = \frac{3}{2}$

a)



$\boxed{PO = \frac{1}{2}}$

$PC = OC - PO = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$PD = OD + PO = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

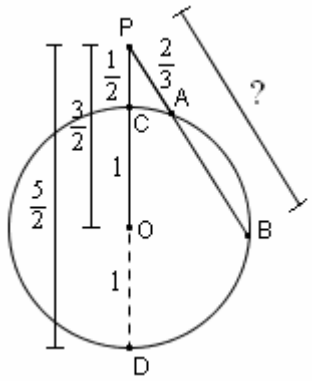
Teor. delle Due Corde:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$\frac{2}{3} \cdot PB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3} \cdot PB = \frac{3}{4}$

$\boxed{PB = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}}$

b)



$\boxed{PO = \frac{3}{2}}$

$PC = PO - OC = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$PD = OD + PO = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

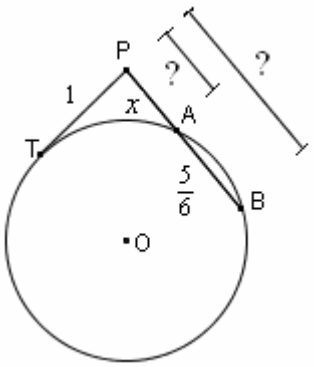
Teor. delle Due Secanti:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$\frac{2}{3} \cdot PB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}, \quad \frac{2}{3} \cdot PB = \frac{5}{4}$

$\boxed{PB = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}}$

❑ Una circonferenza
ha centro O e raggio unitario.
Un punto P è esterno ad essa.
Una tangente PT misura 1;
una retta per P taglia
la circonferenza
in A e in B,
e la corda AB misura 5/6.
Determinare PA e PB.



$PA = x \qquad PB = PA + AB = x + \frac{5}{6}$

Teor. Della Tangente e Secante:

$PA \cdot PB = PT^2 \qquad x \cdot \left(x + \frac{5}{6} \right) = 1^2$

$x_{1,2} = \begin{cases} \boxed{2/3} & \boxed{PA = \frac{2}{3},\ PB = \ldots = \frac{3}{2}} \\ -3/2 \text{ non accettabile} \end{cases}$

1) Due corde AB, CD si tagliano in E. Se AE = cm 3, BE = cm 4 e CE = cm 5, quanto misura CD?

2) In un cerchio due corde si intersecano. La prima, lunga 8 cm, è tagliata in metà dall'altra; questa è divisa dalla prima in due parti, che differiscono di 6 cm. Quanto misura la seconda corda?

3) Da un punto esterno P si tracciano una tangente e una secante ad una circonferenza di raggio r. Sapendo che la tangente misura r e la secante misura 2r, determinare la lunghezza della corda che la circonferenza intercetta sulla secante e la distanza della secante dal centro.

4) ⇨ Un punto P ha distanza d>r dal centro O di una circonferenza di raggio r.
Quanto deve misurare una secante, condotta da P alla circonferenza,
se si vuole che la corda staccata dalla circonferenza sulla secante misuri c?

5) In un triangolo i cui lati misurano 6, 7 e 8 cm, si conduce la bisettrice relativa al lato maggiore. Determinare le lunghezze dei due segmenti in cui questo risulta suddiviso dalla bisettrice.

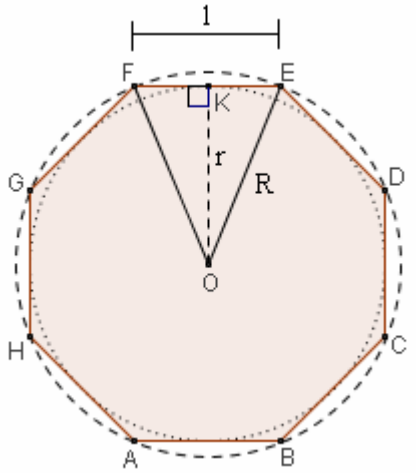
6) In un triangolo in cui due lati misurano 42 cm e 56 cm,
la bisettrice relativa al terzo lato lo divide in due parti, che differiscono di 10 cm.
   a) Determinare il perimetro del triangolo;
   b) dimostrare che è rettangolo;
   c) determinare quindi la lunghezza della bisettrice tracciata.

RISP. 1) cm $\frac{37}{5} = 7{,}4$ 2) 10 cm 3) $\frac{3}{2}r$, $\frac{\sqrt{7}}{4}r$ 4) $\frac{c + \sqrt{c^2 + 4\left(d^2 - r^2\right)}}{2}$ 5) cm $\frac{48}{13}$, cm $\frac{56}{13}$
6) a) $2p = \text{cm } 168$; b) il triangolo è rett. per l'inverso del teor. di Pitagora; c) bisettrice $= \text{cm } 24\sqrt{2}$

❑ PROBLEMI SUI POLIGONI REGOLARI

ESEMPIO SVOLTO

❑ Considerato un ottagono regolare di lato unitario, calcolane:
il raggio del cerchio circoscritto, il raggio del cerchio inscritto, l'apotema, l'area



E' nota la formula $\boxed{\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
che lega il lato dell'ottagono regolare inscritto
al raggio R della circonferenza circoscritta.
Invertendo la formula, avremo

$$R = \frac{\ell_8}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$$

Questo valore si potrebbe razionalizzare:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2};$$

sennonché, la frazione trovata non è molto più semplice e
armoniosa dell'espressione di partenza! Ci terremo quella.

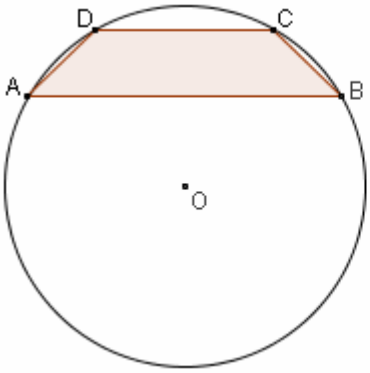
Ora possiamo scrivere

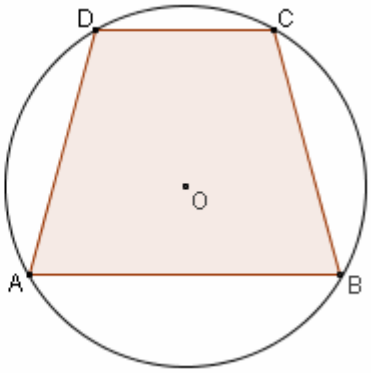
$$OK = \sqrt{OE^2 - EK^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4-2} - \frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}-1}{4}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}{2} = \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \begin{matrix}\text{raggio cerchio inscritto}\\ \text{apotema}\end{matrix}$$

Per il calcolo dell'area, moltiplicheremo per 8 l'area del triangolino OEF la quale è data da
$\frac{EF\cdot OK}{2} = 1\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$, ottenendo quindi $S = 8\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{4} = \boxed{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$

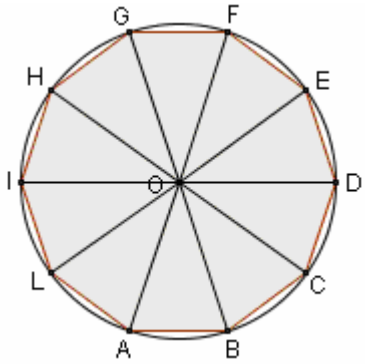
1) ⇨
Un trapezio è inscritto in una circonferenza di raggio R.
Determinare il lato obliquo del trapezio,
sotto l'ipotesi che le sue basi siano uguali ai lati del
triangolo equilatero inscritto e dell'esagono regolare inscritto.
Distinguere i due casi:
a) le due basi stanno, rispetto al centro, dalla stessa parte;
b) le due basi stanno da parti opposte rispetto al centro.





2) Quanto vale il rapporto fra le aree
dell'esagono regolare
e del triangolo equilatero,
inscritti nella stessa circonferenza?

3) Calcola l'area
del decagono regolare
inscritto in un cerchio
di raggio unitario.

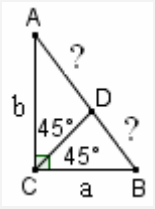


4) Calcola il rapporto fra l'area del triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza
di raggio unitario, e l'area del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza.
Fai poi lo stesso per i quadrati circoscritto e inscritto; e ancora, per gli esagoni circoscritto e inscritto.

RISP.
1) a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$ b) $R\sqrt{2}$
2) Vale 2. L'area dell'esagono è il doppio; lo si può stabilire col calcolo oppure anche (provaci …) *senza* calcoli!
3) $\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
4) 4; 2; 4/3

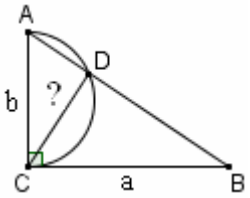
❑ PROBLEMI GEOMETRICI VARI

1)



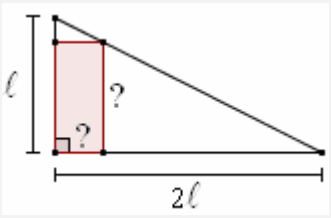
AD = ?
DB = ?

2)



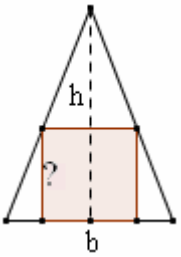
La semicirconf. ha per diametro un cateto.
CD = ?

3)



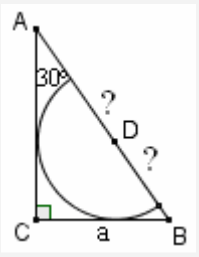
Area rettangolo $= \frac{3}{8}\ell^2$.
Sue dimensioni?

4)



base = b
altezza = h
Lato quadrato inscritto?

5)



$\hat{A} = 30°$, CB = a .
Raggio semicirconf. con centro su AB, tangente ai cateti?

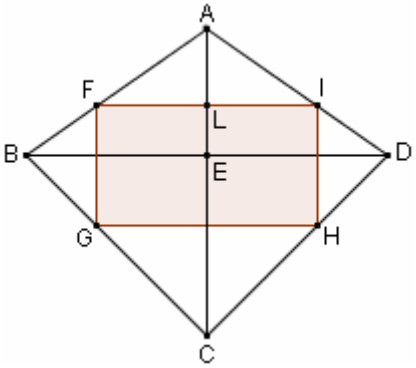
6) Un quadrilatero ABCD ha le seguenti caratteristiche:

- le sue diagonali AC e BD si tagliano perpendicolarmente (in E);
- $BE = ED$; $B\hat{A}D = 120°$; $B\hat{C}D = 90°$; $BC = a\sqrt{6}$

Un rettangolo FGHI, coi lati paralleli alle diagonali di ABCD, è inscritto in ABCD (= ha i vertici sui lati di ABCD);
FI taglia AE in L.

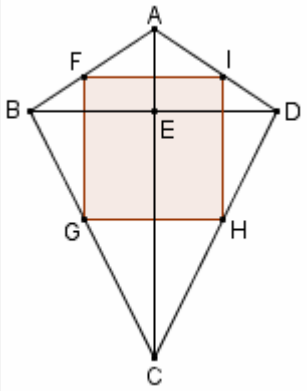
Si chiede di determinare la lunghezza AL = *x* in modo che:

I) il perimetro di FGHI misuri $a\left(1+3\sqrt{3}\right)$
II) FGHI sia un quadrato

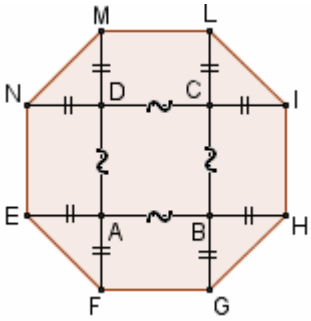


7) In un deltoide (NOTA) ABCD,
le diagonali AC e BD si tagliano in E;
è EB = ED = 3a, EA = 2a , EC = 6a.
Determinare la misura del lato del quadrato inscritto nel deltoide.

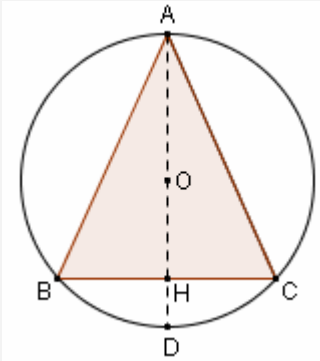
NOTA
Si dice "deltoide" o "aquilone" un quadrilatero avente due lati consecutivi uguali fra loro, e gli altri due lati pure uguali fra loro.
In un deltoide le diagonali sono sempre perpendicolari.



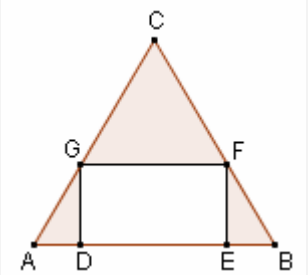
8) La figura mostra un quadrato ABCD i cui lati sono stati prolungati di otto segmenti uguali:
AE = AF = BG = BH = CI = CL = DM = DN.
Determinare le misure del lato del quadrato e dei prolungamenti tracciati, in modo che l'ottagono EFGHILMN abbia tutti e otto i lati uguali fra loro, e l'area di misura $36a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$



9) Determinare la base e l'altezza di un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di diametro 10 cm, sapendo che la somma base+altezza misura 16 cm.



10) In un triangolo equilatero ABC di lato ℓ è inscritto un rettangolo DEFG, la cui area è la quarta parte dell'area di ABC. Determinare la base del rettangolo (*valori irrazionali*)

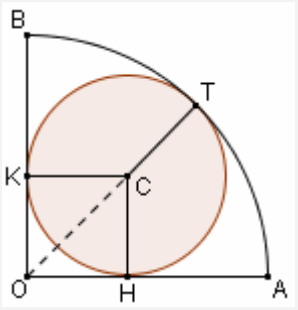


11) In un quadrante (=quarta parte di cerchio) OAB,
di centro O e raggio r, è inscritta una circonferenza di centro C,
tangente in H ad OA, in K ad OB, e in T all'arco $\overset{\frown}{AB}$.

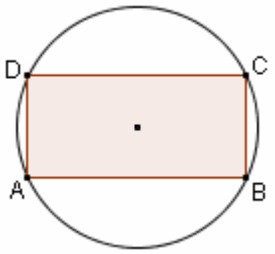
a) Trovare il raggio della circonferenza di centro C

b) Determinare, sul segmento OK, un punto P in modo che sia verificata la relazione $PK + PA = r\sqrt{2}$ (porre $OP = x$)

c) Supporre, questa volta, che P si trovi sul segmento KB.
Determinare la posizione di P in modo che si abbia, ancora,
$PK + PA = r\sqrt{2}$ (porre $OP = x$)



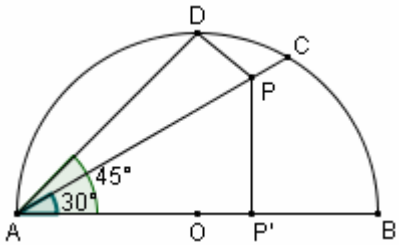
12) Quanto valgono
i lati di un rettangolo
di area r^2,
inscritto in una
circonferenza
di raggio r?



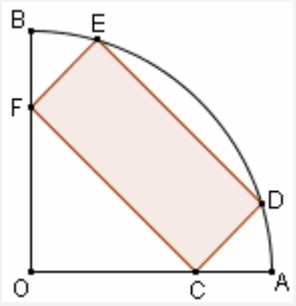
13) In una semicirconferenza di diametro 2r,
a partire dall'estremo A del diametro AB, si traccino due corde:
AC, tale che $C\hat{A}B = 30°$, e AD, tale che $D\hat{A}B = 45°$.

a) Determinare le lunghezze di tali due corde

b) Determinare sulla semiretta AC un punto P
tale che sia verificata la relazione $PD^2 + PP'^2 = 2r^2$
essendo P' la proiezione di P sulla retta AB.

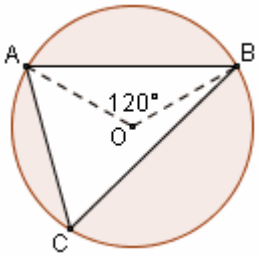


14) Un rettangolo è inscritto in un quadrante di raggio r,
in modo tale che due dei suoi vertici stanno sui lati del quadrante,
e gli altri due sull'arco di circonferenza (vedi figura).
Sapendo che il perimetro del rettangolo misura $\frac{14}{5}r$,
determinare la lunghezza $2x$ del lato
che ha entrambi gli estremi sull'arco di circonferenza.



15) In un cerchio di centro O e raggio unitario è data la corda AB,
cui corrisponde un angolo al centro di 120°.
Determinare sulla circonferenza un punto C
(situato, rispetto alla retta AB, dalla stessa parte di O),
in modo che il perimetro del triangolo ABC misuri
$\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$

Indicazione: porre come incognita AC; quanto misura $A\hat{C}B$?



SOLUZIONI

1) $AD = \frac{b}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$, $DB = \frac{a}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$ 2) $CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 3) $\frac{3}{2}\ell$ e $\frac{1}{4}\ell$ opp. $\frac{1}{2}\ell$ e $\frac{3}{4}\ell$

4) $\frac{bh}{b+h}$ 5) $\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}a$ 6) I) $x = \frac{a}{2}$ II) $x = \frac{4+\sqrt{3}}{13}a$ 7) $\frac{24}{7}a$ 8) lato q. $= 3a\sqrt{2}$, prolung. $= 3a$

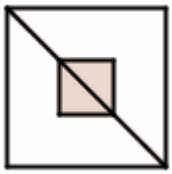
9) $b = h = 8\,cm$ opp. $b = cm\frac{48}{5}$ e $h = cm\frac{32}{5}$ 10) $\frac{\ell}{4}\left(2\pm\sqrt{2}\right)$

11) a) $r\left(\sqrt{2}-1\right)$ b) $x = 0$ c) $x = \frac{6\sqrt{2}-4}{7}r$ 12) $\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}r$

13) a) $AC = r\sqrt{3}$ $AD = r\sqrt{2}$ b) $AP = 0 \vee AP = \frac{4}{5}r\left(\sqrt{3}+1\right)$ 14) $\frac{6}{5}r$ 15) $AC = 1 \vee AC = 2$

QUESITI VARI DI ARGOMENTO GEOMETRICO, TRATTI DA GARE MATEMATICHE

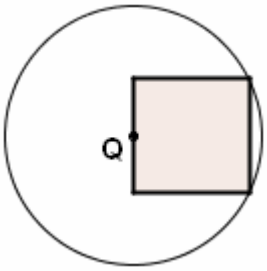
Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi



1) In figura, l'area del quadrato grande misura $1\,m^2$.
Una delle sue diagonali è divisa in tre parti uguali.
La parte intermedia fra le tre è diagonale del quadrato ombreggiato.
Qual è l'area di quest'ultimo?

A) $1/10\,m^2$ B) $1/9\,m^2$ C) $1/6\,m^2$ D) $1/4\,m^2$ E) $1/3\,m^2$

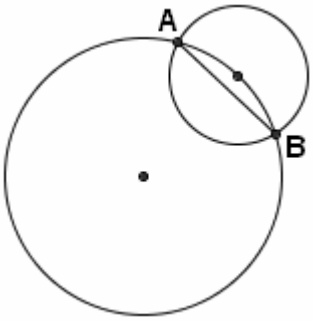
British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2009



2) Il punto Q sta nel centro di un cerchio di raggio 25 centimetri.
Si costruisce un quadrato con due vertici sulla circonferenza
e il lato che congiunge gli altri due vertici contenente il centro Q.
L'area del quadrato, in cm^2, è:

A) 125 B) $125\sqrt{5}$ C) 500 D) 250 E) $250\sqrt{5}$ C

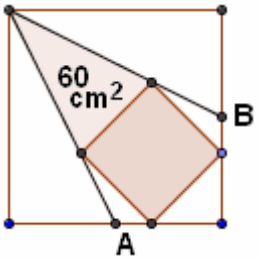
British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2006



3) La figura mostra due cerchi, di raggi 2 e 1 rispettivamente.
Il centro del cerchio più piccolo sta sulla circonferenza del più grande.
Allora la lunghezza della corda AB è

A) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ B) $\frac{5\sqrt{34}}{17}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{15}{8}$ A

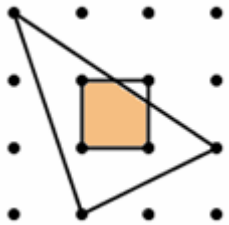
Fédération Française des Jeux Mathématiques-Trophée Lewis Carroll



4) Il triangolo centrale in figura ha un'area di $60\,cm^2$.
A e B sono i punti medi di due lati del quadrato grande.
Quanto misura l'area del quadrato ombreggiato?

A) $72\,cm^2$ B) $80\,cm^2$ C) $84\,cm^2$ D) $88\,cm^2$ E) $90\,cm^2$

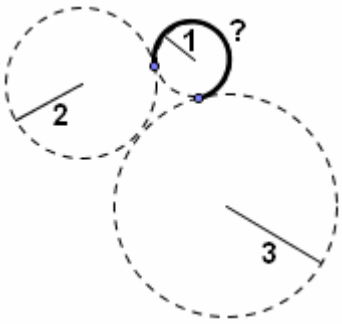
Kangourou 2002



5) Nella figura a lato, due punti comunque scelti,
purché adiacenti in orizzontale o in verticale, distano 1 metro.
Quanto vale (in metri quadrati) l'area della parte comune
al triangolo e al quadrato indicati?

A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{15}{16}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{14}{15}$

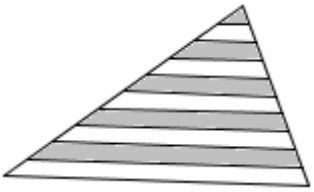
Kangourou 2008



6) Tre cerchi di raggi 1, 2 e 3 rispettivamente sono tangenti (figura).
Quanto vale la lunghezza dell'arco di circonferenza evidenziato
con la linea continua?

A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

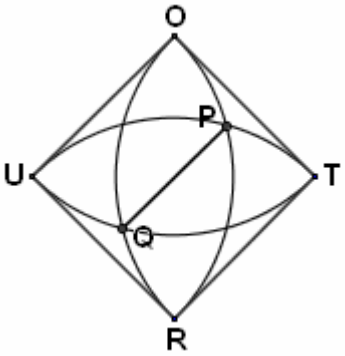
Kangourou 2010



7) Dei segmenti paralleli alla base dividono gli altri due
lati di un triangolo in 10 parti uguali, come in figura.
Che percentuale della superficie del triangolo è ombreggiata?

A) 41,75% B) 42,5% C) 45% D) 46% E) 47,5%

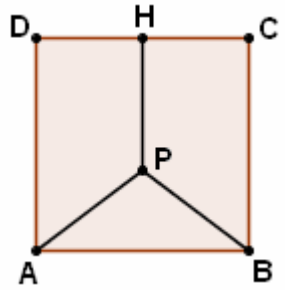
Kangourou 2008



8) Sia TOUR un quadrato di lato 1.
Si tracciano, come mostra la figura,
i quarti di cerchio di centri T, O, U e R.
Quanto misura PQ?

A) $2-\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}-1$

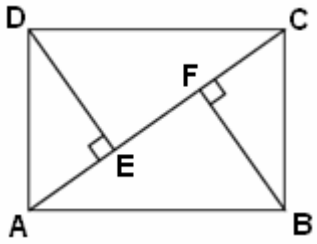
Junior High School Mathematics Contest Preliminary Round 1998



9) Un punto P è interno a un quadrato ABCD di lato 16 cm.
P è equidistante da due vertici consecutivi,
e dal lato che ha per estremi i due vertici restanti.
La distanza PA vale

A) 8,5 B) $6\sqrt{3}$ C) 12 D) 8 E) 10

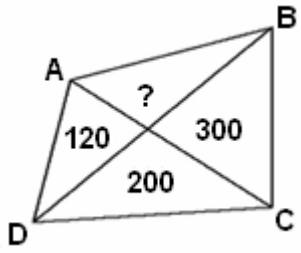
British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2008



10) Nella figura ABCD è un rettangolo con $AD = 1$,
e DE e BF entrambi perpendicolari alla diagonale AC.
Inoltre $AE = EF = FC$.
La lunghezza del lato AB è:

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) 3

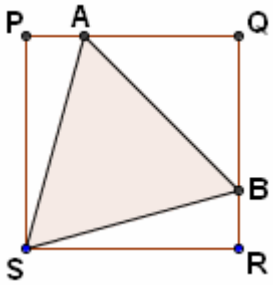
Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi



11) Un dolce ha forma di quadrilatero.
Lo si taglia lungo le diagonali in 4 parti.
Io ne mangio una, dopodichè si pesano le altre tre:
una di queste risulta di 120 grammi, un'altra di 200 e la terza di 300.
Quanti grammi pesava la parte che ho mangiato io?

A) 120 B) 180 C) 280 D) 330 E) 550

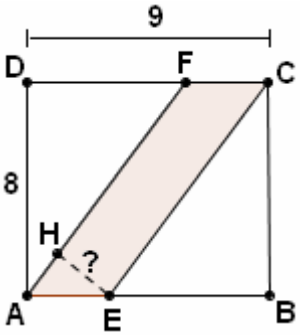
British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2010



12) PQRS è un quadrato e ABS un triangolo equilatero.
Trova il rapporto fra l'area del triangolo APS
e l'area del triangolo ABQ.

A) $1:\sqrt{3}$ B) $1:\sqrt{2}$ C) 1:2 D) 1:3 E) nessuno dei precedenti

The Calgary Mathematical Association -
Junior High School Mathematics Contest 2004



13) La figura mostra un rettangolo di dimensioni 9 cm e 8 cm,
diviso da due parallele in tre parti tutte con la stessa area.
Quanti cm distano le due parallele?

A) 2 B) 2,1 C) 2,2 D) 2,3 E) 2,4

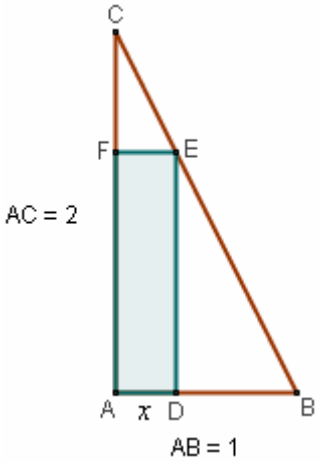
RISPOSTE 1B2C3A4B5D6D7C8E9E10A11B12C13E

❑ PROBLEMI GEOMETRICI + GRAFICI DI FUNZIONI

ESERCITAZIONE 1 **(la correzione completa è a pag. 275)**

In un triangolo ABC, rettangolo in A, con AB = 1 cm e AC = 2 cm, è inscritto un rettangolo ADEF (con D su AB, E su BC, F su AC).

Poniamo AD = *x*.



a) Come degenera la figura per $x = 0$?
Disegna la figura degenere.
Che valore attribuiremo al perimetro di questo rettangolo degenere?

b) Stesse domande per $x = 1$.

c) Secondo te, se facciamo variare *x* da 0 fino a 1
il perimetro di ADEF aumenta oppure diminuisce?

d) In base alle considerazioni svolte al precedente punto c),
sei in grado di stabilire quali sono
il valore minimo e il valore massimo
che il perimetro di ADEF può assumere?

e) Esprimi il perimetro di ADEF in funzione di *x*. (*Risposta*: $y = 2\mathrm{p}(x) = 4 - 2x$)

f) Fai un grafico della funzione $y = 2\mathrm{p}(x)$.
L'osservazione del grafico va d'accordo con la risposta data al punto d)?

g) Per quale valore di *x* il perimetro di ADEF misura cm 3? (*Risposta*: $x = 1/2$)

h) Risolvi graficamente l'equazione $2\mathrm{p}(x) = 3$.

i) Per quale valore di *x* il rettangolo ADEF è un quadrato?

j) Esprimi in funzione di *x* la diagonale del rettangolo ADEF (*Risposta*: $y = \mathrm{d}(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 4}$)

k) Per quale valore di *x* tale diagonale misura 1 cm? (*Risposta*: $x = 1 \vee x = 3/5$)

l) Come potresti stabilire per quale valore di *x*
la diagonale è minima e per quale è massima?

ESERCITAZIONE 2
(le altre risposte sono a pag. 277)

**Riprendiamo la stessa situazione geometrica dell'Esercitazione 1:
triangolo rettangolo ABC con AB = 1 cm e AC = 2 cm, rettangolo inscritto ADEF, AD = *x*.
Questa volta punteremo la nostra attenzione sull'area** anziché sul perimetro.

a) Che valore attribuiremo all'area del rettangolo degenere che si ottiene per $x = 0$?

b) Stessa domanda per $x = 1$.

c) Se facciamo variare *x* da 0 fino a 1, l'area di ADEF che variazione subisce?

d) E' possibile stabilire quali sono i valori minimo e massimo che l'area di ADEF può assumere?

e) Esprimi l'area di ADEF in funzione di *x*. (*Risposta*: $y = \mathrm{S}(x) = 2x(1 - x)$)

f) Fai un grafico di $y = \mathrm{S}(x)$: otterrai un arco di parabola.
L'osservazione del grafico conferma la tua risposta al punto d)?

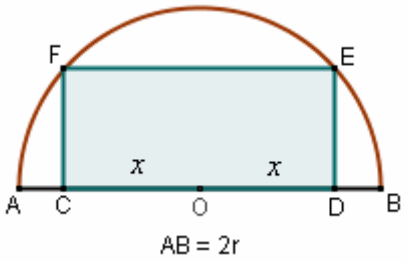
g) Se ti chiedo per quali valori di *x* l'area vale $\mathrm{cm}^2\ 1/3$,
tu, pensando al problema geometrico, quanti valori ti aspetti?
L'osservazione del grafico conferma la tua risposta?

h) Risolvi algebricamente l'equazione $\mathrm{S}(x) = 1/3$. (*Risposta*: $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$)

i) Se ti chiedo per quali valori di *x* l'area vale $\mathrm{cm}^2\ 2$, quanti valori ti aspetti?

j) Conferma algebricamente la risposta al punto precedente,
risolvendo l'equazione di 2° grado $\mathrm{S}(x) = 2$.

ESERCITAZIONE 3
(le altre risposte sono a pag. 277)



Disegna un rettangolo CDEF inscritto in una semicirconferenza di centro 0 e diametro AB = 2r.

Indica la semibase OC = OD del rettangolo con *x*.

a) Esprimi il perimetro del rettangolo in funzione di *x*, con due metodi:
   - tracciando OF e applicando Pitagora;
   - tracciando FA, FB e applicando Euclide

(*Risposta*: $2\mathrm{p}(x) = 4x + 2\sqrt{\mathrm{r}^2 - x^2}$)

b) Per quali valori di *x* il perimetro del rettangolo misura 4r? (*Risposta* : $x = \mathrm{r},\ x = \frac{3}{5}\mathrm{r}$)

c) Per quali valori di *x* il perimetro del rettangolo misura 3r? (*Risposta* : $x = \frac{6-\sqrt{11}}{10}\mathrm{r}$)

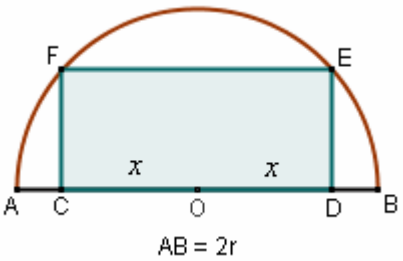
d) Come degenera la figura se $x = 0$
e quanto misura, in questo caso, il perimetro del "rettangolo degenere" ?

e) Come degenera la figura se $x = r$
e quanto misura, in questo caso, il perimetro del "rettangolo degenere" ?

f) Qual è il valore di *x* per cui si ottiene il rettangolo di perimetro minimo?
Quanto misura tale perimetro minimo?

g) Qual è il valore di *x* per cui si ottiene il rettangolo di perimetro massimo?
Puoi rispondere a questa domanda tracciando, al computer, il grafico della funzione $y = 2\mathrm{p}(x)$ (poni $\mathrm{r} = 1$).
Quanto misura tale perimetro massimo?

ESERCITAZIONE 4
(le altre risposte sono a pag. 277)



Come nella precedente Esercitazione 3, si considera un rettangolo CDEF inscritto in una semicirconferenza di centro 0 e diametro AB = 2r .

Si indica la semibase OC = OD del rettangolo con *x*.

a) Esprimi l'area del rettangolo in funzione di *x*. (*Risposta*: $\mathrm{S}(x) = 2x\sqrt{\mathrm{r}^2 - x^2}$)

b) Per quali valori di *x* l'area del rettangolo misura r^2 ? (*Risposta*: $x = \frac{\mathrm{r}\sqrt{2}}{2}$)

c) Per quali valori di *x* l'area del rettangolo misura $\frac{24}{25}\mathrm{r}^2$? (*Risposta*: $x = \frac{3}{5}\mathrm{r} \vee x = \frac{4}{5}\mathrm{r}$)

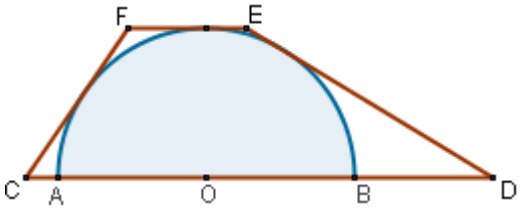
d) Come degenera la figura se $x = 0$? Quanto misura l'area del "rettangolo degenere" ?

e) Come degenera la figura se $x = \mathrm{r}$? Quanto misura l'area del "rettangolo degenere" ?

f) Qual è il valore di *x* per cui si ottiene il rettangolo di area minima?
Quanto misura tale area minima?

g) Qual è il valore di *x* per cui si ottiene il rettangolo di area massima?
Puoi rispondere a questa domanda tracciando, al computer, il grafico della funzione $y = \mathrm{S}(x)$ (poni $\mathrm{r} = 1$).
Quanto misura tale area massima?

ESERCITAZIONE 5
(le altre risposte sono a pag. 277)



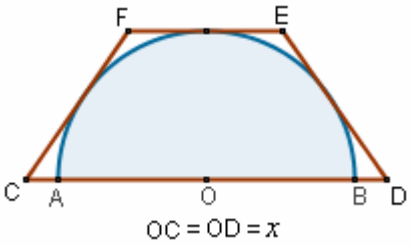
Un trapezio si dice "circoscritto ad una semicirconferenza" se:

- la sua base maggiore sta sulla retta del diametro;
- lati obliqui e base minore sono tangenti alla semicirconferenza (vedi figura).

a) Dimostra il
TEOREMA: ***in un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza, la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui.***
(Indicazione: congiungi il centro con gli estremi della base minore e dimostra che due certi triangoli così ottenuti sono isosceli).

b) A partire dal teorema precedente, giustifica il
COROLLARIO: ***in un trapezio ISOSCELE circoscritto ad una semicirconferenza, il lato obliquo è metà della base maggiore.***

**Considera ora un trapezio ISOSCELE CDEF,
di base maggiore CD,
circoscritto ad una semicirconferenza
di diametro noto AB = 2r .**



c) Esprimi il perimetro 2p di CDEF
in funzione della lunghezza x della semibase maggiore OD.
Risposta: $2p = 6x - 2\sqrt{x^2 - r^2}$

d) Determina la lunghezza x della semibase maggiore in modo che il perimetro del trapezio misuri $6r$.
Risposta: $x = \frac{5}{4}r \vee x = r$ (soluzione degenere)

e) Esiste, fra tutti gli infiniti trapezi isosceli circoscrivibili ad una semicirconferenza di raggio r, un trapezio di perimetro massimo?

f) … e un trapezio di perimetro minimo?

g) Posto $y = f(x)$ = perimetro del trapezio di semibase magg. x, circoscritto ad una semicirconf. di raggio r, traccia al computer il grafico della funzione $y = f(x)$ (supponendo $r = 1$).
L'osservazione del grafico ti consentirà di verificare se le tue risposte ai quesiti e, f sono corrette.

ESERCITAZIONE 6
(le altre risposte sono a pag. 277)

a) **Considera, come nell'Esercitazione 5,
un trapezio isoscele CDEF circoscritto ad una semicirconferenza di diametro noto AB = 2r ,
ed esprimine l'area S in funzione della lunghezza x della semibase maggiore**.
Risposta: $S = r\left(2x - \sqrt{x^2 - r^2}\right)$

b) Determina x in modo che l'area del trapezio misuri $\frac{7}{4}r^2$ (*Risposta:* $x = \frac{13}{12}r \vee x = \frac{5}{4}r$)

c) Esiste, fra tutti gli infiniti trapezi isosceli circoscrivibili ad una semicirconferenza di raggio r, un trapezio di area massima?

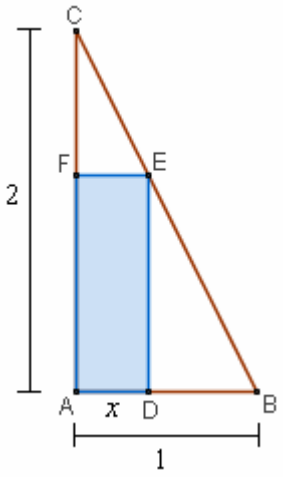
d) ... e un trapezio di area minima?

e) Posto $y = g(x)$ = area del trapezio di semibase maggiore x, circoscritto ad una semicirconf. di raggio r, traccia al computer il grafico della funzione $y = g(x)$ (supponendo $r = 1$).
Verifica la correttezza delle risposte date ai precedenti punti c, d.
Il trapezio di area minima è lo stesso trapezio che (esercitazione precedente) aveva perimetro minimo?

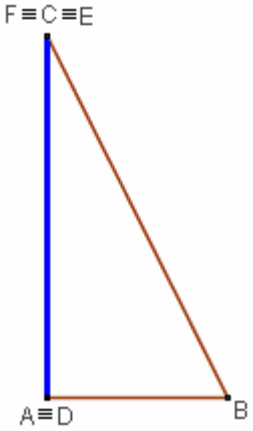
Svolgimento
ESERCITAZIONE 1

In un triangolo ABC, rettangolo in A,
con AB = 1 cm e AC = 2 cm ,
è inscritto un rettangolo ADEF
(con D su AB, E su BC, F su AC).

Poniamo AD = *x* .



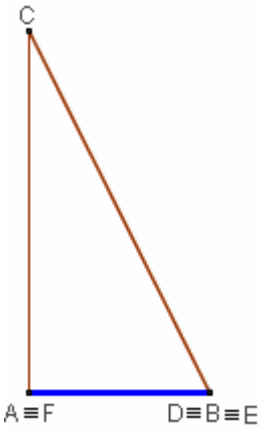
a) Come degenera la figura per $x = 0$?
Disegna la figura degenere.
Che valore attribuiremo
al perimetro di questo rettangolo degenere?



Per $x = 0$
il rettangolo si riduce
ad una coppia di
segmenti sovrapposti.

In questo caso "degenere",
in cui AD = FE = 0
e AF = DE = 2 ,
il perimetro
del rettangolo vale
$2p(ADEF) = 0+0+2+2 =$
$= \mathbf{4\ cm}$

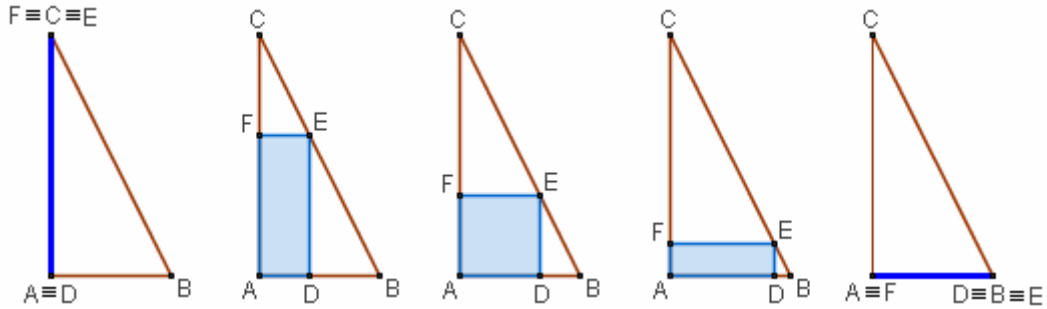
b) Stesse domande per $x = 1$.



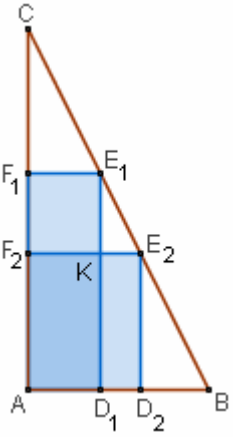
Anche per $x = 1$
il rettangolo si riduce
ad una coppia di
segmenti sovrapposti.

In questo caso "degenere",
in cui AD = FE = 1
e AF = DE = 0 ,
il perimetro
del rettangolo vale
$2p(ADEF) = 1+1+0+0 =$
$= \mathbf{2\ cm}$

c) Se facciamo variare *x* da 0 fino a 1, il perimetro di ADEF aumenta oppure diminuisce?



Sembra diminuire sempre …
Ce ne convinciamo con sicurezza
se osserviamo che
ad ogni nuovo "fotogramma"
della sequenza,
le due altezze diminuiscono
PIU' di quanto nel frattempo
le due basi aumentino.



$KE_1 > KE_2$

Ma nel passaggio
da $AD_1E_1F_1$ a $AD_2E_2F_2$,

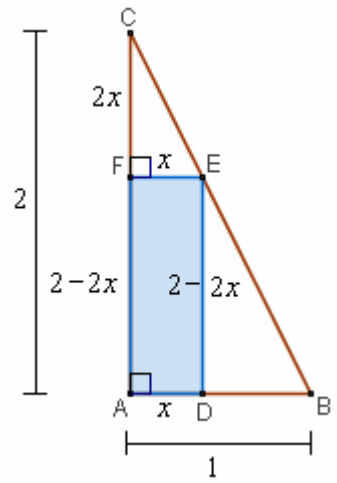
KE_1 rappresenta la diminuzione
di ciascuna delle due altezze

KE_2 rappresenta l'aumento
di ciascuna delle due basi

d) In base alle considerazioni svolte al precedente punto c), sei in grado di stabilire quali sono il valore minimo e il valore massimo che il perimetro di ADEF può assumere?

Se il perimetro del rettangolo diminuisce sempre, al variare di x da 0 a 1, allora
Il valore massimo del perimetro si ha con $x = 0$ ($2p = 4$ cm) e il valore minimo con $x = 1$ ($2p = 2$ cm)

e) Esprimi il perimetro di ADEF in funzione di x.



FEC ~ ABC (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

quindi, così come $AC = 2AB$,
sarà anche $FC = 2FE = 2x$.

Perciò

$AF = DE = 2 - 2x$

$\boxed{2p(ADEF)} = 2AD + 2AF =$

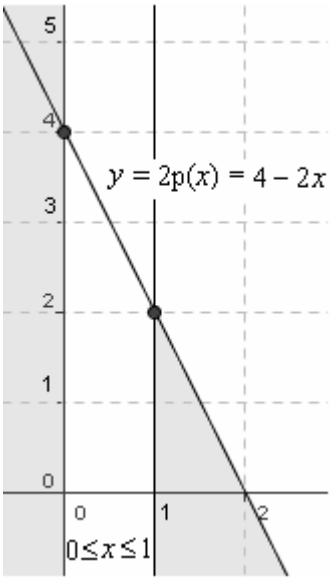
$= 2x + 2(2 - 2x) = 2x + 4 - 4x = \boxed{4 - 2x}$

f) Fai un grafico della funzione $y = 2p(x)$. L'osservazione del grafico va d'accordo con la risposta data al punto d)?

Tracciamo il grafico della funzione $y = 4 - 2x$ la quale, limitatamente all'intervallo $0 \le x \le 1$, esprime il perimetro del rettangolo ADEF.

Si tratta di una funzione "lineare" (= di 1° grado) $y = mx + q$, con coefficiente angolare $m = -2$ e ordinata all'origine $q = 4$.

Il grafico è coerente con le nostre precedenti risposte: al variare di x da 0 a 1, la y corrispondente (che fornisce il valore del perimetro) diminuisce sempre, passando dal valore massimo $y = 4$ (con $x = 0$) al valore minimo $y = 2$ (con $x = 1$).



g) Per quale valore di x il perimetro di ADEF misura cm 3?

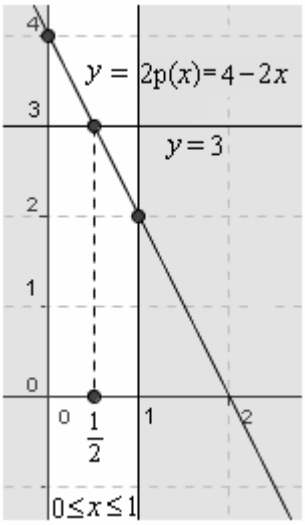
Basta porre $4 - 2x = 3$ e risolvere l'equazione:

$-2x = -1; \quad x = \frac{1}{2}$

h) Risolvi graficamente l'equazione $2p(x)=3$

$\underbrace{4 - 2x}_{1° \text{ m.}} = \underbrace{3}_{2° \text{ m.}}$

Il 2° membro è la funzione costante $y = 3$, il cui grafico è una retta parallela all'asse x.

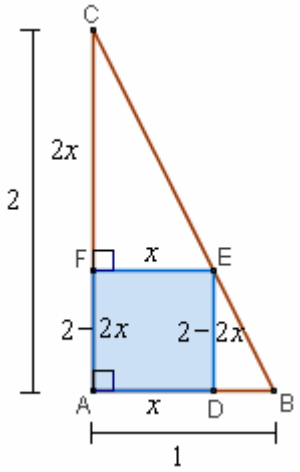


i) Per quale valore di x il rettangolo ADEF è un quadrato?

Possiamo impostare l'equazione

$\overbrace{2-2x}^{AF} = \overbrace{x}^{FE}$;

otteniamo $-3x = -2$, $\boxed{x = \frac{2}{3}}$



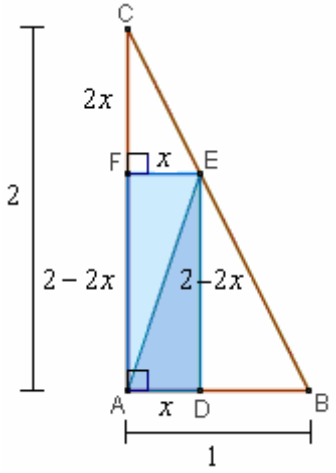
In alternativa, si poteva porre

$\overbrace{4-2x}^{2p} = 4x$,

da cui $-6x = -4$, $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

j) Esprimi in funzione di x la diagonale del rettangolo ADEF

$$\boxed{AE =} \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{x^2 + (2-2x)^2} =$$
$$= \sqrt{x^2 + 4 - 8x + 4x^2} = \boxed{\sqrt{5x^2 - 8x + 4}}$$



k) Per quale valore di x tale diagonale misura 1 cm?

$\boxed{\sqrt{5x^2 - 8x + 4} = 1}$ $\quad 5x^2 - 8x + 4 = 1; \quad 5x^2 - 8x + 3 = 0$

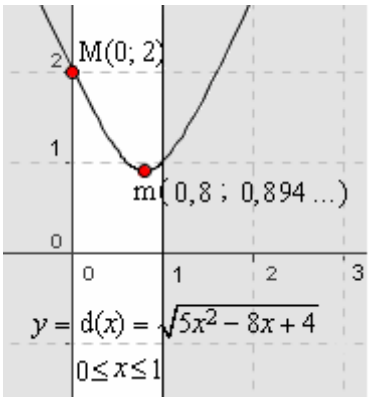
$\boxed{x = 1 \ \vee \ x = 3/5}$ (entrambe accettabili; la 1ª è "sol. degenere")

l) Come potresti stabilire per quale valore di x la diagonale è minima e per quale è massima?

Si può tracciare al computer (vedi figura qui a destra) il grafico della funzione $y = d(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 4}$, che esprime la diagonale, e osservare questo grafico, oppure, se il software lo consente, servirsi del comando per la ricerca degli "estremi" (massimi o minimi).

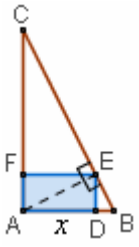
D'altronde, si capisce che il radicale $\sqrt{5x^2 - 8x + 4}$ assume il suo valore minimo quando è minimo il suo radicando $5x^2 - 8x + 4$.

E qual è l'ascissa del vertice della parabola $y = 5x^2 - 8x + 4$? …



Si può procedere anche *per pura via geometrica*.

♪ Si capisce che la diagonale è minima nella situazione in cui il punto E (che sta su BC) ha la minima distanza dal punto A, ossia quando la diagonale AE coincide con l'altezza relativa all'ipotenusa! Se calcoli tale altezza vedrai che vale $2/\sqrt{5} \approx 0{,}894$ e che il valore corrispondente di x è $4/5 = 0{,}8$, in pieno accordo col grafico.



♫ Allo stesso modo, è evidente che il punto del segmento BC con la massima distanza da A è l'estremo C, per il quale la distanza da A (= diag. del rettangolo "degenere") vale 2, e che corrisponde al valore $x = 0$.

RISPOSTE AI QUESITI DELLE ESERCITAZIONI DA 2 A 6

2) a) S = 0 b) S = 0 c) a partire dal valore 0 aumenta, tocca un massimo, poi diminuisce tornando a 0
d) m = minimo = 0 ; per il massimo M non è così facile, lo sarà dopo aver fatto il grafico di cui al punto f): si vedrà che M = 1/2 (ordinata del vertice della parabola) g) 2 valori i) nessuno j) impossibile

3) d) 2p = 2r e) 2p = 4r f) $x = 0$, $2p_{min} = 2r$ g) x = 0,9r circa, $2p_{MAX}$ = 4,5r circa

4) d) S = 0 e) S = 0 f) area minima S = 0 per $x = 0$ oppure $x = r$ g) x = 0,7r circa, $S_{MAX} = r^2$

5) e) no, dando a x valori molto alti il perimetro assume valori alti a piacere
f) sì, è quello che si ottiene per $x \approx 1{,}06\,r$, e il suo perimetro è $\approx 5{,}66\,r$

6) c) no d) sì e) no, non è lo stesso. L'area minima si ha per $x \approx 1{,}15r$ ed è $\approx 1{,}73\,r^2$

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

1. COSA SI INTENDE PER "TRASFORMAZIONE PIANA"

Si dice "**trasformazione geometrica piana**", o brevemente "trasformazione piana",
una corrispondenza biunivoca del piano con sé stesso, ossia una corrispondenza nella quale

- ♪ **ad ogni punto del piano corrisponde uno e un solo altro punto del piano**
- ♫ **e, viceversa, ogni punto è il corrispondente di uno e un solo altro punto.**

❑ **Esempio 1**

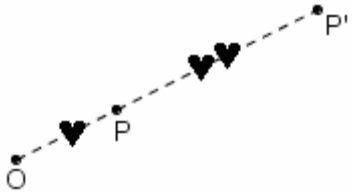
Definiremo ora una corrispondenza fra punti del piano, che verrà chiamata "omotetìa"
(nel seguito ometteremo l'accento).

Un'omotetia è caratterizzata da un "**centro di omotetia**" e da un "**rapporto di omotetia**".

Vediamo di cosa si tratta, considerando, per meglio fissare le idee, un caso particolare:
supporremo che il rapporto di omotetia, che indicheremo con *k*, sia uguale a 3.

Sia O un punto fissato del piano.
L'omotetia di centro O e rapporto *k*=3
fa corrispondere (vedi figura)
ad ogni punto P del piano
quel punto P' del piano, tale che:

I. **P' sta sulla semiretta OP;**
II. **OP' = 3OP**



E' evidente che
in questo modo risulta definita una "corrispondenza biunivoca del piano con sé stesso":
infatti

- ♪ ad ogni punto del piano resta associato uno ed un solo altro punto;
- ♫ e viceversa, ogni punto del piano potrà essere "visto" come il corrispondente di uno ed un sol punto.

Quindi siamo in presenza di una "trasformazione geometrica piana".

Diremo che

P' è "il corrispondente" di P, o anche "l'immagine" di P,
attraverso la trasformazione considerata

e, **se indichiamo tale trasformazione con *t***, potremo scrivere

P' = *t*(P) (leggi: " P' è uguale a *t* di P ")

oppure

$\mathbf{P} \xrightarrow{t} \mathbf{P'}$ (leggi: " *t* fa passare da P a P' ", oppure: " P' è l'immagine di P attraverso la *t* ")

Il punto P, a sua volta, verrà detto "la controimmagine" di P'.

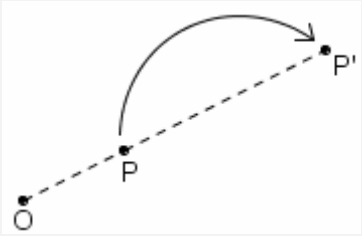
Quando si vuole affermare che *t* fa corrispondere al punto P, il punto P',
si adopera spesso una locuzione suggestiva:
si dice che ***t* "muta" P in P'**, oppure **"trasforma" P in P'**.

Dal punto di vista psicologico, ciò equivale a:

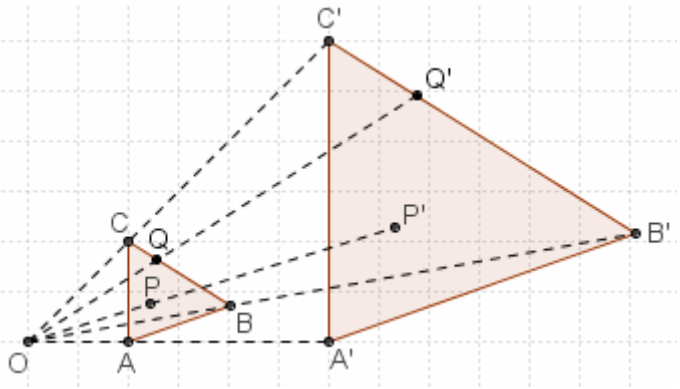
a) partire dal punto P
b) applicare la funzione *t*
c) e poi andare a considerare l'immagine P' "dimenticandosi" del punto P iniziale.

Nella nostra mente, ora, non c'è più P, c'è invece P':
P "è diventato" P', "si è trasformato in" P'…

La questione, però, è *soltanto psicologica*.
In realtà, il punto P è rimasto al suo posto,
e abbiamo semplicemente stabilito di *fargli corrispondere* P',
come se una freccia partisse da P e avesse la sua punta in P'.



Prendiamo ora un triangolo ABC,
disegniamo innanzitutto
le immagini A', B', C' dei suoi tre vertici
attraverso la solita omotetia
di centro O e rapporto 3,
e costruiamo la figura costituita da tutti i punti
che corrispondono ai punti *del lato BC*
(brevemente: la figura costituita da
tutte le immagini dei punti di BC).



Si constata, e si potrebbe dimostrare in modo rigoroso, che le immagini dei punti del segmento BC costituiscono, nel loro insieme, ancora un segmento, e precisamente il segmento B'C', ossia quello avente per estremi il punto B' (che è l'immagine di B) e il punto C' (che è l'immagine di C).

Si dice, brevemente, che " l'immagine del segmento BC è il segmento B'C' ", e si può scrivere

$$t(BC) = B'C'.$$

Analogamente,
l'immagine del segmento AB non è altro che il segmento A'B',
e l'immagine del segmento AC coincide col segmento A'C'.
Insomma, la nostra omotetia **"trasforma segmenti in segmenti"**!

Prendendo poi un punto P che sia interno al triangolo ABC,
la sua immagine P' starà internamente al triangolo A'B'C',
e complessivamente
l'insieme dei punti interni ad ABC risulta avere come immagine l'insieme dei punti interni ad A'B'C'.

In definitiva, si vede che questa corrispondenza **"trasforma" il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'**.

Si potrebbe provare che il "nuovo" triangolo è *simile* al "vecchio",
con perimetro triplo e area che è 9 volte l'area del triangolo iniziale.

Per significare che
" l'insieme delle immagini dei punti del triangolo ABC, costituisce il triangolo A'B'C' "
si può scrivere

$$t(ABC) = A'B'C'$$

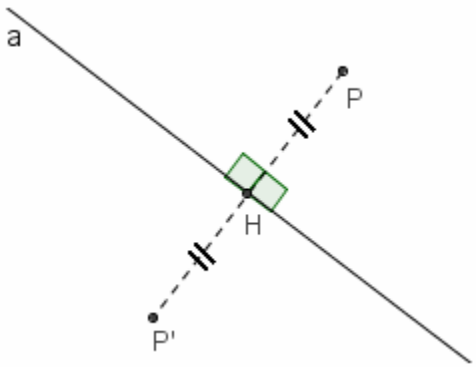
e dire, appunto, che la *t* «trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'».

Cliccando su questa freccia ⇨,
potrai vedere una bella figura dinamica GEOGEBRA
(*grazie* al creatore di questo fantastico *freeware*, l'austriaco Marcus Hohenwarter!)
che mostra all'opera un'omotetia il cui centro e il cui rapporto possono essere fissati dall'utente.
E' possibile pure scegliere di far sì che il rapporto di omotetia k sia <0.
Delle omotetie con rapporto negativo, comunque, ci occuperemo più avanti.

❑ Esempio 2

Un altro bell'esempio di trasformazione piana è la "**simmetria assiale**".

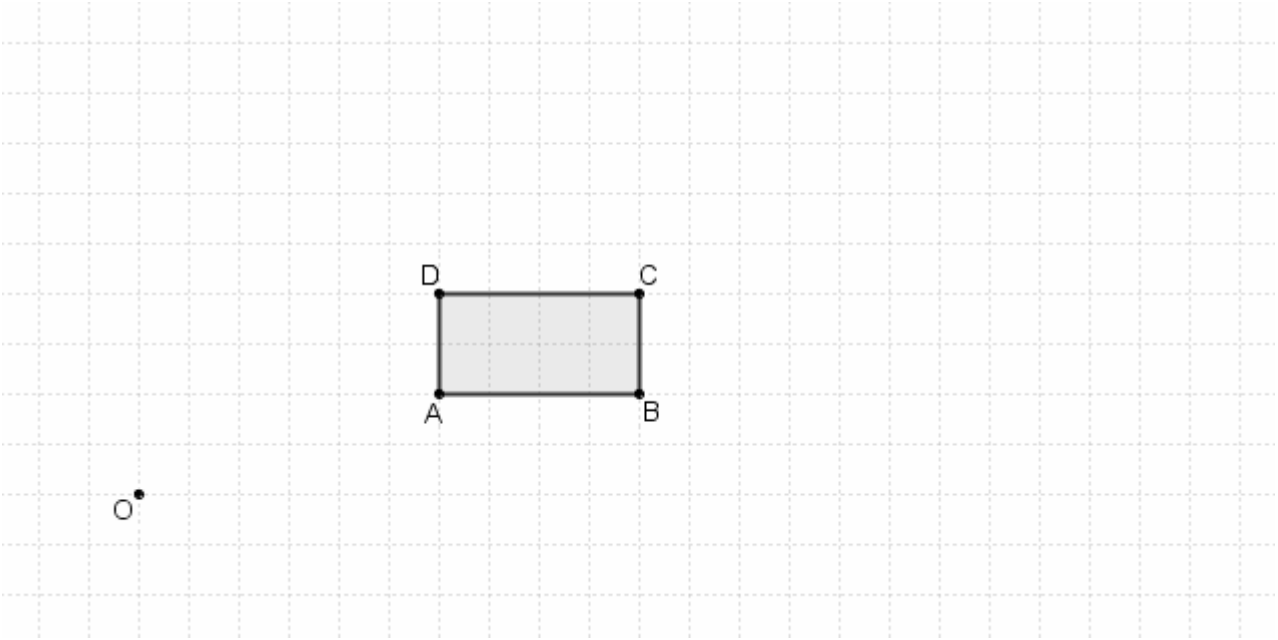
Sia a una retta fissata su di un piano.
Si dice "simmetria assiale di asse a"
quella corrispondenza (vedi figura)
che ad ogni punto P del piano
fa corrispondere
quell'altro punto P'
ottenuto tracciando da P
la perpendicolare PH alla retta a,
e prolungando il segmento PH
di un segmento HP' = PH .



Cliccando su questa freccia ⇨, ecco una figura GEOGEBRA per vedere all'opera una simmetria assiale.
In particolare, trascinando col mouse il punto Q della figura, che è vincolato a restare sul contorno di ABC,
constaterai come anche in questo caso la trasformazione "muti segmenti in segmenti".

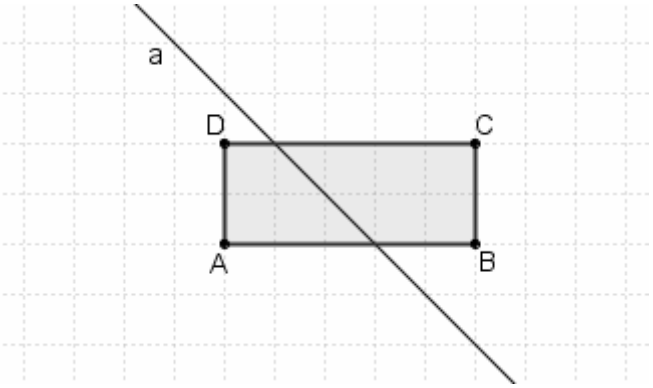
ESERCIZI

1) Considera l'omotetia avente per centro il punto O della figura sottostante, e rapporto $k = 1/2$.
   a) Determina le immagini A', B', C', D' dei vertici del rettangolo ABCD.
   b) Qual è l'immagine di O nella trasformazione?
   c) Determina le *contro*immagini A*, B*, C*, D* dei vertici di ABCD.



Vai a vedere la soluzione ⇨

2) Nella figura sotto riportata trovi un rettangolo ABCD e una retta a.
   a) Disegna le immagini A', B', C', D', e le controimmagini A*, B*, C*, D*, dei vertici di ABCD, nella simmetria assiale di asse a.
   b) Quali sono, qui, i punti del piano che coincidono con la propria immagine (punti "uniti")?

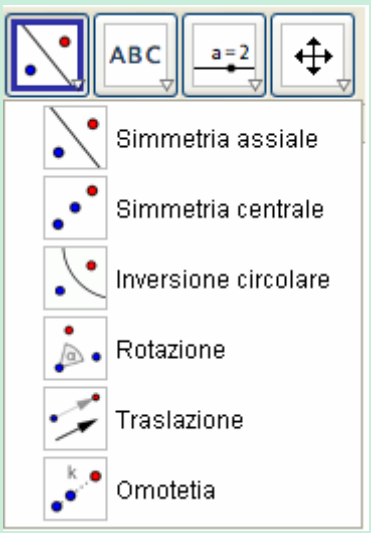


Vai a vedere la soluzione ⇨

Semplici trasformazioni geometriche con GEOGEBRA

Fermo restando che innanzitutto
devi saper svolgere gli esercizi
su *carta*,
con matita, righello e squadra,
il freeware GeoGebra permette,
fra le tantissime cose,
anche di sottoporre una figura
a qualche trasformazione geometrica fondamentale.

L'icona che serve a questo scopo
è facilmente riconoscibile,
e il messaggio di HELP
che si può far comparire
con la pressione di F1 sulla tastiera
ti spiega come fare.

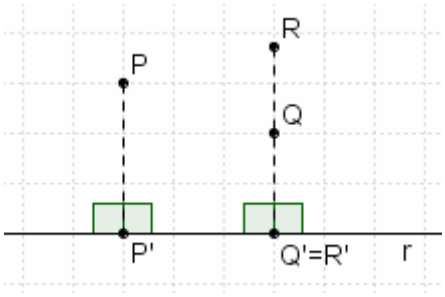


2. UN CONTROESEMPIO

Controesempio: una corrispondenza fra punti del piano, che non sia una "trasformazione".

Se consideriamo su di un piano una retta r fissata
e facciamo corrispondere ad ogni punto P del piano
la sua proiezione P' su r,
questa corrispondenza NON avrà il diritto di essere chiamata
"*trasformazione* piana", per il fatto che NON E' BIUNIVOCA !
Se è infatti vero che ad ogni punto del piano corrisponde
uno ed un solo altro punto, non vale invece il viceversa:
infatti, preso un punto del piano, esso avrà:

- *infinite* controimmagini, qualora appartenga alla retta r;
- *nessuna* controimmagine, se non appartiene ad r.



3. L'IMMAGINE DI UN SEGMENTO ATTRAVERSO UNA TRASFORMAZIONE PIANA

Un dubbio.

Ma … in una trasformazione piana, l'immagine di un segmento è *sempre* ancora un segmento?

Negli esempi precedenti (una omotetia di rapporto 3; una simmetria assiale)
abbiamo visto (empiricamente, senza ancora una dimostrazione rigorosa)
che l'immagine di un segmento risultava essere ancora un segmento.

In effetti, **le trasformazioni più "comuni" sono quelle che mutano segmenti in segmenti.**

Esistono però anche delle trasformazioni che NON si comportano in questo modo.
Per fare un esempio, consideriamo un piano nel quale sia stato fissato un riferimento cartesiano.
Possiamo pensare alla corrispondenza $P \to P'$ definita (utilizzando le coordinate) nel modo seguente:

$$P(x,y) \xrightarrow{\ t\ } P'(x',y'),\ \ con\ \begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{y^3}{10} \end{cases}$$

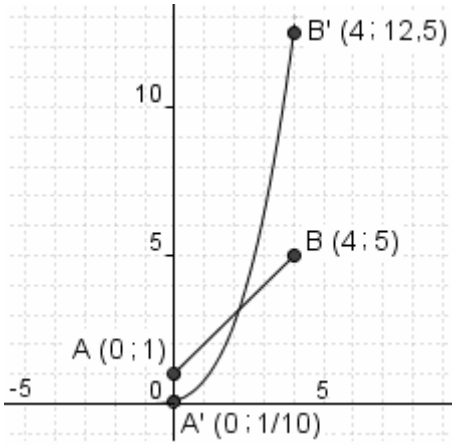
La corrispondenza è biunivoca, in quanto:

- non solo ad ogni punto (x,y) corrisponde uno ed un solo altro punto (x',y')
- ma è anche vero che ogni punto del piano risulta essere il corrispondente di uno ed un solo altro punto, come si può verificare invertendo le equazioni della trasformazione:

  $$\begin{cases} x = x' \\ y = \sqrt[3]{10y'} \end{cases}$$

  Di qui si vede che per ogni punto del piano, esiste ed è unica la rispettiva controimmagine.

Se ora consideriamo
ad esempio
il segmento
di estremi
A(0,1) e B(4,5)
e andiamo a disegnare
le immagini dei suoi punti,
ci rendiamo conto
che tali immagini
non costituiscono un segmento,
bensì un arco di curva!



NOTA

Osserviamo, per inciso, che se avessimo preso invece la corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}$
questa NON avrebbe individuato una "trasformazione geometrica", perché non sarebbe stata biunivoca.
Infatti, provando ad invertire, si sarebbe ottenuto

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \pm\sqrt{y'} \end{cases}$$

Ora, la radice *quadrata* preceduta dal *doppio segno* ci dice che:
i punti con ordinata negativa non hanno controimmagine;
quelli con ordinata positiva ce l'hanno ma non è unica.

4. TRASFORMAZIONI PIANE MOLTO SPECIALI: LE AFFINITA' E, IN PARTICOLARE, LE ISOMETRIE

Si dicono AFFINITA' quelle trasformazioni che
MUTANO RETTE IN RETTE, CONSERVANDO L'ORDINE DEI PUNTI ALLINEATI
(= se A, B, C sono allineati, con B compreso fra A e C,
dette A', B', C' le rispettive immagini,
anche A', B', C' sono certamente allineati, con B' compreso fra A' e C').

Dalla definizione si trae immediatamente che
un'affinità muta sempre
una semiretta in un'altra semiretta,
e un segmento in un altro segmento.

Altra conseguenza della definizione è che
l'immagine, attraverso un'affinità, di un triangolo (compresi i punti interni di questo)
è sempre ancora un triangolo;
questo enunciato, vero per tutte le affinità, è un po' noioso da provare e noi ne presenteremo la dimostrazione nel successivo paragrafo 5, riferendoci al caso particolare delle "isometrie" (tuttavia, si può verificare che gli stessi ragionamenti lì utilizzati funzionerebbero perfettamente anche se estesi ad una affinità qualsiasi).

L'omotetia e la simmetria assiale sono due esempi di affinità
(noi per ora l'abbiamo constatato empiricamente; il "Teorema fondamentale sulle isometrie" qui sotto riportato, insieme con lo specchietto del successivo paragrafo 6, consente di dimostrarlo per la simmetria assiale, mentre per l'omotetia la dimostrazione è una conseguenza del contenuto dei successivi paragrafi 15 e 16).

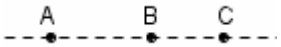
Si dicono ISOMETRIE quelle trasformazioni che "CONSERVANO LE DISTANZE":
cioè, una trasformazione *t* è un'isometria se e solo se,
per ogni coppia di punti A, B,
indicate con A', B' le rispettive immagini, si ha sempre
$$\mathbf{A'B' = AB}.$$

La simmetria assiale è un'isometria (immediato da constatare, dimostrazione nel successivo par. 6), **l'omotetia non lo è**.

TEOREMA FONDAMENTALE SULLE ISOMETRIE
OGNI ISOMETRIA E' ANCHE UN'AFFINITA', ossia:
se una trasformazione piana è un'isometria (= "conserva le distanze"),
allora certamente quella trasformazione piana muta rette in rette,
conservando l'ordine dei punti allineati
(e, di conseguenza, muta semirette in semirette e segmenti in segmenti).

Dimostrazione

Prendiamo tre punti A, B, C ALLINEATI
(= giacenti su di una stessa retta), con B compreso fra A e C.

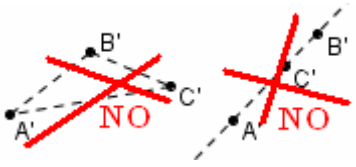


Se t è un'isometria, posto $A' = t(A)$, $B' = t(B)$, $C' = t(C)$,
risulterà $\mathbf{A'B' = AB}$, $\mathbf{A'C' = AC}$, $\mathbf{B'C' = BC}$.

Essendo allora $\mathbf{AB + BC = AC}$, sarà anche $\boxed{\mathbf{A'B' + B'C' = A'C'}}$.

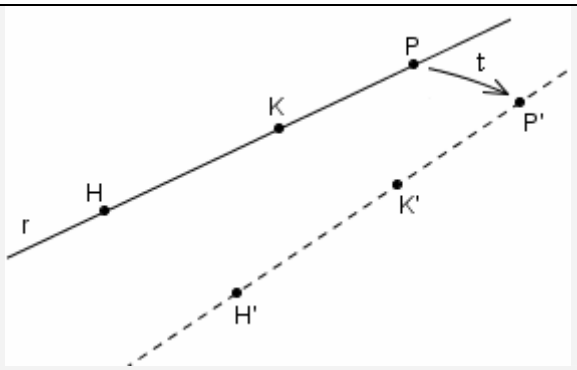
Ma **quest'ultima relazione può sussistere soltanto se i tre punti A', B', C' sono a loro volta fra loro allineati, con B' compreso fra A' e C'**.
Infatti

- se i tre punti *non* fossero allineati varrebbe invece la "disuguaglianza triangolare" $A'B' + B'C' > A'C'$
- mentre se A', B' e C' fossero allineati, ma con B' *non* compreso fra A' e C', varrebbe un'altra uguaglianza, ma non quella in questione.



Così la tesi è sostanzialmente dimostrata.
Infatti abbiamo fatto vedere che un'isometria muta sempre
una terna di punti allineati in un'altra terna di punti allineati, conservando l'ordine dei punti in gioco;
ma ora, data una retta r, qualche considerazione supplementare
(che esporremo qui di seguito, nel riquadro) consentirà di provare che la sua immagine è ancora una retta.

Infatti, fissati a piacere su r due punti H e K ,
consideriamo le rispettive immagini H', K' :
un qualsivoglia punto P della retta r
verrà certamente trasformato,
in virtù di quanto già dimostrato,
in un punto allineato con H' e K',
quindi in un punto facente parte della retta H'K' .

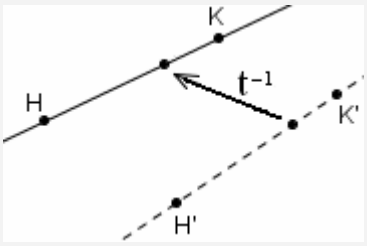


Con ciò abbiamo provato che
le immagini dei punti di r =HK,
stanno tutte sulla retta H'K' .

Si potrebbe a questo punto ritenere la dimostrazione conclusa…
… invece, se ci pensi bene, non è così!
In effetti, resta ancora da dimostrare
che la retta H'K' è completamente "riempita" dalle immagini dei punti di r,
ossia che OGNI punto di tale retta è l'immagine di un punto di r.
Coraggio dunque!

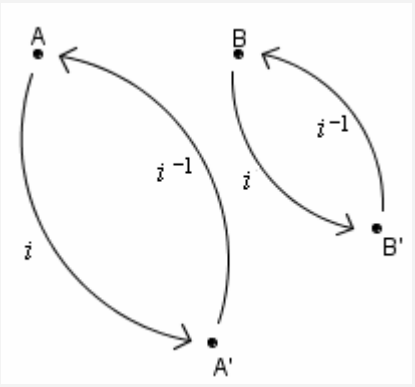
Al nostro scopo, formuliamo innanzitutto un'ovvia osservazione preliminare:
la corrispondenza inversa di un'isometria è ancora un'isometria (NOTA).

Ma allora, ritorniamo alla nostra coppia di rette r = HK, H'K' .
Fin qui, abbiamo dimostrato che l'immagine di ciascun punto della retta HK, sta sulla H'K' :
e ciò prova che l'insieme delle immagini dei punti di HK è un SOTTOINSIEME della H'K' .
Se adesso pensiamo all'isometria inversa della *t*, allo stesso modo
l'insieme delle immagini dei punti della retta H'K' attraverso tale trasformazione inversa t^{-1}
andrà a costituire un sottoinsieme della retta HK.
Dunque, preso un *qualsivoglia* punto della H'K' ,
la sua immagine attraverso l'isometria inversa della *t*
sarà un certo punto, *appartenente alla HK*;
ciò significa che la controimmagine, rispetto alla *t*,
di quel punto arbitrario di H'K' , *sta su HK*:
ma allora *OGNI punto della H'K'*
è immagine, attraverso la t, di un punto della HK.



E con ciò, la dimostrazione del Teorema Fondamentale è finalmente completata.

NOTA
Detta i una qualsivoglia isometria, consideriamo
la corrispondenza inversa, che indicheremo con i^{-1}.
La i^{-1}, ossia la corrispondenza che, rispetto alla i, fa "tornare indietro"
(= fa corrispondere ad un punto del piano,
quello che ne era la CONTROimmagine attraverso la i)
è anch'essa, come la i, una corrispondenza biunivoca
(anziché dalle asole ai bottoni, fa passare dai bottoni alle asole!)
e conserva le distanze: infatti, detti A', B' due generici punti del piano,
e dette A, B le loro immagini attraverso la i^{-1} (ossia, le loro
controimmagini attraverso la i) avremo AB = A'B' , per il fatto che
A' e B' sono le immagini di A e B attraverso la i, che è un'isometria.



UNA PUNTUALIZZAZIONE IMPORTANTE

Quando abbiamo dato la definizione di isometria, che ti invito a rileggere,
abbiamo scritto che in un'isometria, per qualsiasi coppia di punti A, B, si ha sempre A'B' = AB .

Vorrei ora sottolineare un fatto:
con ciò, NON stavamo affatto dando per scontato che il segmento A'B' fosse l'immagine del segmento AB.

Voglio dire: A' era l'immagine di A, e B' era l'immagine di B, ma non era assolutamente sottinteso
che i punti interni al segmento AB avessero come immagini i punti interni del segmento A'B' .

Ma ora, **dopo aver dimostrato il Teorema Fondamentale, resta definitivamente stabilito che in una isometria un segmento viene sempre trasformato in un segmento.** Precisamente, in un segmento **uguale (= congruente, cioè sovrapponibile tramite un movimento rigido) a quello di partenza; e avente per estremi gli estremi del segmento di partenza.**

5. TEOREMI SULLE ISOMETRIE

1. In un'isometria a rette incidenti corrispondono rette incidenti, e a rette parallele corrispondono rette parallele.

2. In ogni isometria l'immagine di un triangolo è sempre ancora un triangolo, uguale (= congruente) a quello di partenza.

3. In ogni isometria ad un angolo corrisponde sempre un angolo, uguale a quello di partenza.

4. In ogni isometria ad un poligono corrisponde sempre un poligono, uguale a quello di partenza.

❑ **Dimostrazione del teorema 1**

- Siano a, b due rette incidenti, e a', b' le rispettive rette immagini attraverso un'isometria i (sappiamo che un'isometria è anche un'affinità, quindi l'immagine di una retta attraverso un'isometria è sempre ancora una retta). Detto W il punto di intersezione fra a e b, l'immagine W' di W dovrà appartenere tanto alla retta a' quanto alla retta b', le quali pertanto saranno anch'esse incidenti.
- Se invece a, b sono due rette parallele, le loro immagini a', b' dovranno pure essere parallele, perché se, per assurdo, avessero un punto in comune, la controimmagine di questo punto dovrebbe appartenere sia alla retta a che alla retta b, che quindi non sarebbero parallele, contro quanto supposto.

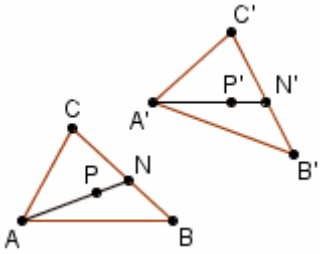
❑ **Dimostrazione del teorema 2**

Sia i un'isometria, e sia ABC un triangolo. Vogliamo innanzitutto dimostrare che l'insieme delle immagini dei punti di ABC costituisce ancora un triangolo; successivamente, faremo vedere che tale triangolo è uguale ad ABC.

Sia dunque: $A' = i(A),\ B' = i(B),\ C' = i(C)$. Poiché un'isometria muta segmenti in segmenti, l'insieme delle immagini dei punti del segmento AB andrà a costituire il segmento $A'B'$ (brevemente: l'immagine del segmento AB sarà il segmento $A'B'$), e analogamente per gli altri due lati. Insomma, $i(AB) = A'B',\ i(AC) = A'C',\ i(BC) = B'C'$: il "contorno" di ABC si muta nel "contorno" di $A'B'C'$.

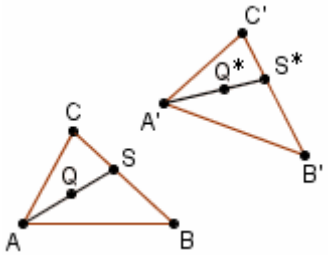
Occorre ora provare che ogni punto P interno ad ABC ha come immagine un punto P', che è interno ad $A'B'C'$**.**

Sia dunque P un punto interno ad ABC.
Sia N l'intersezione della semiretta AP col lato BC.
Il punto P appartiene al segmento AN.
Sia $N' = i(N)$. Il punto N' apparterrà a $B'C'$, perché questo segmento è costituito dalle immagini dei punti del segmento BC; ed N sta, appunto, su BC.
Ora il punto $P' = i(P)$ dovrà appartenere al segmento $A'N'$, ma quest'ultimo segmento è interno al triangolo $A'B'C'$; e ciò prova che P' è interno ad $A'B'C'$.



Per completare la dimostrazione, manca ancora un passaggio:
bisogna far vedere che la controimmagine di ogni punto interno ad $A'B'C'$ è interna ad ABC.
Sia dunque Q* un punto interno ad $A'B'C'$; indichiamo con Q la sua controimmagine.
Vogliamo far vedere che Q è interno ad ABC.

Chiamiamo S* l'intersezione della semiretta $A'Q^*$ col lato $B'C'$; sia S la controimmagine di S*.
Teniamo presente che il punto Q* appartiene al segmento $A'S^*$.
Il punto S dovrà appartenere a BC, perché quest'ultimo segmento è costituito dalle controimmagini dei punti del segmento $B'C'$, ed S* sta appunto su $B'C'$.
Consideriamo ora il segmento AS, che è interno al triangolo ABC: l'insieme delle immagini dei suoi punti va a costituire il segmento $A'S^*$; ma tra i punti di $A'S^*$ c'è anche Q*; quindi la controimmagine Q del punto Q* sta su AS, che è interno ad ABC (NOTA)



Tutto ciò prova che l'insieme delle immagini dei punti del triangolo ABC, va a costituire ancora un triangolo ($A'B'C'$).

Riguardo infine al fatto che $A'B'C'$ sia uguale ad ABC, ciò è conseguenza immediata del 3° Criterio di uguaglianza dei triangoli ($A'B' = AB,\ A'C' = AC,\ B'C' = BC$ per def. di isometria).
E con ciò la dimostrazione del teorema è completata.

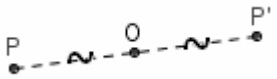
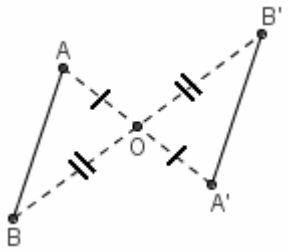
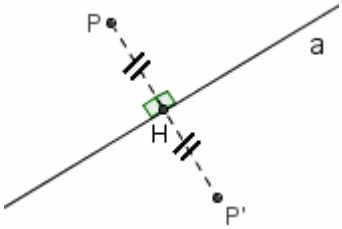
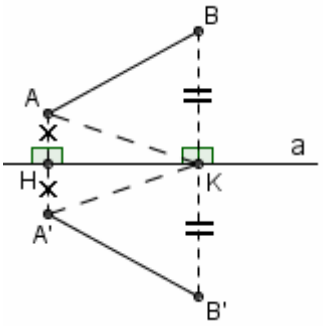
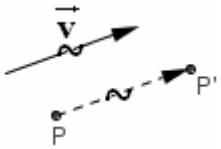
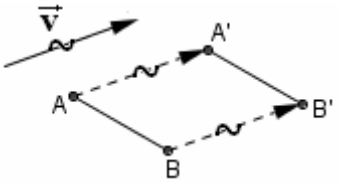
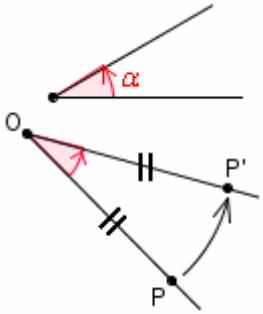
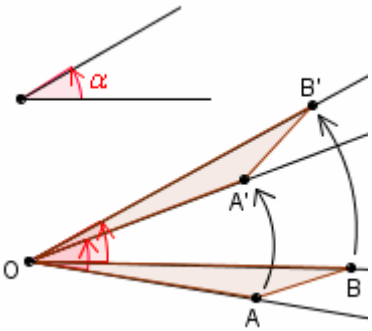
NOTA - Più brevemente, per far vedere che la controimmagine di ogni punto interno ad $A'B'C'$ è interna ad ABC, si sarebbe potuta chiamare in causa la corrispondenza inversa della i.
Come sappiamo, l'inversa di un'isometria è ancora una isometria; e per quanto già dimostrato sopra, siamo certi che le immagini, attraverso la i^{-1}, dei punti interni ad $A'B'C'$, sono interne ad ABC.
Quindi le controimmagini, attraverso la i, dei punti interni ad $A'B'C'$, sono interne ad ABC.

6. ISOMETRIE NOTEVOLI: SIMMETRIE, TRASLAZIONI, ROTAZIONI

Importanti trasformazioni piane sono le seguenti:

- la simmetria rispetto ad un punto (= **simmetria centrale**)
- la simmetria rispetto a una retta (= **simmetria assiale**)
- la **traslazione** di vettore $\vec{v}$
- la **rotazione** di centro O e angolo (orientato) α.

Lo specchietto successivo dimostra che queste trasformazioni sono tutte isometriche.

SIMMETRIA CENTRALE DI CENTRO O: $s_O : P \to P'$ tale che O sia il punto medio del segmento PP' 	E' UN'ISOMETRIA PERCHE' $OA'B' = OAB$ (1° Criterio) ↓ $A'B' = AB$	
SIMMETRIA ASSIALE DI ASSE a: $s_a : P \to P'$ tale che la retta a sia l'asse del segmento PP' 	E' UN'ISOMETRIA PERCHE' $A'HK = AHK$ (1° Criterio) ↓ $A'K = AK$ e $A'\hat{K}H = A\hat{K}H$ da cui $A'\hat{K}B' = A\hat{K}B$ (complementari di angoli uguali) ↓ A'B'K=ABK (1° Criterio) ↓ $A'B' = AB$	
TRASLAZIONE DI VETTORE $\vec{v}$: $\tau_{\vec{v}} : P \to P'$ tale che $PP'_{\text{orientato}} = \vec{v}$ 	E' UN'ISOMETRIA PERCHE' ABB'A' è un parallelogrammo (ha infatti i due lati opposti AA', BB' paralleli e uguali) ↓ $A'B' = AB$	
ROTAZIONE DI CENTRO O E ANGOLO ORIENTATO α: $\rho_{O,\alpha} : P \to P'$ tale che: 1) $P\hat{O}P' = \alpha$ 2) $OP' = OP$ 	E' UN'ISOMETRIA PERCHE' AOB=A'OB' in quanto $A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = \alpha$ e i due angoli $A\hat{O}B$, $A'\hat{O}B'$ sono la differenza (o, eventualmente, se la figura fosse diversa, la somma) fra questi due angoli uguali e uno stesso angolo ($B\hat{O}A'$) ↓ AOB=A'OB' (1° Criterio) ↓ $A'B' = AB$	 NOTA L'**angolo** α si considera convenzionalmente **positivo** per rotazioni in senso **ANTIORARIO**, negativo per rotazioni in senso ORARIO

7. ALTRE ISOMETRIE. RELAZIONE FRA ISOMETRIE E MOVIMENTI RIGIDI

a)

Prima di tutto, **si ottiene sempre un'isometria quando si "compongono" (= si applicano successivamente) due qualsivoglia isometrie**.

Infatti è immediato dimostrare che

la composizione di due isometrie è ancora un'isometria.

Dimostrazione

Presi due punti A, B, e indicate:

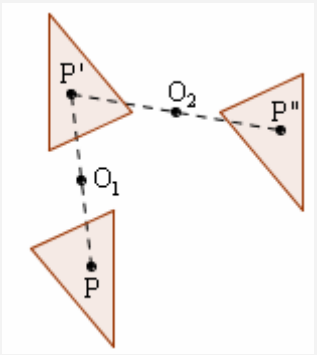
- con A', B' le loro immagini attraverso la prima delle due isometrie da applicare successivamente
- con A'', B'' le immagini di A', B' attraverso la seconda isometria

avremo $A'B' = AB$ e poi $A''B'' = A'B'$, da cui $A''B'' = AB$.

Ad esempio, consideriamo due punti fissi O_1 e O_2,
e applichiamo al generico punto P del piano

- ♪ innanzitutto la simmetria di centro O_1, ottenendo un certo punto P';
- ♫ poi, a questo P', applichiamo la simmetria di centro O_2, pervenendo ad un nuovo punto P''.

Possiamo ora pensare alla trasformazione
che muta *direttamente* P in P'':
bene, questa, essendo la composizione di due isometrie,
sarà ancora un'isometria.



In figura è anche rappresentato un triangolo con la sua immagine attraverso la prima simmetria, poi l'immagine di questa immagine attraverso la seconda simmetria

b)

**Se si pensa di "far scivolare il piano su sé stesso",
o di "ribaltare il piano intorno ad una sua retta, che rimanga ferma nel ribaltamento",
o di effettuare varie composizioni, ossia applicazioni successive, di tali movimenti rigidi,
si individua in tal modo un'isometria**.

Possiamo visualizzare bene questo fatto utilizzando la lavagna come piano fisso,
e un foglio di plastica trasparente come piano mobile sovrapposto al precedente.
Facciamo un disegno sulla lavagna, appoggiamoci sopra il foglio trasparente e su questo ricalchiamo il disegno.
Poi, sempre tenendo il foglio trasparente a ridosso della lavagna,
lo spostiamo lateralmente o verticalmente, magari anche ruotandolo.
Ora sul piano della lavagna si vedono due figure, quella originaria sull'ardesia e quella ricalcata a penna
sul foglio; ai "vecchi" punti della figura originaria corrispondono i nuovi punti della figura sul foglio.

Viceversa, il teorema che citeremo fra poco
("una qualsiasi isometria si può scomporre nell'applicazione successiva di al più 3 simmetrie assiali"),
insieme con l'ovvia osservazione che una simmetria assiale può essere evidentemente associata
ad un movimento rigido di "ribaltamento del piano attorno a una sua retta", mostra che

**ogni isometria, comunque sia stata definita, è SEMPRE interpretabile come generata
da un movimento rigido che "sposti il piano per poi risovrapporlo a sé stesso". Quindi**

LE ISOMETRIE SONO INTIMAMENTE CORRELATE o correlabili CON I MOVIMENTI RIGIDI.

**E un'isometria viene detta "DIRETTA" o "INVERSA" a seconda che
il movimento rigido dal quale si può pensare generata**

- **comporti soltanto uno "strisciamento" del piano su sé stesso (isometrie dirette)**
- **oppure richieda anche un ribaltamento del piano intorno ad una sua retta (isometrie inverse).**

❑ LA SIMMETRIA ASSIALE E' UN PO' "LA REGINA" DELLE ISOMETRIE

Un teorema estremamente interessante (ne omettiamo la dimostrazione) afferma che **QUALSIASI ISOMETRIA
si può sempre scomporre nel prodotto (=applicazione successiva) di AL PIU' 3 SIMMETRIE ASSIALI.**
Quindi la **simmetria assiale**, in questo senso, ci appare come la **"isometria regina"**,
quella che, volendo, può essere assunta come l' "ingrediente base" di qualsiasi altra isometria.

Si può poi dimostrare che

- **componendo un numero PARI di simmetrie assiali si ottiene sempre una isometria diretta;**
- **componendone un numero DISPARI, si ha una isometria inversa.**

❑ L'ISOMETRIA IDENTICA (= IDENTITA')

La indicheremo col simbolo I. E' l'isometria banale che "lascia tutto fermo": $I(P) = P, \ \forall P$.
Pur essendo banale, ha un'importanza teorica notevole.

8. TEOREMI SULLA COMPOSIZIONE (= APPLICAZIONE SUCCESSIVA) DI DUE ISOMETRIE

1) La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione.
Il vettore di questa traslazione è il doppio della "distanza vettoriale orientata" del 1° asse dal 2°.

2) La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione
- il cui centro è il punto di intersezione dei due assi,
- e il cui angolo è il doppio dell'angolo orientato individuato dai due assi, presi nell'ordine.

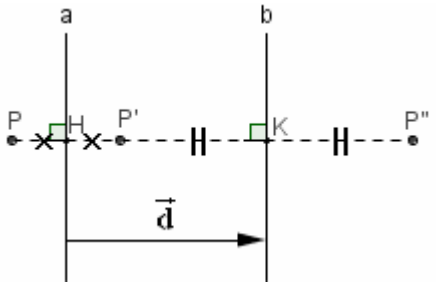
3) La composizione di due simmetrie centrali di centri O_1, O_2 è la traslazione di vettore $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

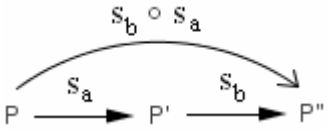
4) La composizione di due traslazioni di vettori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ è la traslazione di vettore $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

5) La **composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro**, è ancora una rotazione, avente
- per centro lo stesso centro,
- e per angolo di rotazione la somma algebrica degli angoli delle rotazioni componenti.

6) La **composizione di un'omotetia con un'isometria o viceversa**
muta sempre un triangolo in un altro simile ed è per questo chiamata "**similitudine**".

Dimostrazione di 1)





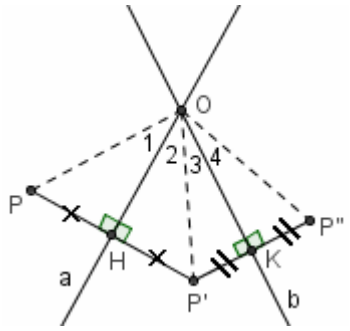
Il simbolo $s_b \circ s_a$ indica
la trasformazione che si ottiene applicando
i. s_a al punto P iniziale,
ii. poi s_b al punto P' ottenuto.

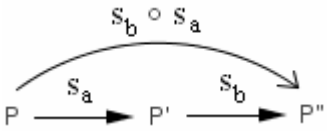
Osserviamo che
la trasformazione applicata PER PRIMA viene scritta PER ULTIMA.

$$\boxed{PP''} = PP' + P'P'' = 2HP' + 2P'K = 2(HP' + P'K) = 2HK \boxed{= 2\vec{d}}$$

Nella catena, tutti i segmenti vanno pensati orientati.
Il vettore $\vec{d}$ esprime anch'esso una distanza "orientata" (da a verso b)

Dimostrazione di 2)



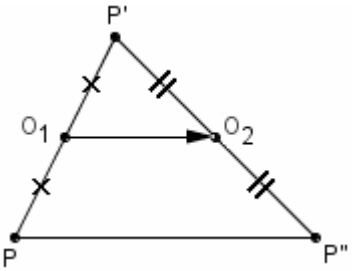


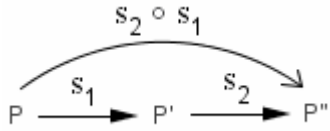
$OPH = OP'H$, $OP'K = OP''K$ (1° Criterio)

Perciò $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$; $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$; $\boxed{OP''} = OP' \boxed{= OP}$

$$\boxed{P\hat{O}P''} = P\hat{O}P' + P'\hat{O}P'' = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2H\hat{O}K \boxed{= 2\widehat{ab}}$$

Dimostrazione di 3)

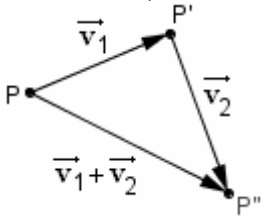


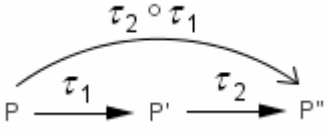


In $PP'P''$, O_1O_2 è la congiungente i punti medi di due lati : perciò

$$\left.\begin{array}{l} PP'' \parallel O_1O_2 \\ PP'' = 2O_1O_2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{PP''} = 2\overrightarrow{O_1O_2}}$$

Dimostrazione di 4)



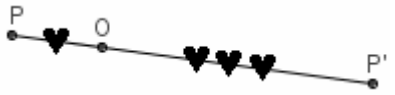


$$\boxed{PP''_{\text{orientato}} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2}$$

La *somma di due vettori* si effettua
- applicandoli uno di seguito all'altro, per poi prendere il vettore che parte dall'inizio del primo e termina sulla punta del secondo, proprio come illustrato qui a sinistra
- oppure con l'equivalente "regola del parallelogrammo" ⇨

9. OMOTETIE CON RAPPORTO NEGATIVO, SIMILITUDINI

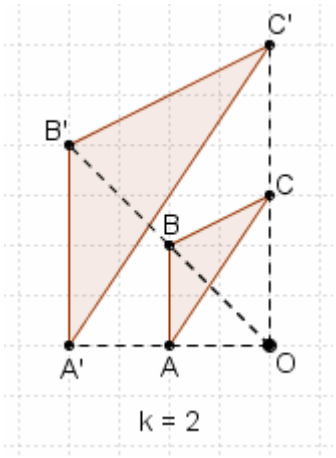
Un'omotetia di rapporto negativo si comporta nel modo illustrato dalla figura qui a fianco (dove, per fissare le idee, si è preso $k = -3$).

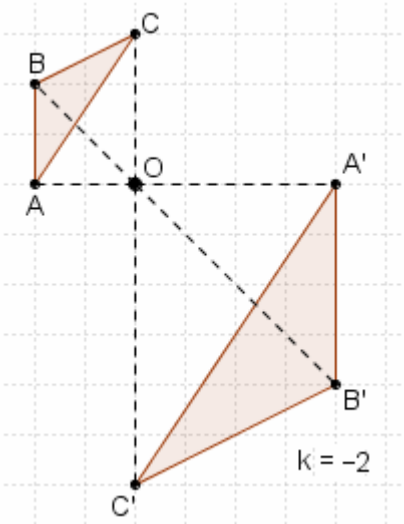


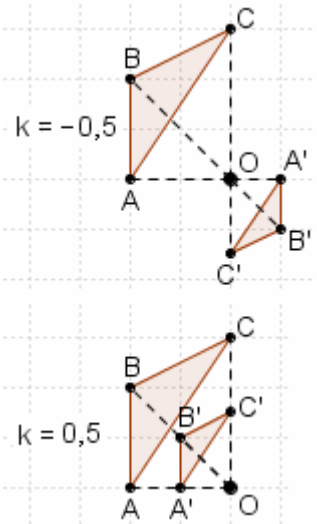
In definitiva, **unificando le definizioni di omotetia a rapporto positivo e a rapporto negativo**:
si dice **OMOTETIA di centro O e rapporto *k*** ($k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, k positivo o negativo)
la trasformazione piana che ad un punto P associa il punto P', tale che

a) P, P', O siano allineati;

b) si abbia $OP' = k \cdot OP$, interpretando i segmenti come orientati (in pratica, come rappresentanti di vettori);
oppure, se si preferisce: $OP' = |k| \cdot OP$, interpretando i segmenti come "non orientati" = "assoluti"
ma con l'intesa che i due punti P, P' vanno presi
- *dalla stessa parte, rispetto ad O*, nel caso $k > 0$,
- *da parti opposte rispetto ad O*, nel caso $k < 0$.







- **E' evidente che un'omotetia non conserva le distanze** (= *non* muta due punti A, B in due altri punti A', B' tali che la distanza A'B' sia uguale alla distanza AB dei due punti iniziali), **quindi non è un'isometria; tuttavia, si potrebbe dimostrare che è un'affinità**, ossia che **muta rette in rette**, conservando l'ordine dei punti allineati (e, di conseguenza, muta semirette in semirette, **segmenti in segmenti, triangoli in triangoli**).

- Anzi, si può dimostrare (vedi la pagina a fianco) che **in un'omotetia di rapporto *k* l'immagine di un segmento AB è un altro segmento A'B' tale che $A'B' / AB = |k|$.**

- Da ciò segue che
se il rapporto fra due dati segmenti AB e CD è un certo numero *h* (AB/CD = *h*), allora avrà lo stesso valore *h* anche il rapporto fra i due segmenti A'B' e C'D'
che corrispondono ad AB e CD attraverso un'omotetia: $\frac{AB}{CD} = h \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = h$.
Per indicare ciò si dice, brevemente, che "**un'omotetia conserva i rapporti fra i segmenti**".

- Inoltre **un'omotetia conserva gli angoli** (= muta ogni angolo in un angolo uguale a quello di partenza) e **trasforma sempre un triangolo in un altro triangolo, simile a quello di partenza**.
Se, tanto per fare un esempio, un'omotetia ha rapporto $k = 3$, allora trasformerà qualsiasi triangolo in un triangolo, simile a quello dato, avente ciascun *lato* triplo del lato corrispondente del triangolo originario, quindi anche il *perimetro* triplo, e l'*area* uguale a 9 volte l'area del triangolo di partenza.

- Poiché poi **qualsiasi affinità "muta rette parallele in rette parallele"** (facile la dimostrazione, del tutto analoga a quella data con riferimento alle isometrie), **ciò vale anche per le omotetie.**

Questa ⇨ bella figura dinamica GEOGEBRA mostra all'opera un'omotetia il cui centro e il cui rapporto (positivo o negativo) possono essere fissati dall'utente.

Si dimostra che **date due omotetie** di centri $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$ e rapporti k_1, k_2, "**componendole**", cioè applicandole una dopo l'altra, **si ottiene ancora un'omotetia**, il cui rapporto k e centro C sono tali che:

- $k = k_1 \cdot k_2$
- C è allineato con C_1 e C_2, se $C_1 \neq C_2$, mentre nel caso particolare $C_1 \equiv C_2$ si ha $C \equiv C_1 \equiv C_2$

DIMOSTRAZIONE DI ALCUNI DEGLI ENUNCIATI DELLA PAGINA PRECEDENTE

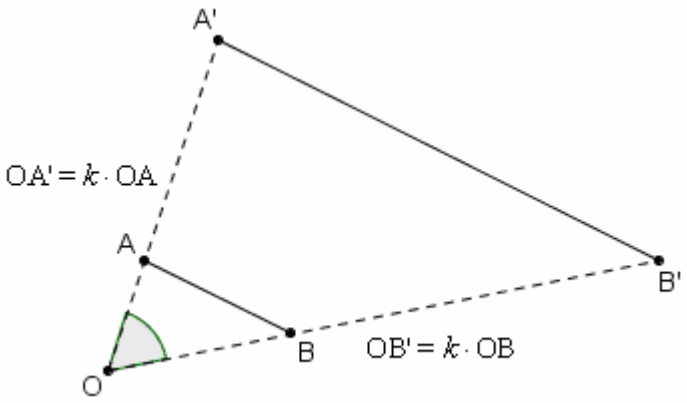
(diamo qui per scontato che un'omotetia sia un'affinità, quindi muti rette in rette, segmenti in segmenti, triangoli in triangoli)

"In un'omotetia di rapporto k il segmento $A'B'$ immagine di un segmento AB è tale che $\frac{A'B'}{AB} = |k|$".

Consideriamo un'omotetia di centro O e rapporto k (supponiamo inizialmente, per meglio fissare le idee, $k > 0$).

Siano A, B due punti qualsiasi del piano e A', B' le rispettive immagini. Allora, per definizione di omotetia, si avrà $OA' = k \cdot OA$ e $OB' = k \cdot OB$ per cui i due triangoli $OA'B'$, OAB sono simili per il 2° Criterio di Similitudine: hanno infatti

- due lati proporzionali $\left(\underbrace{OA' : OA}_{k} = \underbrace{OB' : OB}_{k}\right)$
- e l'angolo compreso in comune.



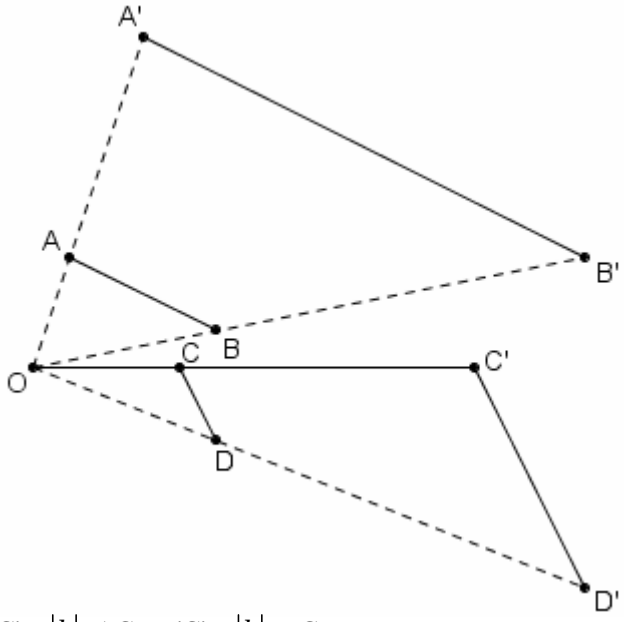
E quindi, poiché in due triangoli simili i lati sono tutti in proporzione, dovrà essere anche

$A'B' : AB = \underbrace{OA' : OA}_{k} = \underbrace{OB' : OB}_{k}$ e perciò $\frac{A'B'}{AB} = k$ (se si preferisce, $A'B' = k \cdot AB$).

Ora, il simbolo di valore assoluto nell'enunciato è stato posto per includere anche il caso $k < 0$, nel quale la dimostrazione sarebbe del tutto simile.

"Se il rapporto fra due dati segmenti AB e CD è un certo numero h (AB/CD = h), allora avrà lo stesso valore h anche il rapporto fra i due segmenti $A'B'$ e $C'D'$ che corrispondono ad AB e CD attraverso un'omotetia:

$$\frac{AB}{CD} = h \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = h \text{ "}$$



Con gli stessi ragionamenti della parte precedente, si prova che in figura compaiono due coppie di triangoli simili tra loro: $OA'B'$ e OAB, $OC'D'$ e OCD. E' dunque

$A'B' : AB = \underbrace{OA' : OA}_{k}$ e $C'D' : CD = \underbrace{OC' : OC}_{k}$

quindi anche $A'B' : AB = C'D' : CD$

e, permutando i medi, $A'B' : C'D' = AB : CD$.

Se allora $\frac{AB}{CD} = h$, sarà anche $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD} = h$.

"In un'omotetia l'immagine di un triangolo è un triangolo simile a quello di partenza".

Sia ABC un triangolo, e sia $A'B'C'$ la sua immagine attraverso un'omotetia di rapporto k.

Allora avremo, come dimostrato sopra, $A'B' = |k| \cdot AB$, $A'C' = |k| \cdot AC$, $B'C' = |k| \cdot BC$; quindi i lati di $A'B'C'$ saranno proporzionali ai lati di ABC e pertanto potremo dire che i due triangoli sono simili fra loro per il **3° Criterio di similitudine.**

Si dice infine "SIMILITUDINE" una trasformazione che risulti dall'applicazione successiva ("composizione") **di un'OMOTETIA + un'ISOMETRIA, o di un'ISOMETRIA + un' OMOTETIA.**

Le proprietà scritte nel precedente riquadro dedicato alle omotetie si estendono anche alle similitudini.

10. PUNTI UNITI, RETTE DI PUNTI UNITI, RETTE UNITE

Si dice "punto unito", o "punto fisso", in una trasformazione, un punto che coincida con la sua immagine.

Esempi

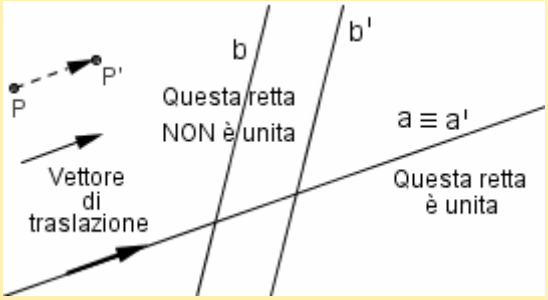
- In una simmetria centrale, il centro di simmetria è punto unito.
- In una simmetria assiale, sono punti uniti tutti quelli dell'asse di simmetria.
- In una traslazione, non si ha nessun punto unito.

Se una retta è costituita tutta da punti uniti, allora la si chiama "retta di punti uniti".

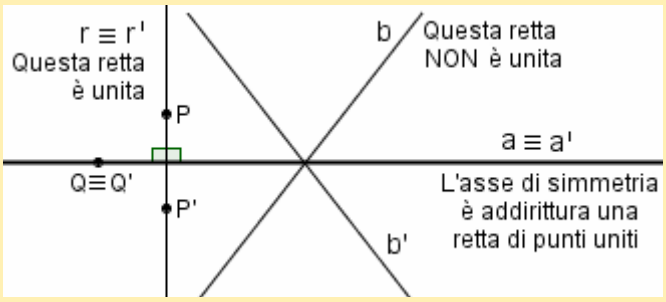
- Esempio classico: in una simmetria assiale, l'asse di simmetria è una retta di punti uniti.

Se una retta viene mutata in sé stessa da una trasformazione, si dice che è una "retta unita".
Attenzione! Una retta unita non deve essere necessariamente una "retta di punti uniti".

♪ Ad esempio, in una *traslazione* non si ha *nessun punto unito*, quindi a maggior ragione non si hanno nemmeno rette di punti uniti; tuttavia, *ogni retta parallela al vettore di traslazione è una retta unita*, perché la trasformazione la fa "risovrapporre a sé stessa", pur con tutti i punti spostati.



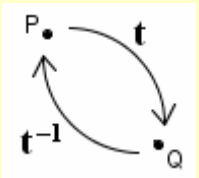
♫ Un altro bell'esempio si può trovare pensando ad una simmetria assiale. Qui l'asse di simmetria è una "retta di punti uniti". Se ora consideriamo una qualunque retta perpendicolare all'asse di simmetria, questa sarà "retta unita", pur senza essere "retta di punti uniti".



11. INVERSA DI UNA TRASFORMAZIONE

Data una trasformazione *t*, si dice "trasformazione inversa" della *t*, e si indica col simbolo t^{-1}, quella trasformazione che, rispetto alla *t*, fa "tornare indietro": ossia,

$$\mathbf{P = t^{-1}(Q) \Leftrightarrow Q = t(P)}$$



Insomma: P è l'immagine di Q attraverso la trasformazione inversa t^{-1}, se e solo se Q è l'immagine di P attraverso la *t*.

Possiamo anche dire che l'inversa di una trasformazione *t*, è quella trasformazione t^{-1} tale che la trasformazione composta $t^{-1} \circ t$ sia l'identità: $t^{-1} \circ t = I$

- L'inversa di un'omotetia di centro O e rapporto *k*, è l'omotetia di centro O e rapporto 1/*k*;
- l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
- l'inversa di una rotazione è la rotazione con lo stesso centro, ma di angolo opposto.

L'inversa di una simmetria, tanto centrale quanto assiale, è … la simmetria stessa!!!

Quindi, detta s una simmetria (centrale o assiale, non importa), avremo che

$$s^{-1} = s$$

o, se si preferisce,

$s \circ s = I$ (identità): applicando per due volte una simmetria, si ritorna al punto di partenza.

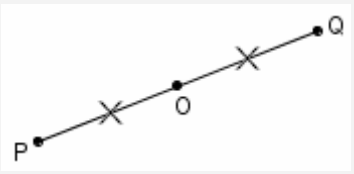
Se una trasformazione ha la proprietà di coincidere con la propria trasformazione inversa, si dice che è "involutoria". t involutoria $\Leftrightarrow$ $t^{-1} = t$ $\Leftrightarrow$ $t \circ t = I$ (=*Identità*, "*trasformazione identica*").

Se *t* è una trasformazione involutoria, allora, quando è $Q = t(P)$, è senz'altro anche $P = t(Q)$!

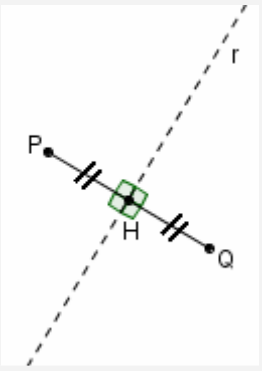
Possiamo dunque dire che **le simmetrie (centrali e assiali) sono tipiche trasformazioni involutorie**.

12. FIGURE SIMMETRICHE RISPETTO A UN PUNTO, O A UNA RETTA

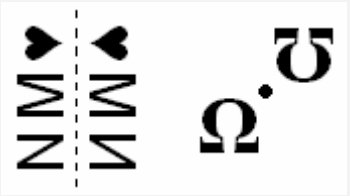
Due punti P, Q si dicono "simmetrici rispetto a un punto O"
se O è il punto medio del segmento PQ,
ossia se la simmetria di centro O muta P in Q e Q in P.



Due punti P, Q si dicono "simmetrici rispetto a una retta r"
se r è l'asse del segmento PQ
(= se il segmento PQ è perpendicolare ad r ed è diviso in metà da r =
= se per passare da P a Q, o da Q a P,
si cala dal punto di partenza il segmento perpendicolare a r
e si prosegue poi di un segmento uguale)
ossia se la simmetria di asse r muta P in Q e Q in P.

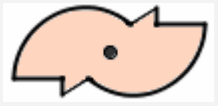


Quando si dice che due figure sono "simmetriche",
"fra loro simmetriche", o "simmetriche l'una dell'altra",
si vuole affermare che esiste una simmetria
(di solito, assiale, ma potrebbe essere anche centrale)
che muta una figura nell'altra.
Certo, sarebbe più preciso affermare che le due figure sono "simmetriche rispetto a una data retta", o "a un dato centro", specificando pure di quale retta o di quale centro si parli!

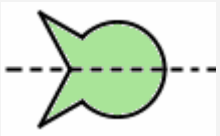


L'aggettivo "simmetrico, simmetrica" si usa anche al *singolare*.
Una figura (superficie, curva, insieme di punti qualsiasi) **si dice**

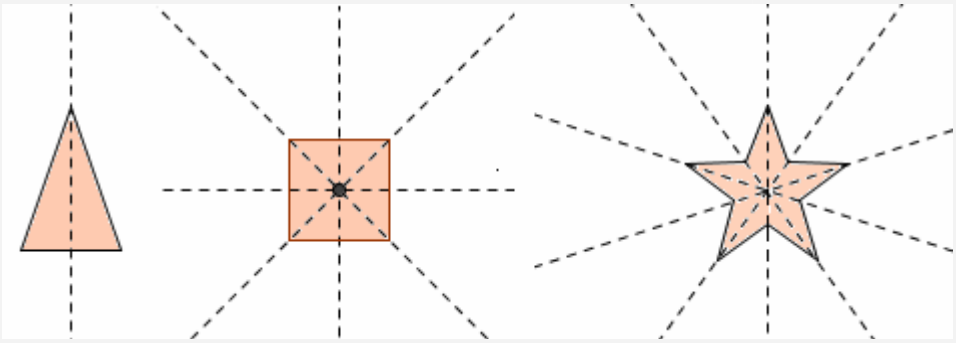
- "**simmetrica rispetto ad un punto**"
  se la simmetria rispetto a quel punto muta la figura in sé stessa.
  In tal caso il punto in questione viene detto "**centro di simmetria**" per la figura →



- "**simmetrica rispetto ad una retta**"
  se la simmetria rispetto a quella retta muta la figura in sé stessa.
  In tal caso la retta in questione viene detta "**asse di simmetria**" per la figura →



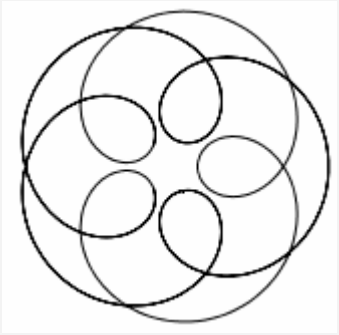
L'immagine a fianco mostra alcune figure poligonali coi relativi assi di simmetria; osserva che solo nel caso del quadrato c'è anche un *centro* di simmetria!



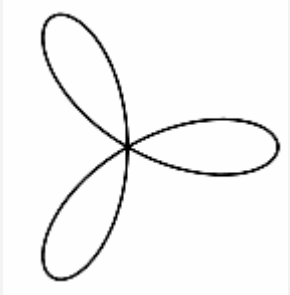
ESERCIZIO

Sapresti determinare gli eventuali assi di simmetria e l'eventuale centro di simmetria delle curve famose qui a destra?

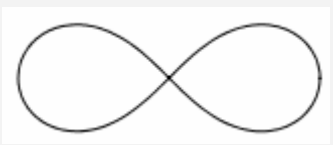
Risposte ⇨



Epitrocoide



Trifolium

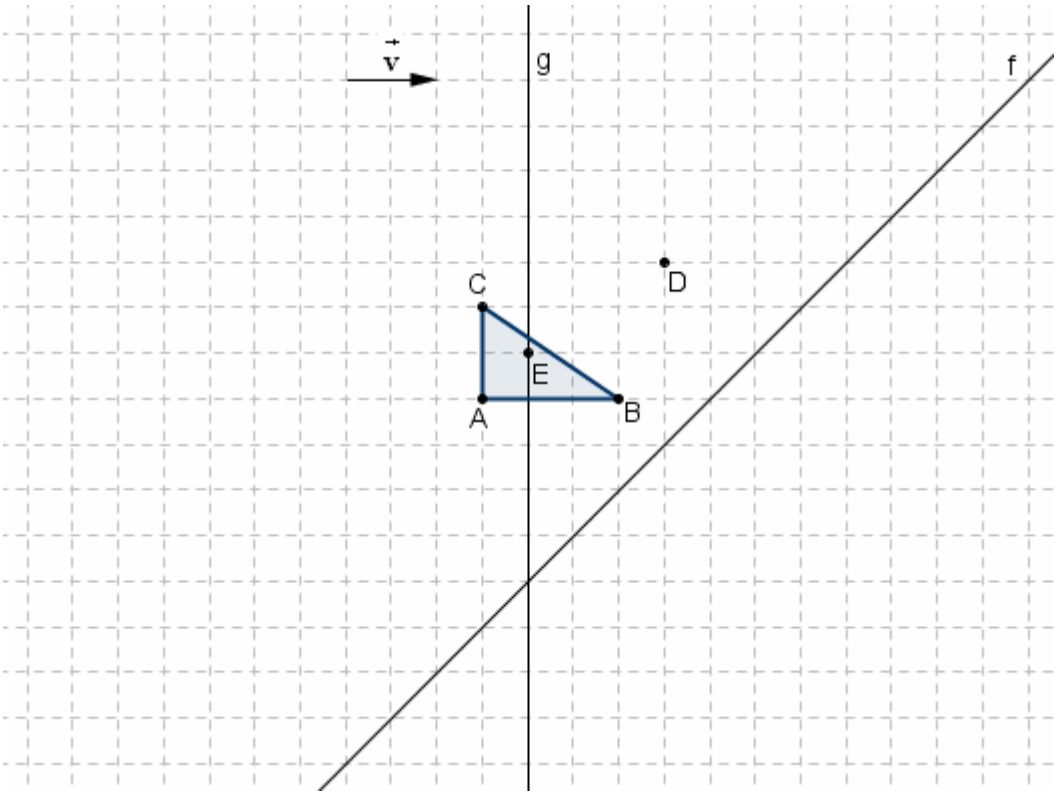


Lemniscata di Bernoulli

13. ESERCIZI SULLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE
(puoi poi vedere lo svolgimento corretto o le risposte se clicchi sulla freccia)

Nella figura qui sotto riportata sono rappresentati
un triangolo ABC; due punti D, E; due rette f, g; un vettore $\vec{v}$.

Della figura, puoi riportare sul tuo quaderno soltanto gli elementi che ti interessano per lo specifico esercizio che stai svolgendo.



1) Disegna l'**IMMAGINE** A'B'C' del triangolo ABC:

a) nella simmetria di centro D ⇨
b) nella simmetria di centro E ⇨
c) nella simmetria di asse f ⇨
d) nella simmetria di asse g ⇨
e) nella traslazione di vettore $\vec{v}$ ⇨
f) nell'omotetia di centro D e rapporto 3 ⇨
g) nell'omotetia di centro E e rapporto 3/2 ⇨
h) nell'omotetia di centro E e rapporto –3 ⇨
i) nella rotazione di centro D e angolo +90° (= 90° in senso *antiorario*) ⇨
j) nella rotazione di centro E e angolo −45° (= 45° in senso *orario*) ⇨
k) nell'omotetia di centro D e rapporto –1. Questa trasformazione coincide con … ⇨
l) nella trasformazione che si ottiene componendo (= applicando successivamente) prima la simmetria di centro D, poi quella di centro E ⇨
m) nella trasf. che si ottiene componendo prima la simmetria di centro E, poi quella di centro D ⇨
n) nella trasf. che si ottiene componendo prima la simmetria di asse f, poi quella di asse g ⇨
o) nella trasf. che si ottiene componendo prima la simmetria di asse g, poi quella di asse f ⇨
p) nella trasformazione $\rho_{A,+90°} \circ \tau_{\vec{v}}$ ⇨
q) nella trasformazione $\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{A,+90°}$ ⇨

2) Sempre con riferimento alla figura di prima, disegna la **CONTROIMMAGINE** A*B*C* di ABC:

a) nella simmetria di centro D ⇨
b) nella simmetria di asse f ⇨
c) nella traslazione di vettore $\vec{v}$ ⇨
d) nell'omotetia di centro D e rapporto –1/3 ⇨

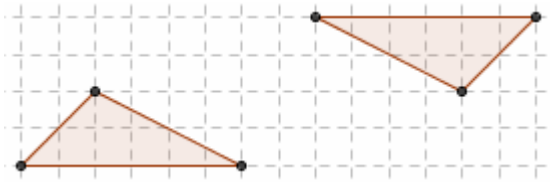
3) Dì quali sono i **punti uniti**, le **rette di punti uniti**, le **rette unite** di una
a) simmetria centrale b) simmetria assiale c) traslazione d) rotazione e) omotetia ⇨

4) Dì **qual è la trasformazione inversa** di una
a) simmetria centrale b) simmetria assiale c) traslazione d) rotazione e) omotetia ⇨

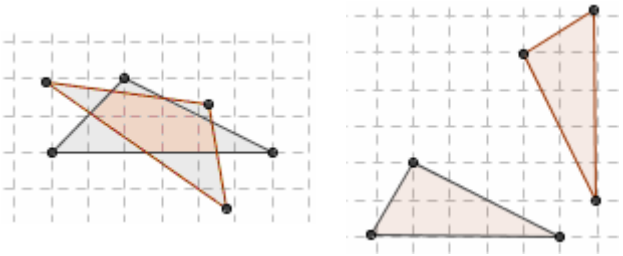
5) Dì **che trasformazione si ottiene componendo** due:
a) simmetrie centrali b) simmetrie assiali c) traslazioni
d) rotazioni con lo stesso centro e) omotetie con lo stesso centro ⇨

6) Fra le seguenti trasformazioni, **riconosci quelle isometriche**:
a) simmetria centrale b) simmetria assiale c) traslazione d) rotazione e) omotetia ⇨

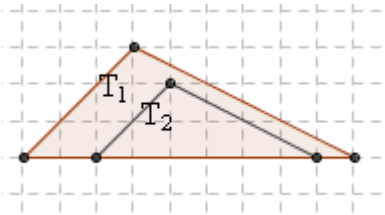
7) I due triangoli della figura qui a fianco sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad un certo punto. Dove si trova il punto? ⇨



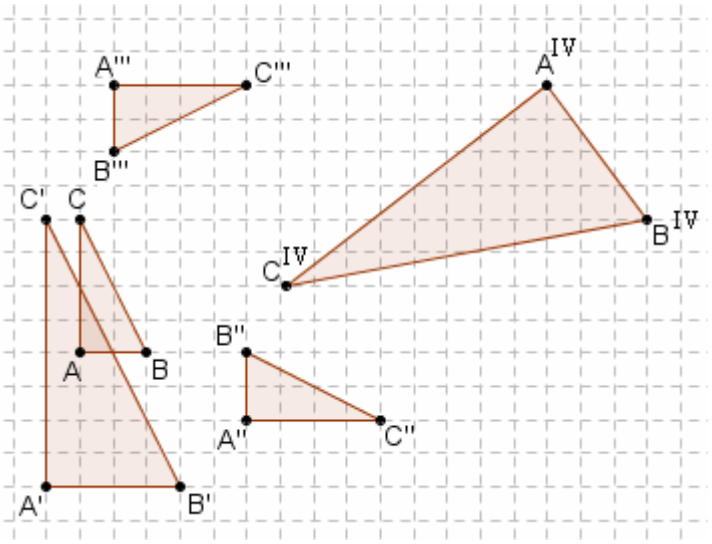
8a, 8b) Ecco due coppie di triangoli simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad una certa retta. Per ciascuna coppia, disegna la retta. ⇨



9) Con riferimento alla figura qui a fianco, che rappresenta due triangoli "omotetici", stabilisci il centro e il rapporto:
a) dell'omotetia che muta T_1 in T_2
b) dell'omotetia che muta T_2 in T_1 ⇨



10) Nella seguente figura, della quale riporterai sul tuo quaderno solo ciò che ti interessa, stabilisci quale affinità (eventualmente composta) fa passare da ABC ad
a) A'B'C' b) A"B"C"
c) A'"B'"C'" d) $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$
(è possibile rispondere in più modi, anche diversi da quelli che puoi vedere indicati cliccando sulla freccia ⇨)

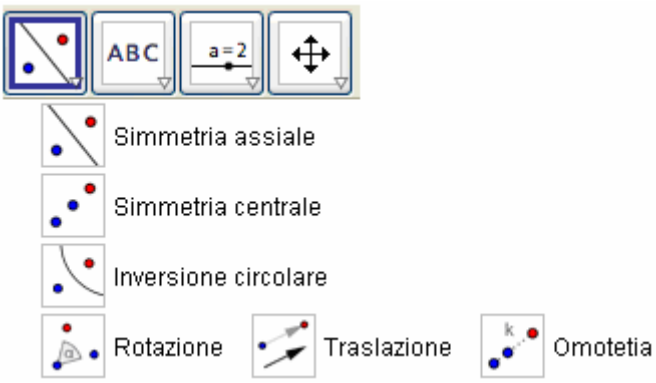


11) Fra le 4 **affinità** del precedente esercizio 10), stabilisci quali sono "**dirette**" e quali "**inverse**" ⇨

12) Tramite il freeware **GEOGEBRA**, realizza qualche affinità a tua scelta, utilizzando in modo opportuno i comandi ottenibili cliccando sul triangolino in basso a destra del tasto



(che sono poi quelli riportati qui a fianco)



14. APPROFONDIMENTO: TRASFORMAZIONI UN PO' PIU' GENERALI

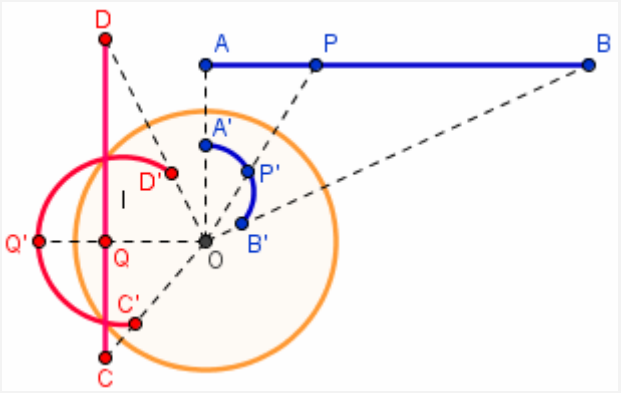
Il nostro discorso sulle trasformazioni piane si è ben presto focalizzato su trasformazioni molto "regolari",
e precisamente quelle che "conservano l'allineamento e l'ordine dei punti allineati": le cosiddette AFFINITA'.
Tuttavia, abbiamo subito evidenziato che esistono pure trasformazioni geometriche non dotate di questa regolarità.

INVERSIONE PER RAGGI VETTORI RECIPROCI

Un bell'esempio è rappresentato dalla "**inversione per raggi vettori reciproci**".
Fissata su di un piano una circonferenza di centro O e raggio r, ad ogni punto P del piano (distinto da O)
si fa corrispondere quel punto P', che appartiene alla semiretta OP ed è tale che $OP' = \frac{r^2}{OP}$.

La figura qui a fianco mostra:

- un segmento AB e la sua immagine
  (che risulta essere un arco di circonferenza)
- un altro segmento CD e la sua immagine
  (ancora un arco di circonferenza).



Si obietterà tuttavia:
ma non si tratta di una VERA trasformazione piana!
Infatti, il punto O è privo di immagine.

L'osservazione è giusta.
Se un punto P è vicinissimo a O,
la sua immagine P' sarà esterna alla circonferenza
e lontanissima da O; in pratica, l'immagine di O
dovrebbe essere un … "punto all'infinito".

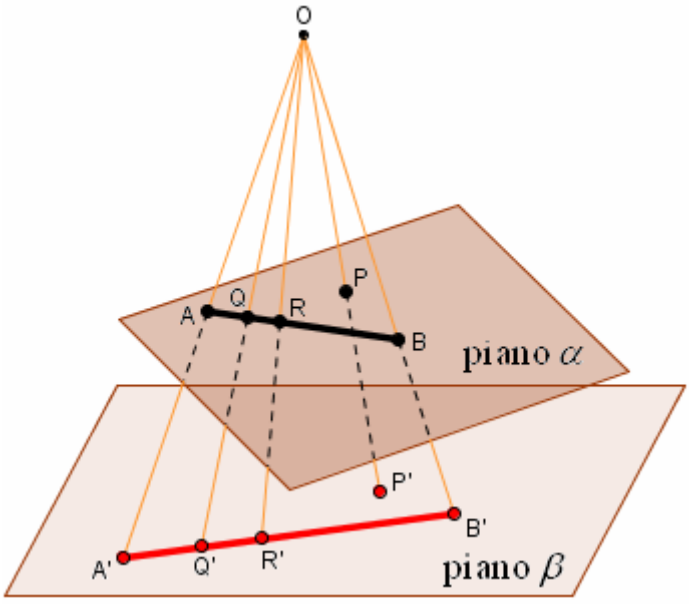
Siamo allora di fronte ad una ESTENSIONE del concetto di "trasformazione piana":
la corrispondenza del piano in sé, che stiamo considerando, non è perfettamente biunivoca.
Essa diventa tuttavia biunivoca se togliamo dal piano il punto O;
oppure, se decidiamo di far corrispondere al punto O … il punto O stesso
(ma in questo caso, introdurremmo una "forzatura":
se i punti vicini a O vengono trasformati in punti lontani da O,
non è molto coerente convenire che l'immagine di O sia O stesso).

TRASFORMAZIONI PROIETTIVE

Bellissime trasformazioni sono le
"trasformazioni proiettive" (o "proiettività").

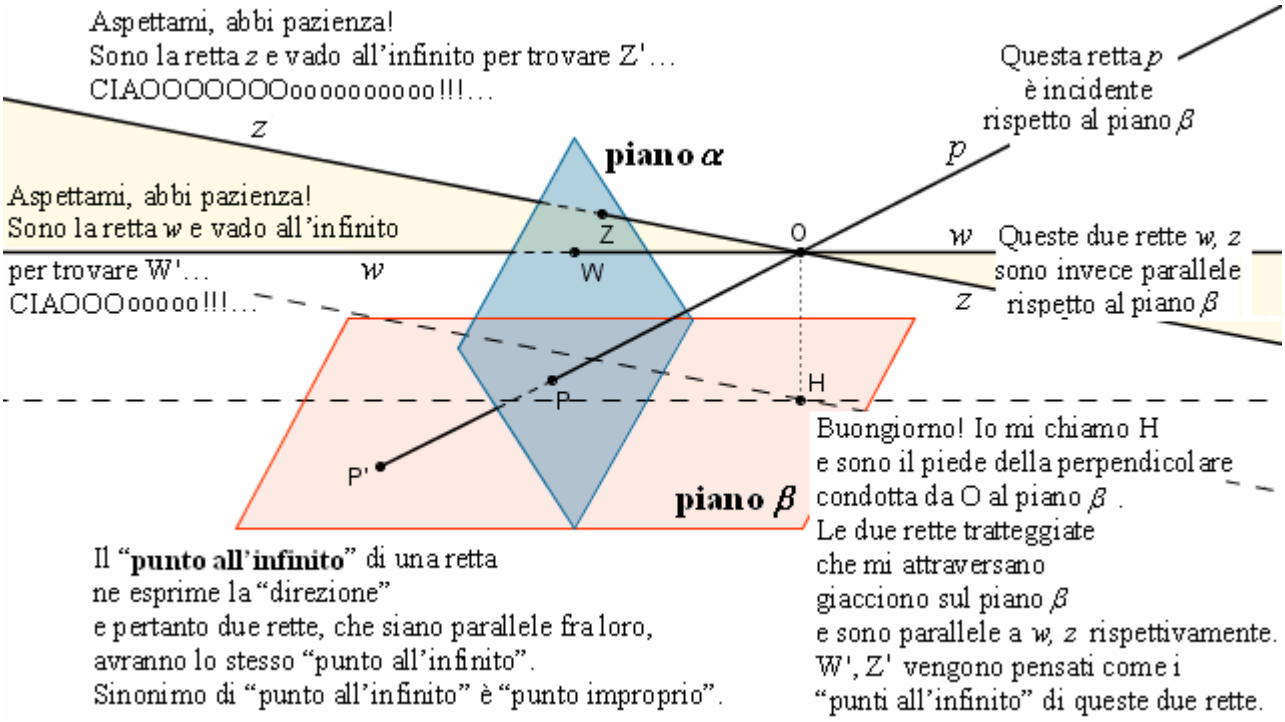
Siano fissati nello spazio due piani α e β,
incidenti o paralleli.
Fissiamo inoltre un punto O
che non stia né sull'uno, né sull'altro piano.
Tracciamo una retta per O:
questa intersecherà il piano α in un punto P
(se non è parallela ad α),
e il piano β in P'
(se non è parallela a β).

Diremo che P' è il corrispondente di P
nella trasformazione che chiameremo
"proiezione di centro O".



Anche in questo caso,
occorre essere un po' "elastici".
Se i due piani α, β sono paralleli,
tutto regolare perché ad ogni punto del primo
resta effettivamente associato
uno e un solo punto del secondo.
Se invece i due piani NON sono paralleli, una retta passante per O, e parallela a β,
intersecherà α in un punto W, ma NON andrà poi ad intersecare β.
Dunque W si troverebbe a non avere immagine.

Tuttavia, come la figura sottostante dovrebbe ben illustrare,
in questo caso possiamo pensare che a W corrisponda uno dei "punti all'infinito" di β.
Vale a dire, per "trovare un'immagine" anche a W,
noi andiamo a "completare" il piano β con un "punto all'infinito".
Anzi, lo completeremo con **infiniti** "**punti all'infinito**", ciascuno associato ad una determinata "direzione" su β.



- E' evidente che anche il piano α andrà pensato "completato coi suoi punti all'infinito"
  (ciascuno associato a una "direzione" su α).
  E certo! In tal modo, infatti, si troverà un controimmagine anche a quei punti di β,
  che altrimenti non l'avrebbero, in quanto appartenenti ad una retta per O, parallela ad α.
- Anziché a proiezioni "centrali" potremmo pensare anche a **proiezioni "parallele"**:
  si sceglie una direzione nello spazio e ad ogni punto P di α, si fa corrispondere quel punto P' di β,
  tale che la retta PP' abbia QUELLA direzione.

TRASFORMAZIONI TOPOLOGICHE

Fra le trasformazioni piane diamo infine un cenno alla famiglia delle cosiddette trasformazioni *topologiche*.

Prendiamo un foglio realizzato in gomma e disegniamoci sopra una circonferenza.
Se ora tiriamo il foglio in modo da deformarlo, la circonferenza si trasformerà in una curva chiusa
la cui forma dipenderà dal modo particolare con cui avremo deformato il foglio.
Possiamo dire, in termini intuitivi, che una trasformazione si dice "topologica"
se la figura immagine può essere pensata come ottenibile dalla figura iniziale mediante una deformazione continua,
a base di piegamenti stiramenti o compressioni, senza però che intervengano strappi o tagli.
Le figure che vengono sottoposte a trasformazioni di questo tipo, ne vengono profondamente "sconvolte",
tuttavia qualche proprietà si conserva anche qui, nel passaggio da una figura alla sua immagine:
ad esempio, il numero degli eventuali buchi, su di una superficie,
rimane invariato in ogni trasformazione topologica della superficie stessa.

E' evidente che, se pensiamo a "piegamenti" oltre che a "stiramenti", di una superficie,
non potremo pretendere di rimanere su di un piano, ma opereremo "in tre dimensioni".
D'altra parte, anche nel considerare le proiettività, abbiamo fatto ricorso a DUE piani distinti,
collocati nello SPAZIO TRIDIMENSIONALE.
Insomma, il discorso ci ha condotto, a partire dallo studio delle trasformazioni piane, a uscire
dall' "appiattimento" su di un piano, per concepire situazioni più generali … ma senza dubbio, perlomeno curiose.

Se avrai occasione di approfondire il discorso sulle trasformazioni proiettive e topologiche,
scoprirai un mondo affascinante, in qualche modo "sopraelevato" rispetto alla "normale" geometria,
la quale, da questo punto di osservazione privilegiato, svelerà nuovi insospettati segreti.
Un'indicazione bibliografica: "Che cos'è la matematica?" di R. Courant e H. Robbins, edizioni Boringhieri 1971.

15. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE (soprattutto: affinità) NEL PIANO CARTESIANO

Nel piano cartesiano, una trasformazione può essere descritta dalle due equazioni che fanno passare dalle coordinate del "punto iniziale" (x, y) a quelle del "punto finale" (x', y')

$$t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$$

Si può dimostrare che le AFFINITA'
(= le trasformazioni che mutano rette in rette, conservando l'ordine dei punti allineati)
sono tutte e sole quelle trasformazioni le cui equazioni sono "LINEARI" (= "di 1° grado"), ossia della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases},$$

PURCHÉ PERÒ si abbia

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \quad :$$

infatti se tale determinante si annulla, la corrispondenza non è biunivoca (vedi NOTA).

FRA LE AFFINITA', SONO poi ISOMETRIE quelle per le quali il determinante D è tale che siano verificate ENTRAMBE LE CONDIZIONI SEGUENTI:

1) **D = +1 oppure D = –1**
2) **gli elementi di una diagonale sono uguali e quelli dell'altra opposti.**

Le trasformazioni il cui determinante soddisfa alla condizione 2), ma non necessariamente alla 1), sono invece le SIMILITUDINI (= composizioni di un'ISOMETRIA con un'OMOTETIA, o viceversa).

NOTA In effetti, fissata a piacere una coppia (x', y'), la risoluzione rispetto a x, y del sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}, \text{ che poi equivale a } \begin{cases} ax + by = x' - m \\ cx + dy = y' - n \end{cases},$$

permette di risalire alla coppia incognita (x, y) cui la (x', y') corrisponde. Ma se il determinante dei coefficienti delle incognite $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ è nullo, tale sistema risulta impossibile o indeterminato: quindi il punto (x', y') non ha, in tal caso, nessuna controimmagine, oppure ne ha infinite.

Per la quantità $\mathbf{D = ad - bc}$ ("**costante di affinità**" o "**rapporto di affinità**") si può dimostrare che

1) **il suo valore assoluto esprime il rapporto S'/S fra le aree di due figure corrispondenti qualsiasi F' ed F:**

$$|ad - bc| = \frac{S'}{S}$$

2) **il suo segno indica:**
   - ♪ **se è positivo, che la trasformazione muta un poligono in un altro poligono, i cui vertici si susseguono nello stesso ordine (orario o antiorario) che avevano nel poligono iniziale (si parlerà di affinità *"DIRETTA"*);**
   - ♫ **se è negativo, che la trasformazione muta un poligono in un altro poligono, i cui vertici si susseguono in ordine inverso rispetto ai vertici del poligono iniziale (si parlerà di affinità *"INVERSA"*).**

In sintesi: $ad - bc > 0 \rightarrow$ ***affinità DIRETTA***
$ad - bc < 0 \rightarrow$ ***affinità INVERSA*** (NOTA)

NOTA Gli aggettivi "diretta" e "inversa" qui usati vanno d'accordo, come è intuitivo e si potrebbe dimostrare, col significato che era stato loro attribuito nel paragrafo 7, quando, parlando di isometrie, avevamo convenuto di classificare una isometria come "diretta" nel caso fosse associabile ad un movimento rigido che non *comportasse* ribaltamenti ma solo strisciamenti, "inversa" nel caso contrario.
OCCHIO INVECE
a **non confondere** la locuzione "affinità inversa" con "affinità inversa di un'altra affinità".

Esempio

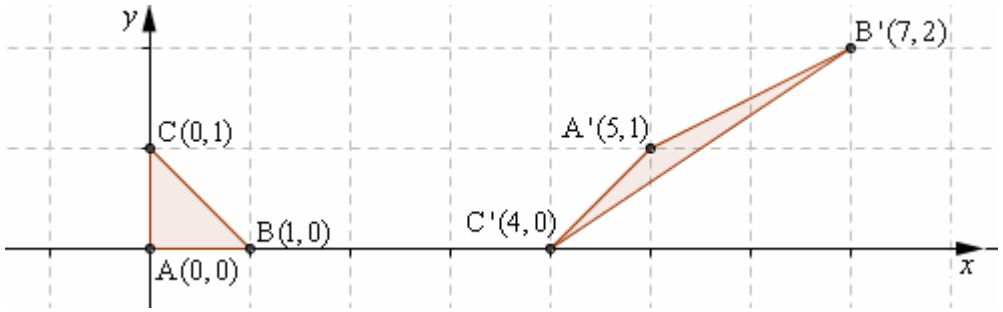
Consideriamo la trasformazione *t* descritta dalle equazioni $\boxed{t:\begin{cases}x'=2x-y+5\\y'=x-y+1\end{cases}}$

Innanzitutto, questa trasformazione è un'affinità, perché le sue equazioni sono di $\boxed{1°\text{grado}}$ con

$$\boxed{ad-bc}=2\cdot(-1)-(-1)\cdot 1=-2+1=-1\ \boxed{\neq 0}\,.$$

Non è però una isometria (non si realizza la seconda delle due condizioni caratterizzanti).

"Esploriamo" ora il comportamento di questa affinità
andando a vedere, ad esempio, come opera sul triangolo ABC di vertici A(0,0); B(1,0); C(0,1):



Abbiamo disegnato il triangolo ABC e il suo trasformato A'B'C'. Dalla figura si può notare che

un'affinità, in genere, non conserva né le distanze (ad esempio, B'C' non è uguale a BC),
né i rapporti fra i segmenti (ad es., il rapporto AC/AB non è uguale ad A'C'/ A'B')
e neppure gli angoli: **quindi, in generale, un'affinità muta sia le forma che le dimensioni delle figure**.

**Però in un'affinità è costante il rapporto S'/S fra le aree di due superfici corrispondenti,
e tale rapporto costante è uguale al valore assoluto di quel determinante *ad – bc***
che viene chiamato "costante di affinità" o anche "rapporto di affinità".

Nel nostro caso $ad-bc=-1$, quindi $|ad-bc|=1$ e ciò significa che in questa particolare affinità
che abbiamo scelto come esempio, si ha sempre S'/S = 1 (vale a dire, si conservano le aree).
In effetti si può facilmente verificare che l'area del triangolo A'B'C' è uguale all'area del triangolo ABC.

Abbiamo anche scritto che, se $ad-bc>0$, si parla di affinità "diretta", se $ad-bc<0$ di affinità "inversa"
(un'affinità diretta conserva il "verso" delle figure,
mentre un'affinità inversa effettua una specie di "ribaltamento", invertendo il verso delle figure).
Nel nostro caso, $ad-bc=-1$ quindi **l'affinità da noi considerata è "inversa".**
In effetti, nel percorrere il perimetro di **ABC** troviamo, procedendo in senso **antiorario**,
prima A, poi B, poi C, mentre se vogliamo percorrere il perimetro del **triangolo immagine A'B'C'**
in modo da incontrare prima A', poi B', poi C' , dovremo procedere in senso **orario**.

3 COPPIE DI PUNTI CORRISPONDENTI INDIVIDUANO UNIVOCAMENTE UN'AFFINITA'

Poiché l'equazione di una generica affinità è $\begin{cases}x'=ax+by+m\\y'=cx+dy+n\end{cases}$ e quindi contiene 6 parametri,

**un'affinità è univocamente determinata quando, per 3 punti non allineati del piano,
siano assegnati i rispettivi 3 punti corrispondenti, anch'essi non allineati.**

Infatti tale conoscenza porta complessivamente a poter scrivere 6 condizioni!

Ad esempio, sapere che un'affinità *t* si comporta nel modo seguente:

$$(0,0)\xrightarrow{t}(5,1);\quad (1,0)\xrightarrow{t}(7,2);\quad (0,1)\xrightarrow{t}(4,0)$$

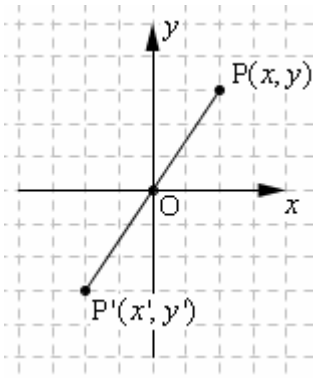
permette di scrivere, sostituendo nel sistema $\begin{cases}x'=ax+by+m\\y'=cx+dy+n\end{cases}$:

$$\begin{matrix}5=a\cdot 0+b\cdot 0+m\\1=c\cdot 0+d\cdot 0+n\end{matrix}\,;\qquad \begin{matrix}7=a\cdot 1+b\cdot 0+m\\2=c\cdot 1+d\cdot 0+n\end{matrix}\,;\qquad \begin{matrix}4=a\cdot 0+b\cdot 1+m\\0=c\cdot 0+d\cdot 1+n\end{matrix}\,.$$

Tali 6 condizioni, poste a sistema, consentiranno di determinare i valori dei 6 parametri *a, b, c, d, m, n.*
Se ci provi, troverai
$a=2,\ b=-1,\ c=1,\ d=-1,\ m=5,\ n=1$.

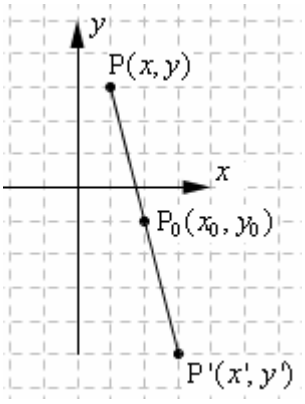
16. AFFINITA' PARTICOLARI (TRASLAZIONI, SIMMETRIE, OMOTETIE) DESCRITTE IN COORDINATE, NEL PIANO CARTESIANO

SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE



$$\boldsymbol{s_0}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = -x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO AD UN PUNTO



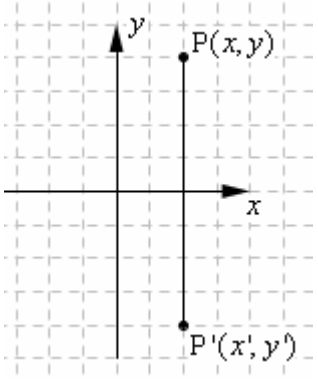
P_0 è il punto medio del segmento PP', perciò (ascissa punto medio = = media ascisse estremi, idem per l'ordinata)

$$x_0 = \frac{x + x'}{2} \rightarrow x' = 2x_0 - x$$

$$y_0 = \frac{y + y'}{2} \rightarrow y' = 2y_0 - y$$

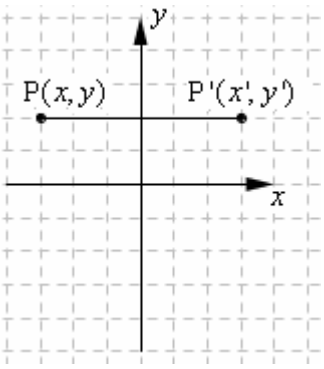
$$\boldsymbol{s_{P_0}}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = 2x_0 - x} \\ \boldsymbol{y' = 2y_0 - y} \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE *x*



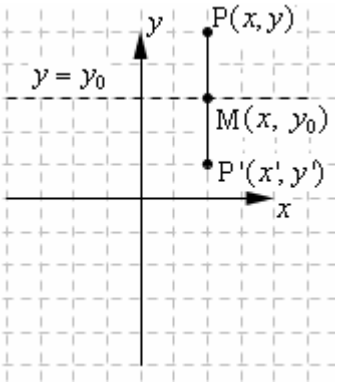
$$\boldsymbol{s_{asse\ x}}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE *y*



$$\boldsymbol{s_{asse\ y}}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = -x} \\ \boldsymbol{y' = y} \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO A UNA PARALLELA ALL'ASSE *x*



M è il punto medio di PP', perciò

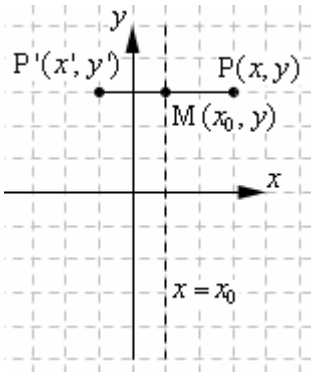
$$y_0 = \frac{y + y'}{2}$$

$$\downarrow$$

$$y' = 2y_0 - y$$

$$\boldsymbol{s_{y=y_0}}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = x} \\ \boldsymbol{y' = 2y_0 - y} \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO A UNA PARALLELA ALL'ASSE *y*



M è il punto medio di PP', perciò

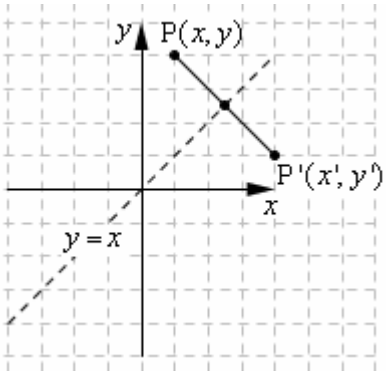
$$x_0 = \frac{x + x'}{2}$$

$$\downarrow$$

$$x' = 2x_0 - x$$

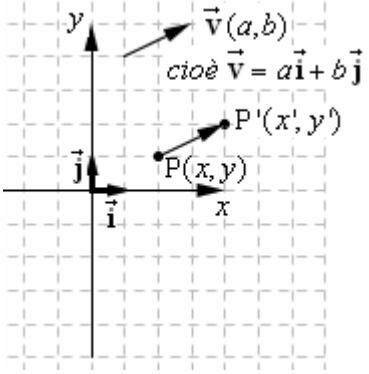
$$\boldsymbol{s_{x=x_0}}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = 2x_0 - x} \\ \boldsymbol{y' = y} \end{cases}$$

SIMMETRIA RISPETTO ALLA BISETTRICE DEL 1° E 3° QUADRANTE



$$\boldsymbol{s_{y=x}}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = y} \\ \boldsymbol{y' = x} \end{cases}$$

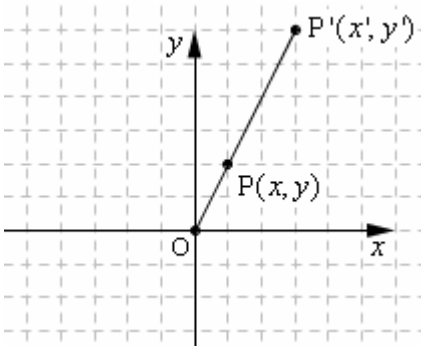
TRASLAZIONE DI VETTORE $\vec{\mathbf{v}}(a, b)$ ossia di componente orizzontale *a* e verticale *b*



$$\boldsymbol{\tau_{\vec{v}}}: \begin{cases} \boldsymbol{x' = x + a} \\ \boldsymbol{y' = y + b} \end{cases}$$

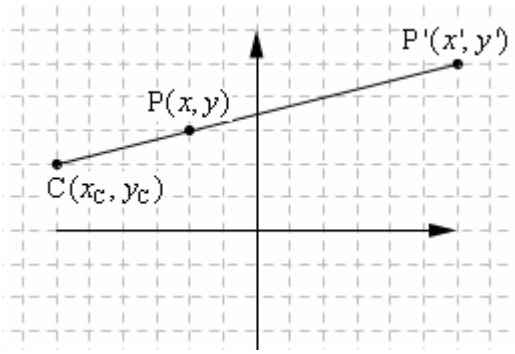
$\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ sono i cosiddetti "versori" degli assi (di modulo unitario). Nell'esempio a fianco, è a=2, b=1

OMOTETIA DI CENTRO L'ORIGINE E RAPPORTO $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (nella figura è $k = 3$)



$$\omega_{O,k} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

OMOTETIA DI CENTRO $C(x_C, y_C)$ E RAPPORTO $k \in \mathbb{R}^*$ (nella figura è $k = 3$)



$$CP' = k \cdot CP \text{ (segmenti orientati)}$$

$$\downarrow$$

$$x_{P'} - x_C = k(x_P - x_C)$$
$$y_{P'} - y_C = k(y_P - y_C)$$

$$\omega_{C,k} : \begin{cases} x' - x_C = k(x - x_C) \\ y' - y_C = k(y - y_C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_C \\ y' = ky + (1-k)y_C \end{cases} \text{ da cui, ponendo } \begin{matrix} (1-k)x_C = a \\ (1-k)y_C = b \end{matrix}$$

$$\omega_{C,k} : \begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases} \text{ (NOTA)}$$

NOTA Se le equazioni di un'omotetia sono assegnate sotto la forma $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$

allora sarà possibile risalire al centro di omotetia in due modi alternativi:

1) ricordando le posizioni

$$a = (1-k)x_C$$
$$b = (1-k)y_C$$

da cui:

$$x_C = \frac{a}{1-k}$$
$$y_C = \frac{b}{1-k}$$

2) oppure semplicemente determinando il punto unito della trasformazione.

Esempio:

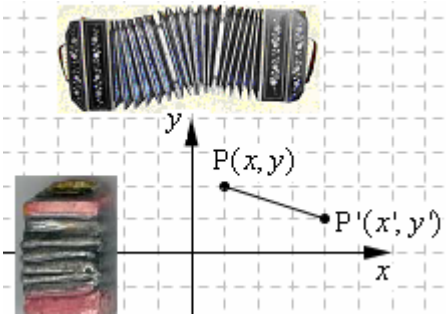
per trovare il centro C dell'omotetia $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y + 5 \end{cases}$

mi basta trovare il punto (x, y)

la cui immagine (x', y') coincide con (x, y)!

$$\begin{cases} x = 3x - 4 \\ y = 3y + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5/2 \end{cases} \quad C\left(2, -\frac{5}{2}\right)$$

DILATAZIONE DI CENTRO L'ORIGINE E RAPPORTI h (orizzontale), k (verticale)
$h, k \in \mathbb{R}^*$; nella figura è $h = 4$, $k = 1/2$



$$\delta_{O,h,k} : \begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$$

Nella figura,
la fisarmonica orizzontale
si apre (h=4),
quella verticale
si chiude (k=1/2)

Generalizzazione:
se il centro non fosse l'origine
ma un dato punto

$$C(x_C, y_C),$$

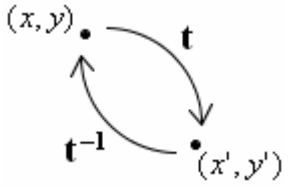
le equazioni diventerebbero

$$\delta_{C,h,k} : \begin{cases} x' - x_C = h(x - x_C) \\ y' - y_C = k(y - y_C) \end{cases}$$

17. COME SCRIVERE LE EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE INVERSA DI UNA TRASFORMAZIONE DATA

Consideriamo una trasformazione t di equazioni

$$t: \begin{cases} x' = A(x,y) \\ y' = B(x,y) \end{cases}$$



Per **"trasformazione inversa" della t** si intende, come sappiamo, quella **trasformazione** (si indica con t^{-1}) **che fa "tornare indietro", dal punto (x', y') al punto (x, y).**

Abbiamo già osservato che:

- l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
- l'inversa di un'omotetia di centro C e rapporto k è l'omotetia di centro C e rapporto $1/k$;
- l'inversa di una simmetria (centrale o assiale) è la simmetria stessa; ecc.

Ma **come si fa, data una trasformazione, a scrivere le equazioni della trasformazione inversa?** Vediamo.

Si prendono le equazioni della trasformazione data …

IN GENERALE:

$$t: \begin{cases} x' = A(x,y) \\ y' = B(x,y) \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$t: \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$$

… e si risolve il sistema rispetto a x ed y, isolando cioè x, y:

$$t^{-1}: \begin{cases} x = C(x',y') \\ y = D(x',y') \end{cases} \quad (1)$$

$$t^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{x'+2}{3} \\ y = \dfrac{y'+4}{3} \end{cases} \quad (1)$$

NOTA: in questo caso il procedimento di inversione è stato semplicissimo; nella pagina a fianco troverai esercizi più complicati

Fatto! Ecco che abbiamo ricavato le equazioni della trasformazione inversa.

In questo momento nelle equazioni della trasformazione inversa, così come le abbiamo ottenute, il punto INIZIALE è indicato con (x', y') e il punto FINALE con (x, y): $(x', y') \xrightarrow{t^{-1}} (x, y)$.

MA NOI, SE VOGLIAMO, POSSIAMO SCAMBIARE I SIMBOLI, indicando, in queste equazioni della trasformazione inversa, il punto INIZIALE con (x, y) e quello FINALE con (x', y'):

$(x, y) \xrightarrow{t^{-1}} (x', y')$,

il che corrisponde a pensare la t^{-1} come una trasformazione a sé stante, liberandoci dal doverla per forza immaginare come l'inversa di un'altra.

Se facciamo così, otteniamo:

$$t^{-1}: \begin{cases} x' = C(x,y) \\ y' = D(x,y) \end{cases} \quad (2)$$

$$t^{-1}: \begin{cases} x' = \dfrac{x+2}{3} \\ y' = \dfrac{y+4}{3} \end{cases} \quad (2)$$

… ed è importante capire che **le equazioni (1) e le equazioni (2) sono … LA STESSA COSA**, **nel senso che sia le (1) che le (2) individuano la medesima trasformazione, la nostra brava t^{-1} …**

… la differenza sta solo nei *simboli* con cui si indicano le coordinate del punto iniziale e di quello finale.

RICAPITOLAZIONE

Sia t la trasformazione di equazioni $t: \begin{cases} x' = A(x,y) \\ y' = B(x,y) \end{cases}$

Se vogliamo scrivere le EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE INVERSA t^{-1}

1) invertiamo le equazioni di t isolando, in esse, x e y e ottenendo $t^{-1}: \begin{cases} x = C(x',y') \\ y = D(x',y') \end{cases}$

2) scambiamo (x, y) con (x', y') (almeno nei casi in cui vogliamo pensare la t^{-1} come una trasf. a sé stante) così da scrivere la t^{-1} nella forma, equivalente alla precedente ma più consueta, $t^{-1}: \begin{cases} x' = C(x,y) \\ y' = D(x,y) \end{cases}$

ALTRI ESEMPI

- Invertire la trasformazione $t:\begin{cases}x'=x-y\\y'=2y-4\end{cases}$

Interpreto le equazioni come finalizzate a ricavare la coppia (x,y) nota la coppia (x',y');
scambio perciò i membri e innanzitutto faccio in modo che a primo membro ci siano soltanto x e y:

$$\begin{cases}x-y=x'\\2y-4=y'\end{cases};\quad\begin{cases}x-y=x'\\2y=y'+4\end{cases}$$

dopodiché ricavo x e y:

$$\begin{cases}y=\dfrac{y'+4}{2}\\x=x'+y=x'+\dfrac{y'+4}{2}=\dfrac{2x'+y'+4}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2x'+y'+4}{2}\\y=\dfrac{y'+4}{2}\end{cases}$$

Ora posso scambiare la coppia (x,y) con la (x',y') e, se voglio, spezzare le frazioni:

$$t^{-1}\begin{cases}x'=\dfrac{2x+y+4}{2}\\y'=\dfrac{y+4}{2}\end{cases}\quad\text{oppure}\quad t^{-1}\begin{cases}x'=x+\dfrac{1}{2}y+2\\y'=\dfrac{1}{2}y+2\end{cases}$$

- Invertire la trasformazione $t:\begin{cases}x'=2x+y+1\\y'=x-2y\end{cases}$

Porto x e y, che sono le mie incognite, a primo membro: $\begin{cases}2x+y=x'-1\\x-2y=y'\end{cases}$

dopodiché ricavo x e y:

$$\begin{cases}x=y'+2y\\2(y'+2y)+y=x'-1;\quad 2y'+4y+y=x'-1;\quad 5y=x'-2y'-1;\quad y=\dfrac{x'-2y'-1}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{x'-2y'-1}{5}\\x=y'+2y=y'+2\cdot\dfrac{x'-2y'-1}{5}=y'+\dfrac{2x'-4y'-2}{5}=\dfrac{5y'+2x'-4y'-2}{5}=\dfrac{2x'+y'-2}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{2x'+y'-2}{5}\\y=\dfrac{x'-2y'-1}{5}\end{cases}$$

Ora posso scambiare la coppia (x,y) con la (x',y') e, se voglio, spezzare le frazioni:

$$t^{-1}\begin{cases}x'=\dfrac{2x+y-2}{5}\\y'=\dfrac{x-2y-1}{5}\end{cases}\quad\text{oppure}\quad t^{-1}\begin{cases}x'=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{5}y-\dfrac{2}{5}\\y'=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}y-\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

- Invertire la trasformazione $t:\begin{cases}x'=x+y\\y'=x-3y\end{cases}$

$$\begin{cases}x+y=x'\\x-3y=y'\end{cases}\quad\begin{matrix}(1)-(2)\\(1)\end{matrix}\quad\begin{cases}4y=x'-y';\quad y=\dfrac{x'-y'}{4}\\x=x'-y=x'-\dfrac{x'-y'}{4}=\dfrac{4x'-x'+y'}{4}=\dfrac{3x'+y'}{4}\end{cases}\rightarrow\quad t^{-1}\begin{cases}x'=\dfrac{3x+y}{4}\\y'=\dfrac{x-y}{4}\end{cases}$$

18. EQUAZIONE DELL' IMMAGINE DI UNA CURVA ASSEGNATA, ovvero:
data una trasformazione, tramite le sue equazioni, e data una curva, tramite la sua equazione, scrivere l'equazione della curva immagine.

Consideriamo la trasformazione t di equazioni $\boxed{t: \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}}$

e prendiamo la curva γ di equazione $\boxed{\gamma: \ y = 2x + 1}$

Vogliamo determinare l'equazione della curva immagine $\gamma' = t(\gamma)$.

Ragioniamo in questo modo: la curva immagine $\gamma' = t(\gamma)$ è l'insieme dei punti del piano cartesiano, le cui CONTROIMMAGINI appartengono alla curva γ.

Prendiamo perciò un generico punto del piano cartesiano.
Indichiamone le coordinate con (x', y'), perché noi vogliamo pensare quel punto come l'IMMAGINE di un altro punto (x, y) al quale ci proponiamo di risalire.

Che coordinate avrà la CONTROIMMAGINE del nostro punto (x', y')?
Per rispondere dovremo INVERTIRE le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'+2}{3} \\ y = \dfrac{y'+4}{3} \end{cases}$$

e con ciò possiamo dire che la controimmagine di un generico punto (x', y') del piano cartesiano

è il punto le cui coordinate sono $\left(\dfrac{x'+2}{3}, \dfrac{y'+4}{3} \right)$

Adesso possiamo impostare la seguente catena di doppie implicazioni:

$$(x', y') \in \gamma' \ \leftrightarrow \ \left(\frac{x'+2}{3}, \frac{y'+4}{3} \right) \in \gamma \ \leftrightarrow \ \frac{y'+4}{3} = 2 \cdot \frac{x'+2}{3} + 1 \ \leftrightarrow \ y' = 2x' + 3$$

Pertanto un generico punto (x', y') del piano cartesiano appartiene alla curva γ'
se e solo se le sue coordinate verificano l'uguaglianza $\boxed{y' = 2x' + 3}$.

Ma ciò significa che quest'ultima equazione, la $y' = 2x' + 3$,
E' GIA' L'EQUAZIONE di γ' cercata,
proprio perché è un'uguaglianza che è verificata se e solo se (x', y') è un punto di γ'!

I simboli x', y' sono qui usati per indicare le coordinate del generico punto del piano cartesiano.
Dunque, volendo, essi possono essere tranquillamente sostituiti con i più consueti simboli x, y.

Concludendo, l'equazione di γ' è: $\boxed{y = 2x + 3}$.

RICAPITOLAZIONE E GENERALIZZAZIONE

Sia t la trasformazione di equazione $t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$

e sia γ una curva di equazione $y = f(x)$ oppure $F(x, y) = 0$.

Se vogliamo scrivere l' EQUAZIONE DELLA CURVA IMMAGINE γ', i passi sono i seguenti:

1) **INVERTIAMO** le equazioni $\begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$ in modo da ottenere $\begin{cases} x = C(x', y') \\ y = D(x', y') \end{cases}$
2) **SOSTITUIAMO** nell'equazione della curva data
3) **SOPPRIMIAMO GLI APICI**.

OSSERVAZIONE
Se abbiamo a disposizione le equazioni della TRASFORMAZIONE INVERSA,
già nella forma "a simboli scambiati" $t^{-1}: \begin{cases} x' = C(x, y) \\ y' = D(x, y) \end{cases}$,
il procedimento equivale semplicemente a
SOSTITUIRE I SECONDI MEMBRI DI QUESTE EQUAZIONI nell'equazione della curva assegnata.

19. EQUAZIONE DELLA CONTROIMMAGINE DI UNA CURVA DATA

Data una trasformazione *t* di equazioni $t:\begin{cases}x'=A(x,y)\\y'=B(x,y)\end{cases}$

e data una curva γ di equazione $y=f(x)$ oppure $F(x,y)=0$,
SE SI SOSTITUISCONO NELL'EQUAZIONE DELLA CURVA γ **, AL POSTO DI *x* E *y*,**
I DUE SECONDI MEMBRI $A(x,y)$ **e** $B(x,y)$ **,**
SI OTTIENE L'EQUAZIONE ...
***NON* DELL'IMMAGINE, *BENSI'* DELLA CONTROIMMAGINE**
DELLA CURVA CONSIDERATA.

Ad esempio, con $t:\begin{cases}x'=3x-2\\y'=3y-4\end{cases}$ e $\gamma:\ y=2x+1,$

facendo la sostituzione $y=2x+1\ \rightarrow\ 3y-4=2(3x-2)+1$

si perviene a $y=2x+\frac{1}{3}$ che è la *contro*immagine della γ

(puoi controllarlo agevolmente con un disegno se osservi che
la trasformazione *t* del nostro esempio è l'omotetia di rapporto 3 e centro (1,2))

GIUSTIFICAZIONE

Un generico punto (x,y) del piano cartesiano appartiene alla curva controimmagine di γ se e solo se l'immagine di (x,y), ossia il punto di coordinate $x'=3x-2,\ \ y'=3y-4$, appartiene a γ.
Ma ciò avviene se e solo se ,
sostituendo le espressioni $3x-2,\ 3y-4$ al posto di *x* e di *y* rispettivamente, nell'equazione di γ ,
si ottiene un'uguaglianza vera.

Riassumendo tutto il ragionamento in una catena di doppie implicazioni:

$$(x,y)\in t^{-1}(\gamma)\ \leftrightarrow\ (3x-2,\ 3y-4)\in\gamma\ \leftrightarrow\ 3y-4=2(3x-2)+1$$

ESERCIZI SU:
TRASFORMAZIONE INVERSA, CURVA IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Ecco qui di seguito una piccola rassegna di affinità. Scegline una e rispondi ai quesiti sottostanti.

$t_1:\begin{cases}x'=-2x+3\\y'=-2y\end{cases}$ $t_2:\begin{cases}x'=-x+6\\y'=-y-4\end{cases}$ $t_3:\begin{cases}x'=4-x\\y'=y\end{cases}$ $t_4:\begin{cases}x'=x+6\\y'=y-4\end{cases}$

$t_5:\begin{cases}x'=3x\\y'=-2y\end{cases}$ $t_6:\begin{cases}x'=x+y\\y'=2x-y-1\end{cases}$ $t_7:\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$ $t_8:\begin{cases}x'=x-y-1\\y'=x+y+1\end{cases}$ $t_9:\begin{cases}x'=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y\\y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\end{cases}$

a) 1) Quanto vale la "costante di affinità" $D=ad-bc$?
2) L'affinità in esame è diretta o è inversa?
3) E' una isometria?
4) E' un "caso particolare" fra quelli del paragrafo 16
(traslazione, simmetria rispetto a un punto o a una parallela agli assi, omotetia …)?

b) 1) Determina, tramite passaggi algebrici, le equazioni dell'affinità inversa.
2) L'affinità in esame è involutoria?
3) Nel caso l'affinità considerata fosse "particolare", abbi cura di controllare se è confermato che
- l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
- l'inversa di un'omotetia di rapporto *k* è un'omotetia con lo stesso centro, e rapporto 1/*k*;
- l'inversa di una simmetria (centrale o assiale) è la simmetria stessa

c) Determina l'immagine e poi la controimmagine:
1) della retta $r:\ y=2x+1$ 2) della circonferenza $\gamma:\ x^2+y^2=1$

SOLUZIONI + link agli SVOLGIMENTI COMPLETI: pagina seguente

SOLUZIONI **Per gli SVOLGIMENTI COMPLETI, puoi cliccare su questa freccia** ⇨

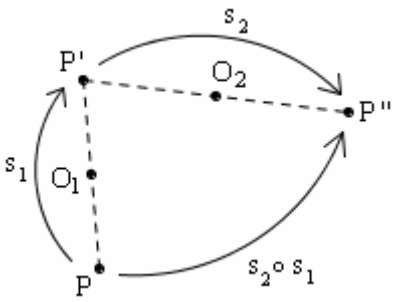
t_1	a1) D = +4 a2) Diretta a3) No a4) Sì, omotetia	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$ b2) No b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 8$ c1) Controimmagine: $y = 2x - \frac{7}{2}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$
t_2	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) Sì, simm. centr.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -x + 6 \\ y' = -y - 4 \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 17$ c1) Controimmagine: $y = 2x - 17$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$ c2) Controimm.: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$
t_3	a1) D = −1 a2) Inversa a3) Sì a4) Sì, simm. ass.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = y \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = -2x + 9$ c1) Controimmagine: $y = -2x + 9$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$
t_4	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) Sì, traslazione	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = x - 6 \\ y' = y + 4 \end{cases}$ b2) No b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 15$ c1) Controimmagine: $y = 2x + 17$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$ c2) Controimm.: $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 51 = 0$
t_5	a1) D = −6 a2) Inversa a3) No a4) Sì, dilatazione	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$ b2) No b3) ⇨	c1) Immagine: $y = -\frac{4}{3}x - 2$ c1) Controimmagine: $y = -3x - \frac{1}{2}$ c2) Immagine: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ c2) Controimmagine: $9x^2 + 4y^2 = 1$
t_6	a1) D = −3 a2) Inversa a3) No a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{x + y + 1}{3} \\ y' = \frac{2x - y - 1}{3} \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -2$ c1) Controimmagine: $y = -\frac{2}{3}$ c2) Imm.: $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 4y - 7 = 0$ c2) Contr.: $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 2y = 0$
t_7	a1) D = −1 a2) Inversa a3) Sì a4) Sì, simm. ass.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c1) Controimmagine: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 = 1$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 = 1$
t_8	a1) D = +2 a2) Diretta a3) No a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{x + y}{2} \\ y' = \frac{-x + y - 2}{2} \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -3x - 4$ c1) Controimmagine: $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ c2) Controimm.: $2x^2 + 2y^2 + 4y + 1 = 0$
t_9	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -2x - 1$ c1) Controimmagine: $y = \frac{2}{11}x + \frac{5}{11}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 = 1$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 = 1$

20. EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE COMPOSTA (detta anche "trasformazione PRODOTTO")

Sappiamo che **"comporre" due trasformazioni significa "applicarle successivamente".**

Consideriamo ad esempio due punti fissi O_1 e O_2, e

- applichiamo al generico punto P del piano innanzitutto la simmetria s_1 di centro O_1, ottenendo un certo punto P';
- poi, a questo P', applichiamo la simmetria s_2 di centro O_2 pervenendo ad un nuovo punto P".



Possiamo ora pensare alla trasformazione che muta *direttamente* P in P": questa sarà indicata con $s_2 \circ s_1$
(si scrive per prima la trasformazione che viene applicata per ultima!)
e sarà chiamata
"trasformazione *composta*", o anche "trasformazione *prodotto*".

- Osserviamo che **la composizione di due trasformazioni non è, in generale, commutativa**: vai a riprendere l'esempio appena fatto, e verifica che $s_2 \circ s_1 \neq s_1 \circ s_2$.
- Ribadiamo ancora:
  SI DEVE APPLICARE PER PRIMA LA TRASFORMAZIONE CHE È SCRITTA PER ULTIMA.
  Se trovo scritto $f \circ g$ devo applicare prima g e poi f
  (ciò vale sia con le trasformazioni che, più in generale, con tutte le funzioni).

Facciamo un esempio che mostri come si scrivono le equazioni della trasformazione composta, date le equazioni delle trasformazioni componenti:

$$\boxed{t_1 : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y - 3 \end{cases}} \quad \boxed{t_2 : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y + 1 \end{cases}}$$

Se è richiesto di ricavare le equazioni di $t_2 \circ t_1$, allora faccio così (devo applicare prima t_1 e poi t_2):

$$(x, y) \xrightarrow{t_1} (x', y') \xrightarrow{t_2} (x'', y'')$$

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y - 3 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x'' = 2x' \\ y'' = y' + 1 \end{cases}} \begin{matrix} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ = y - 3 + 1 = y - 2 \end{matrix}$$

e ho, in definitiva:

$$\boxed{t_2 \circ t_1 : \begin{cases} x'' = 2x + 2y \\ y'' = y - 2 \end{cases}}$$

I punti iniziale e finale sono qui indicati rispettivamente con (x, y) e (x'', y'');
per ripristinare la notazione più consueta, potrei, volendo, trascrivere
ribattezzando il punto finale con (x', y'):

$$\boxed{t_2 \circ t_1 : \begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = y - 2 \end{cases}}$$

ESERCIZI SULLA TRASFORMAZIONE COMPOSTA

1) Andando a riprendere le affinità $t_1 \ldots t_9$ di cui all'esercizio precedente:
   a) scegli qualche coppia t_i, t_j e scrivi le equazioni della trasformazione composta $t_i \circ t_j$;
   b) componi qualche trasformazione con la sua inversa, per verificare che così facendo si ottiene l'identità, ossia la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

2) Le equazioni di due generiche traslazioni sono $\tau_1 : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ $\tau_2 : \begin{cases} x' = x + c \\ y' = y + d \end{cases}$
   Fanne, con passaggi algebrici, la composizione e verifica che si ottiene ancora una traslazione.

21. LO STUDIO DI UN'AFFINITA'

ESEMPIO. Studiare l'affinità t di equazioni $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$

"Studiare" un'affinità significa determinarne le caratteristiche essenziali e perciò:

1) stabilire il valore del determinante $D = ad - bc$ che è detto "costante di affinità",

- il cui *segno* ci dice se l'affinità in questione è (vedi paragrafo 15)
  - *diretta* (D>0), cioè *"conserva il verso delle figure"*
  - o *inversa* (D<0), cioè *"inverte il verso delle figure"*
- il cui *valore assoluto*
  ci dà il rapporto S'/S fra l'area di una figura "trasformata" e l'area della figura di partenza
- e la cui *osservazione* ci permette di riconoscere se eventualmente si tratti
  di una isometria o di una similitudine, o comunque di un caso particolare

2) determinare gli eventuali "punti uniti"
(così facendo, si troveranno anche le eventuali "rette di punti uniti")

3) determinare le eventuali "rette unite".

OSSERVAZIONE PRELIMINARE IMPORTANTE

Prima di tutto converrà però osservare bene le equazioni dell'affinità,
perché se per caso si riconosce subito che si tratta di una "affinità notevole"
(traslazione, simmetria centrale o assiale, omotetia...),
allora è INUTILE fare tanti calcoli!

Ad esempio, in una omotetia è geometricamente ovvio che

- *l'unico punto unito è il centro di omotetia*
- *non si ha nessuna retta di punti uniti*
- *e si hanno invece infinite rette unite (tutte e sole quelle passanti per il centro di omotetia).*

Se non siamo in un caso particolare, invece, si opererà come illustrato qui di seguito.

1) CALCOLO DEL DETERMINANTE $D = ad - bc$ (costante di affinità o "rapporto" di affinità)

$$t: \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = \quad 2y - 1 \end{cases}$$

Ho trascritto le equazioni incolonnando i termini in modo opportuno;
questo per evitare possibili errori di distrazione nel calcolo della costante di affinità D.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

- Essendo $D < 0$, l'affinità è **inversa** (cioè inverte il verso delle figure)
- Essendo $|D| = 2$, l'affinità **raddoppia le aree**
- La trasformazione **non è un'isometria**
  (ricordiamo che si ha una isometria se e solo se D vale +1 o –1,
  e inoltre ha gli elementi di una diagonale uguali fra loro e quelli dell'altra diagonale opposti fra loro)
  e neppure una *similitudine*.

2) DETERMINAZIONE DEI PUNTI UNITI

Un punto P si dice "unito" in una trasformazione t se è mutato in sé stesso dalla t;
in altre parole, se l'immagine di P attraverso la t è lo stesso P; insomma, se

$$t(P) = P.$$

Perciò **P(x, y) è unito se e solo se (x', y') = (x, y).**
Per la ricerca dei punti uniti basterà perciò sostituire, nelle equazioni della trasformazione,
***x* e *y* al posto di *x'* e *y'*, per poi risolvere il sistema in *x*, *y* così ottenuto.**

$$\begin{cases} x = y - x \\ y = 2y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \mathrm{U}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ è punto unito}$$

3) DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

Nell'affinità da noi considerata $t: \begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$ *non* si hanno *rette di punti uniti*:

infatti abbiamo visto che c'è *un solo* punto unito, quello di coordinate (1/2, 1).

Si potrebbero però avere *rette unite*
(riguardo alla differenza fra "retta unita" e "retta di punti uniti",
pensa sempre al caso della simmetria assiale:
l'asse di simmetria è una retta "di punti uniti", *caso particolare* di retta "unita",
mentre sono rette "unite", ma non "di punti uniti", tutte quelle perpendicolari all'asse di simmetria).

Per la determinazione delle rette unite, ti presento due metodi:

- **il primo** è quello più "spontaneo", ma **comporta di solito calcoli piuttosto pesanti;**
- **l'altro è più ingegnoso e veloce.**

❑ 1° METODO PER LA DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

a) Consideriamo la generica retta $r: y = mx + q$

b) scriviamo le equazioni della sua trasformata $r' = t(r)$

c) e chiediamoci infine sotto quali condizioni per i parametri m, q la retta r' coincide con r.

Osserviamo che in questo modo
VENGONO "TAGLIATE FUORI" LE RETTE PARALLELE ALL'ASSE *y*,
la cui equazione *non* si può portare sotto la "forma esplicita" $y = mx + q$.
Vuol dire che ALLA FINE COMPLETEREMO IL PROCEDIMENTO
occupandoci anche di tali rette, che inizialmente escludiamo dalla nostra attenzione.

$$t: \begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases} \qquad t^{-1}: \begin{cases} y = \dfrac{y'+1}{2} \\ x = y - x' = \dfrac{y'+1}{2} - x' = \dfrac{y'+1-2x'}{2} \end{cases}$$

$\boxed{r: y = mx + q} \;\rightarrow\; r': \dfrac{y'+1}{2} = m \cdot \dfrac{y'+1-2x'}{2} + q$ e, sopprimendo gli apici e facendo i calcoli,

$\boxed{r':}\; y + 1 = my + m - 2mx + 2q;\; (1-m)y = -2mx + m + 2q - 1;\; \boxed{y = -\dfrac{2m}{1-m}x + \dfrac{m+2q-1}{1-m}\;\; (m \neq 1)}$

$\boxed{r' \equiv r} \leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2m}{1-m} = m \\ \dfrac{m+2q-1}{1-m} = q \end{cases}$

Riflettiamo sulla condizione posta, $m \neq 1$.
Essa significa che il procedimento di isolare *y*
è possibile solo nel caso $m \neq 1$;
occorre allora chiedersi cosa accadrebbe nel caso $m = 1$.
Risposta immediata:
la retta r' sarebbe parallela all'asse *y*, mentre r non lo è;
quindi, nel caso $m = 1$, r non sarebbe unita.

$\begin{cases} -2m = m - m^2;\;\; m^2 - 3m = 0;\;\; m(m-3) = 0;\;\; m = 0 \vee m = 3 \\ \ldots \end{cases}$

$$\begin{cases} \boxed{m = 0} \\ \dfrac{2q-1}{1} = q;\;\; \boxed{q = 1} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \boxed{m = 3} \\ \dfrac{3+2q-1}{1-3} = q;\;\; 2 + 2q = -2q;\;\; \boxed{q = -\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

Abbiamo così trovato le *rette unite*: $\boxed{r_1:\; y = 1}$ e $\boxed{r_2:\; y = 3x - \dfrac{1}{2}}$.

Come si diceva prima, a questo punto
il procedimento di ricerca delle rette unite **non è ancora terminato**.
Prendendo come "generica retta" $y = mx+q$,
abbiamo escluso dalla nostra considerazione le rette parallele all'asse *y*.
Ma anche una retta "verticale" (equazione: $x = k$) potrebbe eventualmente essere retta unita.
Dunque:

$$r:\; x = k \;\rightarrow\; r': \frac{y+1-2x}{2} = k$$

e si vede che r' non può, per alcun valore di *k*, essere verticale,
perché il termine in *y* non se ne può andare.
Quindi *r*, se è verticale, non può essere unita.

- **2° METODO (PIU' VELOCE) PER LA DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE**

Possiamo risparmiare un bel po' di calcoli col seguente ragionamento:
una retta r è unita nell'affinità t se e solo se coincide con la sua immagine, cioè risulta $t(r) = r$.
Ma allora, se r è unita, anche la CONTROIMMAGINE di r è r (e viceversa)!

Quindi

il 2° metodo consiste nel determinare le equazioni della retta CONTROIMMAGINE di *r* anziché della retta immagine
(il procedimento è più facile, perché non si è costretti ad invertire l'affinità!);
poi si confronterà *r* con la sua controimmagine, per stabilire quando coincidono
(= per quali valori di m, q coincidono).

$$t:\ \begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$$

Con $m=2$ $t^{-1}(r)$ è verticale e non può quindi coincidere con r, che non lo è

$$r: y = mx + q \ \rightarrow$$

$$t^{-1}(r):\ 2y - 1 = m(y - x) + q;\ \ ...;\ \ (2-m)y = -mx + q + 1; \qquad y = -\frac{m}{2-m}x + \frac{q+1}{2-m} \quad (m \neq 2)$$

$$t^{-1}(r) \equiv r \leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2-m} = m \\ \frac{q+1}{2-m} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m = 2m - m^2; \quad m^2 - 3m = 0; \quad m(m-3) = 0; \quad m = 0 \vee m = 3 \\ \frac{q+1}{2-m} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ \frac{q+1}{2} = q \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m = 3 \\ \frac{q+1}{2-3} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ q = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m = 3 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \textit{da cui } \boxed{r_1:\ y = 1},\ \boxed{r_2:\ y = 3x - \frac{1}{2}}$$

Come al solito, abbiamo lasciato da parte provvisoriamente le rette verticali, e ora dovremo occuparci anche di esse:

$r: x = k \ \rightarrow\ t^{-1}(r):\ y - x = k$ *che non può coincidere con x=k, per nessun valore di k.*

UN ALTRO ESEMPIO.

Studiare l'affinità t di equazioni $\boxed{\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = 2 - y \end{cases}}$

1) CALCOLO DEL DETERMINANTE D = ad – bc (costante di affinità)

$$t:\ \begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = \ \ -y + 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

- Essendo $\mathrm{D} < 0$, l'affinità è **inversa** (cioè inverte il verso delle figure)
- Essendo $|\mathrm{D}| = 1$, l'affinità **conserva le aree** (muta sempre una figura, in un'altra con la stessa area)
- La trasformazione **non è un'isometria**
  (è vero che D vale –1,
  ma non accade che gli elementi di una diagonale siano uguali e quelli dell'altra diagonale opposti)
  e nemmeno una *similitudine*.

2) DETERMINAZIONE DEI PUNTI UNITI

$$\begin{cases} \cancel{x} = \cancel{x} - 2y + 2 \\ y = 2 - y \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = qualsiasi \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow$$

sono uniti tutti i punti con coordinate $(x, 1)$

vale a dire la retta $\boxed{y = 1}$ *è una* $\boxed{\text{retta di punti uniti}}$

3) DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

Utilizziamo il 2° metodo, più comodo e veloce!

$r : y = mx + q \quad \rightarrow$

$t^{-1}(r): \quad 2 - y = m(x - 2y + 2) + q;$

$2 - y = mx - 2my + 2m + q;$

$(2m - 1)y = mx + 2m + q - 2;$

$$y = \frac{m}{2m-1}x + \frac{2m+q-2}{2m-1} \quad \left(m \neq \frac{1}{2}; \text{ ma con } m = 1/2 \text{ si verifica subito che la retta non può essere unita} \right)$$

$$t^{-1}(r) \equiv r \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2m-1} = m \\ \dfrac{2m+q-2}{2m-1} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 2m^2 - m; \quad \cancel{2}m^2 - \cancel{2}m = 0; \quad m(m-1) = 0; \quad m = 0 \vee m = 1 \\ \dfrac{2m+q-2}{2m-1} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ \dfrac{q-2}{-1} = q \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ \dfrac{\cancel{2}+q-\cancel{2}}{2-1} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ q - 2 = -q \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ q = q \end{cases}$$

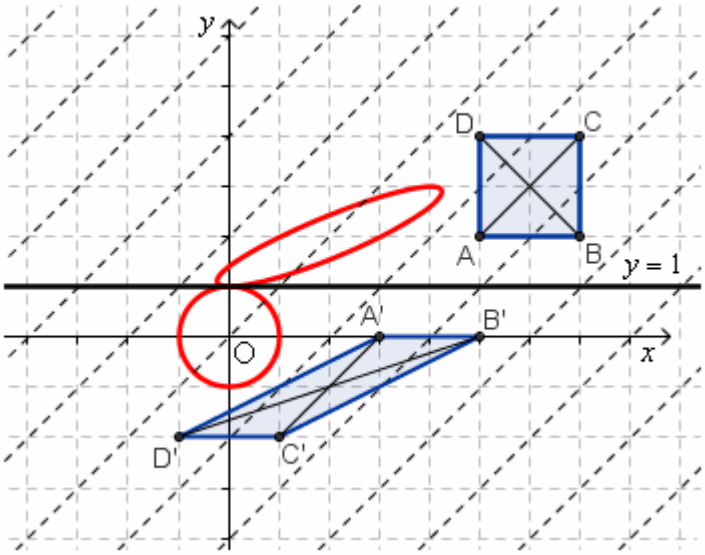
$$\begin{cases} m = 0 \\ q = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ q = qualsiasi! \end{cases}$$

Si può poi controllare che nessuna retta verticale $(x = k)$ *è unita*

E' perciò unita la retta con m=0 e q=1, ossia la $\boxed{y = 1}$
(in effetti, l'avevamo trovata già prima come retta di punti uniti!)

e sono unite tutte le rette con m=1 e q *qualsiasi*, ossia tutte le rette di equazione $\boxed{y = x + q}$
(esse costituiscono il fascio di tutte le rette parallele alla bisettrice del 1° e 3° quadrante).

In definitiva, abbiamo in questa trasformazione una retta formata da punti uniti, più infinite altre rette, che sono "unite" ma non "di punti uniti".



La figura qui a fianco cerca di dare un'idea di come operi questa affinità, mostrando

- la retta di punti uniti (a tratto marcato),
- alcune fra le infinite rette unite (tratteggiate)
- e inoltre una circonferenza con la rispettiva immagine, un quadrato con diagonali e la rispettiva immagine

22. ESERCIZI SULLE AFFINITA' (soluzioni alle pagine 312-313-314)

❑ **Studia le affinità seguenti:**

1) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2x \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x - y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = 4x + y - 1 \\ y' = -x + 2y + 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = x + 3y \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = \dfrac{-x + 2y + 2}{3} \\ y' = \dfrac{4x + y - 2}{3} \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y \end{cases}$

10) $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = -2x + 2y + 6 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x' = 7x + 24y \\ y' = 24x - 7y \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

15) $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 15 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y \\ y' = \dfrac{14}{5}x - \dfrac{2}{5}y \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ y' = -\dfrac{1}{2}y + 6 \end{cases}$

❑ **Esercizi vari**

19) Considera l'affinità di equazioni: $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = 2x - y \end{cases}$

e trova l'immagine e la controimmagine della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$
(circonferenza di centro l'origine e raggio 1)

20) Considera l'affinità di equazioni: $\begin{cases} x' = 3x - 2y - 1 \\ y' = 4x + y + 1 \end{cases}$

e trova l'immagine e la controimmagine della retta $x + y = 1$

21) Scrivi le equazioni:

a) della simmetria di centro $(2,3)$ b) della simmetria di centro $(-3,0)$

22) Scrivi le equazioni:

a) della simmetria s_1 di centro $C_1(1,1)$ b) della simmetria s_2 di centro $C_2(4,2)$

c) Successivamente, scrivi le equazioni dell'affinità composta $s_2 \circ s_1$, osservando che si tratta di una traslazione, il cui vettore è il doppio del vettore $\overrightarrow{C_1C_2}$

23) Dimostra *facendo uso di equazioni* che, in generale, il *prodotto*
(= composizione, applicazione successiva)
di due simmetrie di centri $C_1(x_1, y_1),\ C_2(x_2, y_2)$
è una traslazione il cui vettore è $2 \cdot \overrightarrow{C_1C_2}$
(supponendo di applicare prima s_1 poi s_2).

24) Scrivi le equazioni:

a) della simmetria il cui asse è la retta $x = 3$
b) della simmetria il cui asse è la retta $y = -1$

25) Scrivi le equazioni della simmetria: a) il cui asse è la retta $x = 1/2$ b) il cui asse è la retta $y = 1$

c) Successivamente, componi le due affinità
constatando che si ottiene la simmetria centrale di centro (1/2, 1).
Osserviamo che questa può anche essere interpretata
come una rotazione di 180° intorno al punto (1/2, 1):
ciò conferma che la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione.

26) Componi le due simmetrie assiali di assi $x = 1$ e $x = 3$,
constatando che (gli assi essendo paralleli) si ottiene una traslazione.

27) Componi (nell'ordine) le due simmetrie assiali aventi per assi
l'asse x e, rispettivamente, la retta $y = x$.
Applica poi la trasformazione ottenuta al triangolo OAB, con $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,2)$,
per constatare che si tratta di una rotazione di 90° in senso antiorario intorno all'origine.

28) Se io ti dico che le due curve di equazioni $x^2 + xy = 1$; $x^2 + xy + 2y = 5$
sono simmetriche l'una dell'altra rispetto a un punto, tu riesci a trovarmi le coordinate del punto?

29) Si sa che la curva di equazione $x^2 - xy + y^2 - x - 4y + 7 = 0$ è simmetrica rispetto a un punto
("simmetrica" vuol dire "simmetrica di sé stessa", ossia "mutata in sé stessa dalla simmetria").
Trovare le coordinate del punto.

30) Scrivi le equazioni:
a) dell'omotetia di centro $(3, 4)$ e rapporto -2
b) dell'omotetia di centro $(0, 1)$ e rapporto 3

31) Scrivi le equazioni:
a) dell'omotetia ω_1 di centro $C_1(1,2)$ e rapporto $k_1 = 3$
b) e dell'omotetia ω_2 di centro $C_2(4,-1)$ e rapporto $k_2 = 1/6$
c) Successivamente, scrivi le equazioni dell'affinità composta $\omega_2 \circ \omega_1$,
osservando che si tratta ancora di un'omotetia,
il cui rapporto è il prodotto dei rapporti delle due omotetie di partenza,
e il cui centro è allineato coi loro centri.

32) Scrivi le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = 4x$.

33) Scrivi le equazioni della simmetria assiale di asse $r : y = x - 1$
Determina poi i punti uniti e le rette unite servendoti delle equazioni trovate:
constaterai, come del tutto prevedibile,
che c'è tutta una retta di punti uniti (la $r : y = x - 1$, ovviamente)
mentre sono rette unite, senza essere rette di punti uniti, tutte le $y = -x + q,\ q \in \mathbb{R}$.

34) *Si può dimostrare che un'affinità è individuata in modo unico se, per 3 punti non allineati del piano, vengono assegnate le rispettive immagini (anch'esse non allineate).*

Ciò premesso, determina l'affinità che fa corrispondere le seguenti coppie di punti:
$O(0,0) \to O'(1,0)$ $A(1,0) \to A'(2,1)$ $B(0,1) \to B'(3,3)$

35) Determina le equazioni dell'affinità che fa corrispondere le seguenti coppie di punti:
$A(1,1) \to A'(0,4)$ $B(0,2) \to B'(2,4)$ $C(-1,1) \to C'(2,2)$
e successivamente trovane gli elementi uniti.

36) Spiega perché non può esistere nessuna affinità che trasformi la terna di punti
$(1,3)$; $(2,6)$; $(3,9)$ nella terna $(1,1)$; $(2,3)$; $(3,2)$.

37) Determina i coefficienti a, b, c, d, m, n in modo che l'affinità $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$
ammetta $y = x$ come retta di punti uniti, e muti $W(1,2)$ in $W'(2,0)$
Successivamente, stabilisci se l'affinità ammette altre rette unite oltre alla $y = x$.

38) Esistono valori dei parametri a, b tali che l'affinità $\begin{cases} x' = (a-1)x + by \\ y' = cx + (a-3)y + 4 \end{cases}$ sia un'isometria?

39) **UNA PROPRIETA' INTERESSANTE**

Dimostra che **ogni affinità "conserva il punto medio dei segmenti"**,
nel senso che l'immagine, attraverso una qualsiasi affinità, del punto medio di un segmento AB,
è *sempre* coincidente col punto medio del corrispondente segmento $A'B'$
(ricorda che l'ascissa del punto medio è la media delle ascisse, e analogamente per le ordinate).

SOLUZIONI

1) $D = 6$: affinità diretta che moltiplica per 6 le aree. Punto unito: l'origine. Rette unite: $y = 0$; $y = -x$.

2) $D = -2$: aff. inversa che raddoppia le aree. Punto unito: $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. Rette unite: $y = -2x - 2$; $y = x - \frac{1}{2}$.

3) $D = -2$: affinità inversa che raddoppia le aree. Punto unito: l'origine. Rette unite: $y = \frac{1}{3}x$; $x = 0$.

4) $D = 9$: affinità diretta che moltiplica per 9 le aree. Punto unito: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Retta unita: $y = -x$.

5) $D = 1$. E' un'isometria diretta; ha come punto unito $(-2, 2)$ e non ha nessuna retta unita.

6) $D = -3$: affinità inversa che triplica le aree.
Punto unito: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$. Due rette sono unite: la $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ e la $x = 1$.

7) $D = 2$. E' una similitudine diretta, che raddoppia le aree
(quindi, essendo una similitudine, ingrandisce i segmenti in "scala", moltiplicandone le lunghezze per $\sqrt{2}$);
ha come punto unito $(0, 0)$ e non ha nessuna retta unita.

8) $D = -1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y = 2x - 1$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle di coefficiente angolare –1 ($y = -x + q,\ q \in \mathbb{R}$).

9) $D = -1$. E' una isometria inversa. Ha tutta una retta di punti uniti, la $y = 2x$,
e ha altre infinite rette unite, quelle della forma $y = -\frac{1}{2}x + q,\ q \in \mathbb{R}$.

10) $D = 2$: affinità diretta che raddoppia le aree. Non ha punti uniti. Ha una retta unita: la $y = 2x$

11) $D = -1$. E' una isometria inversa. Non ha punti uniti. Ha una retta unita, la $y = x + 1$.

12) $D = -1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y = \frac{1}{2}x$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle parallele all'asse y ($x = k,\ k \in \mathbb{R}$)

13) $D = -625$. E' una similitudine inversa. In questa similitudine, dato che le aree vengono moltiplicate per 625, le lunghezze dei segmenti vengono moltiplicate per 25.
Ha come punto unito l'origine, e ha le due rette unite $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$

14) $D = -1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y = x$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle di coeff. ang. 3 ($y = 3x + q,\ q \in \mathbb{R}$).

15) Avrai riconosciuto che di tratta della traslazione il cui vettore ha componenti (3, 15).
E' dunque un'isometria diretta (se calcoli la costante di affinità, la troverai uguale a +1
e vedrai che nel determinante i termini su di una diagonale sono uguali
e quelli sull'altra diagonale entrambi nulli e quindi interpretabili come opposti)
e non ha punti uniti, ma in compenso ha come rette unite tutte quelle parallele al vettore di traslazione,
ossia tutte quelle di equazione $y = 5x + q,\ q \in \mathbb{R}$.

16) $D = -2$: affinità inversa che raddoppia le aree. Ha una retta di punti uniti: $y = 2x$.
Oltre alla precedente, sono rette unite tutte le $y = -\frac{7}{4}x + q,\ q \in \mathbb{R}$.

17) $D = 3$: affinità diretta che triplica le aree.
Ammette tutta una retta di punti uniti (la $y = -x - 1$)
e infinite rette unite (quelle di equazione $y = x + q,\ q \in \mathbb{R}$).

18) Ti sei accorto che si tratta di un'omotetia?
Essa dimezza le lunghezze e moltiplica per ¼ le aree;
l'unico suo punto unito è il centro di omotetia $(2, 4)$
e ha invece infinite rette unite: se le ricerchi algebricamente, troverai
- le rette di equazione $y = mx - 2m + 4$,
  le quali, come puoi constatare sostituendo, passano tutte per il punto (2, 4),
  e hanno inclinazione non verticale che varia al variare di m;
- più la $x = 2$, che è poi la retta verticale passante per (2, 4).

19) Immagine: $5x^2+2y^2-2xy+20x-4y+11=0$
Controimmagine: $5x^2+2y^2-2xy-4x-4y+3=0$

20) Immagine: $3x-5y+19=0$.
Controimmagine: $y=7x-1$

21) a) $\begin{cases} x'=4-x \\ y'=6-y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=-6-x \\ y'=-y \end{cases}$

22) a) $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=2-y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=8-x \\ y'=4-y \end{cases}$

c) Componendo, si ottiene $\begin{cases} x'=x+6 \\ y'=y+2 \end{cases}$ che è effettivamente una traslazione,

il cui vettore ha componenti $(6,2)$ mentre le componenti di $\overrightarrow{C_1C_2}$ sono $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)=(3,1)$

23) La simmetria di centro $C_1(x_1,y_1)$ ha equazioni: $\begin{cases} x'=2x_1-x \\ y'=2y_1-y \end{cases}$

e quella di centro $C_2(x_2,y_2)$ ha equazioni: $\begin{cases} x'=2x_2-x \\ y'=2y_2-y \end{cases}$.

Componiamole: $s_1:\begin{cases} x'=2x_1-x \\ y'=2y_1-y \end{cases}$ $s_2:\begin{cases} x''=2x_2-x' \\ y''=2y_2-y' \end{cases}$

$$s_2\circ s_1:\begin{cases} x''=2x_2-x'=2x_2-(2x_1-x)=2x_2-2x_1+x=x+2(x_2-x_1) \\ y''=2y_2-y'=2y_2-(2y_1-y)=2y_2-2y_1+y=y+2(y_2-y_1) \end{cases}$$

e $\begin{cases} x''=x+2(x_2-x_1) \\ y''=y+2(y_2-y_1) \end{cases}$ è proprio una traslazione, il cui vettore ha componenti $(2(x_2-x_1),\ 2(y_2-y_1))$ che sono proprio le componenti del vettore $2\overrightarrow{C_1C_2}$

24) a) $\begin{cases} x'=6-x \\ y'=y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=x \\ y'=-2-y \end{cases}$

25) a) $\begin{cases} x'=1-x \\ y'=y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'=x \\ y'=2-y \end{cases}$

26) L'affinità composta è $\begin{cases} x'=x+4 \\ y'=y \end{cases}$: si tratta effettivamente di una traslazione.

27) Si ottiene $\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases}$

28) Sottoponiamo una delle due curve, ad esempio la $x^2+xy=1$,
alla simmetria centrale avente per centro un punto (x_0,y_0) da determinarsi
(basterà effettuare, nell'equazione della curva, le sostituzioni $x\to 2x_0-x,\quad y\to 2y_0-y$).
Imponiamo poi che l'equazione così ottenuta coincida con l'equazione dell'altra curva.
Otteniamo così un sistema di tre equazioni nelle due incognite $x_0,\ y_0$.
Tale sistema, nonostante il numero delle incognite superi il numero delle equazioni,
è, eccezionalmente, possibile (si usa dire: "compatibile"), per il fatto che l'esercizio era stato costruito "ad hoc",
in modo che le due curve *fossero, effettivamente*, simmetriche rispetto ad un punto.
Si trova $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=2 \end{cases}$

29) $P_0(2,3)$

30) a) $\begin{cases} x' = -2x + 9 \\ y' = -2y + 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$

31) a) $\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = \frac{1}{6}x + \frac{10}{3} \\ y' = \frac{1}{6}y - \frac{5}{6} \end{cases}$ c) $\omega_2 \circ \omega_1 = \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 3 \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases}$ $k = \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{6} = k_1 \cdot k_2$; C(6, –3) *che è allineato con* $C_1(1,2)$ *e* $C_2(4,-1)$

32) Le relazioni che fanno passare dalla coppia (x, y) alla (x', y') si possono scrivere tenendo conto che:

- il punto medio del segmento PP' deve appartenere alla $y = 4x$: $\frac{y + y'}{2} = 4 \cdot \frac{x + x'}{2}$
- la retta PP' dev'essere perpendicolare alla $y = 4x$ e quindi avere coefficiente angolare –1/4: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{4}$

Ponendo a sistema le due relazioni e risolvendo rispetto a x', y' si ottiene: $\begin{cases} x' = -\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y \\ y' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y \end{cases}$

Per un controllo di correttezza,
puoi applicare la trasformazione a qualche punto del piano,
ad esempio $O(0,0)$; $A(1,4)$; $B(4,-1)$, od altri.

33) $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$

34) $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = x + 3y \end{cases}$

35) $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$

Punto unito: $(-2, -4)$.

Rette unite: $r_1 : y = -\left(\sqrt{2} - 1\right)x - 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$, $r_2 : y = \left(\sqrt{2} + 1\right)x + 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

36) Semplice: i primi 3 punti sono fra loro allineati, ma allora dovrebbero esserlo anche le rispettive immagini (un'affinità conserva l'allineamento!), mentre non lo sono.

37) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

Sono rette unite tutte quelle di coefficiente angolare -2:
$y = -2x + q,\ q \in \mathbb{R}$

38) Sì: $a = 2,\ b = c = 0$

39) Devi considerare una generica affinità
$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$,
due generici punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$,
il punto medio $M\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$ del segmento AB,
poi calcolare le coordinate delle rispettive immagini A', B' ed M',
infine trovare le coordinate del punto medio del segmento $A'B'$
e constatare che tale punto medio coincide con M'.

LE MATRICI
E
I) IL TEOREMA DI ROUCHE'-CAPELLI PER I SISTEMI LINEARI
II) LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE LINEARI

1. COS'E' E A COSA PUO' SERVIRE UNA "MATRICE"

E' assai frequente, in matematica, l'opportunità, o la necessità, di scrivere i dati da utilizzare inserendoli in modo opportuno all'interno di una tabella a righe e colonne.
Bene, uno schema di questo tipo viene chiamato "matrice".

Ad esempio, il modo più rapido ed essenziale per conservare l'informazione insita nel sistema

$$\begin{cases} 4x-7y=-1 \\ x+8y=29 \end{cases}$$

è di scriverne semplicemente la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 1 & 8 & 29 \end{pmatrix}$$

Quest'ultima è una matrice "2×3", ossia a 2 righe e 3 colonne.

Di norma, una matrice si indica con una lettera maiuscola, a fianco della quale si può scrivere, tra parentesi, il numero delle righe seguito da quello delle colonne.
Se per esempio decidiamo di chiamare "A" la matrice appena considerata, potremo scrivere

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 1 & 8 & 29 \end{pmatrix},$$

e avremo $\mathrm{A}(2\times 3)$.
Questa matrice ha 6 "elementi" o "termini" e 5 "linee", precisamente 2 righe e 3 colonne.
"Linea" è un termine generico che può indicare indifferentemente una riga oppure una colonna.

Ogni elemento presente in una matrice viene in genere indicato tramite la stessa lettera alfabetica utilizzata per contrassegnare la matrice, scritta però in minuscolo, e munita di una coppia di indici, il primo dei quali specifica la riga, e il secondo la colonna, su cui l'elemento è posizionato.

Riprendendo ad esempio la già considerata matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 1 & 8 & 29 \end{pmatrix}$,

potremmo indicare i suoi elementi con: $a_{1,1}=4;\ a_{1,2}=-7;\ a_{1,3}=-1;\ a_{2,1}=1;\ a_{2,2}=8;\ a_{2,3}=29$
(alcuni omettono la virgola fra l'indice di riga e quello di colonna).

Una matrice con una sola linea viene anche chiamata "vettore".

Ad esempio, $(2\ \ 4\ \ 8\ \ 16)$ è un "**vettore riga**"; $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ è un "**vettore colonna**".

2. LE MATRICI QUADRATE E I LORO DETERMINANTI

Se una matrice ha tante righe quante colonne, si dirà che quella matrice è "quadrata", e il numero delle sue righe o, indifferentemente, colonne verrà detto "ordine" di quella matrice.

Ad esempio, la matrice $\mathrm{M}(2\times 2)$ seguente: $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

è una matrice quadrata di ordine 2.

Per una matrice quadrata ha senso parlare di "determinante".
Dei "determinanti" si è già parlato nel Volume 1.

Nel caso della matrice M appena considerata, avremo

$$\det(\mathrm{M})=|\mathrm{M}|=\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=-5\cdot 10-(-3)\cdot 4=-50+12=-38.$$

Ancora:

$$\text{se } \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ \text{sarà}$$

$$\det(\mathrm{B})=|\mathrm{B}|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=3\cdot(24-14)-2\cdot(20-7)+1\cdot(-10+6)=\ldots=0$$

In una matrice quadrata,
la diagonale discendente si dice "diagonale principale",
l'altra "diagonale secondaria".

Riguardo ai **DETERMINANTI**, si potrebbe dimostrare che sussistono le utili **REGOLE** seguenti:

- **scambiando fra loro due linee parallele, il determinante cambia di segno**
- **scambiando le righe con le colonne, il valore del determinante non varia**
- **moltiplicando una linea (= ciascun elemento di una linea) per una costante, anche il valore del determinante risulterà moltiplicato per quella costante**
- **il valore di un determinante resta invariato se a una linea si sostituisce la somma di quella linea con un'altra ad essa parallela, eventualmente moltiplicata per una costante**

Capita inoltre con frequenza che non abbia particolare importanza calcolare il *valore* del determinante in gioco, ma soltanto stabilire se è *uguale a zero* o invece *diverso da zero*.
A tal proposito, si potrebbe dimostrare che **un determinante è certamente uguale a 0 qualora**:

- **ci sia in esso una linea composta da termini tutti nulli**
- **abbia due linee parallele identiche**
- **una linea sia uguale ad un'altra linea ad essa parallela moltiplicata per una costante**
- **una linea risulti uguale alla combinazione lineare (NOTA) di due o più linee ad essa parallele**

NOTA: cos'è una "COMBINAZIONE LINEARE"

Si dice "combinazione lineare" una somma algebrica i cui termini sono oggetti matematici della stessa specie, ciascuno moltiplicato per un suo coefficiente.

Gli "oggetti" in questione potranno essere vettori, equazioni, funzioni, ecc. ecc. ecc.: si possono "combinare linearmente" tutte le entità per le quali abbia senso parlare (I) di somma (II) e di moltiplicazione per un coefficiente.
Il risultato della combinazione lineare sarà ancora un oggetto della stessa specie.

- Ad es., $3\mathbf{v}+4\mathbf{w}$ o $-\mathbf{v}+0{,}3\mathbf{w}$ sono due fra le infinite possibili combinazioni lineari dei due vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.
- Ancora: prese le equazioni $2x-3y=1$, $5x+y=11$, la loro combinazione lineare di coefficienti 7 e -6 è
  $7(2x-3y)-6(5x+y)=7\cdot 1-6\cdot 11$
  oppure, il che è equivalente, la somma membro a membro delle due equazioni
  $7(2x-3y)=7\cdot 1;\quad -6(5x+y)=-6\cdot 11$
- Nella matrice $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 11 & 15\end{pmatrix}$ la terza riga è somma del triplo della prima con la seconda,
  quindi è la combinazione lineare con coefficienti 3 e 1 delle prime due.

ESERCIZI

1) a) Calcola il valore del determinante $\begin{vmatrix}11 & -5\\ 4 & 2\end{vmatrix}$.

Deducine, senza altri calcoli, il valore dei determinanti b) $\begin{vmatrix}-5 & 11\\ 2 & 4\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}11 & 25\\ 4 & -10\end{vmatrix}$

2) a) Calcola il valore del determinante $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

b) Quanto varrà allora il determinante $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 4\end{vmatrix}$? c) E il $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 4\end{vmatrix}$? d) E il $\begin{vmatrix}10 & 20 & 30\\ -2 & -5/2 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$?

3) Fra i determinanti che seguono, riconosci quelli uguali a zero:

a) $\begin{vmatrix}2 & -3 & 7\\ 1 & -1 & 4\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}-7 & 2 & 9\\ -10 & 5 & 15\\ 8 & 5 & -3\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}-8 & 3 & 4\\ 4 & 6 & -2\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}203 & 1 & 50\\ 233 & 11 & 50\\ 299 & 33 & 50\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}3 & 4 & 3 & -4\\ 2 & 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & -4 & -5 & 6\end{vmatrix}$

RISPOSTE 1) a) 42 b) -42 c) -210 2) a) -8 b) 8 c) -8 d) 40 3) a) Vale 0, perché la prima riga è la somma algebrica delle altre due b) Vale 0, perché la seconda colonna è la somma delle altre due c) Vale 0: la seconda riga è uguale alla terza moltiplicata per -2 d) Vale 0: la prima colonna è uguale al quadruplo della terza più il triplo della seconda e) Vale 0 (la terza riga è la somma algebrica delle altre)

3. RANGO (o "CARATTERISTICA") DI UNA MATRICE

Una **matrice quadrata** si dice "**singolare**" se il suo **determinante** è **uguale a 0**.

Una matrice A (qualsiasi, non necessariamente quadrata) ha rango *n* se:

a) da essa si può estrarre almeno una sottomatrice quadrata di ordine *n*, non "singolare"
b) tutte le sottomatrici quadrate, estraibili da A, di ordine superiore a *n*, sono invece "singolari".

In altre parole: **si dice "rango" di una matrice l'ordine più grande, fra quelli di tutti i determinanti diversi da 0 estraibili dalla matrice.**

Esempio: la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 3: infatti, i determinanti più grandi che si possono estrarre da essa sono quelli del 3° ordine, e ce n'è uno, precisamente $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$, che è diverso da 0.

Altro esempio: la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ ha rango 1. Infatti si possono estrarre da essa determinanti di ordine 1 diversi da 0 (ad esempio $|1| = 1$) mentre tutti quelli di ordine 2 sono uguali a 0.

4. IL TEOREMA DI ROUCHE'-CAPELLI

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare (= con tutte le equazioni di 1° grado) **sia "COMPATIBILE" (= ammetta almeno una soluzione), è che abbiano UGUAL RANGO due matrici:**

- **quella dei soli coefficienti delle incognite**
- **e quella "completa", che oltre ai coefficienti precedenti contiene anche la colonna dei termini noti**

ESEMPI

❑ Il sistema $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ è compatibile. Infatti le due matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso rango 3

(che il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ sia uguale a 0 lo si vede senza far calcoli se si osserva che l'ultima colonna è uguale alla somma del doppio della prima con la seconda)

PREMESSA IMPORTANTE (che discende da quanto appreso nel Volume 1)

Un sistema di 1° grado CON TANTE EQUAZIONI QUANTE INCOGNITE è "determinato", cioè ha 1 e 1 sola soluzione (NOTA), se e solo se il determinante dei coefficienti delle incognite è diverso da 0. Quando invece tale determinante vale 0, allora si ha un caso "speciale", che potrà essere di impossibilità o di indeterminazione (bisognerà valutare di volta in volta).

NOTA: l'aggettivo "determinato/a", riferito a un sistema o a una singola equazione, significa: "dotato/a di un numero *finito e non nullo* di soluzioni". Quando il sistema, o l'equazione, è di 1° grado, nel caso ciò avvenga la soluzione è *unica*.

❑ Il sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \end{cases}$ ha tante equazioni quante incognite.

Sappiamo (vedi PREMESSA IMPORTANTE) che sarà "determinato" (= una e una sola soluzione) qualora il determinante dei coefficienti delle incognite sia diverso da 0.

Se consideriamo il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ vediamo che è uguale a 0 (ultima riga proporzionale alla 1ª)

per cui è *escluso* che il sistema abbia una e una sola soluzione:
esso sarà impossibile oppure indeterminato, ossia di soluzioni ne avrà 0 oppure infinite.

Ma si osserva che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ha rango 2, mentre la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango 3

per cui, essendo diversi fra loro questi due ranghi, il sistema non è compatibile, è *impossibile*.

❑ Il sistema $\begin{cases} 5x+3y+z=14 \\ 2y-z=1 \\ 5x+y+2z=13 \end{cases}$ ha tante equazioni quante incognite.

Se andiamo a calcolare il determinante dei coefficienti delle incognite, ossia $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,
vediamo che è uguale a 0, per cui possiamo star certi che il sistema NON è "determinato".

Ma allora, sarà impossibile o indeterminato?
Andiamo a calcolare i *ranghi* delle due matrici,
quella dei soli coefficienti delle incognite e quella completa,
e vediamo che sono *uguali* (entrambi valgono 2).
Perciò il sistema è *compatibile* (= ha almeno una soluzione)
e di conseguenza, non avendone una sola, ne avrà infinite, sarà *indeterminato*.

Ci possiamo domandare allora: quanti saranno i suoi "*gradi di libertà*" (Volume 1, pag. 403)?

Si può dimostrare che, qualora un sistema lineare
- non importa con quante equazioni e quante incognite -
sia compatibile, ossia abbia almeno una soluzione
- il che avviene, secondo il teorema di Rouché-Capelli, quando
la matrice dei soli coefficienti e la matrice completa hanno lo stesso rango -
allora, detto *r* questo rango comune e *n* il numero delle incognite,
la differenza $n-r$ darà il numero di "gradi di libertà".

Nel nostro esempio, dunque, il sistema ha $3-2=1$ gradi di libertà, per cui
fra le tre incognite, due potranno essere espresse in funzione dell'incognita rimanente.

RICAPITOLIAMO, CON UN APPROFONDIMENTO
Supponiamo che un sistema lineare sia indeterminato; indichiamo

- con *r* il rango comune alle due matrici dei soli coefficienti e completa
- con *m* il numero delle equazioni
- con *n* il numero delle incognite (non necessariamente uguale a *m*).

Allora il sistema avrà $n-r$ gradi di libertà.
E in questo caso si potrà:

I) estrarre, dal sistema dato, un sotto-sistema con *r* equazioni,
scelte in modo tale che la matrice dei coefficienti delle incognite abbia rango *r*

II) scegliere, in questo sotto-sistema, *r* incognite, in modo tale
che il determinante dei coefficienti di queste sia diverso da 0

III) trasportare le $n-r$ incognite rimanenti a secondo membro e risolvere,
esprimendo perciò *r* fra le incognite in funzione delle $n-r$ incognite rimanenti.

Riprendiamo, per illustrare quanto detto, il nostro sistema $\begin{cases} 5x+3y+z=14 \\ 2y-z=1 \\ 5x+y+2z=13 \end{cases}$
per il quale era $n=3,\ r=2$.
Bene! Fra le 3 equazioni, ne potremo dunque prendere 2 tali che sia uguale a 2 il rango
della matrice dei coefficienti delle incognite nel sotto-sistema da esse formato;
ad esempio, estrarremo dal sistema proposto il seguente:

$$\begin{cases} 5x+3y+z=14 \\ 2y-z=1 \end{cases}$$

Ora in questo sistema considereremo 2 incognite tali che
il determinante dei loro coefficienti sia diverso da 0, per esempio *y* e *z*;
e le terremo a primo membro considerandole come le "vere" incognite,
mentre porteremo *x* a secondo membro quasi fosse una costante arbitraria:

$$\begin{cases} 3y+z=14-5x \\ 2y-z=1 \end{cases}$$

Risolveremo quindi rispetto a $y,\ z$ in un modo qualunque
(magari con Cramer, o con riduzione che nella fattispecie è particolarmente comoda)
ottenendo infine

$$\begin{cases} y=3-x \\ z=5-2x \end{cases}$$

Nell'esempio fatto il numero delle equazioni coincideva con quello delle incognite,
però, lo ribadiamo, il discorso vale anche qualora ciò non avvenga

ESERCIZI

1) Determina il rango delle matrici seguenti:

a) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-2&2&-2&2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&3\\1&1&4\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}2&0\\3&0\\4&5\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

2) I sistemi lineari che seguono hanno tante equazioni quante incognite.
Per ciascuno di essi, devi stabilire se è: impossibile, determinato o indeterminato.
Indicazione: stabilisci innanzitutto se è determinato, il che avviene qualora il determinante dei coefficienti delle incognite sia diverso da 0; nel caso tale determinante risulti invece uguale a 0, individua i ranghi delle due matrici completa e incompleta e applica il Teorema di Rouché-Capelli

a) $\begin{cases}x-y=5\\x-z=7\\y-z=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+z=0\\x+y-z=0\\x+z-t=0\\y-2z+t=2\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+3y+z=11\\3x+4y=13\\4x+5y-z=15\end{cases}$

d) $\begin{cases}x+y=1\\x+2z=14\\y+3z=12\end{cases}$ e) $\begin{cases}-9x+15y=20\\3x-5y=18\end{cases}$ f) $\begin{cases}6x-15y=0\\4x-10y=0\end{cases}$

3) Per ciascuno dei seguenti sistemi:
I) stabilisci se è compatibile e, in caso affermativo, se è determinato oppure indeterminato
II) trova, nel caso sia compatibile, le soluzioni

a) $\begin{cases}4x+3y=22\\x-y=2\\2x+5y=25\end{cases}$ b) $\begin{cases}4x+y-z=20\\8x-y-3z=32\\2x-y-z=6\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+3y=7\\x-3y=13\\3x-y=31\end{cases}$ d) $\begin{cases}10x-6y=8\\5x-3y=4\end{cases}$

e) $\begin{cases}x+y-z-t-w=1\\x-y-z-t+w=-1\\x-y+z+t-w=1\end{cases}$ f) $\begin{cases}x-y+2z=-6\\x+y=2\\y-z=4\\3x+2y+z=2\end{cases}$ g) $\begin{cases}x-y+z+t=0\\x+y-2z-t=1\\2x-3z-t=0\end{cases}$ h) $\begin{cases}3x-4y=1\\y+2z=8\\3x-y+6z=10\end{cases}$

i) $\begin{cases}x-y+z=24\\-x-y+z=14\end{cases}$ l) $\begin{cases}x-y=3\\x+2y=15\\4x-y=20\\3x+y=25\end{cases}$ m) $\begin{cases}5x-z=3\\x-y+z=4\\x+y-z=-2\\2x-3y+2z=9\\x+4y+z=-1\end{cases}$ n) $\begin{cases}2x-y+z=3\\3x-4y+3z=1\\x-3y+2z=-2\\x+2y-z=5\end{cases}$

RISPOSTE

1) a) 2 b) 1 c) 3 d) 2 e) 1 f) 2 2) a) indet. b) imposs. c) indet. d) det. e) imposs. f) indet.

3) a) imposs. b) indet.; ad esempio, $\begin{cases}x\ qualsiasi\\y=7-x\\z=3x-13\end{cases}$ c) det.: $\begin{cases}x=10\\y=-1\end{cases}$ d) indet. $\begin{cases}x=\dfrac{3y+4}{5}\\y\ qualsiasi\end{cases}$ opp. $\begin{cases}x\ qualsiasi\\y=\dfrac{5x-4}{3}\end{cases}$

e) indet.: ad es., $\begin{cases}x=z+t\\y=z+t\\z\ qualsiasi\\t\ qualsiasi\\w=z+t-1\end{cases}$ f) indet.: ad es., $\begin{cases}x=-z-2\\y=z+4\\z\ qualsiasi\end{cases}$ g) indet.: ad es., $\begin{cases}x\ qualsiasi\\y=2-x\\z=2x-1\\t=3-4x\end{cases}$ h) imposs.

i) indet.: $\begin{cases}x=5\\y\ qualsiasi\\z=y+19\end{cases}$ oppure … l) imposs. m) det.: $\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=2\end{cases}$ n) indet.: $\begin{cases}x=\dfrac{11-z}{5}\\y=\dfrac{7+3z}{5}\\z\ qualsiasi\end{cases}$ oppure …

5. PRODOTTO DI DUE MATRICI (purché siano (m, n) e (n, p))

Ha senso eseguire il prodotto di due matrici solo quando
il numero delle colonne della prima coincide col numero delle righe della seconda,
ossia quando, dette A e B rispettivamente la prima e la seconda matrice
che intervengono nella moltiplicazione, è

$A(m, n)$ e $B(n, p)$.

In questo caso il prodotto delle matrici considerate si fa "riga per colonna", ossia il termine che sta sulla *i*-esima riga e sulla *k*-esima colonna della matrice prodotto, la quale sarà una matrice $(m,\ p)$, si ottiene prendendo

- l' *i*-esima riga della prima matrice
- e la *k*-esima colonna della seconda matrice,

e moltiplicandole nel modo illustrato dall'esempio che segue:

Il prodotto di due matrici, anche quando è effettuabile in entrambi i versi, non è commutativo: in generale, $A\cdot B \neq B\cdot A$

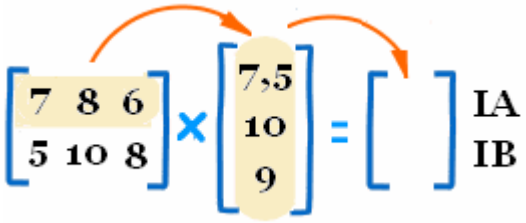
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58 & 64\\ 139 & 154\end{pmatrix}$$

dove:

$58 = 1\cdot 7+2\cdot 9+3\cdot 11$ (*1a riga × 1a colonna*) $\quad 64 = 1\cdot 8+2\cdot 10+3\cdot 12$ (*1a riga × 2a colonna*)

$139 = 4\cdot 7+5\cdot 9+6\cdot 11$ (*2a riga × 1a colonna*) $\quad 154 = 4\cdot 8+5\cdot 10+6\cdot 12$ (*2a riga × 2a colonna*)

In gita a Londra, la classe I A ha ordinato in un pub 7 "bangers and mash", 8 "fish and chips" e 6 cottage pies; la I B, 5 "bangers and mash", 10 "fish and chips" e 8 cottage pies. Un piatto di "bangers and mash" costa 7,5 sterline, 10 un "fish and chips" e 9 un cottage pie. Calcola la spesa di ciascuna delle due classi attraverso il prodotto delle due matrici qui a fianco.



6. L'INVERSA DI UNA MATRICE (purché sia QUADRATA)

Una matrice *quadrata* A si dice "invertibile" se esiste un'altra matrice A^{-1} (con lo stesso numero di righe e colonne di A) tale che $A^{-1}\cdot A = I$, dove I è la matrice "identica" con lo stesso numero di righe e di colonne di A. Una matrice quadrata è "identica" quando gli elementi della sua diagonale discendente (la diagonale "principale") sono tutti uguali a 1, e gli elementi restanti tutti uguali a 0.

Ad esempio, presa la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, la sua inversa è $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

in quanto risulta $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$1 = -2\cdot 1+1\cdot 3$ (*1a riga × 1a colonna*) $\quad 0 = -2\cdot 2+1\cdot 4$ (*1a riga × 2a colonna*)

$0 = 3/2\cdot 1+(-1/2)\cdot 3$ (*2a riga × 1a colonna*) $\quad 1 = 3/2\cdot 2+(-1/2)\cdot 4$ (*2a riga × 2a colonna*)

Per essere invertibile, una matrice quadrata A deve avere il determinante $\neq 0$.
In questo caso, la matrice inversa si otterrà con la procedura seguente:

I) si scambiano le righe con le colonne (*);
II) si sostituisce ciascun termine della nuova matrice ottenuta con il suo "complemento algebrico" $\rightarrow$;
III) si divide ciascun termine dell'ultima matrice per det(A).

In una matrice, il "complemento algebrico" di un termine $a_{i,k}$ è il numero $A_{i,k}$ ottenibile prendendo il determinante che rimane se si cancellano la riga e la colonna su cui sta il termine in questione, e moltiplicandone il valore per $+1$ o -1 a seconda che $i+k$ sia pari o sia dispari.

(*) La matrice così ottenuta è detta la "trasposta" A^T della matrice A data

❑ Esempio: invertire la matrice $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Calcolo il determinante, anche per controllare che sia diverso da zero: $\det(A)=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=8$, poi:

I) scambio le righe con le colonne: $\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

II) sostituisco ogni termine col suo "complemento algebrico": $\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 2 & 2 & -8\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

III) e dividendo ogni termine per det(A), ottengo finalmente la matrice inversa: $\begin{pmatrix}1/4 & -1/4 & 1/2\\ 1/4 & 1/4 & -1\\ -1/4 & 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$.

Puoi verificare tu che moltiplicandola per $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ si ottiene $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (matrice identica di ordine 3).

7. ALTRE OPERAZIONI CON MATRICI: SOMMA, PRODOTTO PER UNO SCALARE

La SOMMA DI MATRICI
è quella semplice operazione la quale, a partire da due matrici entrambe $m \times n$, ne genera un'altra, ancora $m \times n$, nella quale ogni elemento è la somma dei due elementi aventi ugual posto, nelle matrici date, come nell'esempio seguente: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

UNA MATRICE SI PUÒ ANCHE MOLTIPLICARE PER UN NUMERO REALE (= per uno "scalare").
Il risultato sarà una matrice con lo stesso numero di righe e colonne di quella di partenza, e con gli elementi ottenuti moltiplicando per quello scalare gli elementi della matrice iniziale: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Lo specchietto sottostante riassume le principali PROPRIETÀ delle operazioni con matrici
(il puntino di moltiplicazione è sempre omesso):

Se A, B, C sono matrici $m \times n$, allora $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$
Se $A(m \times n)$, $B(n \times p)$, $C(p \times q)$, allora $(AB)C = A(BC)$
Se $A(m \times n)$, $B(m \times n)$, $C(n \times p)$, $D(q \times m)$, allora $(A + B)C = AC + BC$, $D(A + B) = DA + DB$
Se $A(m \times n)$, $B(n \times p)$, $C(m \times n)$, $r, s \in \mathbb{R}$, allora $r(sA) = (rs)A = s(rA)$; $A(rB) = r(AB)$; $(r + s)A = rA + sA$; $r(A + C) = rA + rC$

ESERCIZI

1) Sia $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Determina la matrice $A \cdot B$. E riguardo alla $B \cdot A$?

2) Sia $A\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Determina:
$A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A = A^2$, $3A + 2B$, A^{-1}

3) Sia $A\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determina le matrici: $A \cdot B$; $B \cdot A$; $A \cdot C$; $B \cdot C$; $2A - B = 2A + (-1)B$; A^{-1}

4) Sia $A\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. a) Verifica che $(AB)C = A(BC)$. b) Si ha $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$?
c) Risulta $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? d) E' $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$?

5) Con le matrici, non vale la "legge di annullamento del prodotto": può avvenire che due matrici non abbiano, nessuna delle due, i termini tutti nulli, e che tuttavia la loro matrice prodotto sia la "matrice nulla", coi termini tutti uguali a 0. Sapresti inventare un esempio di questo tipo?

6) Con le matrici, non vale la "legge di cancellazione" $xz = yz \rightarrow x = y$ $(z \neq 0)$:
verifica ad esempio che è $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nonostante sia $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

7) $V_1(2,\ 4,\ -3)$ è un "vettore riga", $V_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ è un "vettore colonna" (matrici con una sola linea).
a) Determina i due prodotti $V_1 \cdot V_2$ e $V_2 \cdot V_1$
b) Se V_1 avesse avuto una 4ª componente, i prodotti $V_1 \cdot V_2$, $V_2 \cdot V_1$ sarebbero stati entrambi eseguibili?

RISPOSTE

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & -4 & -9 & 10 \\ -1 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; la matrice $B \cdot A$ invece non esiste, perché le colonne di B non sono tante quante le righe di A.

2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 \\ 8 & -22 & -6 \\ 4 & -11 & -4 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} -20 & 7 & -9 \\ 8 & -1 & 3 \\ -12 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $3A + 2B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 12 & -1 & 7 \\ 6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & -2/3 & 4/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

3) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 35 & -15 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 49 & 4 \end{pmatrix}$; $A \cdot C = \begin{pmatrix} 16 & -5 & 1 \\ 6 & 3 & -11 \end{pmatrix}$; $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 7 & -8 & 14 \end{pmatrix}$; $2A - B = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/13 & -1/13 \\ 3/26 & 5/26 \end{pmatrix}$

4) a) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} -11 & -13 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}$ b) Sì c) No: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ d) No: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è un esempio 7) a) $V_1 \cdot V_2 = (-15)$; $V_2 \cdot V_1 = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 10 & 20 & -15 \end{pmatrix}$ b) $V_1 \cdot V_2$ no, $V_2 \cdot V_1$ sì

8. MATRICI E AFFINITA'

Ci si può servire delle matrici anche per eseguire con molta efficacia e rapidità calcoli inerenti alle affinità; o per affidare questi calcoli a un programma per computer.
Innanzitutto, osserviamo che **un'affinità**
(ricordiamo: una **trasformazione piana che muta rette in rette, conservando l'ordine dei punti allineati**) **è associata a un sistema di equazioni lineari**, della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

quindi, **sostanzialmente, è individuata dalla matrice** (2×3) **dei coefficienti che compaiono nel sistema**:

$$\begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \end{pmatrix}$$

Il seguente specchietto ricorda le affinità più rilevanti da noi studiate:

Simmetria rispetto all'origine $s_0 : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Simmetria rispetto a un punto $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ $s_{\mathrm{P}_0} : \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$

Simmetria rispetto all'asse x $s_{asse\,x} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Simmetria rispetto all'asse y $s_{asse\,y} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

Simmetria rispetto a una parallela all'asse x $s_{y=y_0} : \begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$

Simmetria rispetto a una parallela all'asse y $s_{x=x_0} : \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$

Simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante $s_{y=x} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Traslazione di vettore $\vec{\mathbf{v}}(a, b)$ $\tau_{\vec{\mathbf{v}}} : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Omotetia di centro l'origine e rapporto $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ $\omega_{\mathrm{O},k} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Omotetia di centro $\mathrm{C}(x_\mathrm{C}, y_\mathrm{C})$ e rapporto $k \in \mathbb{R}^*$ $\omega_{\mathrm{C},k} : \begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$

Dilatazione di centro l'origine e rapporti h (orizzontale), k (verticale): $d_{\mathrm{O},h,k} : \begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$

Trasformazione "identica", quella che lascia tutto fermo: $i : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

QUANDO I TERMINI NOTI NON CI SONO

Tra le affinità sopra considerate,
alcune sono tali che le loro equazioni *non contengono* i "termini noti" *m*, *n*.

Affinità siffatte sono individuate da matrici $(2\times 2) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

prenderemo in esame dapprima i casi di questo tipo, perché per le affinità individuate da matrici (2×3) il discorso è un po' più complicato e lo affronteremo in una seconda fase.

Bene: vedremo ora che, nel caso delle affinità "senza termini noti", ossia associate a matrici (2×2),

A) la composizione (= "prodotto") di due affinità si riconduce al prodotto delle corrispondenti matrici
B) l' inversa di un'affinità si riconduce all'inversa della matrice corrispondente

A) LA COMPOSIZIONE (= "PRODOTTO") DI DUE AFFINITÀ SENZA TERMINI NOTI (QUINDI, ASSOCIATE A MATRICI (2×2)) SI RICONDUCE AL PRODOTTO DELLE CORRISPONDENTI MATRICI.

Sia ad esempio $f : \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -y \end{cases}$; $g : \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x + y \end{cases}$

Avremo la possibilità di determinare le equazioni della trasformazione composta $f \circ g$ moltiplicando le due corrispondenti matrici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$7 = 1\cdot 1 + 2\cdot 3$ (*1a riga × 1a colonna*) $\quad 0 = 1\cdot(-2) + 2\cdot 1$ (*1a riga × 2a colonna*)

$-3 = 0\cdot 1 - 1\cdot 3$ (*2a riga × 1a colonna*) $\quad -1 = 0\cdot(-2) - 1\cdot 1$ (*2a riga × 2a colonna*)

e se ne conclude che $f \circ g : \begin{cases} x' = 7x \\ y' = -3x - y \end{cases}$

Controlliamo, eseguendo la composizione col metodo "tradizionale", senza matrici:

$$f:\begin{cases}x'=x+2y\\y'=-y\end{cases};\ g:\begin{cases}x'=x-2y\\y'=3x+y\end{cases}\ \rightarrow\ f\circ g:\begin{cases}x'=(x-2y)+2(3x+y)=x-2y+6x+2y=7x\\y'=-(3x+y)=-3x-y\end{cases}\quad OK!!!$$

Proviamo ora ad eseguire, attraverso il prodotto di matrici, la composizione in ordine scambiato $g\circ f$:

avremo $\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\3&5\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}1=1\cdot1-2\cdot0\\ 1a\ riga\times 1a\ colonna\end{matrix}$ $\begin{matrix}4=1\cdot2-2\cdot(-1)\\ 1a\ riga\times 2a\ colonna\end{matrix}$ $\begin{matrix}3=3\cdot1+1\cdot0\\ 2a\ riga\times 1a\ colonna\end{matrix}$ $\begin{matrix}5=3\cdot2+1\cdot(-1)\\ 2a\ riga\times 2a\ colonna\end{matrix}$

da cui $g\circ f:\begin{cases}x'=x+4y\\y'=3x+5y\end{cases}$

Osserva che $f\circ g\neq g\circ f$: la composizione di funzioni, e il prodotto di matrici, non sono operazioni commutative.

B) **L'INVERSIONE DI UNA AFFINITÀ SENZA TERMINI NOTI (QUINDI, ASSOCIATA A UNA MATRICE (2×2)) SI RICONDUCE ALL'INVERSIONE DELLA CORRISPONDENTE MATRICE.**

Sia ad esempio $f:\begin{cases}x'=2x+y\\y'=2x-y\end{cases}$

Per invertirla, considero la matrice $\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}$ e innanzitutto ne calcolo il determinante: $\begin{vmatrix}2&1\\2&-1\end{vmatrix}=-4\neq0$.

Ora scambio le righe con le colonne: $\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$

sostituisco ogni termine col suo complemento algebrico $\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$

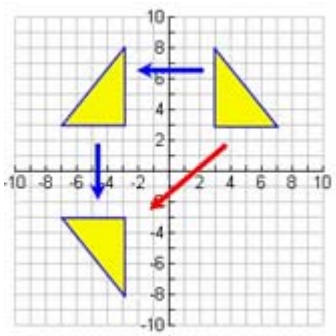
e divido ogni termine per il determinante (che valeva -4) ottenendo: $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

L'affinità inversa è quindi $f^{-1}:\begin{cases}x'=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y\\y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\end{cases}$. Verifica tu che effettivamente è $f^{-1}\circ f=i$. $\left[i:\begin{cases}x'=x\\y'=y\end{cases}\right]$

Eseguendo l'inversione col metodo "tradizionale", senza matrici, avremmo avuto:

$$f:\begin{cases}x'=2x+y\\y'=2x-y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x'+y'=4x\\x'-y'=2y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{x'+y'}{4}=\frac{1}{4}x'+\frac{1}{4}y'\\y=\frac{x'-y'}{2}=\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}y'\end{cases}\ (x',y')\leftrightarrow(x,y)\ \rightarrow\ \begin{cases}x'=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y\\y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\end{cases}\quad OK!!!$$

ESERCIZI - Determina $f\circ g$, $g\circ f$, f^{-1}, g^{-1} utilizzando le matrici, *poi* controlla il risultato componendo e invertendo *senza* le matrici.



1) $f:\begin{cases}x'=y\\y'=x+y\end{cases}$ $g:\begin{cases}x'=2x+3y\\y'=3x+4y\end{cases}$

2) $f:\begin{cases}x'=2x+y\\y'=x+y\end{cases}$ $g:\begin{cases}x'=-y\\y'=-2x\end{cases}$

3) $f:\begin{cases}x'=5x-3y\\y'=-x+y\end{cases}$ $g:\begin{cases}x'=2x+2y\\y'=x+3y\end{cases}$

4) $f:\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$ $g:\begin{cases}x'=x-y\\y'=-x\end{cases}$

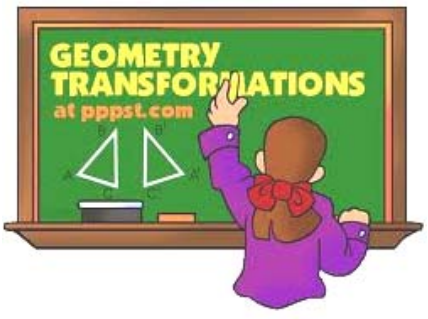


Figura da www.regentsprep.org

Figura da http://math.pppst.com

RISPOSTE 1) $f\circ g:\begin{cases}x'=3x+4y\\y'=5x+7y\end{cases}$ $g\circ f:\begin{cases}x'=3x+5y\\y'=4x+7y\end{cases}$ $f^{-1}:\begin{cases}x'=-x+y\\y'=x\end{cases}$ $g^{-1}:\begin{cases}x'=-4x+3y\\y'=3x-2y\end{cases}$

2, 3, 4) A te la verifica, eseguendo la procedura nei due modi e, per la funzione inversa, controllando anche che si abbia $f^{-1}\circ f=i$ (matrice identica di ordine 2)

QUANDO CI SONO ANCHE I TERMINI NOTI

E se lasciassimo ora cadere l'ipotesi che le equazioni dell'affinità non contengano i "termini noti" m, n? Allora queste equazioni sarebbero della forma

$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (altrimenti, come sappiamo, la corrispondenza non sarebbe biunivoca quindi non si tratterebbe di un'affinità)

Ci domandiamo: sarebbe ancora possibile ridurre la composizione di due affinità e l'inversione di un'affinità ad operazioni effettuate sulle matrici?
Ci occuperemo della sola composizione.
La risposta è affermativa, ma occorre fissare con cura l'assetto "formale" della questione.

Prima di tutto, per indicare le tre coppie: I) x, y II) x', y' III) m, n ci serviremo di altrettanti **vettori colonna**: $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\mathrm{U}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

Questo perché, indicando con A la matrice dei quattro coefficienti di x, y: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, potremo scrivere

$\mathrm{U}' = \mathrm{A} \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}$ (controlla che è proprio così!).

Allora, per quanto riguarda la composizione di due affinità

$f: \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + m_1 \\ y' = c_1 x + d_1 y + n_1 \end{cases}$ $g: \begin{cases} x' = a_2 x + b_2 y + m_2 \\ y' = c_2 x + d_2 y + n_2 \end{cases}$,

avremo:

f: $\mathrm{U}' = \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_1$ con $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$

g: $\mathrm{U}' = \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_2$ con $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$

e sarà

$f \circ g$: $\mathrm{U}' = \mathrm{A}_1 \cdot (\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_2) + \mathrm{K}_1 = \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_1$

$g \circ f$: $\mathrm{U}' = \mathrm{A}_2 \cdot (\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_1) + \mathrm{K}_2 = \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2$

dove i passaggi sono giustificati dalle proprietà delle operazioni con matrici che trovi elencate a pag. 321

Ad esempio, se fosse $f: \begin{cases} x' = x + y + 3 \\ y' = 5x - 2y + 4 \end{cases}$, $g: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$,

si avrebbe $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e la $f \circ g$: $\mathrm{U}' = \mathrm{A}_1 \cdot (\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{K}_2) + \mathrm{K}_1 = \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{U} + \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_1$

diventerebbe $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2x - 7y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 4 \\ 2x - 7y + 2 \end{pmatrix}$

In definitiva, la trasformazione composta risulterebbe essere la $f \circ g: \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = 2x - 7y + 2 \end{cases}$.

Verifichiamo che alla stessa trasformazione composta si perverrebbe anche senza l'utilizzo di matrici:

$f: \begin{cases} x' = x + y + 3 \\ y' = 5x - 2y + 4 \end{cases}$ $g: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$ $f \circ g: \begin{cases} x' = -y + (-x + y + 1) + 3 = -x + 4 \\ y' = 5(-y) - 2(-x + y + 1) + 4 = \ldots = 2x - 7y + 2 \end{cases}$

Per esercizio, ricava tu ora attraverso le matrici la trasformazione $g \circ f$; troverai $g \circ f: \begin{cases} x' = -5x + 2y - 4 \\ y' = 4x - 3y + 2 \end{cases}$

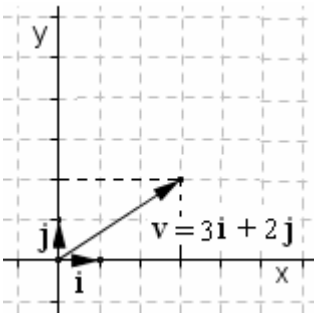
ESERCIZI - Determina $f \circ g$ e $g \circ f$ con e senza l'uso di matrici:

1) $f: \begin{cases} x' = 2x + y + 3 \\ y' = x + 2y \end{cases}$, $g: \begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$ 2) $f: \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$, $g: \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y - 2 \end{cases}$

RISPOSTE 1) $f \circ g: \begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 7x - 2y - 1 \end{cases}$ Per $g \circ f$ e per 2): ovviamente eseguendo nei due modi il risultato dev'essere lo stesso

I VETTORI E I CONCETTI DI DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

1. UN "VETTORE" E' INDIVIDUATO DALLA SEQUENZA DELLE SUE COMPONENTI



Nel Volume 1 abbiamo presentato il concetto di "vettore" nel modo seguente:

« Si dice "*vettore*" l'entità astratta che rappresenta
ciò che hanno in comune tutti i segmenti orientati *equipollenti* ad uno dato
(= aventi stesso modulo, direzione e verso di uno dato) **».**

Abbiamo poi parlato di "*componenti cartesiane*" di un vettore,
e ci si può facilmente convincere che **un vettore è univocamente individuato**

- **dalla coppia (se il vettore è pensato sul piano)**
- **o dalla terna (se è pensato nello spazio)**

delle sue componenti cartesiane.

Osserva infatti la figura in alto:
possiamo dire che il vettore $\mathbf{v}$ è "individuato" dalla coppia (3, 2) delle sue componenti,
per significare che nota la coppia, è noto anche il vettore (senza ambiguità), e viceversa.

Quindi un vettore nel piano "coincide sostanzialmente" con una coppia ordinata di numeri reali,
mentre un vettore nello spazio "coincide sostanzialmente" con una terna ordinata di numeri reali.

E pertanto d'ora in poi un vettore come quello in figura verrà indicato, anziché come $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$,
semplicemente come (3, 2), coppia ordinata di numeri che preferiremo disporre in colonna: $\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}$.

Un vettore nello spazio tridimensionale si potrà poi indicare con una terna ordinata, **es**. $\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\ \mathbf{-5}\\ \mathbf{7}\end{pmatrix}$.

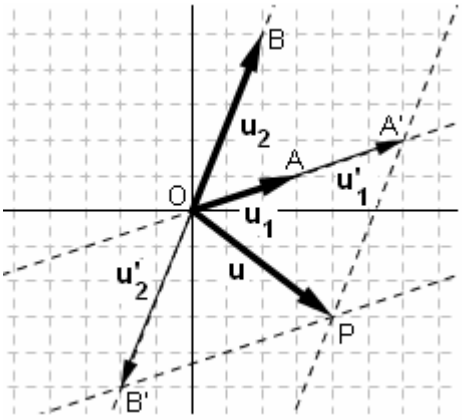
Per "COMBINAZIONE LINEARE" di due o più vettori si intende ciò che si ottiene moltiplicando, eventualmente, i vettori stessi ciascuno per un numero reale, poi sommando fra loro i risultati.
Insomma, dati ad esempio i vettori $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ e $\mathbf{u_3}$, sono loro combinazioni lineari:

$3\mathbf{u_1} - 5\mathbf{u_2} + 12\mathbf{u_3}$, oppure $\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2} - \mathbf{u_3}$, o $\sqrt{5}\mathbf{u_1} + \frac{3}{4}\mathbf{u_2} - \frac{1}{7}\mathbf{u_3}$ …

Ci domandiamo ora:
dati, sul piano, tre vettori,
sarà sempre possibile esprimerne uno come combinazione lineare degli altri due?



❑ ESEMPIO 1



Osserva la figura qui a fianco,
e in essa considera i tre vettori $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OB}$.
Per la "punta" P di $\mathbf{u}$ si sono tracciate:

- la parallela a $\mathbf{u}_2$, fino a intersecare in A' la retta di $\mathbf{u}_1$
- e la parallela a $\mathbf{u}_1$, fino a intersecare in B' la retta di $\mathbf{u}_2$;

sono stati così determinati i vettori $\mathbf{u}'_1 = \overrightarrow{OA'}$ e $\mathbf{u}'_2 = \overrightarrow{OB'}$.
Ora, come si vede, risulta $\mathbf{u} = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2$, e poiché

- $\mathbf{u}'_1$ si può ottenere da $\mathbf{u}_1$
  raddoppiandone il modulo a verso invariato,
- mentre $\mathbf{u}'_2$ si può ottenere da $\mathbf{u}_2$ cambiandone il verso,

in definitiva sarà $\mathbf{u} = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

Anche algebricamente:

chiedersi se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}$ può essere espresso come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$

equivale a domandarsi se esistono due numeri reali λ_1, λ_2 tali che $\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$, quindi

se il sistema $\begin{cases}3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4\\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = -3\end{cases}$ ammette soluzione. La risposta è senz'altro affermativa perché $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix} \neq 0$,

e risolvendo, con un metodo qualsiasi, il sistema, si trovano anche i valori di λ_1, λ_2 ossia $\begin{cases}\lambda_1 = 2\\ \lambda_2 = -1\end{cases}$.

2. VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI E INDIPENDENTI

Preso un insieme di due o più vettori, nel piano o nello spazio, essi potranno essere fra loro "linearmente dipendenti" oppure "linearmente indipendenti". Vediamo le definizioni di questi concetti.

Due, o più, vettori si dicono "linearmente dipendenti"

I) se fra essi ce n'è almeno uno che può essere scritto come combinazione lineare degli altri

II) oppure, condizione che si può dimostrare essere equivalente alla I),
se esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dia il vettore nullo.

Quindi **due, o più, vettori saranno invece "linearmente indipendenti"**

I) se nessuno fra essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri

II) oppure, in alternativa, **se l'unica loro combinazione lineare, avente per risultato il vettore nullo, è quella a coefficienti tutti nulli:**

$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ linearmente indipendenti se e solo se $\lambda_1\mathbf{u_1} + \lambda_2\mathbf{u_2} + \ldots + \lambda_n\mathbf{u_n} = \vec{\mathbf{0}} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

I tre vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dell'esempio precedente erano perciò linearmente dipendenti.

- ESEMPIO 2

Consideriamo, nello spazio tridimensionale, i tre vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supponiamo che una loro combinazione lineare $\lambda_1\mathbf{u_1}+\lambda_2\mathbf{u_2}+\lambda_3\mathbf{u_3}$ dia come risultato il vettore nullo:

allora sarà $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$.

Un sistema come questo, coi termini noti tutti nulli, si dice "*omogeneo*". Un sistema omogeneo ammette senz'altro almeno una soluzione: la soluzione nulla, quella in cui tutte le incognite valgono 0.

Andiamo a calcolare il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$.

Cosa possiamo concludere? Che il nostro sistema è determinato, quindi ha una e una sola soluzione. E poiché la terna $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ è soluzione, essa sarà anche l'*unica* soluzione possibile. In definitiva, non esiste alcuna altra combinazione lineare dei nostri tre vettori, oltre a quella che ha coefficienti tutti nulli, in grado di dare come risultato il vettore nullo. E perciò i tre vettori considerati sono linearmente indipendenti.

- ESEMPIO 3

Passiamo ora ad esaminare i tre vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se osserviamo che il terzo è uguale alla somma dei primi due, divisa per 4, ne dedurremo subito che i tre vettori in gioco sono linearmente dipendenti

(uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri: $\mathbf{u_3} = \frac{1}{4}\mathbf{u_1} + \frac{1}{4}\mathbf{u_2}$).

Senza questa osservazione, la dipendenza lineare si sarebbe potuta desumere impostando la condizione $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, equivalente al sistema $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$

il cui determinante dei coefficienti delle incognite è $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Il sistema, avendo determinante nullo, non è dunque determinato, e sarà allora o impossibile o indeterminato.
… Ma impossibile non è, avendo l'evidente soluzione $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; per esclusione sarà dunque indeterminato, e avrà allora infinite soluzioni, quindi ne avrà (infinite) altre oltre alla $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Esisterà perciò una combinazione lineare dei vettori dati, a coefficienti non tutti nulli, tale da generare il vettore nullo: i vettori in esame sono linearmente dipendenti.

3. MA "COM'E' FATTA" UNA FAMIGLIA DI VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI?

Pensiamo dapprima a una famiglia composta da DUE vettori soltanto.
Essi saranno fra loro linearmente dipendenti se ce n'è uno, fra i due, che possa essere espresso come combinazione lineare dell'altro, ossia che sia uguale all'altro, moltiplicato per uno scalare;
… ma ciò evidentemente avviene se e solo se i due vettori hanno la stessa direzione! Insomma:
DUE vettori sono fra loro linearmente dipendenti se e solo se giacciono sulla stessa retta.

Esaminiamo ora il caso in cui i vettori della famiglia sono TRE.

Supponiamo per ora che i tre vettori in gioco APPARTENGANO A UNO STESSO PIANO.
E in relazione a questa situazione geometrica, andiamo a rivisitare l'ESEMPIO 1.
Immaginiamo di sostituire, in esso, i vettori $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ con un'altra coppia di vettori, purché entrambi diversi dal vettore nullo e caratterizzati, come lo erano $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$, da direzioni differenti; nonché di sostituire $\mathbf{u}$ con un qualsiasi vettore giacente nel piano su cui stanno $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$.
Comprendiamo che col medesimo procedimento grafico messo in atto nell'ESEMPIO 1 ci sarà possibile esprimere $\mathbf{u}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$, ossia:
come risultante della somma di due vettori, ottenibili "allungando" o "accorciando", ed eventualmente sottoponendo a un cambiamento di verso, $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$.

Da questa osservazione possiamo trarre due conclusioni interessanti:

I) **nel piano, due vettori entrambi non nulli, che abbiano direzioni diverse, permettono, se combinati linearmente con coefficienti opportuni, di "generare" tutti gli altri vettori: si dice che costituiscono una "base" per i vettori del piano;**

II) **nel piano, non possiamo avere un famiglia di vettori linearmente indipendenti, che sia formata da più di 2 vettori: il numero massimo di vettori linearmente indipendenti, nel piano, è 2.**

Se invece andiamo a considerare TRE vettori $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE, questi potranno costituire, a seconda dei casi, una famiglia di vettori linearmente dipendenti o indipendenti, ma nel primo caso (se, cioè, sono linearmente dipendenti fra loro) ce ne sarà almeno uno che potrà essere espresso come combinazione lineare degli altri due, ossia come risultato della somma di due vettori ottenibili da quelli tramite allungamento, o accorciamento, con eventuale cambiamento di verso:
è facile convincersi che in questo caso tutti e tre i vettori apparterranno a uno stesso piano. Insomma,
TRE vettori, nello spazio tridimensionale, sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.

Inoltre, con ragionamenti basati su procedimenti grafici simili, nello spazio, a quelli visti nell'ESEMPIO 1 relativo al piano, si può trarre che nello spazio tridimensionale, data una famiglia di 3 vettori tutti non nulli e linearmente indipendenti, cioè non complanari, qualsiasi altro vettore potrebbe essere generato come loro combinazione lineare, a patto di fissare i coefficienti in modo opportuno:
4 vettori nello spazio sono SEMPRE linearmente dipendenti fra loro!
Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti, nello spazio, è 3.

ESERCIZI

1) I tre vettori $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti?

2) I vettori $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti: a) verificalo, e determina una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dia il vettore nullo; b) esprimi poi il primo vettore come combinazione lineare degli altri due.

3) Dimostra che i tre vettori $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

4) Fra le seguenti famiglie di vettori, riconosci quali sono formate da vettori linearmente dipendenti.

a) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\9\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$ b) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ c) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

5) Per quale valore del parametro k la seguente è una famiglia di vettori linearmente dipendenti? $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}k\\-8\\11\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$

6) L'insieme dei polinomi in una variabile, di grado ≤ 3, è uno "spazio vettoriale": ossia, ciascun polinomio ax^3+bx^2+cx+d è individuato in modo univoco dalla sequenza (a, b, c, d) dei suoi 4 coefficienti e le operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per un numero reale godono delle stesse proprietà che caratterizzano le omonime operazioni coi vettori geometrici.
Secondo te, quale potrebbe essere una "base" in questo spazio vettoriale?

6') I quattro polinomi $-x^3+x$, $2x^3+4x^2-4$, $-2x^2+3x-2$, $2x^2-1$ sono linearmente indipendenti?

RISPOSTE

1) Sì, lo si può affermare immediatamente: 3 vettori nel piano sono SEMPRE linearmente dipendenti fra loro.

2) a) $\lambda_1\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ equivale a $\begin{cases}3\lambda_1+4\lambda_2-2\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$;

$\begin{vmatrix}3&4&-2\\1&2&0\\1&5&3\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}4&-2\\5&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\1&3\end{vmatrix}=-1\cdot(12+10)+2\cdot(9+2)=-22+22=0$ *abbiamo sviluppato il determinante secondo la sua seconda riga*

per cui il sistema non è determinato; esso sarà allora indeterminato, perché impossibile certamente non è in quanto ammette la soluzione $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
Esisteranno perciò altre (infinite) terne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oltre a quella nulla, tali da soddisfare il sistema.
Determiniamo una di queste terne.

$\begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ 3\cdot(-2\lambda_2)+4\lambda_2-2\lambda_3=0\\ -2\lambda_2+5\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ -6\lambda_2+4\lambda_2-2\lambda_3=0\\ 3\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ -2\lambda_2-2\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ \lambda_2\ qualsiasi\\ \lambda_3=-\lambda_2\end{cases}$

Una terna non nulla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che risolve il sistema è dunque, ad esempio, la $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$.

E si ha $-2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

[Chiaramente, questa è solo una fra le infinite combinazioni lineari, a coefficienti non tutti nulli, dei nostri tre vettori, che danno come risultato il vettore nullo.
Le altre si ottengono rimpiazzando la terna $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$ con un'altra ad essa proporzionale]

b) $-2\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}-\mathbf{u_3}=\vec{\mathbf{0}}\ \rightarrow -2\mathbf{u_1}=-\mathbf{u_2}+\mathbf{u_3};\ \ 2\mathbf{u_1}=\mathbf{u_2}-\mathbf{u_3};\ \ \mathbf{u_1}=\frac{1}{2}\mathbf{u_2}-\frac{1}{2}\mathbf{u_3}$

3) $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ equivale a $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2=0\\ -\lambda_2=0\end{cases}$; $\begin{cases}\lambda_2=0\\ \lambda_1=-2\lambda_2=-2\cdot0=0;\\ 0+\lambda_3=0;\ \lambda_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$

quindi in effetti i tre vettori dati sono linearmente indipendenti, perché l'unica loro combinazione lineare, in grado di dare come risultato il vettore nullo, è quella a coefficienti tutti nulli.

Più rapidamente, si sarebbe potuto calcolare il determinante $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=-1\neq0$.

Il fatto che tale determinante sia diverso da 0 ci assicura che il sistema è determinato, vale a dire ha una e una sola soluzione. E siccome, essendo il sistema "omogeneo", cioè coi termini noti tutti nulli, la terna $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ è soluzione, si tratterà dunque dell'*unica* soluzione.

4) a) lin. dip. b) lin. ind. c) lin. ind. 5) $k=6$ (deve annullarsi il determinante …)

6) La base più semplice è senz'altro la quaterna di polinomi x^3, x^2, x, 1 (polinomi che si riducono ciascuno a un monomio!), identificabili con le quaterne ordinate (1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1).
Infatti, combinando linearmente questi 4 polinomi, è possibile ottenere qualsivoglia polinomio della forma ax^3+bx^2+cx+d.

6') I polinomi in questione "si identificano" con le quaterne $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\0\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Dobbiamo chiederci se l'uguaglianza $\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\4\\0\\-4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\-2\\3\\-2\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

può essere verificata solo con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, oppure no.

Siccome tale uguaglianza equivale al sistema $\begin{cases}-\lambda_1+2\lambda_2=0\\ 4\lambda_2-2\lambda_3+2\lambda_4=0\\ \lambda_1+3\lambda_3=0\\ -4\lambda_2-2\lambda_3-\lambda_4=0\end{cases}$

andremo a calcolare il determinante dei coefficienti delle incognite in tale sistema:
si constata che è uguale a 0, quindi si avranno anche (infinite) altre soluzioni oltre alla soluzione nulla.
I vettori in gioco sono linearmente *dipendenti*.

GRAZIE
alla professoressa
Adriana Garroni
del Dipartimento
di Matematica
dell'Università
"La Sapienza"
di Roma,
per le preziose
indicazioni
in relazione
all'argomento
"vettori".

Practice with Solids

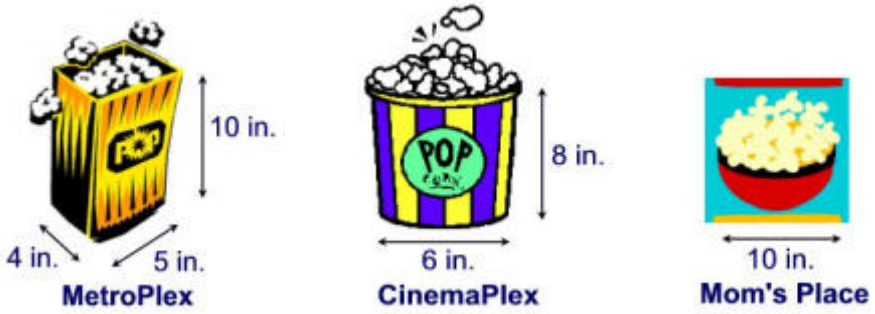
Topic Index | Geometry Index | Regents Exam Prep Center



Topic Index | Geometry Index | Regents Exam Prep Center

Created by Donna Roberts

14. At the MetroPlex movie theater, popcorn is served in a box.
At the CinemaPlex movie theater, popcorn is served in a cylindrical container.
At home, Mom serves popcorn in a bowl (hemisphere in shape).
Based upon the given dimensions, where are you getting the most popcorn?
(Disregard the thickness of the container.)



Choose:

☐ MetroPlex ☐ CinemaPlex ☐ Mom's Place

---

12. The lateral surface area of a right circular cone, *LS*, is represented by the equation

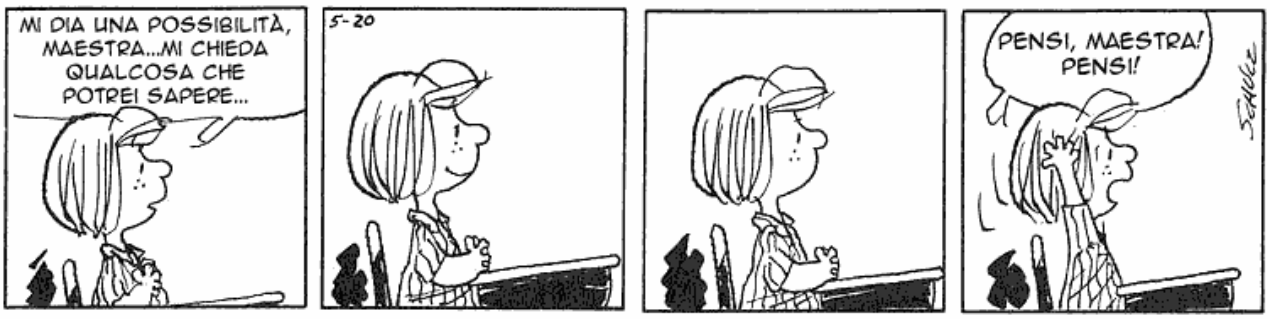
$$LS = \pi r\sqrt{r^2 + h^2},$$

where *r* is the radius of the circular base and *h* is the height of the cone.
If the lateral surface area of an ice cream cone is 236.64 square centimeters
and its radius is 4.75 centimeters,
find its height, to the *nearest hundredth* of a centimeter.

Choose:

☐ 251.47 cm ☐ 228.91 cm ☐ 15.86 cm ☐ 15.13 cm





CENNI DI GEOMETRIA SOLIDA

Così come la geometria piana, anche la solida è stata organizzata dai matematici secondo una struttura "ipotetico-deduttiva": definizioni, assiomi, teoremi.

Noi qui ci proponiamo di darne una presentazione snella, che attiri l'attenzione sugli aspetti accattivanti di questo splendido argomento, quindi cercheremo un compromesso fra il rigore e la semplicità/brevità, rinunciando deliberatamente a un'esposizione esaustiva, troppo ingombrante per i nostri scopi.

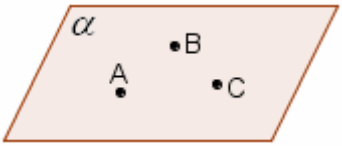
Iniziamo.

1. NOZIONI GENERALI

Un "piano" è un'entità geometrica indicata con una lettera greca e caratterizzata da una famiglia di assiomi: eccone qui di seguito due.

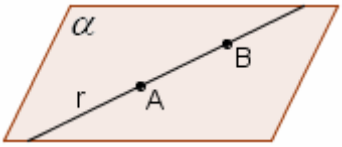
Assioma: **per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo** (conseguenza: due rette incidenti individuano uno e un solo piano).

Per questo motivo, **un piano si può indicare anche tramite una terna di suoi punti non allineati: piano α o piano ABC.**

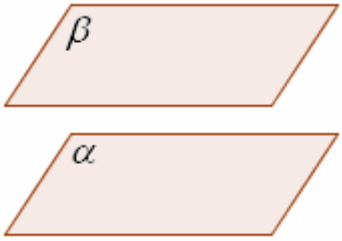


Assioma: **se due punti di una retta giacciono su di un piano, anche tutti gli altri punti della retta appartengono a quel piano**

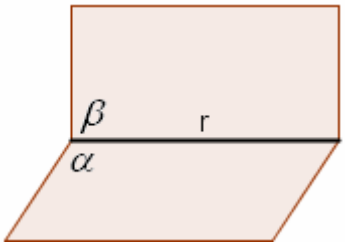
Quindi **il piano è illimitato in tutte le direzioni**: i nostri disegni, per cercare di comunicare l'idea di tridimensionalità nell'ambito bidimensionale del foglio, devono occultare questa caratteristica, che comunque va sempre tenuta presente.



Piani paralleli: non hanno nessun punto in comune, oppure coincidono

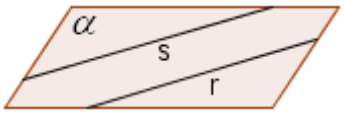


Piani incidenti: non sono paralleli; si può dimostrare che l'insieme dei loro punti comuni è una retta.



Rette sghembe nello spazio: non appartengono al medesimo piano, e non hanno punti comuni.

Rette parallele nello spazio: appartengono al medesimo piano, e non hanno punti comuni, oppure ne hanno infiniti (coincidono).



Definizione di perpendicolarità retta-piano:

una retta si dice perpendicolare ad un piano se e solo se è perpendicolare a tutte le rette di quel piano, passanti per il punto in cui la retta e il piano si tagliano

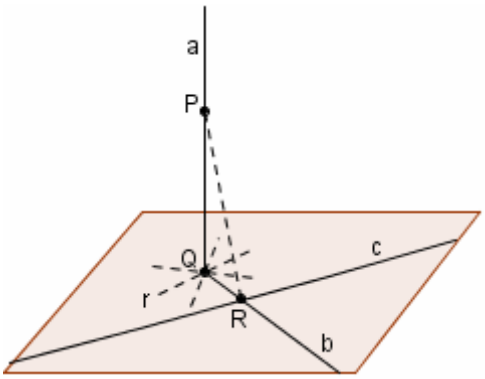
(ciò avviene senz'altro, come si può dimostrare, ogniqualvolta sia noto che è perpendicolare ad *almeno due* di quelle rette).

(NOTA: quando pensiamo, ad esempio, alla perpendicolarità fra la retta **a** e la retta **r** della figura, la pensiamo nell'ambito di *quel* piano che è individuato dalle due rette in questione **a, r**)

TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI

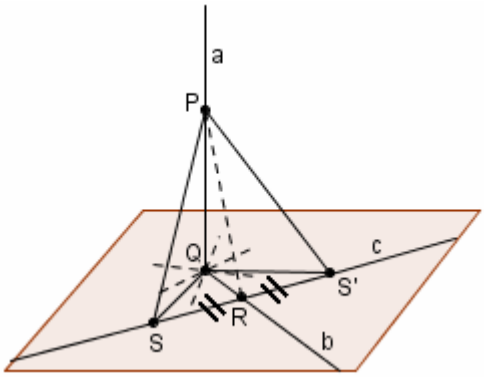
(è sovente utilizzato per giustificare una perpendicolarità in un contesto tridimensionale):

se si conduce una perpendicolare *a* ad un piano, e dal piede Q di questa si traccia la perpendicolare *b* ad una terza retta *c* che giace sul piano, l'ultima retta menzionata (*c*) risulta perpendicolare al piano individuato dalle prime due ($c \perp PQR$)



Il Teorema delle Tre Perpendicolari

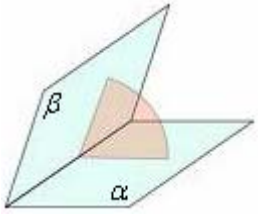
Dimostrazione del Teorema



Sulla retta *c*, da parti opposte rispetto a R,
prendiamo due punti S ed S', equidistanti da R: RS = RS'.
Congiungiamo sia Q che P con S e con S'.
E' QS = QS' perché i due triangoli QRS, QRS' sono uguali per il 1° Criterio; ma allora anche i due triangoli PQS, PQS' sono uguali per il 1° Criterio, e di conseguenza è PS = PS'.
Il triangolo PSS' è dunque isoscele, e pertanto PR, mediana relativa alla base, fa anche da altezza: è perciò

$P\hat{R}S = P\hat{R}S' = 90°$

e allora la retta *c* è perpendicolare nel punto R alla retta PR; ma la retta *c* era già, nello stesso punto R, appendicolare anche alla retta *b*; e quindi *c*, essendo perpendicolare, nel punto R, a due rette del piano PQR, è perpendicolare a tale piano, come volevasi dimostrare.

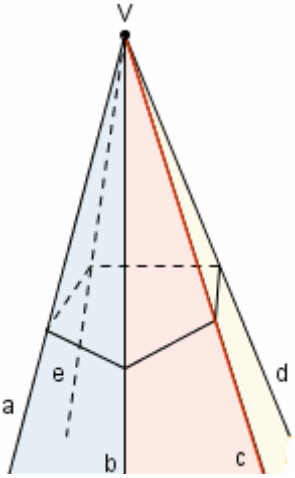


Un angolo fra due piani,
o "**angolo diedro**",
o semplicemente "**DIEDRO**"

(*immagine opera di Luca Antonelli, da Wikimedia Commons, qui utilizzata con licenza GFDL, GNU Free Documentation License*)

Qui a destra,
una figura
che va pensata estesa
illimitatamente
verso il basso,
detta
"**ANGOLOIDE**".

La somma delle ampiezze
delle facce di un angoloide
(in questo caso
abbiamo 5 facce)
è sempre <360°.



Un "**POLIEDRO**" è un solido delimitato da facce di forma poligonale.

Un poliedro si dice "**regolare**" o "**platonico**" quando le sue facce sono *poligoni regolari, tutti uguali fra loro*.

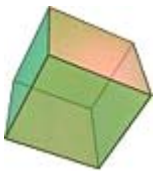
Si dimostra che esistono solo 5 tipi di POLIEDRI REGOLARI:

- il tetraedro regolare,
- l'esaedro regolare o cubo,
- l'ottaedro regolare,
- l'icosaedro regolare,
- il pentadodecaedro regolare.

Le immagini sottostanti hanno come autore Cyp (GFDL , Creative Commons Attribution Non-Commercial Share-Alike license version 2.0)



Tetraedro regolare
(4 facce triangolari equilatere, 4 vertici, 6 spigoli)



Cubo
(6 facce quadrate, 8 vertici, 12 spigoli)



Ottaedro regolare
(8 facce triangolari equilatere, 6 vertici, 12 spigoli)



Pentadodecaedro regolare
(12 facce pentagonali regolari, 20 vertici, 30 spigoli)



Icosaedro regolare
(20 facce triangolari equilatere, 12 vertici, 30 spigoli)

Per *tutti* i poliedri, regolari e non regolari, purché siano "*convessi*" (= senza "rientranze"), vale la rilevante

FORMULA DI EULERO:

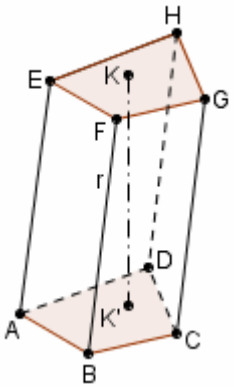
f+v = s+2

" **il numero delle facce più quello dei vertici è uguale al numero degli spigoli, più 2** "

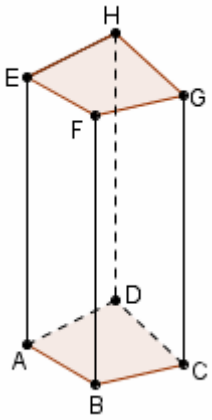
Un "**PRISMA**" è un solido delimitato da
due "basi" poligonali uguali e parallele fra loro (= giacenti su piani fra loro paralleli)
e da una superficie laterale costituita da parallelogrammi (da rettangoli, se il prisma è "retto").
Si dice "**altezza**" **di un prisma**, la **distanza** (= segmento di perpendicolare) **fra i piani delle due basi**.

- **Prisma "retto"**: gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.
- **Prisma "regolare"**: prisma retto, la cui base è un poligono regolare.
- **Parallelepipedo**: prisma le cui 6 facce sono parallelogrammi (a 2 a 2 uguali, e giacenti su piani paralleli)
- **Parallelepipedo rettangolo**: le facce sono 6 rettangoli (è la tipica forma di una "scatola").

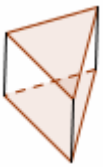
Un **prisma non retto** e una sua altezza KK'



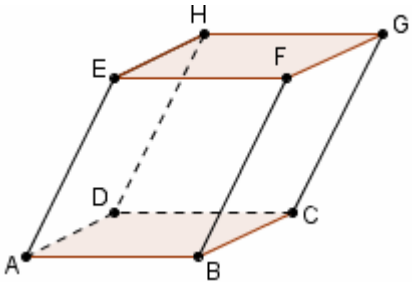
Un **prisma retto**; EA = FB = GC = HD ne sono altezze



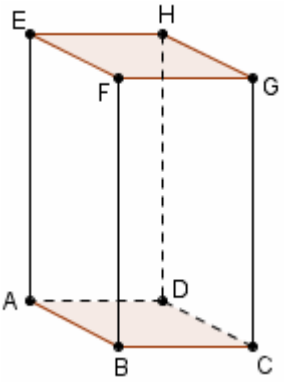
Qui a fianco, un **prisma regolare** avente per base un triangolo equilatero



Un **parallelepipedo generico**

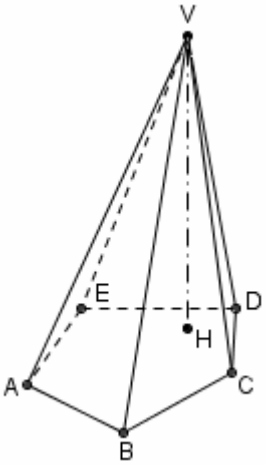


Un **parallelepipedo rettangolo**

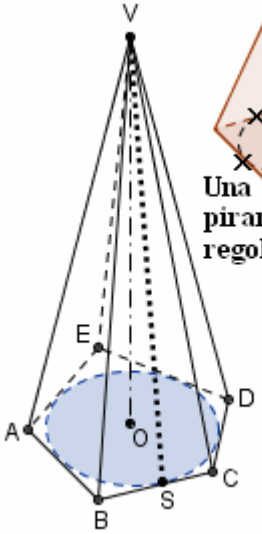


Una "**PIRAMIDE**" è un solido delimitato da una "base" poligonale e da una superficie laterale
formata da triangoli, ottenuti congiungendo un punto V ("vertice") coi vertici della base.
Si dice "**altezza**" **di una piramide**, la **distanza fra il vertice e il piano della base**.

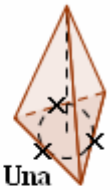
- **Piramide "retta"**: la sua base è un poligono *circoscrivibile ad una circonferenza*,
  e inoltre l'altezza della piramide ha il suo piede *proprio nel centro* di questa circonferenza
- In una *piramide retta*, le altezze dei triangoli che formano la superficie laterale sono *tutte uguali* fra loro:
  una qualsiasi di queste altezze uguali si dice "**apotema**" della piramide.
  Ribadiamolo: il concetto di "*apotema*" di una piramide
  NON ha senso per una piramide *qualsiasi*, ma solo per una piramide *retta*.
- **Piramide "regolare"**: è una piramide retta, avente per base un poligono regolare
- **Tronco di piramide**: si ottiene intersecando una piramide con un piano parallelo alla base



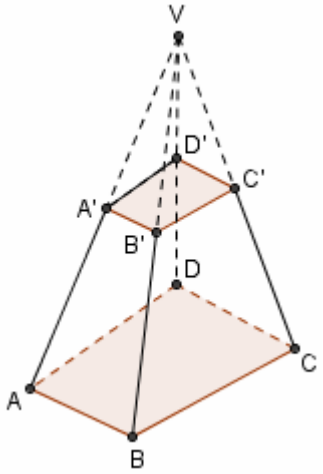
Una **piramide generica** con la sua altezza VH



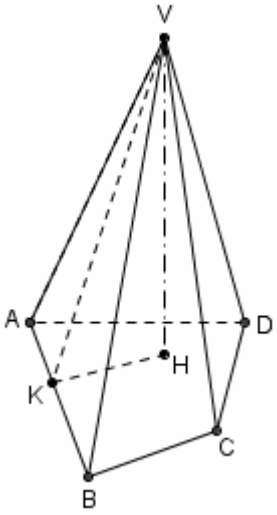
Una **piramide retta**; VS è uno dei suoi apotemi.



Una piramide regolare



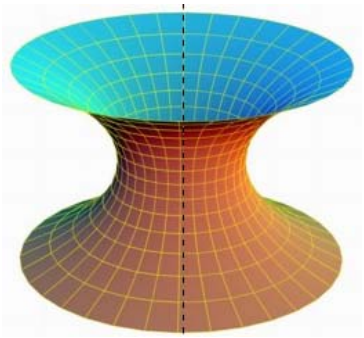
Un **tronco di piramide** (è come se fosse la differenza di due piramidi!)



Delle 5 figure, quella più a destra si riferisce al seguente enunciato: "*In una piramide qualsiasi (anche non retta), detti V il vertice, AB un lato della base, H la proiezione di V sul piano della base, e K la proiezione di H su AB, si ha che VK è l'altezza del triangolo VAB* ". Dài, che qualcosa di già visto ti consente di dimostrarlo!

2. SUPERFICI E SOLIDI DI ROTAZIONE

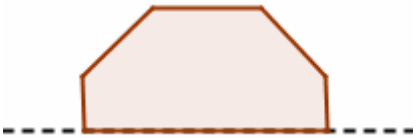
La figura qui sotto mostra una **SUPERFICIE DI ROTAZIONE**, **generata da una curva che ruota intorno ad una retta**; tratteggiato, il suo "**asse di rotazione**".



Nella figura qui a sinistra, compaiono anche dei "**meridiani**" (ciascuno è uguale alla curva che viene fatta ruotare intorno all'asse) e dei "**paralleli**" (circonferenze, aventi il centro sull'asse di rotazione).

Immagini: dai siti
https://www.indiana.edu/
www.softcom.net/users/sbmathias/series.htm

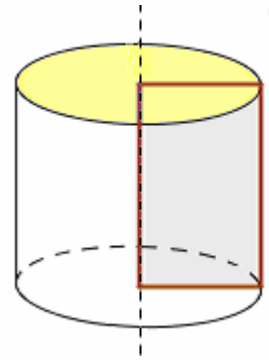
Se invece di una curva facciamo ruotare intorno all'asse una superficie, avremo un



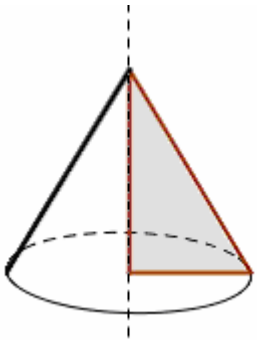
SOLIDO DI ROTAZIONE:



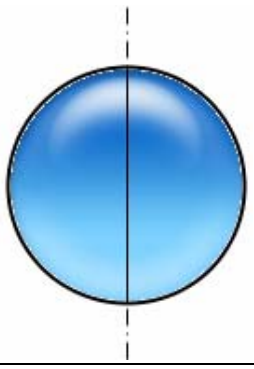
Un "**CILINDRO CIRCOLARE RETTO**" è il **solido di rotazione** generato da un **rettangolo** nel ruotare di un giro completo **intorno ad un suo lato.**



Un "**CONO CIRCOLARE RETTO**" è il **solido di rotazione** generato da un **triangolo rettangolo** nel ruotare di un giro completo **intorno ad un suo cateto.**



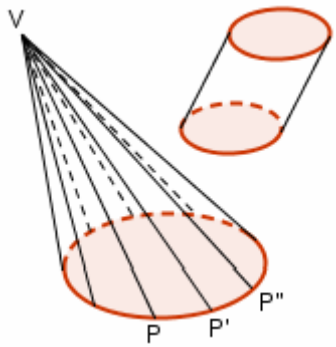
Anche una SFERA si può pensare come ottenibile ruotando un cerchio intorno a un suo diametro.



Abbiamo sopra definito cosa si intende per "cono *circolare retto*": ma più in generale, togliendo gli aggettivi, si può chiamare "**CONO**" qualunque solido ottenibile prendendo una porzione limitata di piano ("base") avente come contorno una curva chiusa di forma *arbitraria*, poi un punto V ("vertice") esterno al piano della base, e congiungendo V con tutti i punti P appartenenti al contorno della base. In questo senso, le "piramidi" non sono altro che "coni" particolari.

Lo stesso dicasi per il **CILINDRO**; esistono anche **cilindri** "non retti", come quello piccolino che abbiamo messo accanto al cono qui a fianco, o cilindri la cui base non è un cerchio, ma un'altra superficie a contorno chiuso.

Va comunque detto che **la maggior parte dei testi quando parla di "cilindro" o di "cono" sottintende "circolare retto".**



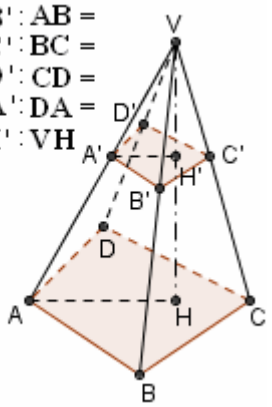
LE SEZIONI DI UNA PIRAMIDE CON PIANI PARALLELI ALLA BASE SONO POLIGONI SIMILI AL POLIGONO DI BASE, e il RAPPORTO DI SIMILITUDINE E' UGUALE a VH' : VH (figura), **cioè AL RAPPORTO FRA LE DISTANZE della sezione e della base rispettivamente, DAL VERTICE della piramide.**

ANALOGAMENTE AVVIENE PER UN CONO.

Nella figura a fianco questo enunciato (che non dimostriamo) è visualizzato nel caso di una piramide a base quadrangolare.

Inoltre **il rapporto fra le *aree* della sezione e della base è uguale al rapporto fra i *quadrati* delle loro distanze** dal vertice.

$$A'B' : AB = B'C' : BC = C'D' : CD = D'A' : DA = VH' : VH$$



3. IL VOLUME DI UN SOLIDO

Così come, per misurare un segmento, si prende come unità di misura un altro segmento,
e per misurare una superficie si prende come unità di misura un'altra superficie,
allo stesso modo per misurare un solido (l'"**estensione**" di un solido)
si prende come unità di misura un altro solido.

"Misurare" un solido S significa dunque

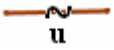
- prendere un altro solido di riferimento **U** (che farà da "unità di misura")
- e chiedersi quante volte **U** è contenuto in **S**.

Il procedimento di misura potrà avere come risultato un numero intero, razionale o eventualmente irrazionale.
Vedi a questo proposito il capitolo sulla misura delle superfici: il discorso è perfettamente analogo.

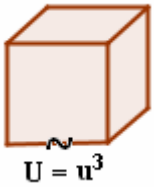
Di solito, il calcolo della misura dell'estensione di un solido (misura che verrà chiamata "**volume**")
è richiesto in un contesto nel quale già sono stati misurati dei segmenti,
con l'utilizzo di un determinato segmento **u**, scelto come unità di misura per questi.
In tal caso, è sempre conveniente adottare come unità di misura **U** per i solidi,
il cubo avente per lato il segmento **u**. Tale cubo viene generalmente indicato col simbolo $\mathbf{u^3}$.

Insomma:

se si è scelto questo segmento come unità di misura per le lunghezze …



… per calcolare i volumi si sceglierà come unità di misura questo cubo:

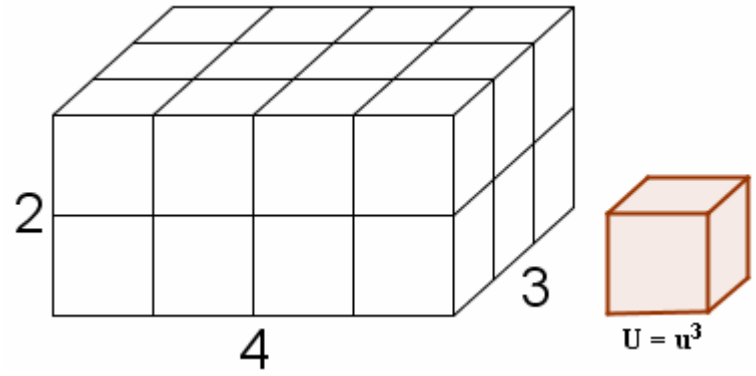


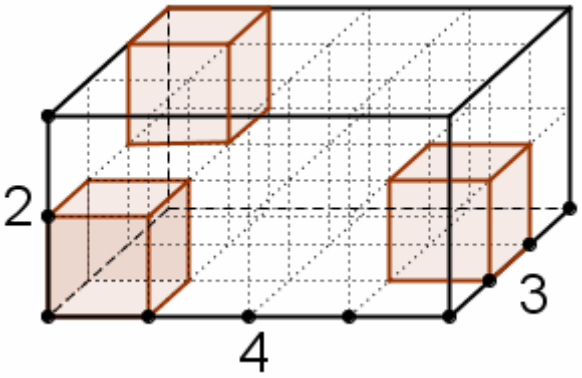
La figura sottostante è riferita ad un caso particolare; comunque, generalizzando in modo opportuno,
si dimostra facilmente che nel caso di un **parallelepipedo rettangolo** i cui lati abbiano misura intera,
la misura del volume del solido è uguale al prodotto delle misure delle tre dimensioni.

Se le misure delle dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono 4, 3 e 2, come in figura, si capisce che al "piano terra" ci staranno $4 \cdot 3 = 12$ cubetti di lato unitario, ma essendoci anche un "piano superiore" quindi 2 piani, in totale nel parallelepipedo potremo contare $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ cubetti unitari.

Il volume di questo parallelepipedo è perciò dato da $4 \cdot 3 \cdot 2$, ossia dal prodotto delle tre dimensioni.

Ma si può poi provare che lo stesso vale pure se le misure delle dimensioni sono, tutte o in parte, non intere (razionali, o anche irrazionali).





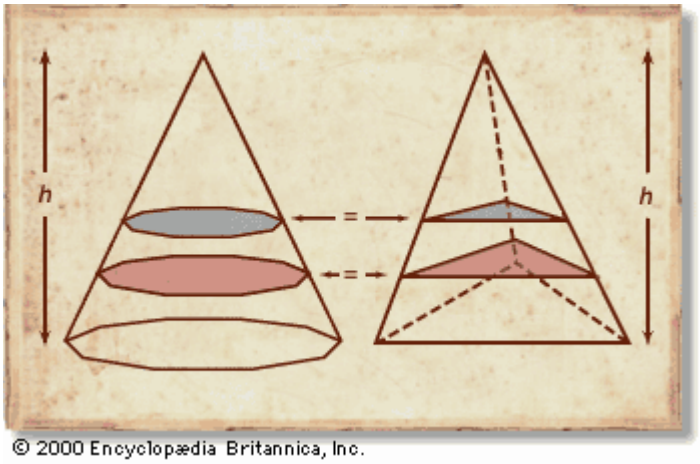
In definitiva, il **volume di un parallelepipedo rettangolo**
le cui dimensioni misurino a, b, c $(a, b, c \in \mathbb{R})$
è dato da

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c} = (a \cdot b) \cdot c = \boxed{S_{base} \cdot altezza}$$

4. IL PRINCIPIO DI CAVALIERI E LA SUA APPLICAZIONE AL CALCOLO DEI VOLUMI DI PRISMI, CILINDRI, PIRAMIDI E CONI

ASSIOMA: il "PRINCIPIO DI CAVALIERI" (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647)

" Se due solidi possono essere disposti in modo tale che, sezionandoli con un fascio di piani paralleli, ciascun piano individua sui due solidi due sezioni equivalenti (= con la stessa area), allora i due solidi sono equivalenti (= hanno ugual volume) "

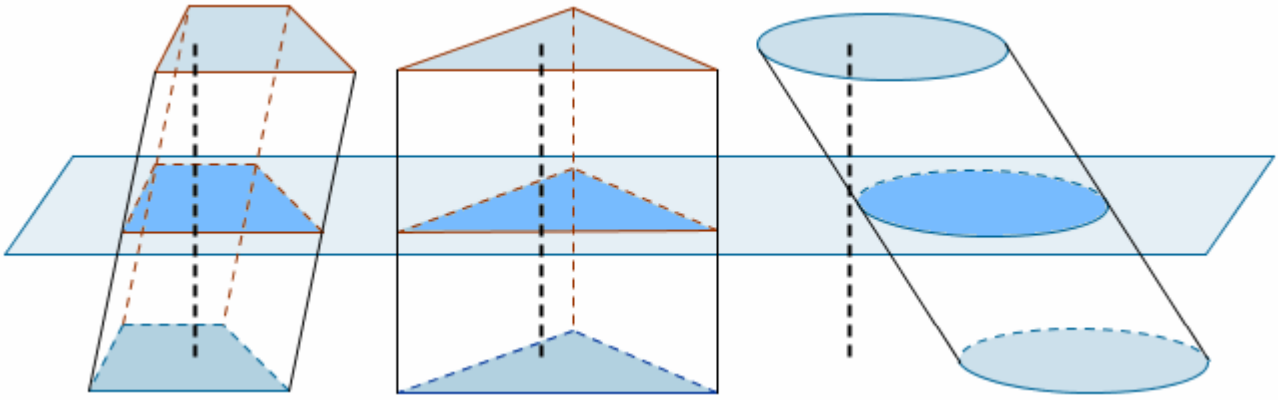




(*immagine opera di Anton, da Wikimedia Commons, qui utilizzata con licenza GFDL, GNU Free Documentation License*)

Teorema 1: due prismi, o un prisma e un cilindro, o due cilindri, aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

Dimostrazione: per il Principio di Cavalieri.



Nella dimostrazione dell'enunciato di cui sopra occorre anche tener conto del fatto (intuitivo, ma comunque dimostrabile) che le sezioni di un prisma, o di un cilindro, con piani paralleli alle basi, sono tutte uguali (fra loro e con le basi)

CONSEGUENZE: FORMULA PER IL VOLUME DI UN PRISMA O DI UN CILINDRO

Un prisma è dunque, in particolare, equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del prisma.

E anche un cilindro è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del cilindro.

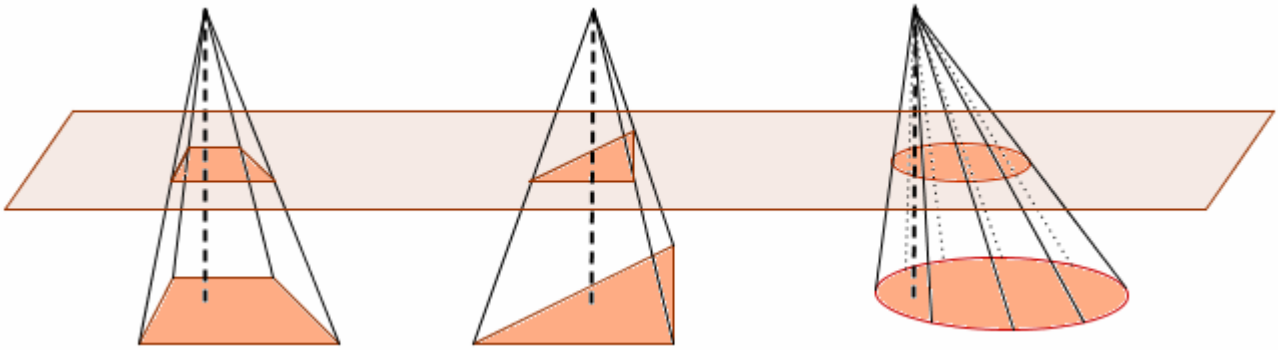
Quindi per calcolare il volume di un prisma qualsiasi o di un cilindro qualsiasi la formula da utilizzare è la stessa che abbiamo visto (paragrafo 3) valere per il parallelepipedo rettangolo, ossia

$$\mathbf{V = S_{base} \cdot altezza}$$

che nel caso di un *cilindro*, retto o non retto, *a base circolare* di raggio r, diventa $\mathbf{V = \pi r^2 \cdot h}$

Teorema 2: due piramidi, o una piramide e un cono, o due coni, aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

Dimostrazione: per il Principio di Cavalieri.



Nella dimostrazione dell'enunciato di cui sopra occorre anche tener conto del fatto che
date due piramidi, o due coni, o una piramide e un cono, se i due solidi hanno ugual altezza e basi equivalenti,
sezionando i due solidi con due piani aventi ugual distanza dal vertice, si ottengono sezioni fra loro equivalenti
(questo è conseguenza dell'ultimo teorema del paragrafo 2).

Teorema
Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.

Dimostrazione

Possiamo pensare di sostituire qualunque piramide assegnata, con una qualsiasi piramide *a base triangolare*, purché tale seconda piramide abbia altezza uguale e base equivalente a quella della piramide originaria.
Infatti la "vecchia" piramide e quest'altra "nuova" saranno equivalenti per il precedente Teorema 2;
mentre il Teorema 1 ci assicura che prismi con basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

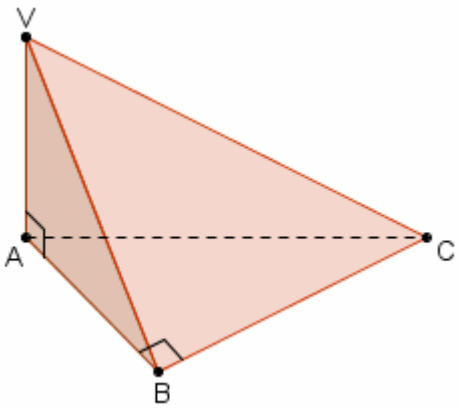
Noi supporremo che la "nuova" piramide, equivalente alla "vecchia", abbia

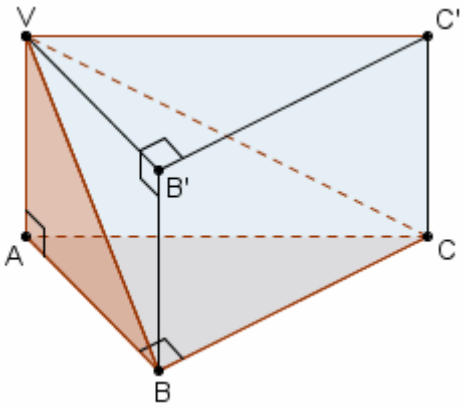
- come base un triangolo rettangolo
- e il vertice tale che la sua proiezione sul piano della base
  cada proprio nel vertice di uno degli angoli acuti del triangolo di base

(in realtà, nessuna di queste due condizioni è indispensabile per la dimostrazione,
tuttavia in questo modo la comprensione dei disegni dovrebbe probabilmente risultare meno difficoltosa).

Partiamo dunque
dalla piramide ABCV
della figura qui a destra,
e innanzitutto costruiamo
il prisma ABCC'B'V
avente base ABC
e altezza AV.

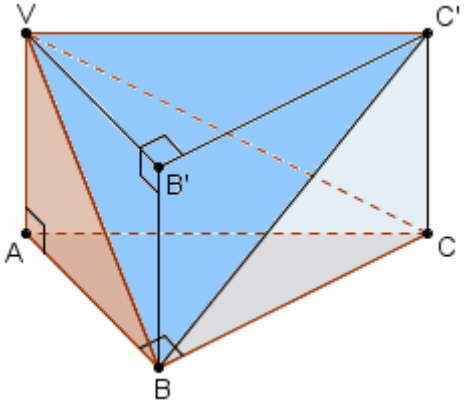
Ci proponiamo
di dimostrare che
la piramide ABCV
è la terza parte
del prisma ABCC'B'V .

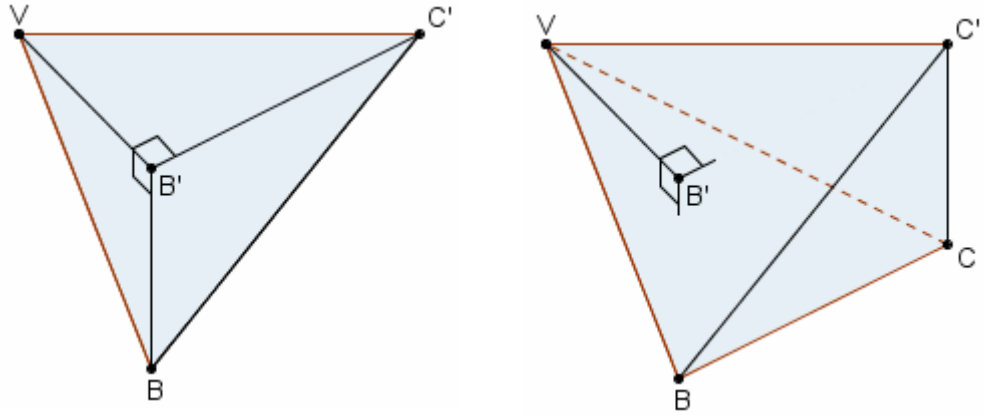




In pratica, alla piramide è stato aggiunto il solido BCC'B'V , che ha forma di piramide a base rettangolare.

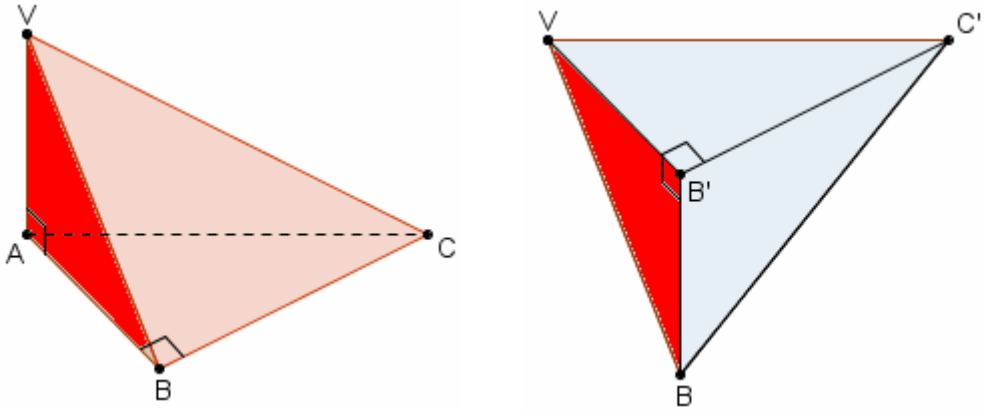
Adesso tracciamo la diagonale BC' del rettangolo BCC'B' ,
che è la base del solido piramidale BCC'B'V
che abbiamo aggiunto alla piramide iniziale;
il piano passante per i 3 punti B, C' e V
divide la piramide a base rettangolare BCC'B'V
in due piramidi a base triangolare,
che sono BC'B'V e BCC'V .
La prima è facile da visualizzare, la seconda un po' meno:
penso saranno utili le due figure seguenti,
che mostrano tali due piramidi singolarmente:





Nella seconda figura abbiamo lasciato anche il segmento VB', per evidenziare che esso fa da altezza per *entrambe* le piramidi se ne prendiamo come basi BC'B' e BCC' rispettivamente; ma allora, dato che i due triangoli BC'B' e BCC' sono uguali fra loro in quanto ottenuti dividendo un rettangolo con una sua diagonale, le due piramidi, per avere ugual base e uguale altezza, **sono equivalenti**.

Riconsiderando ora la piramide ABCV di partenza, scopriamo che essa è equivalente alla BC'B'V perché

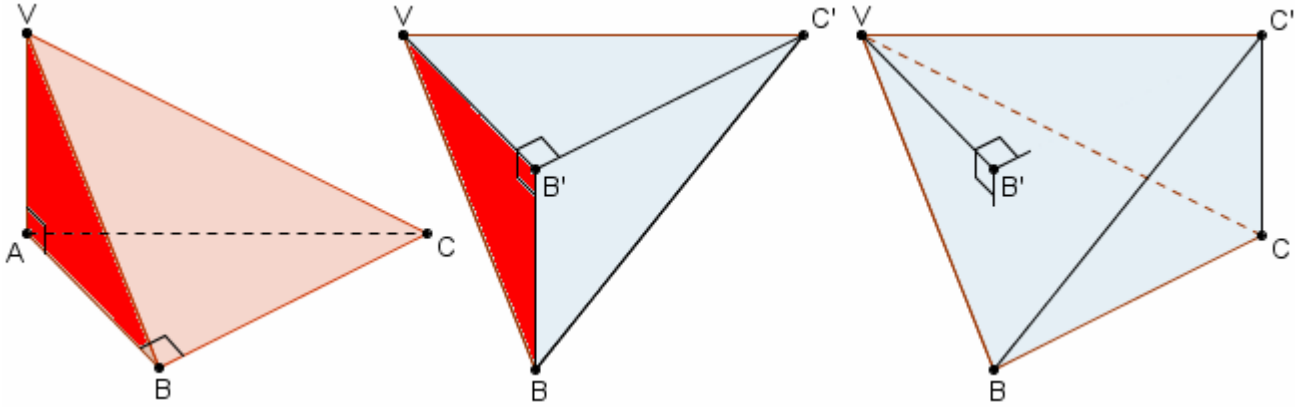


se si prendono per basi ABV e BB'V rispettivamente, le altezze corrispondenti sono CB e C'B', ed essendo

- ABV = BB'V (triangoli in cui un rettangolo viene spezzato da una diagonale)
- e CB = C'B' (lati opposti di un rettangolo),

ABCV e BC'B'V hanno ugual base e ugual altezza.

Ma allora il prisma ABCC'B'V, avente la stessa base e la stessa altezza della piramide iniziale ABCV, è composto dalle tre parti ABCV + BC'B'V + BCC'V tutte equivalenti fra loro!



Ciascuna delle tre parti è perciò 1/3 del prisma; in particolare, $ABCV = \frac{1}{3} ABCC'B'V$ e la tesi è dimostrata.

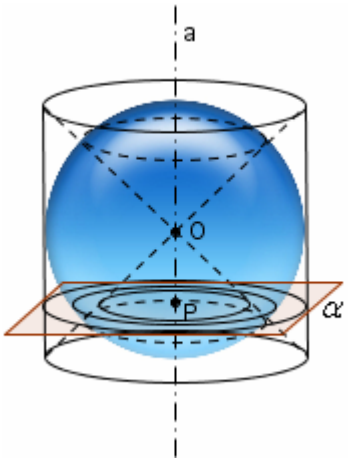
CONSEGUENZE: FORMULA PER IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE O DI UN CONO

Poiché dunque una piramide, o un cono, hanno volume uguale a 1/3 del volume di un prisma che ha base equivalente e altezza uguale, per calcolare il volume di una piramide o di un cono la formula da utilizzare sarà

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} S_{base} \cdot altezza = \frac{S_{base} \cdot altezza}{3}}$$

5. IL VOLUME DELLA SFERA

Teorema: il volume di una sfera è dato da $\frac{4}{3}\pi r^3$



Dimostrazione

"Incastriamo"
(in geometria si dice: "inscriviamo")
la sfera di raggio r in un cilindro retto,
che avrà dunque il diametro delle basi e l'altezza
entrambi uguali al diametro della sfera.

I due coni aventi per vertice il centro della sfera
e aventi per basi le due basi del cilindro
formano un solido simile ad una clessidra.

Pensiamo ora **allo strano solido ottenibile**
prendendo il cilindro e togliendogli i punti della clessidra:
chiameremo questo solido "anticlessidra".

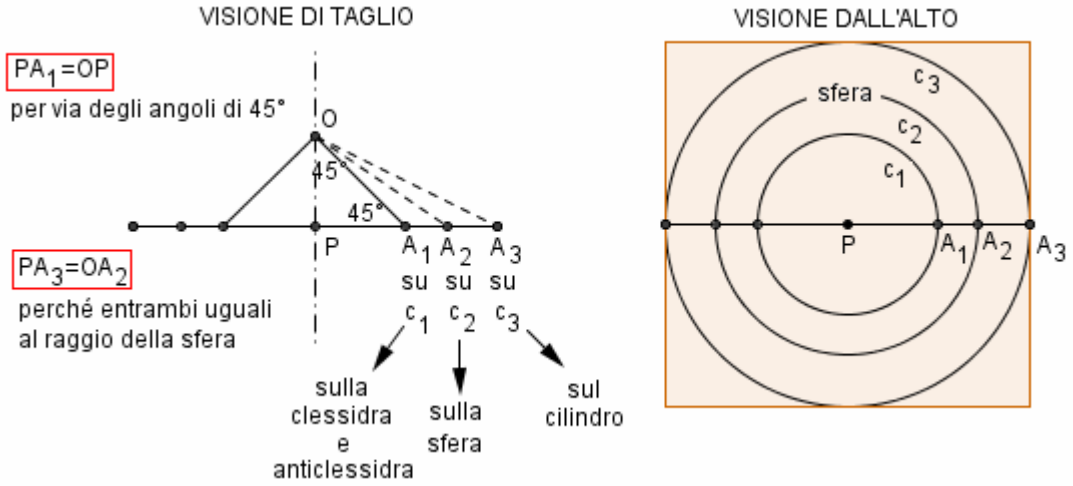
Perché mai ci interessa l' "anticlessidra"?
Perché **ci proponiamo di dimostrare che tale anticlessidra è equivalente alla sfera**!!!

Infatti, consideriamo un piano α che intersechi perpendicolarmente, all'interno del cilindro,
l'asse di simmetria a della figura.
Su tale piano

- la sfera staccherà un cerchio (avente come contorno la circonferenza *intermedia* nella figura)
- l'anticlessidra staccherà una corona circolare (compresa fra le circ. *più interna* e *più esterna* della figura).

Ci basterà perciò dimostrare che il cerchio e la corona circolare sono equivalenti,
per poter affermare, grazie al Principio di Cavalieri, l'equivalenza fra la sfera e l'anticlessidra.

A tale scopo, immaginiamo di guardare la figura "di taglio", con gli occhi giusto all'altezza del piano α.



Area cerchio entro $c_2 = \boxed{\pi \cdot PA_2^2}$

Area corona tra c_1 *e* $c_3 = \pi \cdot PA_3^2 - \pi \cdot PA_1^2 = \pi \cdot \left(PA_3^2 - PA_1^2\right) \overset{\text{NOTA}}{=} \pi \cdot \left(OA_2^2 - OP^2\right) \overset{\text{PITA-GORA}}{=} \boxed{\pi \cdot PA_2^2}$

NOTA: $PA_3 = OA_2$, $PA_1 = OP$ (vedi annotazioni sulla figura)

Allora per calcolare il volume della sfera basterà calcolare il volume dell'anticlessidra,
a sua volta uguale alla differenza fra il volume del cilindro e quello della clessidra.

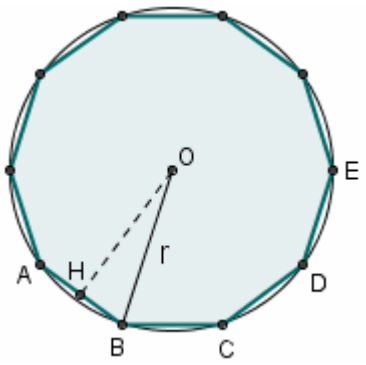
$$\boxed{\textit{Volume sfera}} = \boxed{\textit{Volume anticlessidra}} = \textit{Volume cilindro} - \textit{Volume clessidra} =$$
$$= \textit{Volume cilindro} - 2 \cdot \textit{Volume di un cono} =$$
$$= \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{6-2}{3}\pi r^3 = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

6. AREE DI SUPERFICI DI SOLIDI DI ROTAZIONE

Ci occuperemo solo di un caso particolarmente semplice, che tuttavia dovrebbe essere istruttivo:
la superficie laterale di un cono circolare retto.

Sia dato un cono circolare retto, il cui cerchio di base abbia raggio di misura r, e il cui apotema misuri a.

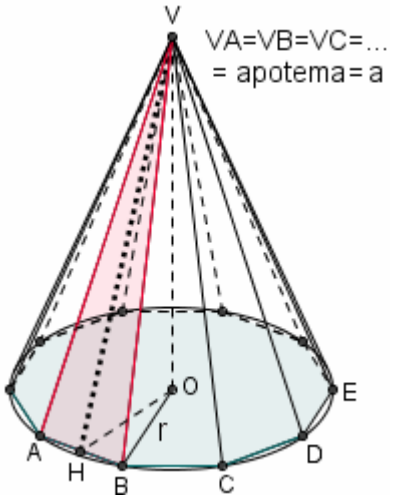
Immaginiamo di inscrivere nella circonferenza di base un poligono regolare …



… dopodiché, congiungeremo i vertici del poligono col vertice del cono.

In tal modo, la superficie laterale del nostro cono sarà approssimata da un insieme di triangoli: l'approssimazione sarà tanto più precisa, quanto più numerosi saranno i triangoli.

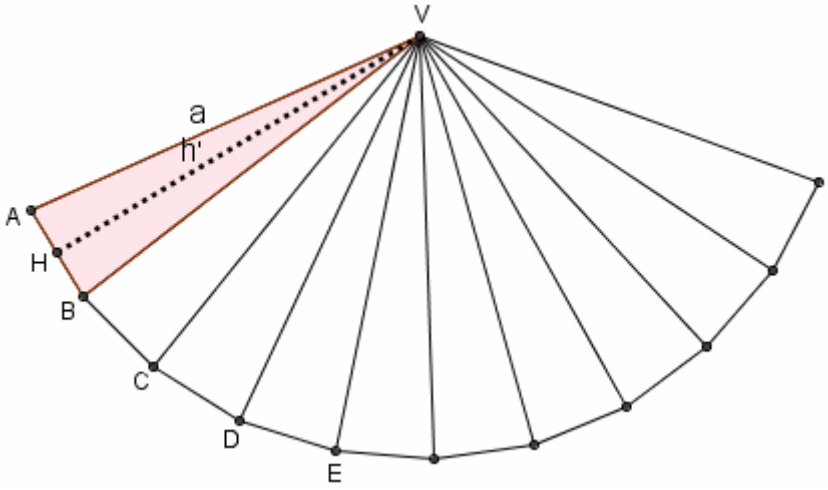
→



Una superficie è un insieme di punti; per "area" si intende "quel numero che misura l'estensione di una superficie". Tuttavia, sovente si dice "*superficie*" col significato di "*area di una superficie*".

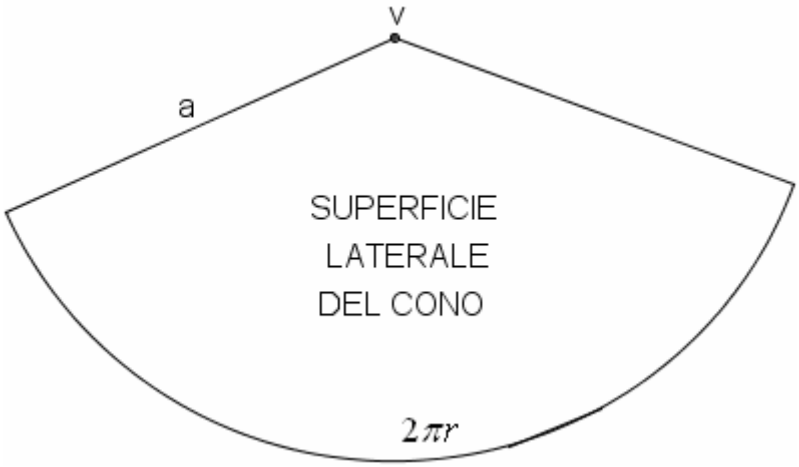
Nel nostro caso, il poligono inscritto era un decagono, e la superficie laterale del cono ne è risultata approssimata nel modo illustrato dalla figura sottostante, da cui si trae:

$$\text{approssimazione sup.lat.cono} =$$
$$= \text{somma aree triangoli} =$$
$$= \frac{AB\cdot h'}{2}+\frac{BC\cdot h'}{2}+\frac{CD\cdot h'}{2}+\ldots =$$
$$= \frac{(AB+BC+CD+\ldots)\cdot h'}{2} =$$
$$= \frac{perimetro_{poligono}\cdot h'}{2}$$
$$(h' = VH)$$



dove h' = VH *non* è esattamente l'apotema del cono, ma differisce ben poco da esso,
e anzi sarebbe ancora più prossimo all'apotema a = VA del cono
se i lati del poligono, anziché 10, fossero 1000 o 1000000.

Se il poligono avesse un numero *grandissimo* di lati, l'approssimazione si farebbe *estremamente* precisa e avremmo una situazione tendente a quella a fianco raffigurata, dove il raggio del settore circolare è uguale all'apotema del cono e al posto della spezzata ABCDE … (=perimetro del poligono inscritto) abbiamo un arco di circonferenza di lunghezza uguale alla lunghezza $2\pi r$ della circonferenza di base del cono.



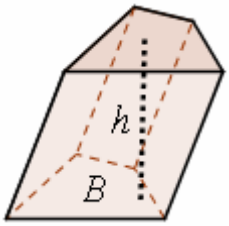
Tutto ciò ci porta a stabilire in definitiva che la superficie laterale del nostro cono è

$$\frac{2\pi r\cdot a}{2} = \boxed{\pi r a}$$, essendo *r* il raggio di base, e *a* l'apotema del cono.

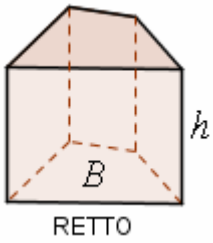
7. SPECCHIETTO DELLE FORMULE STUDIATE; ALTRE FORMULE

Lunghezza di una circonferenza = $2\pi r$ Area di un cerchio = πr^2 $\pi = 3{,}14159...$

Volume di un parallelepipedo o di un prisma =
$= S_{base} \cdot h$

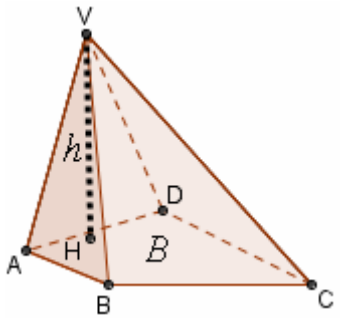


Superficie laterale di un prisma RETTO =
$= perimetro_{base} \cdot h$



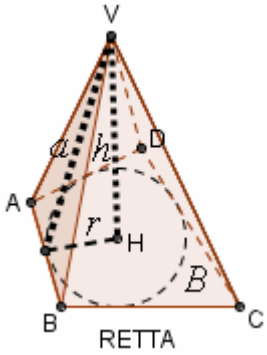
Un prisma è RETTO quando gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.

Volume di una piramide =
$= \frac{S_{base} \cdot h}{3}$



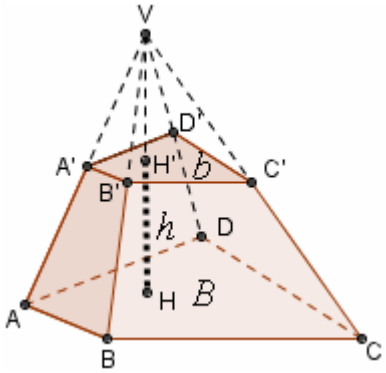
Una piramide è equivalente (come volume) alla *terza parte* di un prisma di uguale base e uguale altezza.

Superficie laterale di una piramide RETTA=
$= \frac{perimetro_{base} \cdot apotema}{2}$



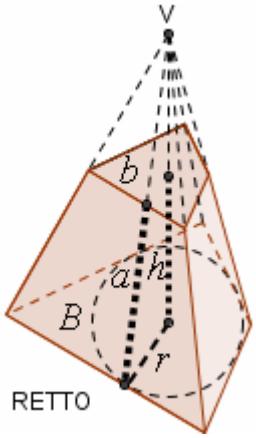
Una piramide è RETTA quando la base è un poligono circoscrivibile a un cerchio, e la proiezione del vertice sul piano della base cade proprio nel centro di questo cerchio.

Volume di un tronco di piramide =
$\frac{\left(B + b + \sqrt{Bb}\right) \cdot h}{3}$ (*B, b aree delle basi*; h = HH')



Se non si ricorda la formula si può ricavare il volume come differenza fra i volumi di due piramidi; per calcolare le altezze di queste si potrà tener conto del teorema nel riquadro in fondo al paragrafo 2.

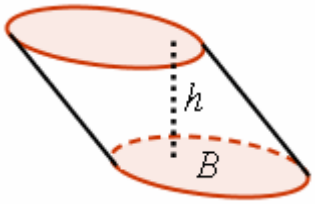
Superficie laterale di un tronco di piramide RETTA =
$\frac{\left(perimetro\ base\ magg. + perimetro\ base\ min.\right) \cdot a}{2}$



a indica l'apotema del *tronco*, differenza fra gli apotemi delle due piramidi.

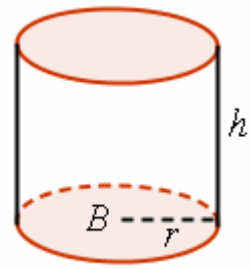
Se non si ricorda la formula si può operare per differenza fra le superfici laterali di due piramidi.

Volume di un cilindro = $S_{base} \cdot h$



NOTA:
Di norma i testi, parlando di *cilindro*,
intendono riferirsi a
quello che noi chiamiamo *cilindro circolare retto*

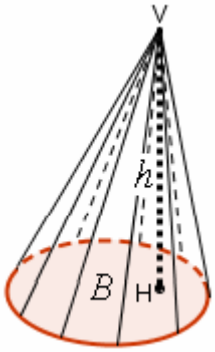
Volume di un cilindro CIRCOLARE RETTO = $\pi r^2 h$
Sup. lat. di un cilindro CIRCOLARE RETTO = $2\pi r \cdot h$



CIRCOLARE RETTO

Un cilindro è
CIRCOLARE RETTO
quando le basi sono cerchi,
e la superficie laterale
è costituita
da segmenti
perpendicolari
ai piani delle basi.

Volume di un cono = $\frac{S_{base} \cdot h}{3}$

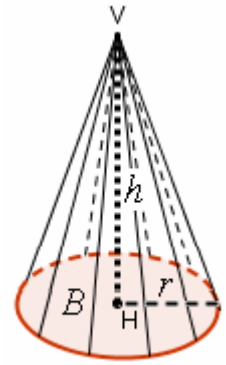


Un cono è equivalente (come volume)
alla *terza parte* di un cilindro
di uguale base e uguale altezza.

NOTA:
Di norma i testi, parlando di *cono*,
intendono riferirsi a
quello che noi chiamiamo *cono circolare retto*

Volume di un cono CIRCOLARE RETTO = $\frac{\pi r^2 h}{3}$

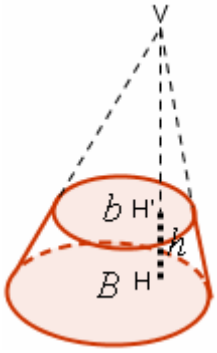
Superficie laterale di un cono CIRCOLARE RETTO =
$= \frac{2\pi r \cdot a}{2} = \pi r a$



CIRCOLARE RETTO

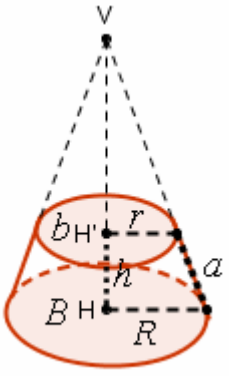
Un cono è
CIRCOLARE RETTO
quando
la base è un cerchio,
e la proiezione del vertice
sul piano della base
cade proprio nel centro
di questo cerchio.

Volume di un tronco di cono = $\frac{\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}{3}$



(ma è ricavabile anche
come differenza fra i volumi di due coni)

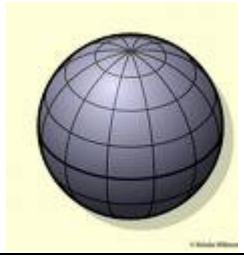
Superficie laterale di un tronco di cono
CIRCOLARE RETTO = $\pi\left(R + r\right)a$



CIRCOLARE RETTO

Volume di una sfera = $\frac{4}{3}\pi r^3$

"Della sfera il volume qual è?
Quattro terzi pi greco erre tre"



Superficie di una sfera = $4\pi r^2$

La superficie di una sfera è
4 volte quella di un suo cerchio massimo

Immagine dal sito
http://soho-modern.com/circles.pps
di Stephen Hu

8. ESERCIZI (risposte alle pagg. 344 -345)

1) Per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo.
E se i tre punti distinti fossero invece allineati, per essi quanti piani passerebbero?

2) Come mai dal fatto che per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo, discende come conseguenza che *due rette incidenti individuano un piano e uno solo*?

3) Un icosaedro ha 20 facce e 30 spigoli. Quanti vertici ha?

4) "In una piramide qualsiasi (anche non retta), detti V il vertice, AB un lato della base, H la proiezione di V sul piano della base, e K la proiezione di H su AB, si ha che VK è l'altezza del triangolo VAB": dimostra questo enunciato (*figura*).

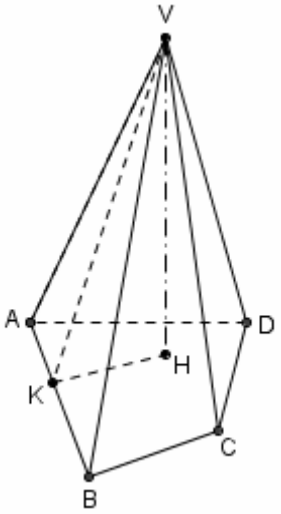


Figura 4 - Una piramide

5) Quanto misura la diagonale di un cubo di lato unitario?

Indicazione (con riferimento alla figura):
traccia BD e BH;
ora, HD è perpendicolare a BD: perché?
Pitagora 2 volte.

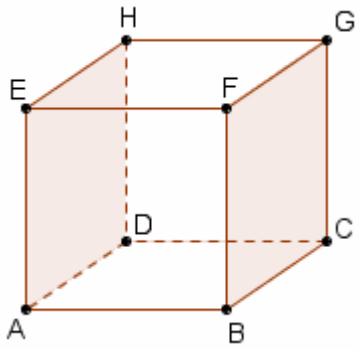
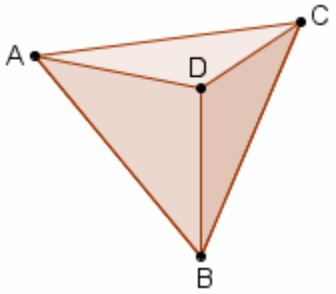


Figura 5 - Un cubo

6) Se un tetraedro regolare ha lato di lunghezza 1, quanto misura la sua altezza?

Indicazione:
immagina di sezionare il tetraedro regolare con un piano che passi per uno degli spigoli, e sia perpendicolare a un altro spigolo;
otterrai un triangolo;
quanto misurano i suoi lati?
Poi …

Figura 6 - Un tetraedro regolare



7) Completa le parti mancanti, indicate coi puntini di sospensione.

Teorema riguardante la sezione di una piramide con un piano parallelo alla base

"Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la sezione è un poligono simile al poligono che fa da base per la piramide. Inoltre, i lati corrispondenti (e i perimetri) di questi due poligoni simili stanno fra loro come le rispettive distanze dal vertice della piramide, e le aree stanno fra loro come i quadrati di tali distanze".

Dimostrazione

Nella figura qui a fianco, $A'B'C'D'$ è il poligono sezione della piramide con un piano parallelo alla base ABCD.

Dico che il poligono $A'B'C'D'$ è simile al poligono ABCD. Infatti: i segmenti $A'B'$ e AB sono paralleli, in quanto le rette su cui giacciono stanno su due piani paralleli e pertanto non possono avere punti comuni.

Ma allora i due triangoli $VA'B'$ e VAB sono simili perché … e quindi

$$A'B' : AB = VA' : VA = VB' : VB .$$

Ora per la similitudine (stesso motivo) di $VB'C'$ e VBC si ha pure

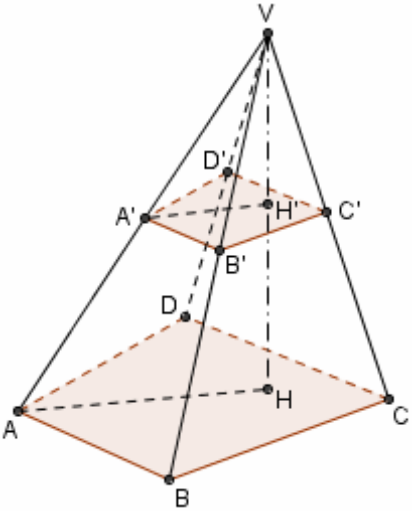
$$VB' : VB = VC' : VC = B'C' : BC$$

e ne consegue $A'B' : AB = B'C' : BC$.

Continuando in modo analogo, si dimostra che è

$$A'B' : AB = B'C' : BC = C'D' : CD = D'A' : DA$$

quindi i poligoni $A'B'C'D'$ e ABCD hanno i lati in proporzione.



Per poter concludere che sono simili occorre ancora far vedere che …

Ma in effetti è $A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C$ perché hanno i lati paralleli e concordi (si può dimostrare che il teorema, da noi visto sul piano, vale pure nello spazio) e analogamente per le altre coppie di angoli corrispondenti.

E così la similitudine è dimostrata.

La proporzione $A'B' : AB = VH' : VH$ (e analogamente per le altre coppie di lati corrispondenti) si giustifica considerando ora la similitudine dei triangoli … con le considerazioni seguenti: …

Infine, è noto che i perimetri di due triangoli simili stanno fra loro come … e quindi nel nostro caso come …

mentre le aree stanno fra loro come … e quindi nel nostro caso come …

8) Una piramide retta ha per base un esagono regolare di lato 1, e ha altezza 2.
Calcola spigolo laterale e apotema.

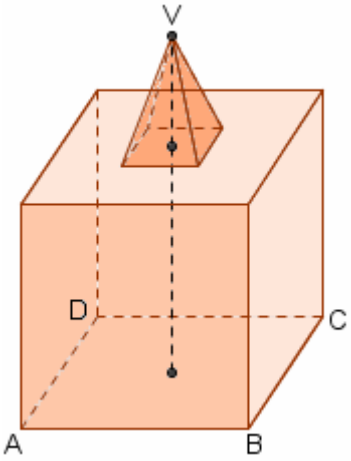
9) Una piramide retta ha per base un triangolo equilatero di lato 1,
e ha altezza pure uguale a 1. Calcola spigolo laterale e apotema.

10) Quanto distano due vertici opposti di un ottaedro regolare di spigolo unitario?

11) Una piramide retta la cui base è un quadrato il cui lato misura 2 ha altezza anch'essa uguale a 2.
Stabilisci quanto misurano: a) lo spigolo laterale b) l'apotema c) il lato del cubo inscritto

12) Una piramide viene intersecata da un piano, parallelo alla base, che taglia l'altezza in due parti
delle quali quella contenente il vertice è 1/3 dell'altra.
Se l'area della base della piramide misura *B*, quanto misura l'area della sezione?

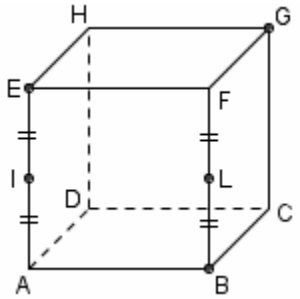
13) Un cubo di lato 2 ha in comune la base ABCD con una
piramide retta di altezza 3. La piramide spunta perciò fuori dal cubo.
E' richiesto di determinare il volume di questo solido,
e la sua superficie totale (*vedi figura qui a fianco*).



14) Di un tronco di cono si suppongono note:
l'area *B* della base maggiore, l'area *b* della base minore,
la misura *h* dell'altezza.
Ricava le altezze delle due piramidi di cui il tronco è la differenza e
deduci da tutto ciò la formula per il volume del tronco di piramide,
riportata al paragrafo precedente.

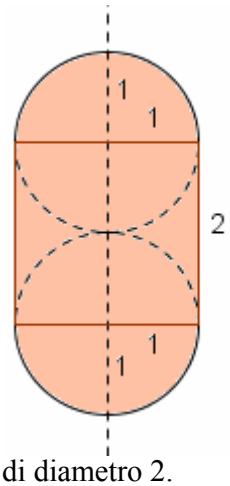
15) Tagliando una piramide con un piano, a metà della sua altezza,
si ottiene un tronco di piramide.
Qual è il rapporto fra il volume del tronco e quello della piramide intera?
La risposta dipende dalla forma della piramide?

16) La figura qui sotto rappresenta
un cubo di lato 1. Trova
i volumi dei due solidi
ottenibili tagliando il cubo
con il piano passante
a) per i tre punti B, E, G
b) per i tre punti I, L, C

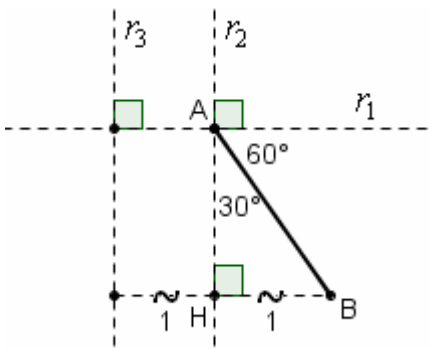


17)
Dal vertice A
di un triangolo
equilatero ABC
di lato 1 si alza
un segmento AD
perpendicolare
al piano ABC,
e di lunghezza 1.
Trova volume
e superficie totale
del tetraedro ABCD
e spiega perché
non si tratta
di una piramide
retta sulla base ABC.

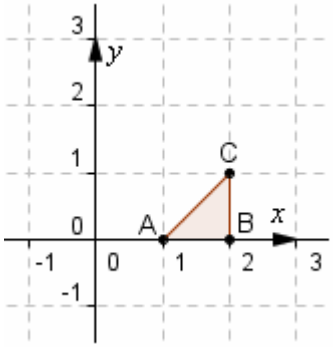
18)
Calcola volume
e superficie totale
del solido a forma
di pastiglia
che si ottiene
ruotando
di un giro completo
intorno all'asse
tratteggiato,
la superficie
raffigurata,
composta da
un quadrato di lato 2
più due semicerchi di diametro 2.



19)
Il segmento AB viene ruotato
di un giro completo intorno alla retta r_1.
Determina l'area della superficie di rotazione.
Stesso quesito con riferimento a r_2, r_3.



20)
Calcola il volume del solido
ottenibile ruotando
il triangolo ABC intorno
a) all'asse *x* b) all'asse *y*

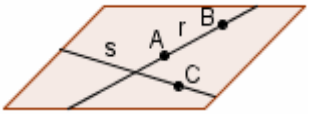


21)
Determina il lato
del cubo inscritto
in una piramide
regolare
con base quadrata,
nella quale il lato
del quadrato
di base
abbia misura *a*
e l'altezza
abbia misura *h*.

RISPOSTE

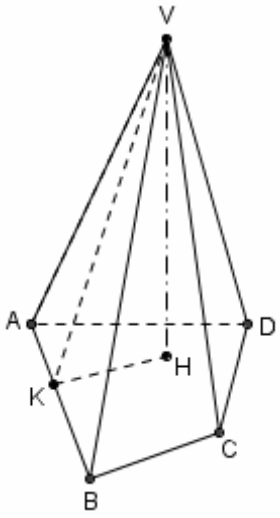
1) Per 3 punti allineati passano infiniti piani.

2) Perché su una delle rette possiamo prendere 2 punti qualsiasi A e B,
e sull'altra un terzo punto C (purché non sia proprio l'intersezione fra le due)
e avremo quindi 3 punti non allineati, per i quali passerà 1 e 1 solo piano,
su cui le 2 rette giaceranno completamente perché se 2 punti di una retta appartengono ad un piano,
vi appartengono di certo anche tutti gli altri punti della retta.



3) f+v = s+2 (formula di Eulero) da cui, nel caso di un icosaedro (s=30, f=20), v = s+2–f = 30+2–20=12.

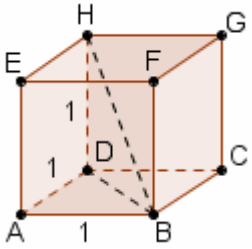
4) Nella situazione della figura, VK è l'altezza del triangolo VAB per il Teorema delle 3 perpendicolari. Infatti VH è perpendicolare al piano ABCD, e dal piede H di questa perpendicolare parte una seconda retta, la HK, che è perpendicolare ad una terza retta, la AB, giacente su quel piano: ma allora questa terza retta, secondo il teorema citato, è perpendicolare al piano individuato dalle prime due, che è poi il piano VHK:
e ciò significa che AB è perpendicolare a tutte le rette di VHK passanti per K, quindi è perpendicolare anche a VK, come volevasi dimostrare.



5) Innanzitutto, con riferimento alla figura, HD è perpendicolare a BD
perché HD è perpendicolare, in D, alle due rette DA e DC,
ma allora sarà perpendicolare a tutte le rette del piano da esse individuato,
passanti per D: e BD è una di queste.

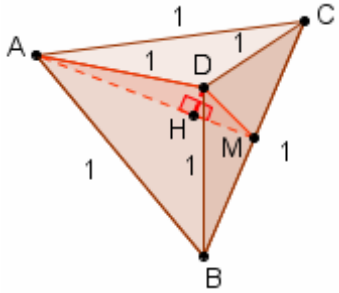
Ora $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

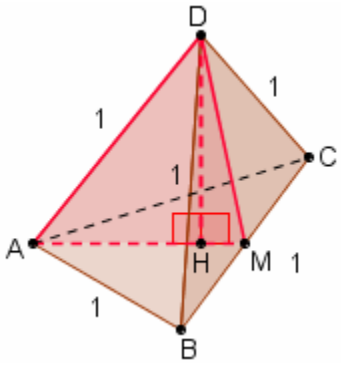
e $HB = \sqrt{HD^2 + BD^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

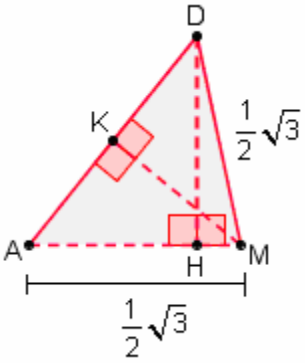


6) Se un tetraedro regolare ha lato di lunghezza 1,
quanto misura la sua altezza?

DM e AM, altezze di triangoli equilateri di lato 1, misurano ciascuno $\frac{1}{2}\sqrt{3}$







Con riferimento alla figura più a destra, possiamo calcolare l'altezza DH procedendo ad esempio così:
calcoliamo l'area del triangolo AMD prendendo come base AD e come altezza MK:

$$MK = \sqrt{DM^2 - DK^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad S_{AMD} = \frac{AD \cdot MK}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

dopodiché, prendendo invece come base AM e come altezza DH: $DH = \frac{2S_{AMD}}{AM} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

7) VA'B' e VAB sono simili perché *hanno gli angoli rispettivamente uguali (uno in comune, due coppie di corrispondenti rispetto a parallele con trasversale)* o anche: *per il Corollario del 1° Crit. di Similitudine.*

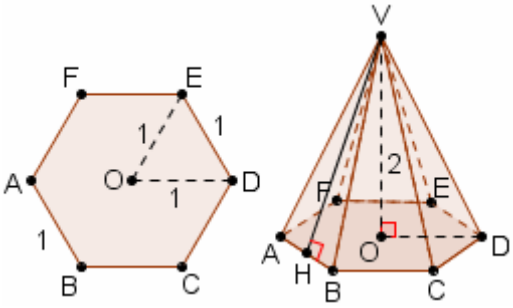
Per poter concludere che sono simili occorre ancora far vedere che *hanno gli angoli rispettivamente uguali.*

La proporz. $A'B' : AB = VH' : VH$ si giustifica considerando ora la similitudine dei triangoli VH'A', VHA con le considerazioni seguenti: *tale similitudine ci dice che* $VA' : VA = VH' : VH$ *, ma sapevamo che era* $VA' : VA = A'B' : AB$ *quindi ne deduciamo che* $A'B' : AB = VH' : VH$.

Infine, è noto che i perimetri di due triangoli simili stanno fra loro *come due lati omologhi* e quindi nel nostro caso come $VH' : VH$ mentre le aree *come i quadrati di due lati omologhi* $\left(VH'^2 : VH^2\right)$.

8) *spigolo laterale* $= \mathrm{VD} = \sqrt{\mathrm{OD}^2 + \mathrm{VO}^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

apot. $= \mathrm{VH} = \sqrt{\mathrm{VB}^2 - \mathrm{HB}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$



9) *spigolo laterale* $= \frac{2}{\sqrt{3}}$; *apotema* $= \sqrt{\frac{13}{12}}$

10) $\sqrt{2}$

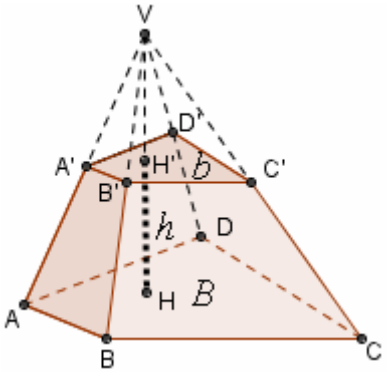
11) *spigolo laterale* $= \sqrt{6}$; *apotema* $= \sqrt{5}$; $\ell = 1$

12) $\frac{1}{16}B = \frac{B}{16}$

13) *Volume* $= 8 + \frac{4}{27} = \frac{220}{27}$ *Sup. totale* $= 4 \cdot 6 - \frac{4}{9} + \frac{\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}}{2} = 24 - \frac{4}{9} + \frac{4\sqrt{10}}{9} = \frac{212 + 4\sqrt{10}}{9} = \frac{4}{9}\left(53 + \sqrt{10}\right)$

14)

$\mathrm{VH}' = x$, $\mathrm{VH} = x + h$.



E' noto (teorema sulle sezioni di una piramide con piani paralleli alla base, paragrafo 2, ripreso poi nell'esercizio 7 di questa rassegna), che vale la proporzione $b : B = \mathrm{VH}'^2 : \mathrm{VH}^2$

quindi si avrà $b : B = x^2 : (x+h)^2$ da cui

$$Bx^2 = b(x+h)^2 \quad \ldots$$

$$(B-b)x^2 - 2bhx - bh^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{bh \pm \sqrt{b^2h^2 + (B-b)bh^2}}{B-b} = \frac{bh \pm \sqrt{Bbh^2}}{B-b} = h\frac{b \pm \sqrt{Bb}}{B-b}$$

Delle due soluzioni quella col "–" è <0 $\left(B > b \text{ e quindi } \sqrt{Bb} > \sqrt{b^2} = b\right)$ e perciò non accettabile.

Resta l'altra, che porta a

$$\mathrm{VH}' = h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}; \quad \mathrm{VH} = \mathrm{VH}' + h = h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b} + h = \frac{h\sqrt{Bb} + \cancel{bh} + Bh - \cancel{bh}}{B-b} = h\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b}$$

per cui il volume del tronco, differenza dei volumi delle due piramidi, sarà

$$\frac{B \cdot h\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b}}{3} - \frac{b \cdot h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}}{3} = \frac{Bh\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b} - bh\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}}{3} = \frac{Bh\sqrt{Bb} + B^2h - bh\sqrt{Bb} - b^2h}{3(B-b)} =$$

$$= \frac{h\sqrt{Bb}(B-b) + h(B^2-b^2)}{3(B-b)} = \frac{h\sqrt{Bb}\cancel{(B-b)} + h(B+b)\cancel{(B-b)}}{3\cancel{(B-b)}} = \frac{(B+b+\sqrt{Bb})h}{3}$$

che è proprio la formula riportata nel paragrafo precedente a questo.

15) Il rapporto è 7/8; no, la risposta è *indipendente* dalla forma della piramide 16) *a)* 1/6, 5/6 *b)* 1/4, 3/4

17) $\mathrm{V} = \frac{\sqrt{3}}{12}$; $\mathrm{S_{TOT.}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+4}{4}$ Sarebbe stata retta se la proiezione del vertice sulla base fosse stato il *centro* della base stessa, non un suo vertice

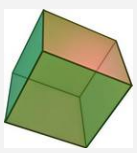
18) $\mathrm{V} = \frac{10}{3}\pi$; $\mathrm{S_{TOT.}} = 8\pi$ 19) *a)* $\mathrm{S} = 2\pi\sqrt{3}$ *b)* $\mathrm{S} = 2\pi$ *c)* $\mathrm{S} = 6\pi$

20) *a)* $\mathrm{V} = \frac{\pi}{3}$ *b)* $\mathrm{V} = \frac{5}{3}\pi$ 21) *lato cubo inscritto* $= \frac{ah}{a+h}$

Euler's Formula
For any polyhedron
***that doesn't intersect itself,* the**
- **Number of Faces**
- plus the **Number of Vertices** (corner points)
- minus the **Number of Edges**

always equals 2.
This can be written: **F + V - E = 2**

Try it on the cube:
a cube has
6 Faces, 8 Vertices, and 12 Edges,
so: 6 + 8 - 12 = 2



www.mathsisfun.com

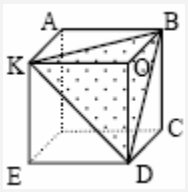
Altri esercizi (risposte a pagina 347)

Da www.mathvisuals.com

1) The length, the width and the altitude of a rectangular prism are directly proportional by 3, 4 and 5. If the diagonal of the rectangular prism is $\sqrt{200}$ cm, find the total surface (cm^2)

A) 480 B) 462 C) 564 D) 376 E) 188

2) Find the ratio between the volume of the pyramid BKDO and the cube



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

3) The volumes of a cylinder and a sphere with equal radii r are equal. Find the altitude of the cylinder in terms of r.

A) $4r$ B) $2r$ C) $4/3$ D) $r/3$ E) $4r/3$

4) The sum of the base areas of a cylinder is equal to the area of the lateral face. If the altitude of the cylinder is 2 cm, find the volume (cm^3)

A) 8π B) 6π C) 4π D) 2π E) π

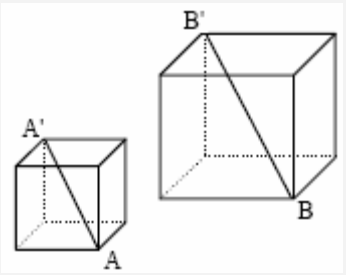
5) If the areas of the lateral faces of a right rectangular prism are $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and $2\sqrt{6}$ cm^2 find the volume of this prism (cm^3)

A) $\sqrt{6}$ B) 5 C) $2\sqrt{6}$ D) 6 E) 8

6) A sphere is inscribed in a cylinder. Let C and S denote the lateral area of the cylinder and surface area of the sphere respectively then …

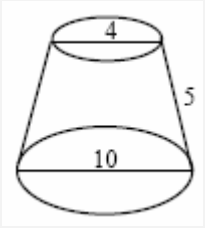
A) C=2S B) 2C=S C) C=3S D) 3C=S E) C=S

7) In the given figures, $AA' = 1$ cm and $BB' = 3$ cm. Find the ratio of the volumes of the cubes.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{81}$

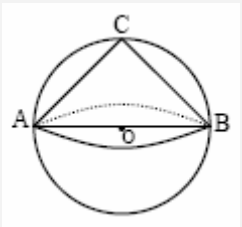
8) The radii of the frustum of cone are 2 and 5 cm. If the lateral side of the cone is 5 cm, then find the volume of the cone.



A) 38π B) 40π C) 50π D) 52π E) 56π

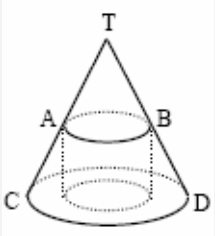
Frustum of cone: tronco di cono

9) In the given figure, what is the ratio between the volume of the sphere and the volume of the cone?



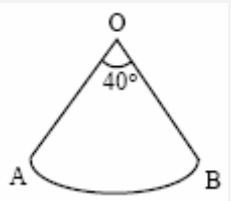
A) 2 B) $2\frac{1}{2}$ C) 3 D) $3\frac{1}{2}$ E) 4

10) A right cylinder is inscribed inside a right cone. If the volume of the frustum of the cone ABCD is 26 times the volume of the small cone TAB, find the ratio between the volume of the frustum of the cone and the cylinder.



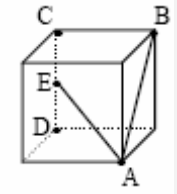
A) 3 B) 4 C) $\frac{13}{2}$ D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{26}{3}$

11) By using the sector given in the figure, a right cone is formed. If the altitude of the cone is $16\sqrt{5}$ cm, find the lateral area of the cone (in cm^2)



A) 144π B) 160π C) 360π D) 800π E) 1800π

12) Se conosci un certo teorema di trigonometria, potrai determinare la misura dell'angolo $B\hat{A}E$ (E è il punto medio di CD, il solido è un cubo)



Da www.sparknotes.com

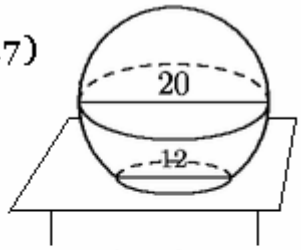
13) A right triangle with legs 5 and 12 is rotated about the longer leg.
What is the surface area of the solid formed?
(A) 36π cm^2 (B) 60π cm^2 (C) 90π cm^2 (D) 112π cm^2 (E) 114π cm^2

14) A cylinder's radius is equal to its height. If its surface area is 100π cm^2, what is its volume?
(A) 25π cm^3 (B) 50π cm^3 (C) 100π cm^3 (D) 125π cm^3 (E) 625π cm^3

15) Cone A has volume 24. When its radius and height are multiplied by the same factor, the cone's surface area doubles. What is cone A's new volume?
(A) $24\sqrt{2}$ (B) 48 (C) $48\sqrt{2}$ (D) 96 (E) Not enough information to tell

16) A cylinder is inscribed in a sphere. If the radius of the sphere is 5 and the height of the cylinder is 8, then what is the volume of the cylinder? (A) 80 (B) 110.82 (C) 187.25 (D) 226.19 (E) 267.30

17)



18)



Olimpiada Mexicana de matematicas - Problemas introductorios

17) Un tavolino ha un buco circolare del diametro di 12 cm. Sul buco si piazza una sfera il cui diametro è 20 cm. Se il piano del tavolino è alto 30 cm, qual è la distanza in centimetri dal punto più alto della sfera al pavimento?
(A) 40 cm (B) 42 cm (C) 45 cm (D) 48 cm (E) 50 cm

18) Un poliedro a forma di pallone di football ha 32 facce, delle quali 20 sono esagoni regolari e 12 pentagoni regolari. Quanti vertici ha il poliedro?
(A) 72 (B) 90 (C) 60 (D) 56 (E) 54

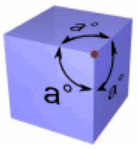
British Columbia Secondary School Mathematics Contest, 2009

19) Un blocco di legno di 6 cm X 12 cm X 22 cm è pitturato in rosso e poi tagliato in cubetti la cui superficie totale è di 6 cm^2.
Il numero di cubetti con esattamente 2 facce colorate è
(A) 136 (B) 144 (C) 152 (D) 156 (E) 160

I solidi platonici sono solo 5. Perché?



In ogni vertice di un poliedro concorrono 3 o più facce: comunque, almeno 3;
e in un poliedro regolare (= platonico) queste facce sono poligoni regolari, quindi gli angoli in gioco sono tutti uguali fra loro, e sono angoli interni di poligoni regolari, ossia di: triangoli equilateri, o quadrati, o pentagoni regolari …



Bene: addizionando le misure degli angoli che concorrono in un vertice di un poliedro, quindi anche di un poliedro regolare, si ottiene sempre una somma inferiore ai 360°
(te ne puoi convincere in modo intuitivo se pensi che,
qualora tale somma raggiungesse i 360°, la figura si appiattirebbe …)

Ma allora in un vertice di poliedro regolare possono concorrere soltanto:

	3 triangoli equilateri (3×60°=180°) 4 triangoli equilateri (4×60°=240°) 5 triangoli equilateri (5×60°=300°)	 tetraedro	 ottaedro	 icosaedro
	3 quadrati (3×90°=270°)	 cubo		
	3 pentagoni regolari (3×108°=324°)	 pentadodecaedro		

Le figure di questa pagina sono tratte da www.mathsisfun.com

Altre possibilità non ce ne sono, perché ad esempio un esagono regolare ha gli angoli interni tutti di 120°, e al minimo in ogni vertice avremmo dunque una somma uguale a 3×120°=360°, già non ammissibile; un eptagono regolare ha poi gli angoli interni ancora più grandi, di 900/7 di grado ossia circa 128,57 gradi: tre di questi angoli, sommati, supererebbero già i 360° …

RISPOSTE agli esercizi: 1D2E3E4A5C6E7D8D9E10D11A 12: 45° (*) 13C14D15C16D17D18C19A
(*) teorema del Coseno su BAE, i cui lati, posto uguale a 1 il lato del cubo, misurano risp. $\sqrt{2}$, 3/2, $\sqrt{5}$/2

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

SE una proprietà P(x), il cui insieme ambiente sia $\mathbb{N}$:
- **vale per il numero 0**
- **e, nel caso valga per un numero naturale x, vale certamente anche per il successivo $x+1$**

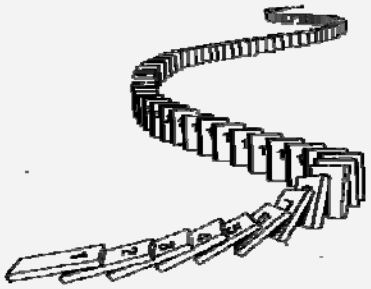
ALLORA quella proprietà vale per ogni numero naturale.

Per dimostrare, applicando il P.I.M., che una data proprietà P(x) è valida per ogni x appartenente ad $\mathbb{N}$, si procede nel modo seguente:

a) si verifica che la proprietà P(x) vale con $x=0$;

b) si suppone, come ipotesi di lavoro ("ipotesi induttiva") che la proprietà valga con $x=k$, e si dimostra che, sotto questa ipotesi, dovrà necessariamente valere anche con $x=k+1$.

Un'ovvia variante consiste nel "partire da 1" anziché da zero.



Questa suggestiva figura viene dal sito www.parabola.unsw.edu.au

❑ Dimostriamo che $\forall x\in\mathbb{N}^*,\quad 1+2+3+...+x=\dfrac{x(x+1)}{2}$ tramite il "Principio di Induzione Matematica" (precisamente, la sua variante in $\mathbb{N}^*$, ossia la variante che parte da 1 anziché da 0)

a) L'uguaglianza da dimostrare è verificata con $x=1$?

Vediamo: con $x=1$, l'uguaglianza da dimostrare diventa $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$ che è vera! OK!

b) Supponiamo ora che l'uguaglianza da dimostrare sia vera con $x=k$: supponiamo cioè che si abbia

(*) $1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ "*IPOTESI INDUTTIVA*"

Ci chiediamo: essa sarà ancora vera anche per $x=k+1$?

Partiamo dal 1° membro dell'uguaglianza da dimostrare, ponendo $x=k+1$. Il nostro obiettivo è di controllare se il valore dell'espressione così ottenuta equivale a $\left[\dfrac{x(x+1)}{2}\right]_{con\ x=k+1}$. Avremo:

$$\left[1+2+3+...+x\right]_{con\ x=k+1}=1+2+3+...+k+(k+1)\overset{per\ la\ (*)}{=}\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}=\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]_{con\ x=k+1}$$ OK!

Pertanto: l'uguaglianza da dimostrare è vera con $x=1$, e, qualora sia vera con $x=k$, continua certamente a valere anche per $x=k+1$: è perciò vera per $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$, ... Insomma, con un "effetto domino" cui si ispira la figura in alto, è vera per ogni numero naturale non nullo x.

❑ Dimostriamo che $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ col "P.I.M." Qui usiamo n anziché x: fa niente, vero? ☺

Anche in questo caso, evidentemente, partiremo da 1 anziché da 0.

a) L'uguaglianza da dimostrare è verificata con $n=1$? Con $n=1$, essa diventa $1^2=\dfrac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6}$, OK!

b) Supponiamo che l'uguaglianza da dimostrare sia vera con $n=k$: supponiamo cioè che si abbia

(*) $1^2+2^2+3^2+...+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ "*IPOTESI INDUTTIVA*"

Ci chiediamo: essa sarà ancora vera anche per $n=k+1$?

$$\left[1^2+2^2+3^2+...+n^2\right]_{con\ n=k+1}=1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2\overset{per\ la\ (*)}{=}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)\left[2k(k+2)+3(k+2)\right]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]_{con\ n=k+1}$$ OK!

Il P.I.M. ci consente a questo punto di affermare che l'uguaglianza proposta è effettivamente vera per ogni numero naturale non nullo n.

- Applicando il "Principio di Induzione Matematica", dimostriamo che:
  $\forall n \in \mathbb{N}$, *se un insieme* A *ha n elementi, il suo insieme delle parti* P(A) *ha* 2^n *elementi.*

a) La proprietà da dimostrare è vera per $n = 0$?
Nel caso $n = 0$, l'insieme A è privo di elementi: $A = \varnothing$.
L'insieme P(A) è dunque, in questo caso, $P(\varnothing)$,
vale a dire l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi dell'insieme vuoto.
Ma l'insieme vuoto ha *uno e un solo* sottoinsieme: sé stesso.
Perciò $P(A) = P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ (l'insieme, il cui unico elemento è l'insieme vuoto).
L'insieme A conteneva $n = 0$ elementi; abbiamo visto che P(A) contiene 1 elemento.
Ma $1 = 2^0$. Perciò la proprietà da dimostrare è vera quando $n = 0$.

b) Supponiamo che la proprietà da dimostrare sia vera per un certo numero naturale k : supponiamo cioè che, ogniqualvolta un insieme A contiene k elementi, il suo insieme delle parti P(A) contenga 2^k elementi (in altre parole: supponiamo che un insieme di k elementi abbia sempre 2^k sottoinsiemi).
Questa è la nostra ipotesi induttiva: "se un insieme A contiene k elementi, allora ha 2^k sottoinsiemi".
Vogliamo ora far vedere che, sotto tale ipotesi, la proprietà deve continuare a valere anche per $k+1$, ossia: che "un insieme contenente $k+1$ elementi deve avere necessariamente 2^{k+1} sottoinsiemi".
In effetti: un insieme B che abbia $k+1$ elementi, può essere pensato come ottenibile a partire da un insieme A contenente k elementi, al quale venga aggiunto un nuovo elemento w.
Ora, per contare i sottoinsiemi di $B = A \cup \{w\}$, possiamo suddividerli in *due categorie*:
- quelli che non contengono w
- e quelli che contengono w

Ma i sottoinsiemi della prima categoria sono tutti e soli i sottoinsiemi di A!
Quindi il loro numero è, per l'ipotesi induttiva, 2^k.
Pensiamo ora ai sottoinsiemi della seconda categoria. Osserviamo che se prendiamo uno di questi sottoinsiemi, e gli togliamo w, otterremo un sottoinsieme di A!
Quindi i sottoinsiemi della seconda categoria sono tutti e soli quegli insiemi, ottenibili partendo da uno dei 2^k sottoinsiemi di A, e aggiungendogli l'elemento w.
Pertanto anche i sottoinsiemi della seconda categoria sono 2^k (tanti quanti i sottoinsiemi di A).
E in totale, i sottoinsiemi di B saranno dunque $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.
La dimostrazione è così completata.

Il "Principio di Induzione Matematica" non è, evidentemente, uno strumento adatto a "ricavare" formule; semmai, serve per dimostrare "A POSTERIORI" la validità generale di una formula, o di una regola, che sia stata precedentemente ipotizzata o intuita sulla base di esempi, o con ragionamenti vari.

ESERCIZI (verrà sempre utilizzata la lettera n al posto di x per indicare il generico intero: per gli interi è consuetudine impiegare preferibilmente lettere centrali dell'alfabeto, come n, m, i, k …)

Utilizzando il Principio di Induzione Matematica, dimostra che:

1) $\forall n \geq 0,\ 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

2) $\forall n \geq 1,\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3) $\forall n \geq 1,\ 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

4) $\forall n \geq 0,\ 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ $(a \in \mathbb{R},\ a \neq 1)$

5) $\forall n \geq 1,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

6) $\forall n \geq 1,\ \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

7) $\forall n \geq 1,\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \ldots$ Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

8) $\forall n \geq 2,\ \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \ldots$ Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

9) $\forall n \geq 1,\ \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \ldots$ Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

10) Se ci sono n persone e ognuna stringe la mano a ciascuna delle altre, quante strette si avranno? Verifica la validità, per ogni n, dell'espressione trovata, servendoti del P.I.M.

11) Qualunque sia l'intero n, il numero $n^2 + n$ è sempre pari.
Giustifica l'affermazione come ti garba, poi verificala ulteriormente servendoti del P.I.M.

12) Un poligono di n lati ha $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonali. Dimostra col P.I.M. questa affermazione.

GEORG CANTOR (1845-1918) E I "GRADI DI INFINITO"

Il sommo matematico Hilbert descrisse l'opera di Cantor come

"... il prodotto più raffinato del genio matematico e una delle conquiste più alte del puro intelletto"

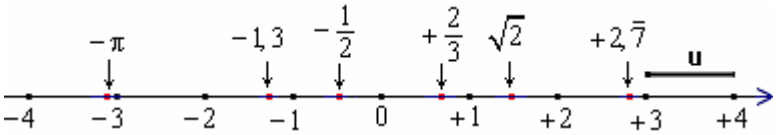
Le poche pagine che seguono vogliono essere una breve introduzione
alle affascinanti intuizioni di questo brillante e innovativo pensatore.

1)
RIPASSO: INSIEMI E SOTTOINSIEMI
Cos'è un "insieme"?
E' un "gruppo", una "raccolta", di oggetti (concreti o astratti, non importa se della stessa natura oppure no).
Questi sono chiamati "gli elementi" dell'insieme considerato.
Si scrive $x \in A$ per indicare che l'elemento x "appartiene" all'insieme A.
Un "sottoinsieme" B di un insieme A è una "parte" di A; è un insieme tale che, se $x \in B$, allora $x \in A$.
La scrittura $B \subseteq A$ significa: B è un sottoinsieme di A (= B è "incluso" in A).
Ad esempio, se $A = \{x, y, z\}$, allora i sottoinsiemi di A sono: $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, y, z\} = A$
(dove il simbolo $\varnothing$ indica l'insieme vuoto, quello privo di elementi).
Fra i sottoinsiemi di un insieme A c'è sempre anche A stesso.
Si dice che A è un sottoinsieme "improprio" di sé stesso;
i sottoinsiemi "propri" di A sono, invece, quelli che non riempiono tutto A.
Fra i sottoinsiemi propri di un insieme A qualsiasi c'è sempre l'insieme vuoto,
con una sola eccezione: se A *è* l'insieme vuoto, allora non ha alcun sottoinsieme proprio.

2)
CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE
Si dice che vi è una "corrispondenza biunivoca" fra due insiemi A, B
quando accade che ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B, E VICEVERSA.
Sinonimo di "corrispondenza biunivoca" è "biiezione".

3)
INSIEMI EQUIPOTENTI
Si dice che due insiemi A e B sono fra loro "equipotenti"
se esiste una corrispondenza biunivoca (una "biiezione") fra A e B.

4)
NUMERI RAZIONALI, IRRAZIONALI, REALI
Esistono numeri che NON possono essere scritti sotto forma di frazione (= rapporto fra due interi).
Essi sono detti numeri "irrazionali". Esempi: $\sqrt{2}$, π, tutti i decimali illimitati non periodici.
L'insieme che comprende sia i numeri razionali che gli irrazionali viene detto "insieme dei numeri *reali*",
è indicato col simbolo $\mathbb{R}$, e può essere rappresentato su di una "number line":



Su di una *number line*, ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto
e, viceversa, ad ogni punto corrisponde uno e un solo numero reale.
Quindi fra la *number line*, pensata come insieme di punti, e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali,
c'è una "corrispondenza biunivoca" o "biiezione": si tratta di due insiemi *equipotenti*.

5)
TEOREMA ("**Paradosso di Galileo**")
L'insieme $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ di tutti gli interi assoluti (= senza segno) maggiori di 0
è equipotente con l'insieme $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ dei soli interi assoluti pari, maggiori di 0.
Dimostrazione:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**	***n***	**...**
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕		↕	
2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**...**	***2n***	**...**

Osserviamo che quest'ultimo insieme è un sottoinsieme "proprio" del primo,
ossia un sottoinsieme che non lo "riempie" completamente, che ha degli elementi *in meno* rispetto a quello …
Nonostante ciò, il teorema ci dice che i due insiemi possono essere posti in corrispondenza biunivoca,
come le asole e i bottoni di una stessa camicia. E quando due insiemi sono in corrispondenza biunivoca,
viene spontaneo pensare che gli elementi dell'uno sono *tanti, quanti gli elementi dell'altro* …
… MUMBLE, MUMBLE … TUTTO QUESTO E' DAVVERO SINGOLARE! …

6)

INSIEMI INFINITI

Quanto precede suggerisce un'idea per formulare una definizione rigorosa di insieme "infinito".

DEFINIZIONE

Si dice che un insieme è "infinito" se è equipotente con un suo sottoinsieme "proprio",
ossia: con un suo sottoinsieme, che non "riempie" tutto l'insieme di partenza.
Se un insieme non è "infinito", si dirà "finito".

7)

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ è equipotente con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
(pertanto, pure $\mathbb{N}$ ed $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ sono fra loro equipotenti).

Dimostrazione

Del tutto analoga a quella del teorema 5)

8)

Tutti gli insiemi menzionati al punto 7) sono equipotenti con l'insieme degli interi relativi
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Dimostrazione

1	2	3	4	5	6	7	...	$2n$	$2n+1$	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕		↕	↕	
0	1	–1	2	–2	3	–3	...	n	$-n$	...

9)

DEFINIZIONE DI NUMERO CARDINALE

Si dice "numero cardinale" quell'entità astratta, quel "quid",
che è comune a tutti gli insiemi che sono equipotenti con un insieme dato.

Un numero cardinale si dice "infinito" o "finito"
a seconda che tale sia uno qualunque fra gli insiemi che lo "rappresentano"
(si dimostra che la definizione è corretta, nel senso che non dipende dallo specifico insieme
che viene utilizzato per "rappresentare" il particolare numero cardinale che si vuole considerare).

Il numero cardinale che è rappresentato
dall'insieme $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
viene indicato col simbolo $\aleph_0$
[leggi: aleph zero, aleph con zero;
"aleph" ($\aleph$) è la prima lettera dell'alfabeto ebraico].

Quante sono le stagioni dell'anno? **4**

$\aleph_0$, l'entità astratta che è comune a tutti gli insiemi
che possono essere messi in corrispondenza biunivoca
con l'insieme $\mathbb{N}^*$,
è chiamato
"LA CARDINALITÀ DEL NUMERABILE",
o anche: "LA POTENZA DEL NUMERABILE".

Quante sono le dita di una mano? **5**

"Quanti sono" i numeri interi assoluti? **$\aleph_0$**

Se il numero cardinale (= la "cardinalità")
associato a un determinato insieme è $\aleph_0$,
allora si suol dire che quell'insieme è "numerabile".

"Quanti sono" i numeri interi relativi? **$\aleph_0$**

10)

CONFRONTO, SOMMA, PRODOTTO DI DUE NUMERI CARDINALI

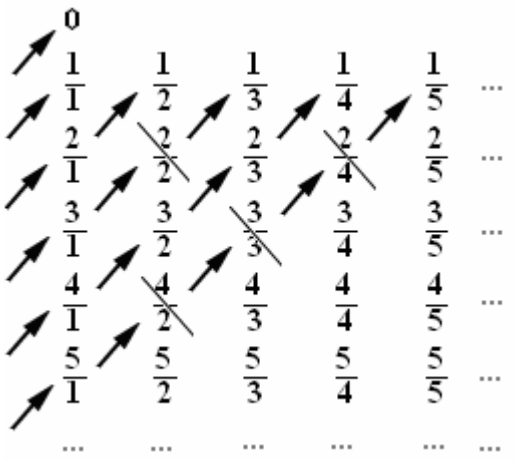
Siano A, B due insiemi di cardinalità a, b rispettivamente: card (A) = a, card (B) = b.

- Diciamo che $a < b$ se
  - A è equipotente con un sottoinsieme di B
  - e invece B non è equipotente con nessun sottoinsieme di A.
- Dati due numeri cardinali a, b, chiamiamo "SOMMA" di a con b (a+b)
  il numero cardinale dell'insieme $A \cup B$, ammesso che si abbia card (A) = a, card (B) = b,
  e che A, B siano fra loro "disgiunti", cioè non abbiano nessun elemento in comune ($A \cap B = \varnothing$).
- Dati due numeri cardinali a, b, chiamiamo "PRODOTTO" di a con b ($a \cdot b$, ab)
  il numero cardinale dell'insieme $A \times B$ (che è poi il "prodotto cartesiano" di A con B,
  ossia l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (x, y) che si possono costruire
  prendendo come primo termine della coppia un elemento di A, come secondo termine un elemento di B);
  purché, ovviamente, sia card (A) = a, card (B) = b.

Si dimostra che le due definizioni date di somma e prodotto di numeri cardinali sono corrette,
in quanto non dipendono dagli specifici insiemi che vengono utilizzati per "rappresentare" i cardinali in gioco.

11)
TEOREMA
L'insieme $\mathbb{Q}_a$ dei numeri razionali assoluti
è anch'esso equipotente con $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,
perciò ha anch'esso la "potenza del numerabile" $\aleph_0$:
insomma, card($\mathbb{Q}_a$) = card($\mathbb{N}^*$) = $\aleph_0$.

Per la *dimostrazione*, vedi la figura qui a destra
(nella quale le frazioni soppresse sono quelle semplificabili,
ossia non ridotte ai minimi termini).
Il percorso scelto per passare in rassegna, uno dopo l'altro, tutti
i numeri razionali assoluti, definisce la corrispondenza biunivoca



0	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{1}{5}$	...	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	...

12)
TEOREMA
Pure l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali *relativi* è equipotente con $\mathbb{N}^*$ (quindi anche con $\mathbb{Q}_a$, $\mathbb{Z}$, ...)
perciò ha cardinalità $\aleph_0$ ossia è "numerabile".
Per la *dimostrazione*, vedi lo schema qui sotto.

	-1		-2		$-\frac{1}{2}$		-3		$-\frac{1}{3}$		-4		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{4}$		...
0		1		2		$\frac{1}{2}$		3		$\frac{1}{3}$		4		$\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{4}$	
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...

Lunedì	*Martedì*	*Mercoledì*	*Giovedì*	*Venerdì*
↕	↕	↕	↕	↕
Pollice	*Indice*	*Medio*	*Anulare*	*Mignolo*
↕	↕	↕	↕	↕
Vista	*Udito*	*Olfatto*	*Gusto*	*Tatto*
↕	↕	↕	↕	↕
...	...	...	...	...



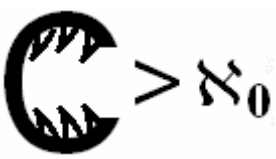
$\mathbb{N}^*$:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
$\mathbb{Z}$:	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
$\mathbb{Q}_a$:	0	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
$\mathbb{Q}$:	0	−1	1	−2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−3	3	$-\frac{1}{3}$	...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...



13) TEOREMI: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$; $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$; $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (ne omettiamo la semplice dimostrazione)

14)
Sorprendentemente, non è vero che qualsiasi insieme infinito
debba per forza essere equipotente con $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_a$, $\mathbb{Q}$, ecc.
Esistono insiemi il cui numero cardinale è MAGGIORE di $\aleph_0$!!!

TEOREMA
Non può esistere nessuna corrispondenza biunivoca
tra l'insieme $\mathbb{R}_a$ dei numeri reali assoluti e l'insieme $\mathbb{N}^*$.
Quindi $\mathbb{R}_a$ NON è "numerabile", NON ha cardinalità $\aleph_0$:
ha invece cardinalità MAGGIORE di $\aleph_0$, ha un "grado di infinito" maggiore
di quello che caratterizza gli interi assoluti, gli interi relativi, i razionali.
Il numero cardinale associato all'insieme $\mathbb{R}_a$
è detto "POTENZA DEL CONTINUO", e indicato col simbolo *c*.



Per dimostrare questo teorema si ragiona *per assurdo*. Se esistesse una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}_a$ e $\mathbb{N}^*$, allora gli elementi di $\mathbb{R}_a$ potrebbero essere elencati in una lista recante

- in prima colonna i numeri 1, 2, 3, 4, …
- e in seconda colonna tutti i reali assoluti (del tipo PARTE INTERA / VIRGOLA / PARTE DECIMALE)

PRIMA COLONNA	S E C O N D A C O L O N N A						
1	**$a,$**	**a_1**	**a_2**	**a_3**	**a_4**	**a_5**	**…**
2	**$b,$**	**b_1**	**b_2**	**b_3**	**b_4**	**b_5**	**…**
3	**$c,$**	**c_1**	**c_2**	**c_3**	**c_4**	**c_5**	**…**
4							
…							
n	**$\psi,$**	**ψ_1**	**ψ_2**	**ψ_3**	**ψ_4**	**ψ_5**	**…**
…							

Sennonché, andiamo a considerare il numero reale α definito in questo modo:

- la parte intera di α è 2 ($\alpha = 2,...$);
- l'n-esima cifra dopo la virgola di α è:
  - 1, se l'n-esima cifra decimale dell'n-esimo numero in seconda colonna è diversa da 1
  - 0, se l'n-esima cifra decimale dell'n-esimo numero in seconda colonna è uguale a 1.

Per il modo in cui è "strutturata" la sua definizione, α NON PUO' comparire nella colonna dei numeri reali (infatti, qualunque sia n, non può trovarsi all'n-esima posizione nella lista in quanto differisce dall'n-esimo numero reale della lista se non altro per l'n-esima cifra decimale);
quindi la corrispondenza definita dalla tabella … NON E' biunivoca !!!

NOTA - Il procedimento seguito si dice "procedimento (o metodo) diagonale"

15) TEOREMI (ne omettiamo la dimostrazione)

Gli insiemi $\mathbb{R}_a$ dei reali assoluti e $\mathbb{R}$ dei reali relativi si possono porre in corrispondenza biunivoca tra loro, quindi hanno la stessa cardinalità *c*.
Anche ogni intervallo numerico - aperto, chiuso, limitato, illimitato che sia - ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}_a$ e di $\mathbb{R}$.
L'insieme $\mathbb{R}$–$\mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali ha cardinalità c.
L'insieme dei punti di un segmento, o di un quadrato, o di un cubo, o di una retta, o di un piano, o dello spazio tridimensionale, hanno tutti la stessa cardinalità di $\mathbb{R}_a$ e di $\mathbb{R}$, che è poi la "potenza del continuo" *c*.

"Quanti sono" i numeri razionali? $\aleph_0$

"Quanti sono" i numeri irrazionali? $\mathfrak{c}$

"Quanti sono" i numeri reali? $\mathfrak{c}$

"Quanti sono" i punti dello spazio? $\mathfrak{c}$

16) TEOREMA

Dato un qualunque insieme A, il suo "INSIEME DELLE PARTI" P(A), ossia l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A, HA SEMPRE CARDINALITÀ MAGGIORE DELLA CARDINALITÀ DI A.

"Quanti sono" i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$? **PIU' DI** $\mathfrak{c}$

Dimostrazione

Per assurdo, supposto che esista una biiezione $f : A \leftrightarrow P(A)$,
allora, preso un elemento *x* di A, $f(x)$ sarà un sottoinsieme di A
e si verificherà uno e uno solo dei casi: $x \in f(x)$ o $x \notin f(x)$.
Definiamo l'insieme $B \subseteq A$ come segue:
$B = \{x \in A / x \notin f(x)\}$ = l'insieme formato da quegli elementi di A, che NON appartengono all'insieme che loro corrisponde nella biiezione f.
Ora pensiamo alla "controimmagine" di B, ossia all'elemento $\bar{x} \in A$, tale che $f(\bar{x}) = B$.
Ci sono due possibilità: $\bar{x} \in f(\bar{x}) = B$ o $\bar{x} \notin f(\bar{x}) = B$.
Sennonché … nessuna delle due può essere vera!
E' infatti impossibile che $\bar{x} \in f(\bar{x}) = B$, perché B è, per definizione, l'insieme degli elementi di A che NON appartengono all'insieme che loro corrisponde nella biiezione f;
ma è pure impossibile che $\bar{x} \notin f(\bar{x}) = B$,
perché se così fosse *x* dovrebbe appartenere a B, per il modo in cui B è stato definito.

17) **Quest'ultimo teorema ci assicura dunque che**
I "GRADI DI INFINITO" SONO, A LORO VOLTA, INFINITI!
… Insomma, dato un numero cardinale,
se ne può SEMPRE trovare un altro ancora maggiore.



18)
Tra i numeri cardinali maggiori di *c*, ricordiamo solo la "potenza del funzionale", cioè il numero cardinale dell'insieme i cui elementi sono tutte le *funzioni* di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

ELEMENTI DI STATISTICA DESCRITTIVA

1. ESEMPI INTRODUTTIVI: TRE SITUAZIONI CHE POSSONO PORTARE AD UNA INDAGINE STATISTICA

📖 **Esempio a)**

Ogni settembre, all'inizio dell'anno scolastico, il professor Curiosi deve far conoscenza con due classi novelle: la I A e la I B.

A tale scopo, da qualche tempo ormai egli ha preso l'abitudine di somministrare ai ragazzi sempre il medesimo test di ingresso, calcolando poi il punteggio acquisito da ciascun alunno, punteggio che può andare da un minimo di 0 a un massimo di 100.

Quest'anno gli esiti, sui 24 studenti di I A e sui 21 di I B, sono stati i seguenti:

I A (24 allievi)	51 62 42 58 60 68 61 68 64 70 71 60 51 62 41 51 36 47 58 73 37 54 63 65
I B (21 allievi)	45 48 51 63 51 60 29 52 47 41 52 50 56 62 57 70 55 64 59 55 67



Se l'è cavata meglio, nel complesso, la I A o la I B?



Il test conferma o no l'impressione,
riportata dal professor Curiosi nel corso delle primissime lezioni,
che in una delle due classi ci sia *maggiore omogeneità di rendimento*
e nell'altra invece si abbiano parecchi alunni bravi, ma anche parecchi scarsotti?



Se nei 4 anni scolastici precedenti i punteggi erano stati quelli della tabella sottostante:

I A anno scorso	52 58 30 39 61 58 56 48 45 27 40 64 68 50 51 47 52 52 58 39
I B anno scorso	45 77 52 60 75 41 47 71 51 43 59 60 54 55 63 60 35 49 48 65 54 38 48 50 45
I A 2 anni fa	50 57 51 54 56 49 40 54 57 47 60 66 68 40 70 56 72 48 40
I B 2 anni fa	75 70 55 58 68 78 54 50 58 65 71 54 49 44 46 56 65 45 56 50 42 69 41
I A 3 anni fa	54 79 52 60 75 41 47 71 51 43 59 50 54 55 63 60 35 25 26 65 54 25 48
I B 3 anni fa	40 74 59 67 62 69 60 69 57 45 56 62 60 59 79 70 60 65 60 88 40 66 48
I A 4 anni fa	38 55 67 49 57 45 56 55 69 44 35 48 53 61 69 45 67 54 62 72 47 62 52 46 55
I B 4 anni fa	52 56 65 75 55 69 84 70 60 74 76 67 73 74 51 65 55 50 55 73 57 62 23 36 49 42

… questi dati *suffragano* o *non suffragano* la lagnanza, consueta in Sala Insegnanti, che "negli ultimi anni, la preparazione dei ragazzi va sempre più abbassandosi"?

♣ **Esempio b)**

Negli uffici pubblici di una capitale europea l'assessore competente, dopo alcuni episodi antipatici, ha deciso di testare l'apprezzamento o meno dei cittadini riguardo al lavoro degli impiegati comunali, dando a ogni utente la facoltà di compilare il questionario che segue:

- Nome dell'impiegato …
- Professionalità: (Ottima/Discreta/Sufficiente/Insufficiente/Pessima)
- Cortesia: (Ottima/Discreta/Sufficiente/Insufficiente/Pessima)
- Capacità di gestire i tempi del lavoro: (Ottima/Discreta/Sufficiente/Insufficiente/Pessima)



Come potrà il nostro assessore rappresentare graficamente questi dati
in modo da poterli discutere col Sindaco in maniera comoda ed efficace?

☎ **Esempio c)**

Un sondaggio telefonico sulle intenzioni di voto prima delle elezioni comunali
in una città di 84000 abitanti, con 3 candidati sindaco, ha coinvolto 250 persone.



In che misura è attendibile?

2. DUE RIGHE DI STORIA

Sebbene un'attività pratica di carattere statistico si possa, volendo, far risalire persino a tempi che precedono l'invenzione della scrittura, quando già l'uomo tramite tacche su di un bastone era in grado di effettuare conteggi di persone o animali, per i primi **rilevamenti statistici** più "in grande" occorre attendere

- i **Sumeri** (in tavolette del IV-III millennio a.C. sono annotati elenchi di persone e di cose in loro possesso, plausibilmente allo scopo di imporre tributi),
- gli **Egizi** (censimento effettuato intorno al 3000 a.C., anche per valutare quanti operai si potessero impiegare nelle costruzioni faraoniche),
- o la **Cina** del 2200 a.C. circa, in cui una rovinosa inondazione indusse l'imperatore a registrare circa cento milioni di esseri umani suoi sudditi, rilevandone pure il mestiere, dichiaratamente ai fini fiscali.

Presso il **popolo ebreo** vennero effettuati alcuni **censimenti**, come sappiamo dall'Antico Testamento (e anche il Nuovo ne menziona uno, ordinato dai Romani, all'epoca della nascita di Gesù …).

Nella **Roma** antica furono particolarmente frequenti, per ragioni tributarie o militari.

In **epoca medievale e rinascimentale** si ebbero raccolte di dati su persone, terre e beni ad opera, tanto per fare qualche esempio, di Carlo Magno, di Guglielmo il Conquistatore, di Stati come la Repubblica Veneta; e comunque le parrocchie e i monasteri presero l'abitudine di tenere registri di **battesimi, morti, matrimoni e possedimenti**.

L'inglese **John Graunt** (1620-1674) è considerato il primo studioso di Statistica in senso moderno.
Egli raccolse una gran quantità di informazioni cercando di cogliere in esse regolarità e relazioni varie:

- *E' vero che nascono più femmine che maschi?*
- *O che il suicidio è più diffuso nelle persone che fanno determinati mestieri?*
- *E' possibile prevedere l'andamento futuro della numerosità di una popolazione?*

Un amico di Graunt, **William Petty** (1623-1687), introdusse il termine "**aritmetica politica**", per indicare "l'arte di ragionare mediante le cifre sulle cose che hanno attinenza col governo".

Fra i grandi nomi che si occuparono di aritmetica politica citiamo Christiaan **Huygens** (1629-1695).

Il poliedrico **Leibniz** (1646-1716) si interessò anche a concetti quali "vita media" e "vita probabile".

L'astronomo inglese Edmond **Halley**, 1656-1742 (proprio lui, quello della celebre cometa) è considerato il padre della **matematica assicurativa**.

Tra coloro che, nel porre le basi della **Teoria della Probabilità**, apportarono un contributo fondamentale alla Statistica, citiamo Jacob **Bernoulli** (1654-1705), Abraham **de Moivre** (1667-1754) e Thomas **Bayes** (1702-1761).

De Moivre, per inciso, predisse pure il giorno in cui sarebbe morto (27 novembre 1754)
in base a un conteggio matematico legato all'aumento progressivo dei propri minuti di sonno …
in questo caso, però, più che di scienza si trattò di "fortuna" … o di autosuggestione …
va beh, parliamo d'altro!

Adrien-Marie **Legendre** (1752-1833), Karl Friedrich **Gauss** (1777-1855), e Pierre-Simon de **Laplace** (1749-1827) si occuparono, fra l'altro, del "**metodo dei minimi quadrati**".

Al sommo **Gauss** si devono risultati geniali in molteplici settori della matematica, fra cui la **teoria degli errori di misura** (della **curva "normale", o "gaussiana"**, parleremo nel nostro corso).

Thomas Robert **Malthus** (1766-1834) approfondì il tema dell'**accrescimento della popolazione umana in un ambiente dalle risorse limitate**, come quello del pianeta Terra - argomento di estremo interesse nel presente.

Il belga **Quételet** (1796-1874) studiò gli scostamenti degli individui dal modello astratto del cosiddetto "**uomo medio**".
Osservò, fra l'altro, che un più alto **tasso di criminalità** risulta **correlato non tanto alla povertà, quanto alla disuguaglianza** fra le classi sociali.

Francis **Galton** (1822-1911), cugino di Darwin, applicò la Statistica alla genetica, alla teoria dell'evoluzione, alla psicometria; introdusse il termine "**regressione**", e anche quello di "eugenica" o "**eugenetica**" (= come migliorare la specie umana agevolando la riproduzione degli individui con le caratteristiche ottimali). Purtroppo lo stesso termine si legò, qualche decennio dopo, ai deliri nazisti.

Ronald **Fisher** (1890-1962) e Karl **Pearson** (1857-1936) dedicarono il loro ingegno alla "**Statistica Inferenziale**", ossia a quella branca della Statistica che **si propone di "inferire" (dedurre) informazioni su di una intera "popolazione" a partire dallo studio di un "campione" di essa.**

Così il chimico inglese W. S. **Gosset** (1876-1937), dipendente della ditta Guinness produttrice di birra, si pose il problema di come trattare le informazioni provenienti da **campioni piccoli o piccolissimi** e firmò le sue ricerche con lo pseudonimo Student perché la birreria, per salvaguardare i segreti della produzione, faceva divieto ai suoi impiegati di pubblicare qualsivoglia articolo (ne sentirai parlare se un giorno dovessi occuparti della "distribuzione **t di Student**").

3. DI COSA TRATTA LA STATISTICA; STATISTICA DESCRITTIVA E STATISTICA INFERENZIALE

Un'indagine statistica si occupa di un "**FENOMENO COLLETTIVO**"
(cioè di un fenomeno che si presenta in una pluralità di soggetti … sovente, in *tanti* o *tantissimi* soggetti).

ESEMPI DI FENOMENI COLLETTIVI

- La conoscenza delle lingue straniere.
- I gusti musicali.
- L'età alla quale ci si sposa.
- La presenza di animali domestici negli appartamenti.
- La lunghezza delle piste ciclabili nelle città.

Se, ad esempio, noi fossimo interessati al fenomeno
"utilizzo del telefonino da parte degli studenti di una data scuola",
gli studenti di quella scuola sarebbero la nostra "*popolazione statistica*",
ogni singolo studente sarebbe una "*unità statistica*",
e i "*caratteri* " da studiare sarebbero "quanto, quando e come questi ragazzi utilizzano il telefonino".

Un "fenomeno collettivo" viene preso in esame nell'ambito di una data "**POPOLAZIONE STATISTICA**",
della quale si studia una certa caratteristica o "**CARATTERE**" (NOTA)
andando ad analizzare quali sono le "**MODALITÀ**" con cui questo carattere si può manifestare e verificando,
in ciascun elemento (= "**UNITÀ STATISTICA**") della "popolazione", quale di tali modalità è presente,
per desumere da tutto ciò **conteggi, percentuali, "medie", "indici di dispersione", rappresentazioni grafiche.**

NOTA: sovente si studiano, "in parallelo", sulla stessa popolazione statistica, *più* caratteri di uno stesso fenomeno

ESEMPI

a) Fenomeno collettivo: le caratteristiche fisiche.

Possibili "popolazioni statistiche":

- l'insieme dei residenti in Italia,
- *o* l'insieme dei cittadini di nazionalità italiana,
- *oppure* l'insieme delle donne nate a Stoccolma

Un possibile carattere: il colore degli occhi.

Possibili scelte per le modalità di questo carattere:

- marrone
- azzurro
- verde
- grigio

oppure:

- marrone
- non marrone

E' una "unità statistica" la singola persona della quale si rileva il colore degli occhi.

b) Fenomeno collettivo: il livello di istruzione.

Possibili "popolazioni statistiche":

- l'insieme dei cittadini italiani dai 30 anni ai 40
- *oppure* l'insieme dei Vigili del Fuoco

Un possibile carattere:
l'attestato scolastico più alto conseguito.

Una possibile scelta per le modalità di questo carattere:

- licenza elementare
- licenza media
- diploma di scuola media superiore
- laurea

E' una "unità statistica" la singola persona di cui constatiamo il grado di istruzione.

c) Fenomeno collettivo: il costo degli affitti

Una possibile "popolazione statistica":

- l'insieme degli appartamenti in affitto in una determinata località

Due possibili caratteri:

- la cifra risultante dal contratto d'affitto
- *oppure* la cifra complessiva, compresi gli accordi "in nero"

(*problema*: *come riuscire a rilevare la "vera" cifra*?)

Una possibile scelta per le modalità del carattere:

- meno di 300 euro mensili
- da 300 a 449 euro
- da 450 a 599 euro
- dai 600 euro in su

E' una "unità statistica" il singolo appartamento per il quale si va ad annotare il costo del relativo affitto.

Come mostra l'esempio c), una "popolazione statistica" *non* deve essere necessariamente un gruppo di *persone*!
Un'ulteriore situazione: se interessasse lo studio del numero di piccoli che le coniglie di un dato allevamento generano nel corso della loro vita, una "unità statistica" sarebbe una coniglia.

OSSERVAZIONI

Una volta deciso il "carattere" di cui ci vogliamo interessare, la scelta delle sue "modalità" non è univoca! Così come spetta a noi, secondo i nostri interessi o le nostre esigenze, la scelta della "popolazione statistica".

SINONIMI

"Popolazione statistica" = "popolazione" = "COLLETTIVO statistico" = "collettivo" = "universo".
Il numero delle unità statistiche si dice anche "**NUMEROSITÀ**" della popolazione.

LE DIVERSE TIPOLOGIE DI CARATTERI

I "**caratteri**" si distinguono fra

- "**QUALITATIVI**" (= le cui modalità sono espresse da un aggettivo, da un sostantivo o da un avverbio, es. *il colore dei capelli, il grado di soddisfazione rispetto a un prodotto*)
- e "**QUANTITATIVI**" (= modalità espresse da un numero, es. *il peso* o *il reddito di una persona*, oppure *il numero di uova prodotte da una gallina in un mese*).

Fra i caratteri "**QUALITATIVI**", distinguiamo

- quelli "**ORDINATI**"
- e quelli "non ordinati", o "**SCONNESSI**".

  Ad es., è "ordinato" il carattere *"livello di istruzione"*. E' invece "sconnesso" il carattere *"colore dei capelli"*.

Fra i caratteri "**QUANTITATIVI**", ce ne sono di

- "**DISCRETI**": quelli che sono descritti da **numeri interi**, come ad es. il "*numero dei figli*" di una donna, o il "*numero di esami già superati*" da un universitario
- e "**CONTINUI**": quelli espressi, almeno in linea di principio, da un **numero reale** … ma, soprattutto, quelli dei quali interessa *non tanto* il valore preciso, *quanto* il fatto se siano compresi in un dato **intervallo**.

  Ad esempio, l'*"area di una superficie coltivata";*
  ma anche *il peso o l'altezza individuali, il tempo che si impiega per percorrere una certa distanza, la larghezza delle strade*, sono da considerarsi caratteri "continui".

  Rifletti: se chiediamo a una persona di darci la sua altezza in cm, e questa ci risponde "171", vuol dire che la sua altezza rientra nella fascia fra 170,5 e 171,5 e che quella persona ha scelto l'intero 171 in quanto ha valutato questo valore "tondo" come il più vicino alla "vera" misura, che però intera non sarà ...

DEFINIZIONI DI "STATISTICA"; SUA IMPORTANZA; STATISTICA DESCRITTIVA E INFERENZIALE

Possiamo dire che la **statistica** è la disciplina che, **innanzitutto**,
insegna ad esprimere le caratteristiche salienti di un insieme di dati, anche molto vasto, in modo sintetico, con l'aiuto di numeri dotati di valore "riassuntivo" (le "medie", gli "indici di dispersione") e con il supporto di rappresentazioni grafiche svariate.

- La parte più elementare della statistica è la cosiddetta "**STATISTICA DESCRITTIVA**". La statistica *descrittiva* **analizza *TUTTE* le unità statistiche della popolazione considerata**.
- La "**STATISTICA INFERENZIALE**" si occupa invece di estrarre dalla popolazione, quando questa è troppo vasta per poter essere studiata nella sua interezza, un sottoinsieme di unità statistiche detto "**campione**", che verrà esaminato allo scopo di dedurre (= **inferire**) da questa analisi parziale indicazioni che possano valere per la **popolazione intera**, valutando il **grado di attendibilità** di tali indicazioni.

Ballatori, nel 1980, definì la statistica come
"**disciplina che studia i fenomeni collettivi, cioè quei fenomeni per la cui osservazione (descrizione, misura) è necessaria una massa di osservazioni di fenomeni elementari**".

E Maccacaro, nel 1975, la definì come il "**saper parlare di ciò che non si conosce: o meglio, parlare correttamente di ciò che non si conosce completamente**".

NEL MONDO CONTEMPORANEO una grandissima mole di dati viene quotidianamente rilevata e messa a disposizione del pubblico. D'altronde l'elaborazione e la rappresentazione grafica dei dati stessi sono al giorno d'oggi enormemente facilitate e rese veloci dall'utilizzo del **computer.**
In questo contesto **LA STATISTICA ASSUME UN'IMPORTANZA COLOSSALE.**
E' ormai irrinunciabile anche per il profano saper interpretare, per esempio, l'**attendibilità dei sondaggi,** o i **grafici** e gli **indici** che continuamente giornali e TV ci propongono.

E la **scienza** non potrebbe progredire senza **strumenti statistici** in grado di **sintetizzare le informazioni** e di effettuare **previsioni e valutazioni di affidabilità**!
Due esempi soltanto fra i tantissimi possibili:

1) la **teoria degli errori di misura**;
2) nelle sperimentazioni cliniche di un farmaco su un campione di malati, **il** "***p*-value**", valore che esprime la probabilità che il buon effetto riscontrato sia dovuto al caso, anziché a una reale efficacia del farmaco (di solito vengono considerati significativi per il test di efficacia valori $p < 0,05$).

ORIGINE DEL TERMINE "STATISTICA"

Proviene dalla lingua **italiana** (Ghislini, 1589) e precisamente dalla parola "**Stato**", con riferimento all'utilizzo dei rudimenti di questa disciplina, nel XVI secolo, per studi amministrativi e politici.

4. LE PRIME TRE FASI DI UN'INDAGINE STATISTICA; TERMINOLOGIA

PRIMA FASE: LA SCELTA DEL "FENOMENO COLLETTIVO" DA ANALIZZARE,
vale a dire la scelta del "CARATTERE" che si vuole studiare,
e della "POPOLAZIONE" di cui ci si vuole occupare.

Come abbiamo già accennato, a volte interesserebbe una "popolazione" nella sua interezza, ma per motivi di tempi, di costi, di fattibilità se ne prende solo una parte, un "campione" (basti pensare ai sondaggi elettorali …); certo, si porrà poi il problema di valutare in che misura l'indagine fatta sul campione possa essere rappresentativa a riguardo della popolazione intera … di questo si occupa la "statistica inferenziale".

Si sceglie, per il "carattere", un insieme di "MODALITÀ".

Il carattere "sesso" fra i bambini di una scuola elementare si può manifestare in sole due modalità:
Maschile o Femminile, ma sovente c'è invece una certa **discrezionalità**:
ad esempio, il carattere "soddisfazione dell'utenza rispetto a un certo prodotto" potrebbe essere analizzato

- nelle 3 modalità "Poco soddisfatto/Sufficientemente soddisfatto/Molto soddisfatto",
- oppure nelle 5 modalità: "Per niente/Poco/Sufficientemente/Molto/Moltissimo",
- oppure ancora domandando di esprimere la propria soddisfazione con un voto, che so, da 0 a 10.

Le fasi successive dell'indagine statistica sono finalizzate innanzitutto a stabilire ed annotare in quante, fra le "unità statistiche", si presenta ciascuna delle "modalità".

SECONDA FASE: LA RILEVAZIONE DEI DATI

Si può effettuare:

- con l'**osservazione o misurazione diretta** (ad es. per il colore degli occhi, o per il peso …, o per rilevare le condizioni di salute di un ammalato al quale sia stato somministrato un dato farmaco, …);
- tramite un'**intervista**;
- tramite un **questionario**, che potrà essere:
  I) a **risposta chiusa**; II) a **risposta aperta** (più laborioso, in questo caso, lo spoglio dei dati, e meno facile l'interpretazione delle risposte …); III) "**semistrutturato**" (è un "misto" fra le due tipologie precedenti).

TERZA FASE: LO SPOGLIO DEI DATI

Si conta, per ciascuna delle "modalità" del "carattere",
***quante* fra le "unità statistiche" presentano *quella* modalità.**
Si annotano questi conteggi in una tabella che prenderà il nome di "DISTRIBUZIONE DI FREQUENZA".

Ad esempio: "*Qual è lo sport che pratichi con maggiore divertimento?*" (in una popolazione di 480 giovani)

	Frequenza assoluta	Frequenza relativa (appross.)	Freq. rel. percentuale (appross.)
Calcio	120	0,25	25 %
Pallavolo o Basket	92	0,19	19 %
Footing, Atletica leggera	62	0,13	13 %
Nuoto	57	0,12	12 %
Altro sport	100	0,21	21 %
Nessuno	49	0,10	10 %
TOTALE	**480**	**1,00**	**100 %**

A volte si annota solo la "**FREQUENZA ASSOLUTA**" **di ciascuna modalità**, ossia il
NUMERO DI UNITÀ STATISTICHE NELLE QUALI QUELLA MODALITÀ SI È PRESENTATA.

Altre volte (come abbiamo fatto nella tabella precedente) si va a calcolare anche la "**FREQUENZA RELATIVA**" ossia **il rapporto, il quoziente, fra la frequenza assoluta e il numero totale di unità statistiche**:

$$\textbf{frequenza relativa} = \frac{\textbf{frequenza assoluta}}{\textbf{numero delle unità statistiche}}$$

La freq. relativa esprime *quale parte, quale frazione* delle unità statistiche presenta quella determinata modalità.

Dire che la frequenza relativa della modalità "calcio" è stata $\frac{120}{480} = \frac{1}{4} = 0,25$ significa affermare che ¼ dei giovani interpellati ritiene, fra gli sport praticati, il calcio come il più divertente.

Se la frequenza relativa viene poi moltiplicata per 100, si avrà la "**FREQUENZA PERCENTUALE**" che ci dice **quante unità statistiche su 100 hanno presentato quella modalità**:

$$\textbf{frequenza relativa percentuale} = \textbf{frequenza relativa} \cdot 100 = \frac{\textbf{frequenza assoluta}}{\textbf{numero delle unità statistiche}} \cdot 100 .$$

Nel nostro esempio, il calcio ha come frequenza percentuale $0,25 \cdot 100 = 25$: lo predilige il 25% degli interpellati.

GLOSSARIO, SINONIMI (felici e meno felici)

Ribadiamo che prende il nome di
DISTRIBUZIONE DI FREQUENZA
L'INSIEME DELLE COPPIE ORDINATE
(MODALITÀ, FREQUENZA ASSOLUTA);



in altre parole,

LA TABELLA CHE A CIASCUNA MODALITÀ ASSOCIA LA SUA FREQUENZA ASSOLUTA,
ossia il numero delle unità statistiche che presentano quella modalità.

Se il carattere è quantitativo, e le sue modalità - espresse in questo caso da valori numerici - sono ripartite per comodità in intervalli, questi intervalli vengono chiamati le "**CLASSI DI FREQUENZA**".

Ad esempio, le modalità del carattere quantitativo
"estensione S in metri quadrati dell'appartamento in cui si risiede"
potrebbero essere riunite, all'atto di compilare la tabella delle coppie (*modalità, frequenza*), negli intervalli seguenti:

$S < 40\,m^2$;
$40\,m^2 \le S < 60\,m^2$;
$60\,m^2 \le S < 80\,m^2$;
$80\,m^2 \le S < 100\,m^2$;
$100\,m^2 \le S < 120\,m^2$;
$120\,m^2 \le S < 140\,m^2$;
$S \ge 140\,m^2$

Avremmo allora 7 "classi di frequenza".

Ovviamente, al momento di scegliere le classi di frequenza dobbiamo fare in modo che
- la loro unione dia tutto l'intervallone delle possibili modalità
- e che, prese due qualsiasi di esse, la loro intersezione sia vuota.

Di una distribuzione di frequenza si dice che è:
- **una "SERIE", se il carattere al quale si riferisce è qualitativo**
- **una "SERIAZIONE", se il carattere è quantitativo.**

Una **distribuzione di frequenza** può anche essere chiamata
- "**MUTABILE statistica"** se il carattere di riferimento è **qualitativo**
- "**VARIABILE statistica"** se il carattere di riferimento è **quantitativo.**

Talvolta gli stessi sostantivi "mutabile", "variabile"
vengono impiegati con riferimento al *carattere* più che alla *distribuzione*.

Questa terminologia
si può benissimo ignorare …
dimenticala pure … tuttavia,
te l'ho citata per avvertirti che
consultando un testo o un sito
di statistica, ci si deve rassegnare
a "digerire" parole che a volte
sembrano fatte apposta
per complicare inutilmente le cose.

Avrai osservato che, in statistica, sovente si hanno più possibilità diverse per dare nomi ai concetti.

A dire il vero, alcuni termini danno l'impressione di non essere molto "azzeccati",
o di venire impiegati più per mettere in sudditanza psicologica il lettore che per agevolarlo …

In queste lezioni cercheremo sempre di adottare la terminologia a nostro modesto avviso più chiara, informando lo studente sui possibili sinonimi (almeno, su alcuni fra i tanti).

E' noto che **PER SEPARARE LA PARTE INTERA DA QUELLA DECIMALE** in un numero si può utilizzare la *virgola*, o in alternativa il *punto decimale*.
Noi nel nostro corso scegliamo di norma la prima strada - più diffusa in Italia - ma a volte preferiamo invece la seconda, per motivi vari di opportunità (e un po' anche per abituare il lettore alla doppia possibilità).
♥ **In questo capitolo dedicato alla statistica il separatore sarà la virgola**,
anche perché nel capitolo si invita sovente a servirsi di un *foglio elettronico*
(programma per computer in grado di visualizzare tabelle, effettuare calcoli e tracciare grafici),
e in un foglio elettronico (versione italiana) occorre forzatamente fare uso della virgola, in quanto un numero scritto con un punto verrebbe interpretato dal programma come finalizzato a indicare un'*ora del giorno*.

Le **FASI SUCCESSIVE** dell'indagine statistica, di cui andremo ad occuparci nel seguito, consistono
- nella **RAPPRESENTAZIONE GRAFICA** dei risultati
- e nella loro **ELABORAZIONE STATISTICA**.

Ma a questo punto ti direi di fermarti per fare qualche facile (e divertente) esercizio.

ESERCIZI sui concetti introduttivi alla Statistica Descrittiva (risposte a pag. 422)

1) Per ognuno dei seguenti fenomeni collettivi, individua una possibile "popolazione" e uno o più possibili "caratteri", poi per ciascun carattere uno o più possibili insiemi di modalità:
   a) le caratteristiche fisiche delle persone b) il lavoro c) le abitudini di spesa
   d) l'appartamento in cui si vive e) la compagnia degli animali domestici

2) Per ciascuno dei seguenti caratteri, stabilisci se è qualitativo *ordinato*, qualitativo *sconnesso*, quantitativo *discreto* o quantitativo *continuo*:
   a) l'età alla quale una donna ha avuto il primo figlio
   b) la squadra di calcio preferita
   c) il numero di sere in cui uno studente esce abitualmente di casa in una settimana
   d) il peso del proprio zainetto nell'entrare a scuola la mattina
   e) il numero di libri presenti nello zainetto di uno studente all'ingresso a scuola
   f) il gradimento di un programma televisivo
   g) la nazionalità degli ospiti di un albergo
   h) il numero di abitanti di un comune

3) Intervista telefonica a 50 persone che hanno risposto "sì" alla domanda "Possiede un gatto?" Fra parentesi, il numero di risposte.

L'animale vive in casa o fuori?	□ Solo in casa (14) □ Sia in casa che fuori (24) □ Quasi sempre fuori (12)
Quanto ha speso negli ultimi 30 gg per l'alimentazione del gatto?	□ Meno di 10 euro (25) □ Da 10 € a 20 € (22) □ Più di 20 € (3)
Ha fatto ricorso al veterinario per il gatto negli ultimi 12 mesi?	□ Mai (33) □ Una volta (13) □ Più di una volta (4)

a) Qual è la "popolazione statistica" in questo caso? Quale il "fenomeno collettivo"? Quali i suoi "caratteri"?
b) Riconosci, fra i caratteri studiati, quelli "quantitativi" e quelli "qualitativi"
c) Quali sono le "modalità" scelte per ciascun carattere?
d) Il carattere qualitativo considerato è "ordinato" o "sconnesso"?
e) Per il ricorso al veterinario, determina le frequenze: I) assolute II) relative III) percentuali

4) *Ottimo per un divertente lavoro di gruppo.*
   a) Trascrivi il questionario sottostante al computer con un *word processor* (= programma di *elaborazione testi*), ad esempio *Word* o *OpenOffice Writer*.
   b) Stampa. Fotocopia. Distribuisci.
   c) Raccogli i questionari compilati.
   d) Con un *foglio elettronico* (es. *Excel* o *OpenOffice Calc*) salva gli esiti in un file.

QUESTIONARIO DEL CURIOSONE

Grazie ♥ se vorrai riempire questo questionario, RIGOROSAMENTE ANONIMO!!!

1) La tua altezza, in cm: ……. 2) Il tuo peso, in kg: …….. 3) Il tuo numero di scarpe: ……..
4) Il numero dei tuoi fratelli (escluso te; devono avere la stessa tua mamma e papà naturali): ……..
5) Quanti anni aveva tua mamma quando ha avuto il primo figlio? ……..
6) A che ora vai a letto, di solito, quando il giorno dopo devi andare a scuola? (è ammessa anche la "1/2 ora", es. 22:30) ……..
7) Quanto prendi di "paghetta" mensilmente? Euro ……..
8) Qual è la tua materia preferita? ……..… 9) Qual è la materia che trovi più antipatica? …….
10) Dai un giudizio sulla tua scuola attuale (crocia la lettera corrispondente alla risposta):
   Pulizia, servizi igienici, stato dell'edificio: a) Scarsissima b) Scarsa c) Sufficiente d) Buona e) Ottima
   Preparazione del corpo insegnante: a) Scarsissima b) Scarsa c) Sufficiente d) Buona e) Ottima
   Capacità degli insegnanti di capire i ragazzi: a) Scarsissima b) Scarsa c) Sufficiente d) Buona e) Ottima
11) Quanti telefonini hai posseduto fino ad ora? …… 12) A che età hai avuto il primo? ……..
13) Qual è il massimo numero di cm che hai saltato in alto in palestra? …….
14) Sei iscritto a Facebook? …….. 15) Se sì, quanti "amici" hai? (pressappoco!): ……..
Sei maschio o sei femmina? …….. Anno di nascita: …….. Classe: ……..

5) Compila la "distribuzione di frequenze" (assolute, relative e percentuali) per qualcuna delle voci dell'indagine statistica condotta attraverso il "Questionario del curiosone". Esempi:

Altezza, in cm	Frequenza assoluta	Freq. relativa (appross.)	Freq. rel. perc. (appross.)
$150 \le h < 155$	1	0,033	3,3 %
$155 \le h < 160$	3	0,1	10 %
…	…	…	…
Totale	30	1	100 %

Materia più antipatica	Frequenza assoluta	Freq. relativa (appross.)	Freq. rel. perc. (appross.)
matematica	6	0,2	20 %
disegno	5	0,17	17 %
…	…	…	…
Totale	30	1	100 %

6) In un paese di montagna ci sono 40 coppie sposate. Il numero di figli è illustrato dalla seguente tabella.

0	2	1	2	3	1	1	0	2	2	0	0	2	1	2	1	2	1	3	2
2	1	0	2	2	4	0	1	1	2	1	1	1	3	0	1	0	1	1	1

Compila una distribuzione di frequenza, con le frequenze assolute, relative e percentuali.

7) E' stata fatta una indagine di classe:
"Sei soddisfatto della scuola scelta?"
(molto comodo tracciare un'asticella per ogni risposta, poi barrare con un tratto orizzontale i gruppi di 5!)
Ricostruisci il contenuto delle caselle cancellate.

	F. A.	F. R.	F. R. %
Moltissimo			20%
Molto	~~////~~ ~~////~~ //		
Abbastanza	~~////~~		
Poco	~~////~~		
Pochissimo	//		

8) Si sa che 3 delle 4 possibili modalità di un carattere sono state osservate, su di un universo statistico, con frequenze relative 0,35; 0,4; 0,2. Determina la frequenza percentuale della modalità rimanente.

9) VERO O FALSO?
   a) Una volta fissato un carattere, la scelta delle sue modalità è sempre univocamente determinata.
   b) Un carattere è qualitativo quando non ha senso pensare a un ordinamento delle sue modalità.
   c) La statistica inferenziale ha come obiettivo innanzitutto di particolarizzare ad un sottoinsieme, le osservazioni generali riguardanti la popolazione.
   d) In medicina, quanto più il *p-value* è alto, tanto più si può esser persuasi che il farmaco sia "buono".
   e) In una indagine sui costi di una notte in albergo a Roma, 80 euro può essere una unità statistica.

10) Inventa e realizza un'indagine, fra i tuoi compagni di classe, sui seguenti fenomeni collettivi:
   a) il tempo di permanenza davanti ad un monitor, la dipendenza dalla tecnologia
   b) i mezzi di trasporto posseduti in famiglia e quelli abitualmente adoperati
   c) educazione e maleducazione d) cibo per lo stomaco e) cibo per la mente

11) Le medie dei voti in pagella in una classe alla fine del primo quadrimestre.
Raggruppa i dati in classi di frequenza; compila la distribuzione di frequenza

6,75	5,75	6,25	8,13	7,75	6,75	7	7,63	5,5	8,5	6,25	5,63
5	7,88	4,75	8,88	5,25	6,63	6,5	8	7,75	7,5	6,25	5

12) N° di giorni in cui un libro è stato trattenuto in prestito dagli utenti di una biblioteca. Raggruppa i dati in classi di frequenza; compila la distribuz. di frequenza, calcolando anche frequenze relative e percentuali.

7	15	4	10	21	11	9	5	23	28	18	12	15	14	13	22	19	20	7	15	18	12	18
13	12	9	7	9	15	14	10	5	14	16	18	19	21	22	3	16	19	7	26	15	17	12

13) Per le modalità di quali, fra i seguenti caratteri, è opportuna una ripartizione in "classi di frequenza"?
   a) L'ammontare della paghetta settimanale degli adolescenti
   b) Il consumo annuale di acqua di una famiglia
   c) Il numero di quotidiani acquistati da un individuo negli ultimi 30 giorni
   d) La materia più amata dagli studenti e) Il numero di televisori in una casa
   f) Il massimo numero di centimetri realizzati nel salto in alto in palestra
   g) Il voto con cui uno studente è stato promosso in Terza Media (dal 6 al 10)
   h) Il voto con cui uno studente ha conseguito il diploma di scuola secondaria (da 60 a 100 e lode)

14) Come si potrebbe verificare se è attendibile il detto "Donne al volante, pericolo costante"?

15) Con riferimento al paragrafo "due righe di storia", inventa una serie di 7 domande che possano andar bene per una competizione di classe "*maschi contro femmine*". Parta poi la gara!

16) Ricerca su Internet il significato dei seguenti termini legati alla statistica:
contingenza, scala mobile, indice di ascolto, share, demografia, exit poll, polizza vita.

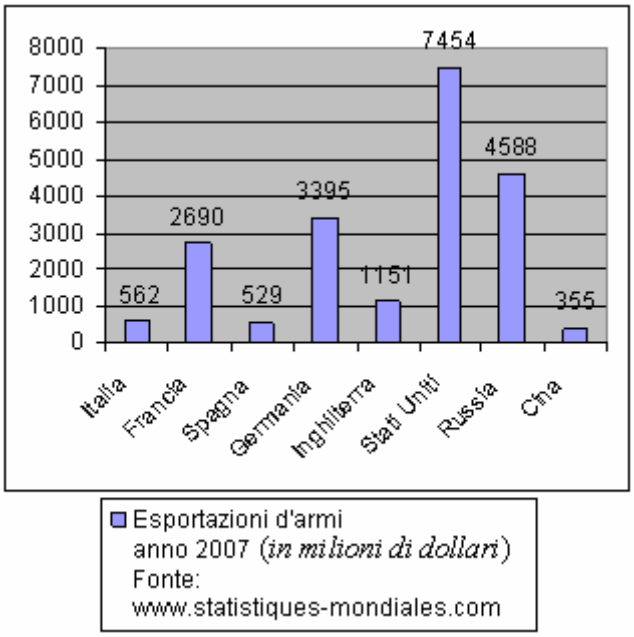
5. RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE

Di fronte a un insieme di dati,
indipendentemente dall'intenzione o meno di "fare della statistica" (= calcolare frequenze, medie ecc.),
è sovente assai utile far ricorso a rappresentazioni grafiche,
per agevolare la lettura e l'interpretazione dei dati stessi.

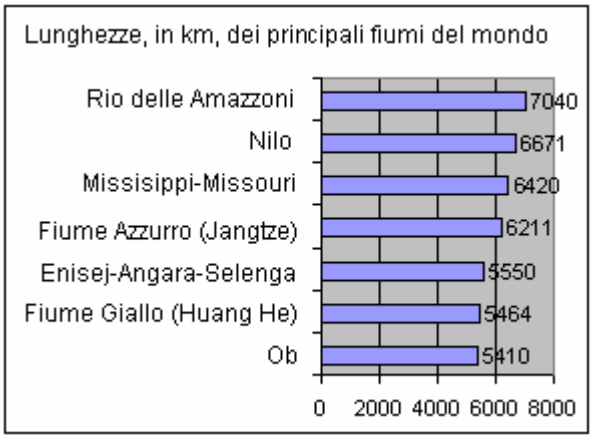
Particolarmente utilizzati sono allo scopo

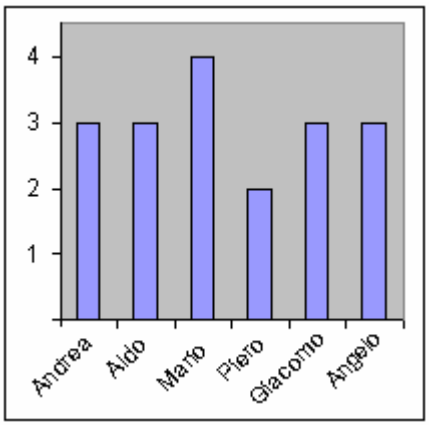
- **I DIAGRAMMI "A BARRE" O "A RETTANGOLI", DETTI ANCHE "ORTOGRAMMI" (rettangoli verticali = "colonne", rettangoli orizzontali = "nastri")**
- **E I GRAFICI CARTESIANI**.

Il loro impiego porta subito ad una visualizzazione molto efficace del fenomeno …
occorre però che I DATI NON SIANO TROPPO NUMEROSI, ALTRIMENTI "CI SI PERDE"!



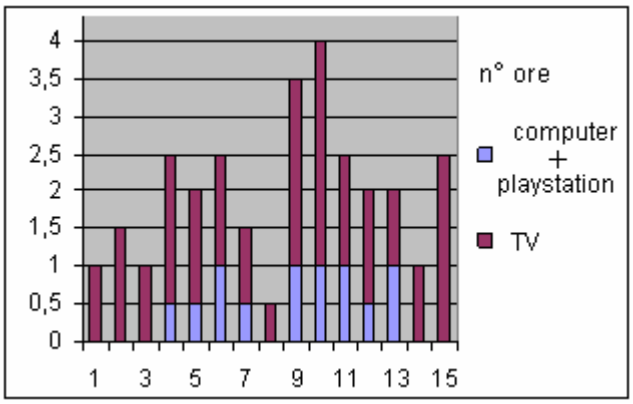
Il diagramma qui a sinistra è "a COLONNE",
quello qui sotto è "a NASTRI".
Entrambi sono diagrammi "a BARRE".
In un foglio elettronico però,
viene detto "diagramma a barre"
solo quello che noi abbiamo chiamato "a nastri".
Che pasticcio, a volte, la terminologia!





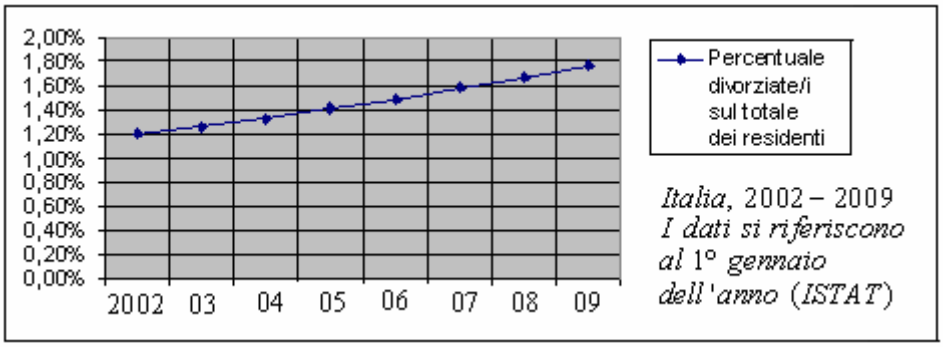
Grado
di istruzione
delle persone
presenti
al Bar Sport
in un
determinato
giorno e ora

1 = elementari
2 = medie
3 = diploma
4 = laurea



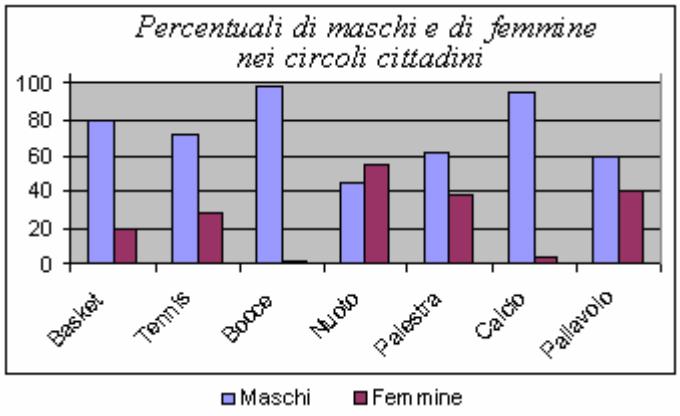
Permanenza media in una giornata davanti a un monitor
(per i 15 ragazzi dell'Oratorio S. Giuseppe): barre in pila

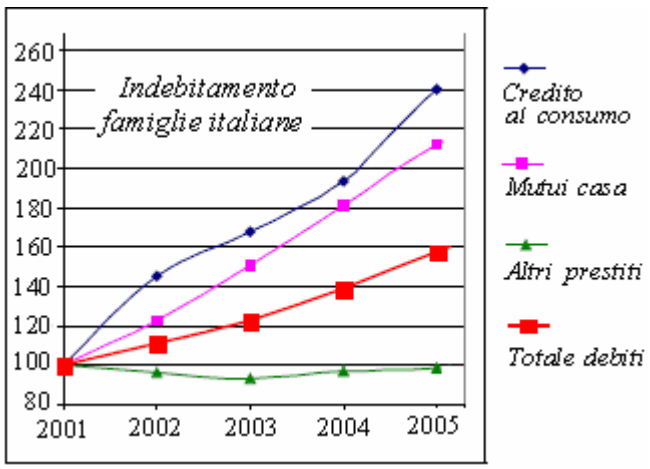
Per una "**SERIE STORICA**",
in cui uno stesso dato
viene rilevato
in tempi successivi,
il grafico cartesiano
può essere preferibile
rispetto al diagramma
a rettangoli,
perché rende meglio l'idea
dell'evolversi del fenomeno:



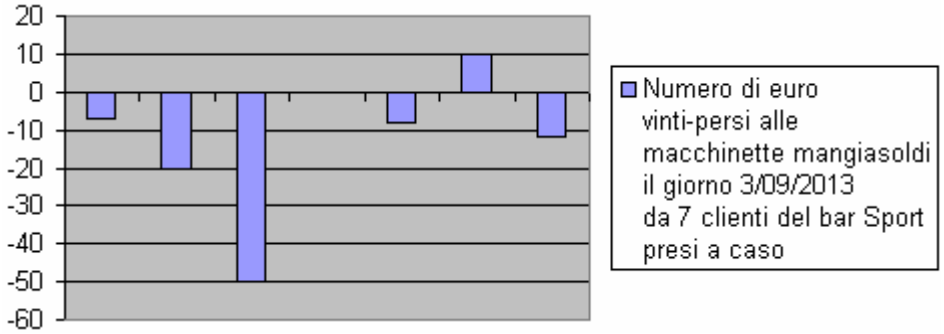
OSSERVAZIONE: le due parole "**DIAGRAMMA**" e "**GRAFICO**" sono in una certa misura intercambiabili, ma in generale sarebbe preferibile limitare l'uso della parola "**grafico**" ai soli casi in cui le quantità che vengono messe in relazione fra loro sono *tutte* espresse da **numeri**, e non da sostantivi/aggettivi/avverbi.

Tanto con un diagramma a rettangoli, quanto con un grafico cartesiano, è possibile anche confrontare *due o più* dati fra loro:



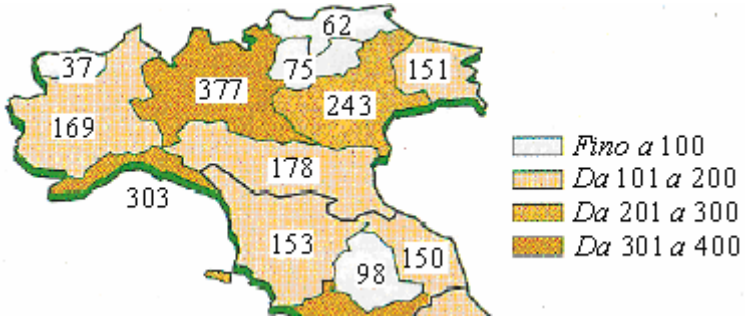


QUANDO I RETTANGOLI SCENDONO AL DI SOTTO DELL'ASSE ORIZZONTALE, esprimono un dato negativo:



In un **CARTOGRAMMA**, le diverse regioni di una cartina geografica vengono colorate con tinte più o meno scure a seconda dell'*intensità* del fenomeno in esame.

Nel cartogramma qui a fianco: intensità della popolazione residente (numero di abitanti per kilometro quadrato, anno 1997). Fonte: ISTAT



ESERCIZI

1) Rileva le altezze in cm dei tuoi compagni di classe.
   Con un **"foglio elettronico"**
   (Excel o OpenOffice Calc, ad esempio:
   trovi una elementare GUIDA al foglio elettronico nelle pagine successive)
   visualizza la situazione.
   Tieni presente che
   a) **Excel** chiama "Istogrammi" i "diagrammi a colonne" (rettangoli verticali) e chiama "Barre" i "diagrammi a nastri" (rettangoli orizzontali)
   b) **OpenOffice Calc** chiama rispettivamente "Colonna" un "diagramma a colonne" (rettangoli verticali) e "Barra" un "diagramma a nastri" (rettangoli orizzontali).
   Comunque … niente paura!
   In un foglio elettronico, la denominazione è subito accompagnata dalla figura, quindi … è facilissimo capire!

2) Con un **"foglio elettronico"** (Excel o OpenOffice Calc, ad esempio) rappresenta la serie storica della popolazione italiana (in milioni di abitanti) contenuta nella tabella seguente (dati ISTAT):

1901	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981	1991
33,78	36,92	37,86	41,04	42,4	47,52	50,62	54,14	56,56	56,41

E veniamo ora a esaminare i principali tipi di rappresentazione grafica che si utilizzano più specificatamente per illustrare gli esiti di una vera e propria *indagine statistica*
(c'è un "*collettivo statistico*", o "*popolazione*", e noi andiamo a rilevare
qual è la *frequenza* - assoluta, relativa, o percentuale -
con cui si riscontrano, nella "popolazione", le varie "*modalità*" di un determinato "*carattere*").

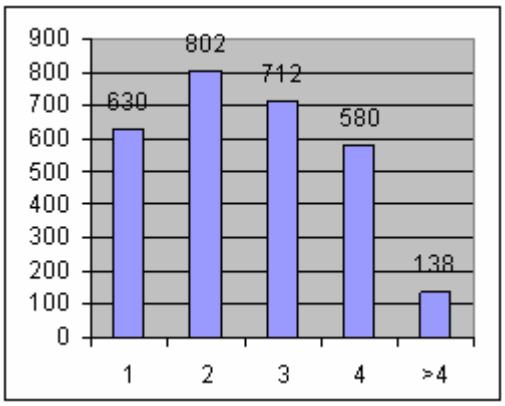
DIAGRAMMA A BARRE (= rettangoli verticali o orizzontali)
detto anche "**DIAGRAMMA A RETTANGOLI**" o "**ORTOGRAMMA**".
Se le barre sono VERTICALI, si potrà parlare di "DIAGRAMMA A COLONNE";
se ORIZZONTALI, di "DIAGRAMMA A NASTRI"

(come però abbiamo già fatto notare, **NEI "FOGLI ELETTRONICI"**
LA TERMINOLOGIA È DIVERSA DA QUESTA. Pazienza, è lo stesso, tanto si capisce ugualmente!)

E' una figura con rettangoli le cui basi sono fra loro uguali,
e le cui altezze sono proporzionali alle frequenze
(assolute, o relative, o percentuali).

Indagine statistica
sulle 2862 famiglie di un Comune:
numero di componenti
del nucleo familiare
(conviventi nello stesso appartamento)

1	630
2	802
3	712
4	580
>4	138
	2862



I rettangoli si possono eventualmente accostare fra loro.
La figura qui sotto mostra una "tabella composta",
nella quale le modalità di uno stesso carattere sono riferite a più popolazioni.
Notare anche l'aspetto "3D" (= tridimensionale) del diagramma.

"Trovi interessanti i talk show politici in TV"?
(Risposte in percentuale su un campione di 964
intervistati, suddivisi per livello di istruzione)

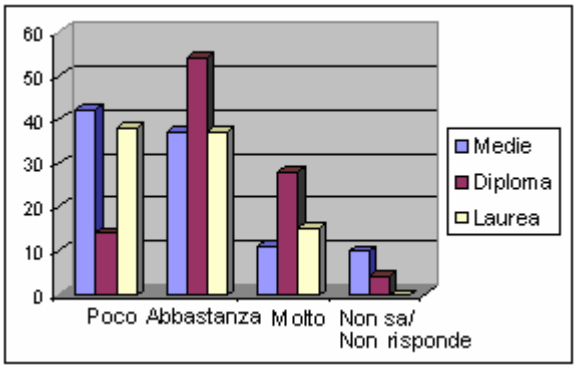
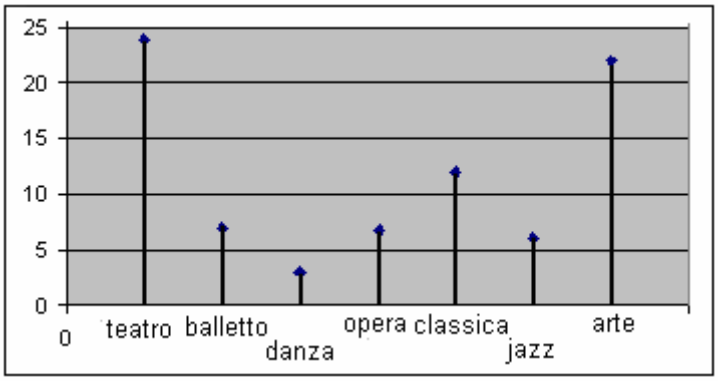


DIAGRAMMA A SEGMENTI (= AD ASTE),
analogo al diagramma a rettangoli, con una delle dimensioni del rettangolo sottilissima.

Partecipazione ad eventi culturali:
percentuale della popolazione
che ha partecipato
ad almeno un evento culturale
del tipo specificato
(teatro, balletto, danza contemporanea,
opera, musica classica,
jazz, galleria d'arte)
nel periodo considerato.

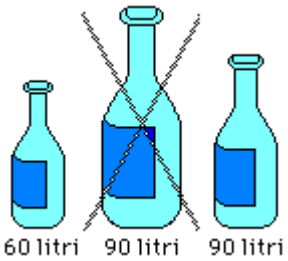


IDEOGRAMMA



Figure opportune, legate al contesto, vengono disegnate in modo che sia proporzionale al dato da rappresentare o il loro numero, oppure la loro estensione.

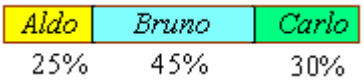
Nell’ideogramma qui a fianco:
Il consumo annuo di vino in 3 trattorie
(1 bottiglia = 500 litri)



Attenzione, però:
se è l’*estensione* della figura quella che conta, è facile sbagliare:
ad esempio, nella figura qui a fianco, tratta da http://macosa.dima.unige.it,
la bottiglia centrale dovrebbe avere una volta e mezza il volume della prima ($90 = 60 \cdot 1{,}5$), mentre il realtà, essendo le sue *dimensioni* 1 volta e mezza,
il *volume* è $1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}375$ volte tanto.
L’ideogramma corretto è la *terza* bottiglia, quella a destra!

DIAGRAMMA A STRISCE

Ottimo per confrontare le parti con il totale



Il contributo di 3 muratori alla piastrellatura di un corridoio

DIAGRAMMA A TORTA (o “**diagramma a settori circolari**”)

Un cerchio è suddiviso in tante fette quante sono le modalità del carattere in esame.

L’angolo al centro di una fetta (ossia: di un settore circolare)
è proporzionale alla frequenza, assoluta o relativa o percentuale, della rispettiva modalità.

Come faccio a determinare di quanti gradi x dev’essere una data “fetta”?
Semplice:
Se ad esempio le unità statistiche erano 24, e 10 di esse hanno presentato una certa modalità, allora

$$10 : 24 = x° : 360° \quad \text{da cui} \quad x° = \frac{10 \cdot 360°}{24} = 150°$$

In generale,

$$\frac{\textit{frequenza assoluta}}{\textit{numerosità}} = x° : 360° \quad \text{da cui} \quad x° = \frac{\textit{frequenza assoluta}}{\textit{numerosità}} \cdot 360°$$

(ricordiamo che per “numerosità” di una popolazione si intende il numero totale delle unità statistiche).

Si può anche operare (è lo stesso!), per determinare $x°$, con la frequenza relativa:

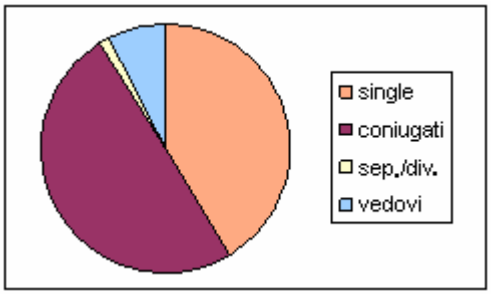
$$\frac{\textit{frequenza relativa}}{\underbrace{\textit{somma delle frequenze relative}}_{=1}} = x° : 360° \quad \text{da cui} \quad x° = \textit{frequenza relativa} \cdot 360°$$

… oppure con la frequenza percentuale:

$$\frac{\textit{frequenza percentuale}}{\underbrace{\textit{somma delle frequenze percentuali}}_{=100}} = x° : 360° \quad \text{da cui} \quad x° = \frac{\textit{frequenza percentuale}}{100} \cdot 360°$$

ESEMPIO: la popolazione (compresi i bambini) di un certo comune per stato civile nel 2013, in migliaia (single, coniugati, separati o divorziati, vedovi). Il fatto che nelle colonne delle frequenze relative e percentuali la somma non sia *esattamente* 1 o 100 è dovuto agli arrotondamenti.

	assoluta	relativa	percentuale	angolo
single	23516	0,414	41,4	149
coniugati	28185	0,496	49,6	179
sep./div.	854	0,015	1,5	5
vedovi	4224	0,074	7,4	27
TOTALE	56779	1,000	100,0	360



ISTOGRAMMA

(utilizzabile, nella versione "per aree" che qui sotto presentiamo, per i caratteri quantitativi continui; tuttavia, quasi sempre il termine "istogramma" viene inteso piuttosto come sinonimo di "diagramma a colonne", il buon vecchio diagramma a colonne con basi delle colonne fra loro uguali. La raffigurazione "per aree" di cui stiamo per occuparci ha infatti sovente più svantaggi che vantaggi)

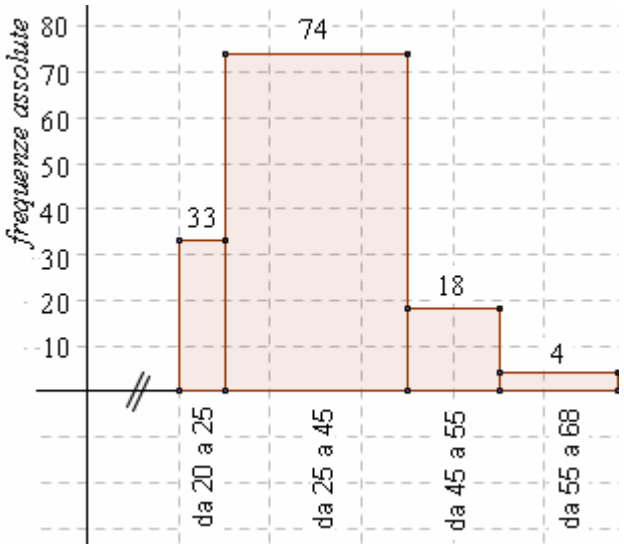
Un'azienda vuole illustrare la "ripartizione dei suoi dipendenti per classi di età".

Poiché le età di 25 anni, di 45, e di 55, sono normalmente associate a scatti di carriera o comunque appaiono particolarmente adeguate a ripartire i dipendenti in gruppi in qualche modo omogenei (per atteggiamento mentale, per esperienza lavorativa …), viene compilata la tabella seguente (s'intende, in ogni intervallo, il *primo estremo incluso* e il *secondo escluso*):

da 20 a 25	da 25 a 45	da 45 a 55	da 55 a 68
33	74	18	4

Le "classi" (= gli intervalli) sono fra loro differenti come ampiezza, per cui sembra opportuno che siano pure differenti fra loro (e proporzionali agli intervalli) le suddivisioni dell'asse delle ascisse.

Tuttavia, se a questo punto noi associassimo a ciascuna classe un rettangolo di altezza proporzionale alla frequenza …



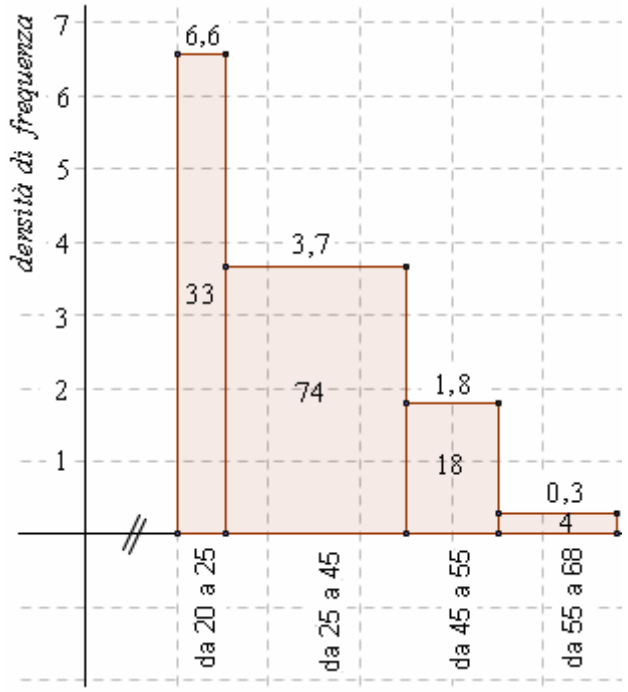
… questa rappresentazione potrebbe darci un **"colpo d'occhio" distorto** sulla situazione, per almeno due motivi:

a) la nostra attenzione è portata spontaneamente a portarsi sull'*area* di ciascun rettangolo, piuttosto che sulla sua altezza … ma da ciò si trarrebbe l'impressione (sbagliata!) che i dipendenti con almeno 45 anni (i 2 intervalli a destra) siano più numerosi di quelli con meno di 25 anni;

b) e inoltre, si potrebbe pensare che l'altezza dell'intervallo si riferisca a ogni singolo valore che sta alla base dell'intervallo (quindi, per esempio, che ci siano 33 dipendenti di 20 anni, 33 di 21, 33 di 22 , …)

Viene allora *un'altra idea*.
Su ciascun intervallo si costruisce un **rettangolo** la cui **AREA** sia **proporzionale alla frequenza di quella classe**.

L'*altezza* del rettangolo si potrà perciò ricavare *dividendo la frequenza per l'ampiezza della classe*.



Nel nostro esempio, abbiamo ricavato l'altezza del primo rettangolo a sinistra dividendo la frequenza (che era 33) per l'ampiezza dell'intervallo $(25 - 20 = 5)$.

Abbiamo ottenuto $6{,}6$, quindi il nostro primo rettangolo a sinistra, avendo base 5 e altezza $6{,}6$, avrà **area** uguale alla frequenza (33) con la quale la modalità "da 20 a 25 anni" si è manifestata nella nostra popolazione statistica (= l'insieme dei dipendenti dell'azienda).

Insomma, **in un istogramma di questo tipo le FREQUENZE *non* sono date dalle altezze dei rettangoli, bensì dalle loro AREE !**

E le *altezze* dei rettangoli vengono anche chiamate "*densità di frequenza*".

QUALCHE OSSERVAZIONE sui diagrammi precedenti.

- La prima è banale: abbiamo utilizzato il simbolo // per indicare il fatto che il segmento in gioco ha una lunghezza che non va d'accordo con le lunghezze degli altri intervalli sull'asse orizzontale: tale segmento non aveva importanza per il nostro diagramma, ed è stato tagliato per guadagnare spazio.
- Inoltre: il riferimento è, in entrambe le figure, "dimetrico", cioè con due diverse unità di misura in orizzontale e in verticale. D'altronde, sono addirittura diverse le due grandezze le cui misure vengono riportate sugli assi: in entrambi i diagrammi, l'asse orizzontale riporta intervalli di età, mentre sull'asse *verticale* abbiamo:
  - ♪ nel *primo* dei due diagrammi, una *frequenza assoluta*;
  - ♫ nel *secondo*, una *"densità di frequenza"*, la cui unità di misura ha la dimensione *età*$^{-1}$
- E' importante, quando si suddividono le modalità in intervalli (= in "classi di frequenza"), specificare con chiarezza se un estremo dell'intervallo è *incluso* oppure è *escluso*.

  Noi lo abbiamo fatto dichiarando "s'intende, in ogni intervallo, il *primo estremo incluso* e il *secondo escluso*".

  A volte si indica l'inclusione o esclusione di un estremo in modo schematico: fra i simboli utilizzati, c'è
  - ⊢ oppure •—○ per indicare che il 1° estremo è incluso e il 2° è escluso: $x_1 \le x < x_2$, $x \in [x_1, x_2)$
  - ⊣ oppure ○—• per indicare il viceversa: $x_1 < x \le x_2$, $x \in (x_1, x_2]$
  - ⊢⊣ o anche solo un trattino (−) oppure •—• per indicare l'inclusione di entrambi gli estremi: $x_1 \le x \le x_2$, $x \in [x_1, x_2]$

  Poiché diversi Autori potrebbero effettuare scelte diverse, senza magari esplicitare la loro scelta con chiarezza, occorre sempre, quando si consulta una fonte, cercare di capire come si è regolato quel libro o quel sito.
- Nel caso particolare in cui le ampiezze degli intervalli siano tutte uguali, un istogramma non differisce da quello che noi avevamo denominato "diagramma a barre" o "ortogramma".
- **I "fogli elettronici" EXCEL, OPENOFFICE CALC non fanno istogrammi**, ma solo **diagrammi a barre … … che tuttavia chiamano "istogrammi"! E questa abitudine** a utilizzare il termine "istogramma" per indicare quelli che, per la precisione, andrebbero chiamati "diagrammi a barre", o "ortogrammi", o "diagrammi a rettangoli" **è comunque entrata nell'uso anche nel linguaggio comune.**

  Puoi trovare una brevissima introduzione al "foglio elettronico" nelle pagine seguenti.



Va detto che **GLI ISTOGRAMMI CON INTERVALLI DI UGUALE AMPIEZZA (INDISTINGUIBILI QUINDI DAI "DIAGRAMMI A BARRE") SONO AMPIAMENTE PREFERIBILI**, perché **di più immediata interpretazione**. **IL PREZZO DA PAGARE È CHE LA BASE DEL RETTANGOLO PUÒ NON ESSERE PROPORZIONALE ALL'AMPIEZZA DELLA CLASSE, MA … PAZIENZA!**

Riguardo alle rappresentazioni grafiche, citiamo ancora le "**TABELLE A DOPPIA ENTRATA**": ottime per illustrare la distribuzione di due distinti caratteri su di una stessa popolazione.
Ad esempio: indagine, su 303 famiglie, riguardo a reddito annuo lordo, in euro, e numero di autovetture possedute.

n° auto / Reddito	**0**	**1**	**2 o più**	Totale
<20000	23	27	0	50
20000 ⊢ 40000	5	84	18	107
40000 ⊢ 60000	0	70	29	99
≥60000	0	15	32	47
Totale	28	196	79	303

I TIPI DI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA PIU' … "GETTONATI"

Per i caratteri **QUALITATIVI SCONNESSI** i diagrammi più utilizzati sono:
- il diagramma a **torta** (specialmente se le modalità sono poche);
- il diagramma a **colonne** (che Excel chiama *istogramma*) o il diagramma a **nastri** (che Excel chiama *barre*)

Per i caratteri **QUALITATIVI ORDINATI** si utilizzano prevalentemente il diagramma a **colonne** (che Excel chiama *istogramma*) o il diagramma a **nastri** (che Excel chiama *barre*)

Per i caratteri **QUANTITATIVI DISCRETI** si utilizza prevalentemente il diagramma ad **aste** (= **segmenti**)

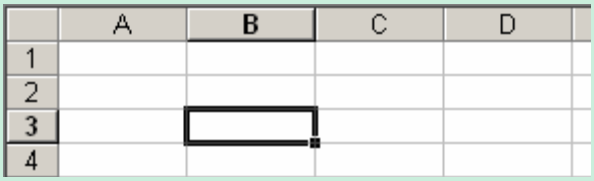
Per i caratteri **QUANTITATIVI CONTINUI** si utilizza prevalentemente il diagramma a **colonne**

Per le **SERIE STORICHE**: grafico **cartesiano,** diagramma a **colonne**

Per le **SERIE GEOGRAFICHE**: **cartogramma**

6. UNA BREVE INTRODUZIONE AL FOGLIO ELETTRONICO

Il "foglio elettronico"



Un "**foglio elettronico**" (o "**foglio di calcolo**"; in Inglese, "**spreadsheet**")
è un programma per computer che permette di inserire

- **numeri**,
- o **formule**,
- o **scritte** (si dice, in Informatica, "**stringhe**"),

in una griglia di "**celle**" (tipo "**battaglia navale**"), per realizzare
elenchi, tabelle, calcoli e statistiche di vario tipo, e per tracciare **diagrammi e grafici**.

MICROSOFT OFFICE

E' una **"raccolta" di programmi**, riuniti dalla società produttrice Microsoft in un'unica confezione.

Contiene, nella versione "**Professional**": **Word+Excel+Powerpoint+Publisher+Access+Outlook.**

Sono comunque in vendita anche "pacchetti" meno costosi, costituiti da un sottoinsieme dei programmi citati.

Tieni poi sempre presente che le **offerte "Education", riservate a studenti e insegnanti**,
sono molto più economiche delle proposte commerciali "normali".

❑ Il **foglio elettronico di Microsoft Office** si chiama **Excel** (leggi: *icsèl* o - un po' "italianizzato" - *ecsèl*)

OPENOFFICE

Una famiglia di programmi simile a Microsoft Office,
composta da programmi che sono di UTILIZZO GRATUITO,
è la famiglia OpenOffice, nata da una iniziativa della *software house* **Sun Microsystems**.

Chiunque può legalmente e liberamente scaricare OpenOffice da Internet accedendo al sito
(in lingua Inglese) www.openoffice.org oppure al sito (in Italiano) http://it.openoffice.org

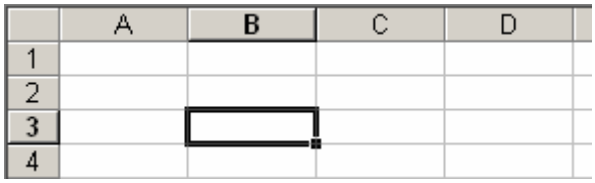
❑ Il **foglio elettronico di OpenOffice** si chiama **OpenOffice Calc** (l'elaboratore di testi, OpenOffice Writer).

SOMMARIA GUIDA AL FOGLIO ELETTRONICO

Facciamo riferimento per questi brevi cenni a Excel,
ma con OpenOffice Calc il discorso cambia solo in qualche dettaglio.

Se lanciamo il programma,
ci compare un quadro di celle disposte

♪ su righe (1, 2, 3, 4, …)
♫ e su colonne (A, B, C, D, …, Z,
AA, AB, AC, AD, …, AZ,
BA, BB, BC, BD, …).



Ad esempio, qui a fianco, ci siamo posizionati,
cliccando col mouse o adoperando i tasti freccia,
sulla cella B3,
che il foglio elettronico automaticamente ha evidenziato.

Cosa possiamo scrivere, digitando sulla tastiera, in una cella? Possiamo scrivere:

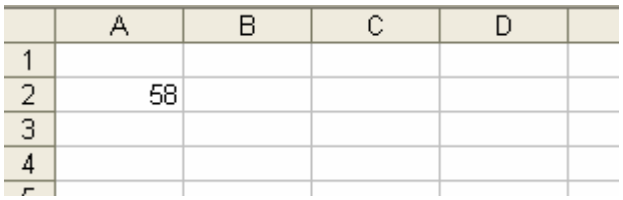
a) un **NUMERO**, **intero o con la virgola** (**OCCORRE ADOPERARE LA VIRGOLA,**
E NON IL PUNTO, COME SEPARATORE DELLA PARTE INTERA DALLA PARTE DECIMALE,
perché un numero scritto col puntino verrebbe interpretato dal programma come se fosse finalizzato
a indicare un'*ora della giornata*, e ciò porterebbe a tutta una serie di esiti sballati)

b) oppure una **SCRITTA** (sequenza di caratteri; in Informatica si dice "**STRINGA**") di qualsiasi natura

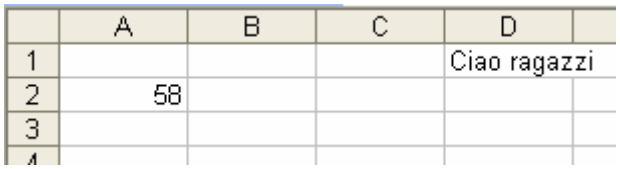
c) o infine una **FORMULA**, **la quale potrà operare sui contenuti di altre celle**.
♥ **UNA FORMULA, PER ESSERE RICONOSCIUTA COME TALE DAL FOGLIO ELETTRONICO,**
DEVE SEMPRE INIZIARE COL SIMBOLO =

Facciamo qualche esempio.

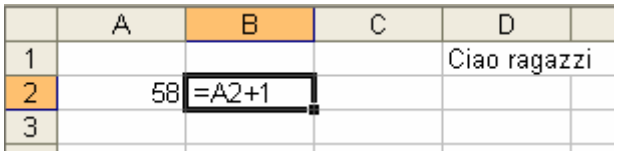
Prova a digitare sulla tastiera il numero 58
mentre sei posizionato nella cella A2.
Confermando col tasto “Invio”,
oppure spostandoti col mouse o coi tasti freccia
su di un’altra cella,
il numero 58 diventerà il contenuto di quella cella.



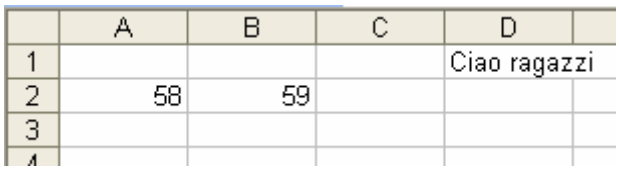
Prova a spostarti (mouse, o tasti freccia) sulla cella D1
e digita la scritta
Ciao ragazzi
Essa diventerà il contenuto della cella D1
non appena avrai confermato col tasto Invio
o ti sarai spostato (mouse, tasti freccia) in un’altra cella.



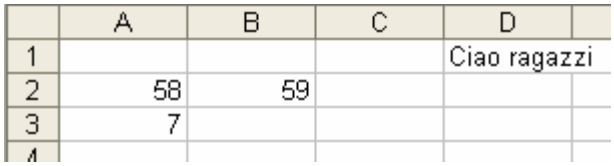
Adesso vai sulla cella B2 e scrivi
=A2+1



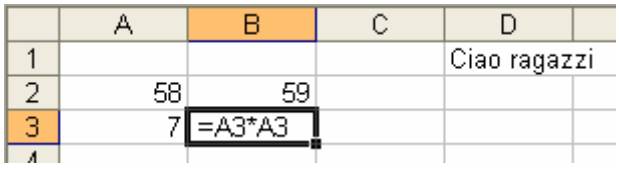
… Bene,
confermando con Invio
o spostandoti in un’altra cella
osserverai che il contenuto di B2 è diventato 59!!!



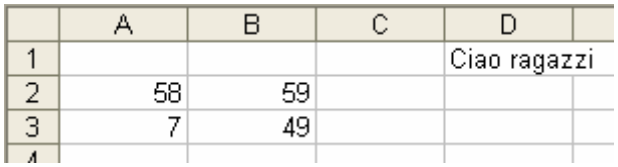
Fai qualche altro esperimento …
ad esempio,
inserisci in A3 il numero 7



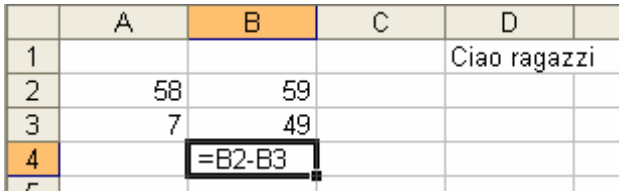
poi in B3 la formula
=A3*A3
(l’asterisco indica moltiplicazione;
invece la divisione si esprime con la barra /).



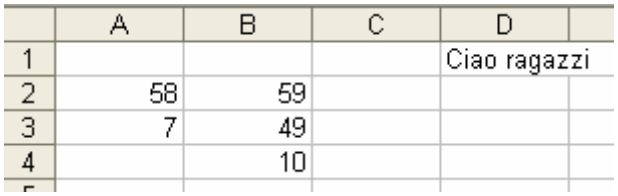
Bene,
dopo la conferma il contenuto di B3 diventerà 49.



Adesso posizionati in B4 e digita
= B2 – B3



Naturalmente, dopo la conferma,
il contenuto di B4 diverrà 10.



Tutto ciò è carinissimo, ed apre la strada a innumerevoli impieghi di straordinaria utilità,
soprattutto perché una cella può essere "incollata" su una o più altre celle,
e quando il "copia e incolla" viene effettuato a partire da una cella che originariamente conteneva una formula
(e ora contiene il numero ottenuto dall'applicazione di tale formula), ciò che viene incollato
non è il contenuto visibile della cella, ossia il numero, ma proprio la formula "sottostante" …
però la formula che verrà riportata nella cella di destinazione non sarà più esattamente quella originaria, bensì …

Calma, FACCIAMO UN ESEMPIO.

Supponi di essere un commerciante, un artigiano o un imprenditore e di avere una lista di prezzi "al netto di IVA".
Cosa vuol dire? Vuol dire che quando farai pagare effettivamente quella merce o quel servizio al cliente,
il prezzo non sarà più quello lì, perché dovrai aggiungere una percentuale chiamata IVA
(Imposta sul Valore Aggiunto), a carico del cliente stesso.
Per la maggior parte dei beni di mercato, l'IVA era fissata, in Italia, fino all'anno 2010, al 20%.

Ad esempio, un prezzo senza IVA di euro 130 diventava, se "ivato", euro $130+\frac{20}{100}\cdot 130=\frac{120}{100}\cdot 130=156$.

L'IVA è presente in tutti i paesi europei. In Italia è stata a lungo al 20% con l'eccezione dei generi alimentari
di prima necessità o dei prodotti di stampa, ivati al 4 %, e di determinati beni e servizi, ivati al 10%.
Nelle altre nazioni si hanno aliquote diverse.

Dopo questa premessa,
immagina di aver stilato con un foglio elettronico
un elenco di prezzi
(celle A2 … A11),
e di voler caricare su di essi l'IVA
(che in questo esempio supponiamo essere del 20 %).

	A	B
1	Senz' IVA	Con IVA
2	130	
3	180	
4	124	
5	120	
6	65	
7	100	
8	82	
9	48	
10	220	
11	30	

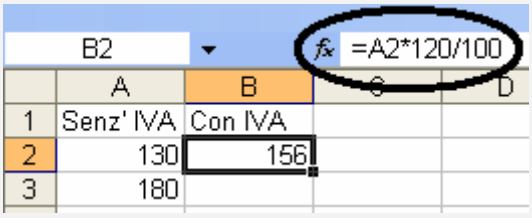
Nella cella B2
scriverai dunque
= A2*120/100 …

	A	B
1	Senz' IVA	Con IVA
2	130	=A2*120/100
3	180	

… dopodiché,
premendo Invio o spostandoti,
col primo prezzo sarai a posto.

	A	B
1	Senz' IVA	Con IVA
2	130	156
3	180	

Osserva fra l'altro che, confermata la formula
nella cella, la formula stessa, ossia
il "contenuto concettuale" della cella, viene
evidenziato in un'apposita casella in alto …



A questo punto, si potrebbe temere che facendo un "copia-incolla" della cella B2 sulle celle B3 … B11,
la cosa sia destinata a non funzionare in quanto la formula = A2*120/100 fa riferimento al contenuto di A2,
mentre noi siamo ora interessati a un calcolo del 120 % sui contenuti di A3, A4, …, fino ad A11.
E invece no! Il "miracolo" del foglio elettronico è che,
quando una cella il cui contenuto "concettuale" è una formula viene incollata,

♪ ♥ prima di tutto questo copia-incolla viene applicato *non* al contenuto effettivo
ma al retrostante contenuto concettuale, appunto.
Insomma, nel nostro esempio, quando incollo la cella B2,
io non incollo il numero 156, bensì la formula "sottostante"

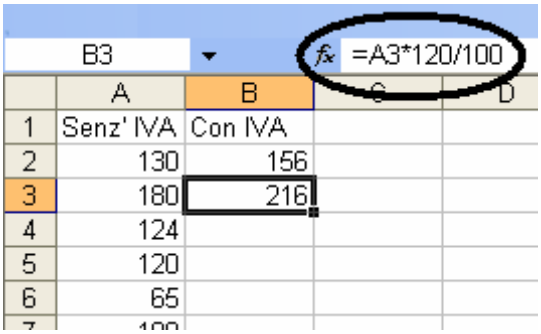
♫ ♥ … e contestualmente, questa formula viene interpretata
con "**INDIRIZZAMENTO RELATIVO**" e *non* con "indirizzamento assoluto".
La formula = A2*120/100 , che abbiamo scritto in B2,
viene interpretata dal foglio elettronico "in senso relativo", "dal punto di vista di B2":

ora, dal punto di vista di B2, = A2*120/100 significa = *il contenuto della cella all'immediata sinistra* *120/100

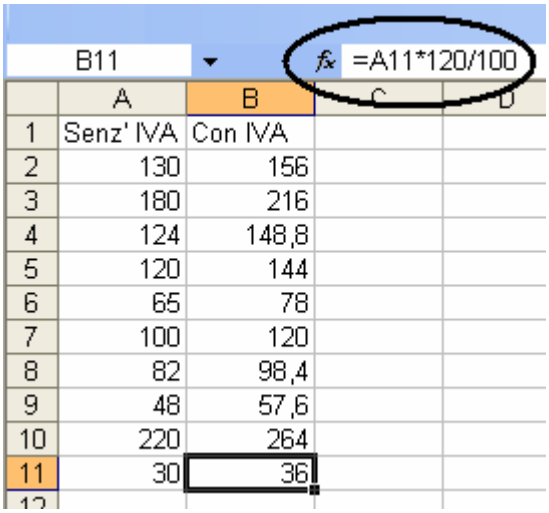
Di conseguenza, quando incolliamo B2 su B3,
la formula che verrà immessa in B3 sarà proprio

= *il contenuto della cella all'immediata sinistra* *120/100

ossia (siamo in B3)
= A3*120/100
che fa perfettamente al caso nostro!!!

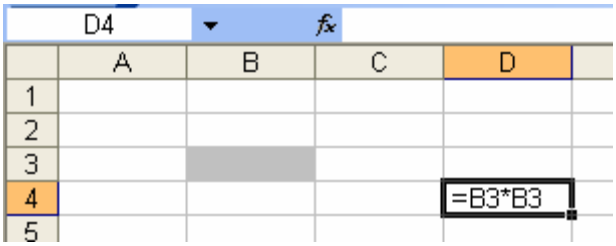


… Ragion per cui,
se noi incolliamo B2
su tutta la serie di celle B3 … B11
(e lo possiamo fare anche "in un colpo solo",
se, dopo aver copiato B2,
prima di incollare
noi trasciniamo il mouse
in modo da selezionare tutte le celle
incolonnate da B3 a B11),
il nostro obiettivo sarà raggiunto.

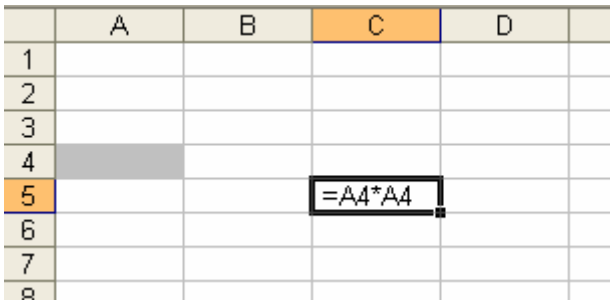


NOTA: *volendo selezionare tutta una zona di celle, oltre che trascinare col mouse si può anche tener premuto il tasto MAIUSC e poi operare coi tasti freccia.*

Un altro esempio: LA FORMULA
= B3 * B3 ,
SCRITTA IN D4,
significa, dal punto di vista di D4,
"moltiplicare per sé stesso il numero contenuto nella cella che sta *2 posti a sinistra e 1 posto in alto*"…



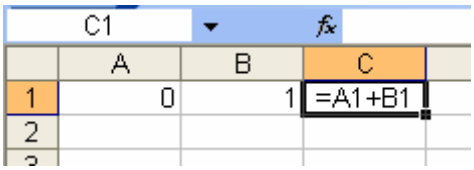
… quindi, SE VENISSE INCOLLATA SU C5,
DIVENTEREBBE
= A4 * A4



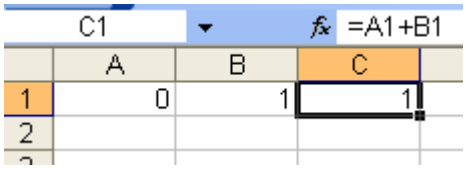
♥ **A volte questo meccanismo dell' "indirizzo relativo" può essere sfruttato per un "effetto domino".**

Supponiamo di voler generare la *successione di Fibonacci*, nella quale
i primi due termini sono 0 e 1, e ciascuno degli altri termini è costruito come somma dei due precedenti:
0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89...

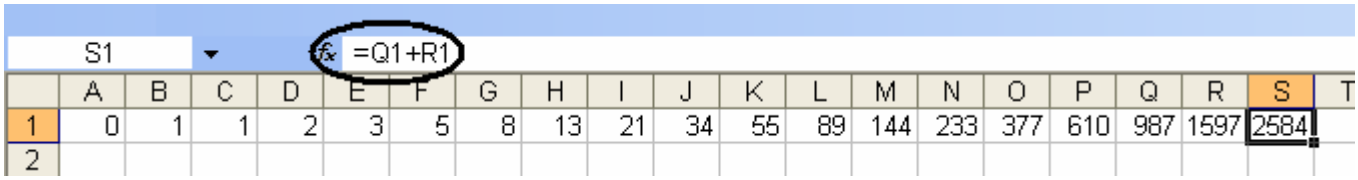
Potremo allora scrivere, ad esempio,
0 in A1, 1 in B1, la formula = A1 + B1 in C1, …



… ottenendo, tanto per cominciare,



poi incollare C1 sulla fascia D1 E1 F1 ecc., col risultato desiderato.



In certi casi tuttavia l'indirizzamento relativo implicito nelle formule potrebbe esserci d'ostacolo.
L'esempio che segue illustrerà bene questo aspetto, e mostrerà come sia facile fronteggiare la situazione.

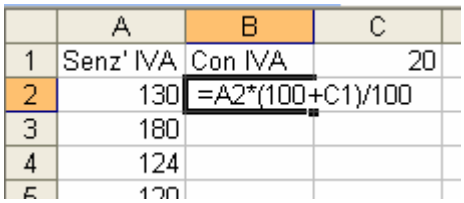
Mettiamoci nuovamente nei panni del commerciante o artigiano alle prese con l'IVA al 20%.
Se il Governo dovesse putacaso abbassarla al 18%, a questo punto il file da lui impostato dovrebbe essere "riprogrammato": ciascuna delle formule contenenti *120/100 dovrebbe essere mutata in *118/100.
Questo non sarebbe la fine del mondo, ma usualmente i *file* di foglio elettronico sono preparati da un esperto e utilizzati poi da utenti che non sono degli specialisti.

Si potrebbe prevedere una casella in alto, ad esempio C1,
che riporti l'aliquota, poniamo 20,
in modo che anche un utente poco smaliziato
possa ovviare al problema semplicemente scrivendo 18,
o comunque la nuova aliquota, al posto di 20,
in quella cella.
Dopodiché anziché scrivere, in B2, la formula

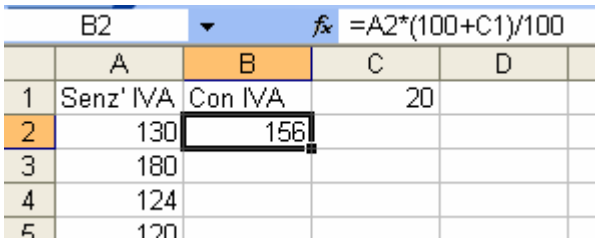
$$= A2*120/100,$$

si scriverebbe

$$= A2*(100+C1)/100.$$



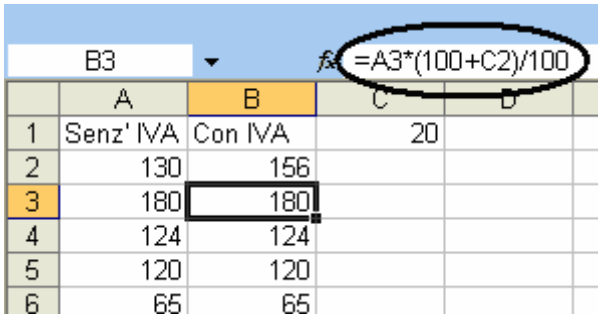
E la cosa funzionerebbe per quanto riguarda B2,
producendo il corretto risultato 156 …



… però poi, all'atto del copia-incolla su B3, B4 ecc.,
l'indirizzamento relativo farebbe sì che la formula,
incollata ad esempio in B3, divenga

$$= A3*(100+C2)/100$$

che evidentemente è inservibile
perché in C2 non c'è niente
quindi anziché il desiderato 100+20
il numeratore della frazione
assume il valore 100+0=100.



Fortunatamente i fogli elettronici (Excel, Calc di OpenOffice …) permettono di "inchiodare"
quello che sarebbe un indirizzo relativo, facendolo diventare "assoluto".
Un indirizzo "assoluto" è cristallizzato, immobile, e rimane inalterato anche di fronte a un copia-incolla.

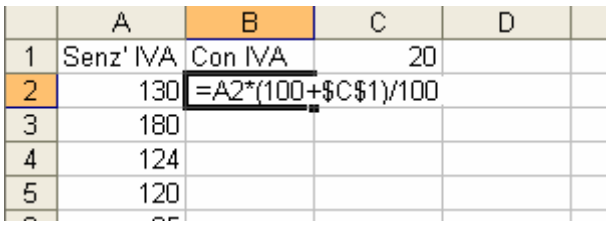
♥ **E' semplicissimo rendere assoluto un indirizzo:**
basta usare il "simbolo del dollaro" $.

Nel nostro caso, dunque,
anziché scrivere in B2 la formula

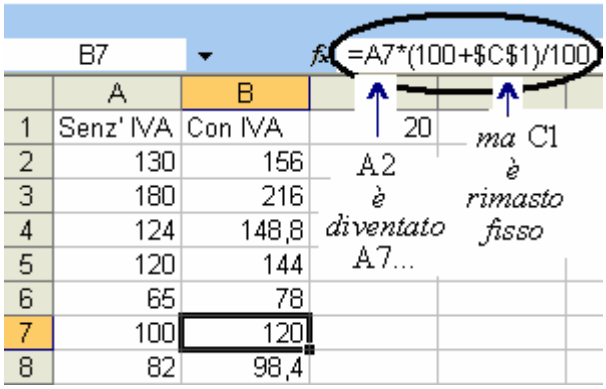
$$= A2*(100+C1)/100$$

scriveremo

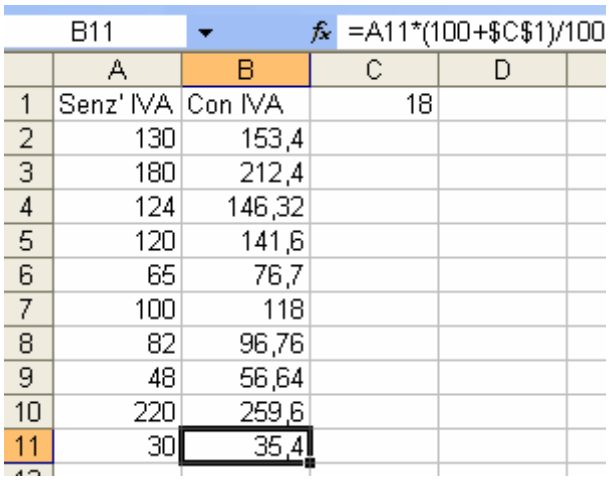
$$= A2*(100+\$C\$1)/100$$



Copiando ora la cella B2
e incollandola in B3, B4, …
A2 si muterà in A3, A4, …
ma al contrario C1 rimarrà fisso,
perché bloccato dal "lucchetto" del "dollaro".



E se ora cambiamo il contenuto di C1,
mettendo ad esempio 18 al posto di 20,
non appena confermiamo il 18,
ecco che il foglio elettronico ricalcola
immediatamente e correttamente tutti i valori.



	A	B	C	D
1	Senz' IVA	Con IVA	18	
2	130	153,4		
3	180	212,4		
4	124	146,32		
5	120	141,6		
6	65	76,7		
7	100	118		
8	82	96,76		
9	48	56,64		
10	220	259,6		
11	30	35,4		

Si può rendere assoluta
soltanto la colonna, o soltanto la riga:
ad esempio, l'indirizzo contenuto nella formula = $D3
ha la colonna assoluta e la riga relativa;
copiando la formula, e incollandola in un'altra cella,
la colonna resterà la D mentre la riga cambierà.
Invece nella formula = E$10
è assoluta la riga e relativa la colonna.

Per una conoscenza dettagliata del foglio elettronico rimandiamo ai relativi manuali specifici,
o all' "HELP" interno (= la Guida in Linea), attivabile cliccando su "?".
Qui ci limitiamo ad alcune osservazioni di carattere generale.

❑ I NUMERI CON LA VIRGOLA; IL MENU *FORMATO*

♥ **Un numero con la virgola va scritto, appunto, utilizzando la virgola e non il punto come separatore.**
Se infatti un numero viene scritto con un puntino al suo interno o alla fine,
viene interpretato dal programma come se indicasse un'*ora della giornata*.

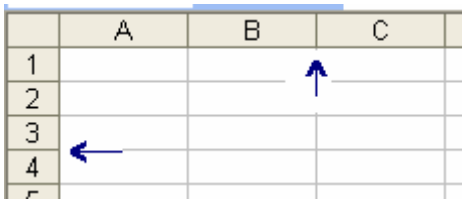
Se in una cella abbiamo per errore scritto un numero col puntino anziché con la virgola,
ce ne accorgeremo subito perché il foglio elettronico modificherà automaticamente l'aspetto del numero:
ad esempio, un 5.8 viene immediatamente mutato in 5.08 (ore 5 e minuti 8).

C'è poi un altro inconveniente, perché se in quella cella andremo poi a inserire altri numeri,
interi o con la virgola che siano, il foglio elettronico li modificherà, in quanto ormai si è "abituato"
a interpretare tutti i numeri che vengono immessi in quella cella come indicanti un tempo.
A questo inconveniente si può porre rimedio col menu Formato:
Formato/Celle/Numero e poi si sceglie l'opzione che interessa.

- **I numeri indicanti ore della giornata possono essere anche utilizzati in operazioni aritmetiche,**
e in questo caso il risultato dell'operazione è coerente con la loro interpretazione.
Ad es., 23.00+2.00=1.00
- Il menu Formato permette, fra le tantissime cose, di scegliere il **numero di cifre decimali**
alle quali vogliamo che il numero in una determinata cella sia arrotondato

❑ COME RESTRINGERE O ALLARGARE UNA COLONNA O UNA RIGA

Si può trascinare col mouse il margine esterno,
nelle posizioni di confine (vedi figura); **oppure**, il che è comodo
specialmente se la modifica riguarda tutto un gruppo di celle,
si può selezionare quel gruppo trascinando col mouse
e poi andare al menu Formato per scegliere, ad esempio,
Formato/Colonna/Larghezza

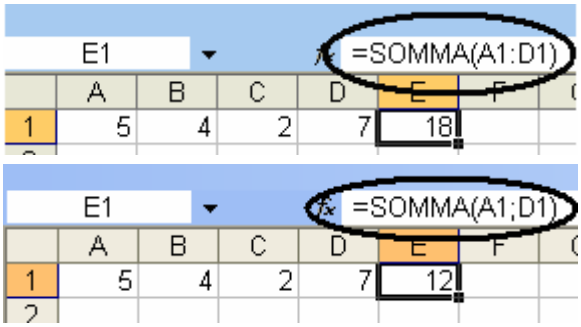


❑ SOMMA, MEDIA, ALTRE FUNZIONI "PREDEFINITE"

Per sommare i contenuti di più celle, e porre
la somma in E1, si può scrivere, per esempio (in E1)
= SOMMA(A1:D1) .

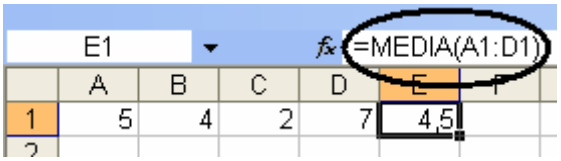
♥ Notare **i "due punti :"** i quali **indicano**
che si vuole tutta la striscia di celle fra A1 e D1.

Scrivendo invece col "punto e virgola ;"
= SOMMA(A1;D1)
verrebbero sommati i contenuti
soltanto delle celle elencate (le due celle A1 e D1).

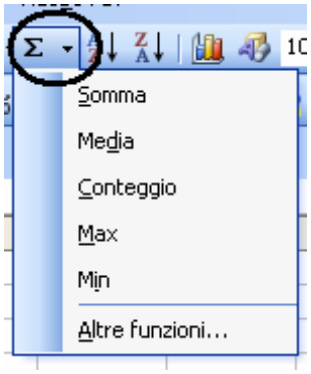


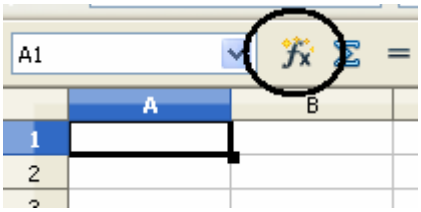
E se si scrivesse invece, ad esempio, = SOMMA(B5:E10) , verrebbero sommati
tutti i numeri del **rettangolo di celle** la cui diagonale ha per estremi B5, E10.

Il foglio elettronico è ricchissimo di **funzioni predefinite**.
Solo qualche esempio:
= MEDIA(A1:D1) per la media,
= DEV.ST.POP(A1:D1) per lo scarto quadratico medio
= MAX(A1:D1) per il massimo …



In Excel,
per cercare
le funzioni disponibili,
basta cliccare sull'icona
che porta il simbolo
di "sommatoria" ...

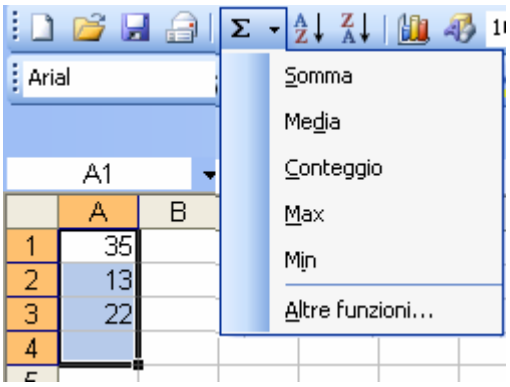




… mentre in Calc di OpenOffice
l'icona analoga è quella
evidenziata in figura.

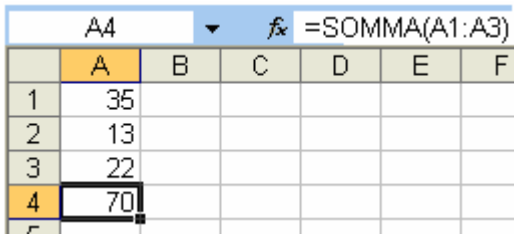
❑ SCORCIATOIE

Ci sono anche delle "**scorciatoie**".
Ad esempio, volendo sommare i contenuti delle celle da A1 ad A3 e porre il risultato in A4,
oltre che scrivere, in A4, la formula
= SOMMA (A1:A3)
o la
= SOMMA (A1; A2; A3)
si può, trascinando col mouse,
selezionare la fascia di celle da A1 ad A4;
poi cliccare su Somma …



… ed è fatta!

Allo stesso modo per le altre funzioni …
tanto per citarne una, la media.

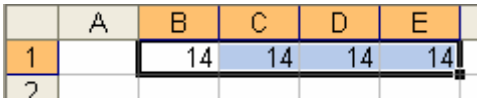


❑ IL QUADRATINO IN BASSO A DESTRA
DI UNA CELLA SELEZIONATA

Seleziona ora una cella qualsiasi e vedrai che il foglio elettronico la evidenzia con un bordo marcato che porta **in basso a destra** un **quadratino**

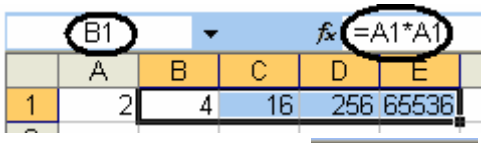


Bene, **trascinando quel quadratino** si può realizzare comodamente il **copia-incolla di quella cella su altre**.



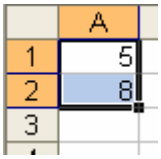
Nella prima delle due figure qui a fianco,
il contenuto della cella B1 era 14
ed è stato ricopiato tale e quale in C1, D1, E1.

Nella 2ª figura, la cella B1 conteneva la formula = A1*A1 :
l' "effetto domino" ha generato il risultato che puoi vedere.

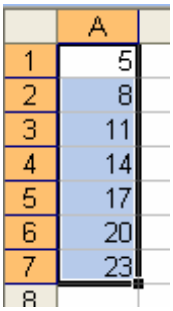


♥ Le "**progressioni aritmetiche**".

Ora scrivi, ad esempio,
5 in A1 e 8 in A2.
Seleziona poi
la coppia di celle A1, A2
e a questo punto …



… trascina verso il basso
il quadratino.
Il foglio elettronico
calcolerà la differenza
8 – 5 = 3
e proseguirà automaticamente
la sequenza:
5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ecc.!



❑ ORDINARE DATI

E' possibile, ed immediato. Se i dati sono disposti su celle incolonnate una sotto l'altra, basterà cliccare su

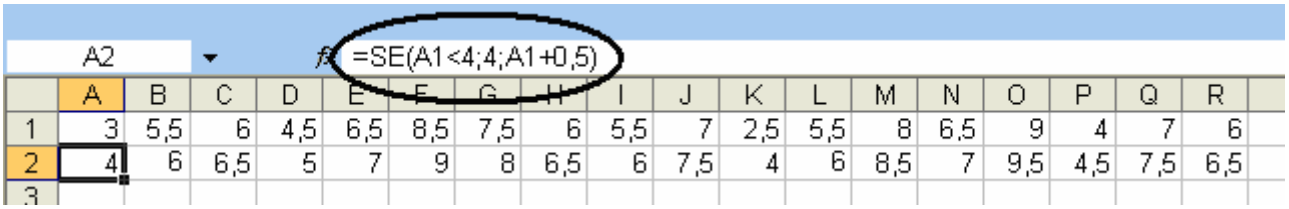


per ordinare le righe secondo l'ordine (alfabetico, o numerico) crescente, o decrescente.

❑ LE FUNZIONI LOGICHE

La funzione SE

Un insegnante, dopo l'ultima prova scritta dell'anno scolastico,
essendo soddisfatto per l'interesse e l'educazione che la classe ha sempre dimostrato,
decide di alzare al 4 tutti gli studenti con voto inferiore al 4, e di regalare mezzo punto a tutti gli altri.
Vediamo come potrebbe programmare il foglio elettronico nel quale ha archiviato i voti.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	3	5,5	6	4,5	6,5	8,5	7,5	6	5,5	7	2,5	5,5	8	6,5	9	4	7	6
2	4	6	6,5	5	7	9	8	6,5	6	7,5	4	6	8,5	7	9,5	4,5	7,5	6,5
3																		

La formula

$$= \mathrm{SE}(\mathrm{A1} < 4; 4; \mathrm{A1} + 0,5)$$

(che abbiamo scritto in A2 e incollato poi su B2, C2, … R2)
dà al foglio elettronico il comando seguente:

"se il contenuto di A1 è <4, allora in questa cella scrivi 4;
altrimenti, scrivi in questa cella il contenuto di A1 aumentato di 0,5"

La sintassi di una SE è dunque:

SE (*condizione*; *se_vera*; *se_falsa*)

C'è anche la possibilità di omettere *se_falsa* .

Puoi provarci, e vedere come si comporta in questo caso il foglio elettronico.

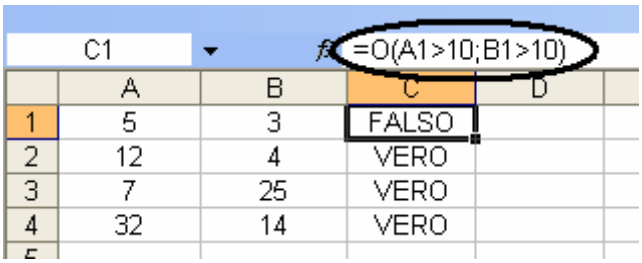
Ricorri comunque, per ogni dubbio, alla Guida in Linea che si attiva cliccando su 

E' possibile anche annidare più SE uno dentro l'altro.

Le funzioni E, O, NON

- ❑ E (*condizione*1; *condizione*2; ...) restituisce
  VERO se tutte le condizioni sono vere; FALSO se una o più di esse è falsa
- ❑ O (*condizione*1; *condizione*2; ...) restituisce
  VERO se almeno una delle condizioni è vera; FALSO se sono tutte false
- ❑ NON (*condizione*) restituisce VERO se *condizione* è falsa, FALSO se *condizione* è vera.

In questo esempio,
abbiamo scritto in C1 la formula
$= \mathrm{O}(\mathrm{A1} > 10; \mathrm{B1} > 10)$
che abbiamo poi copiato
e incollato su C2, C3, C4



	A	B	C	D
1	5	3	FALSO	
2	12	4	VERO	
3	7	25	VERO	
4	32	14	VERO	

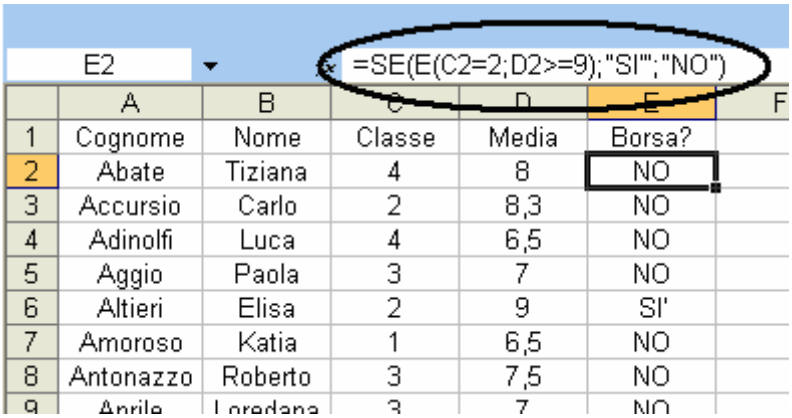
Ecco qui sotto un foglio elettronico che provvede a selezionare i ragazzi vincitori di una borsa di studio.

L'Istituto ha deciso di premiare gli studenti che al termine della classe Seconda
hanno avuto una pagella con media dei voti maggiore o uguale a 9.

Osserviamo per inciso che

- ♪ *le due stringhe SI' e NO desiderate vanno scritte, nella formula, tra virgolette*
- ♫ *le stringhe e i valori appaiono centrati rispetto alla colonna, perché si erano preventivamente selezionate le celle per poi cliccare su*





	A	B	C	D	E	F
1	Cognome	Nome	Classe	Media	Borsa?	
2	Abate	Tiziana	4	8	NO	
3	Accursio	Carlo	2	8,3	NO	
4	Adinolfi	Luca	4	6,5	NO	
5	Aggio	Paola	3	7	NO	
6	Altieri	Elisa	2	9	SI'	
7	Amoroso	Katia	1	6,5	NO	
8	Antonazzo	Roberto	3	7,5	NO	
9	Aprile	Loredana	3	7	NO	

❑ DIAGRAMMI E GRAFICI

Se abbiamo utilizzato un foglio elettronico per realizzare una tabella di dati, (come quella della figura qui a fianco, che si riferisce alle vendite settimanali di un emporio musicale), il foglio stesso ci offrirà la possibilità di tradurre quella tabella in un diagramma, con passaggi molto intuitivi.

	A	B	C	D	E
1		Classica	Leggera	Rock	Jazz
2	Martedì	7	24	40	3
3	Mercoledì	5	20	35	5
4	Giovedì	8	32	45	2
5	Venerdì	10	36	52	5
6	Sabato	15	44	60	7

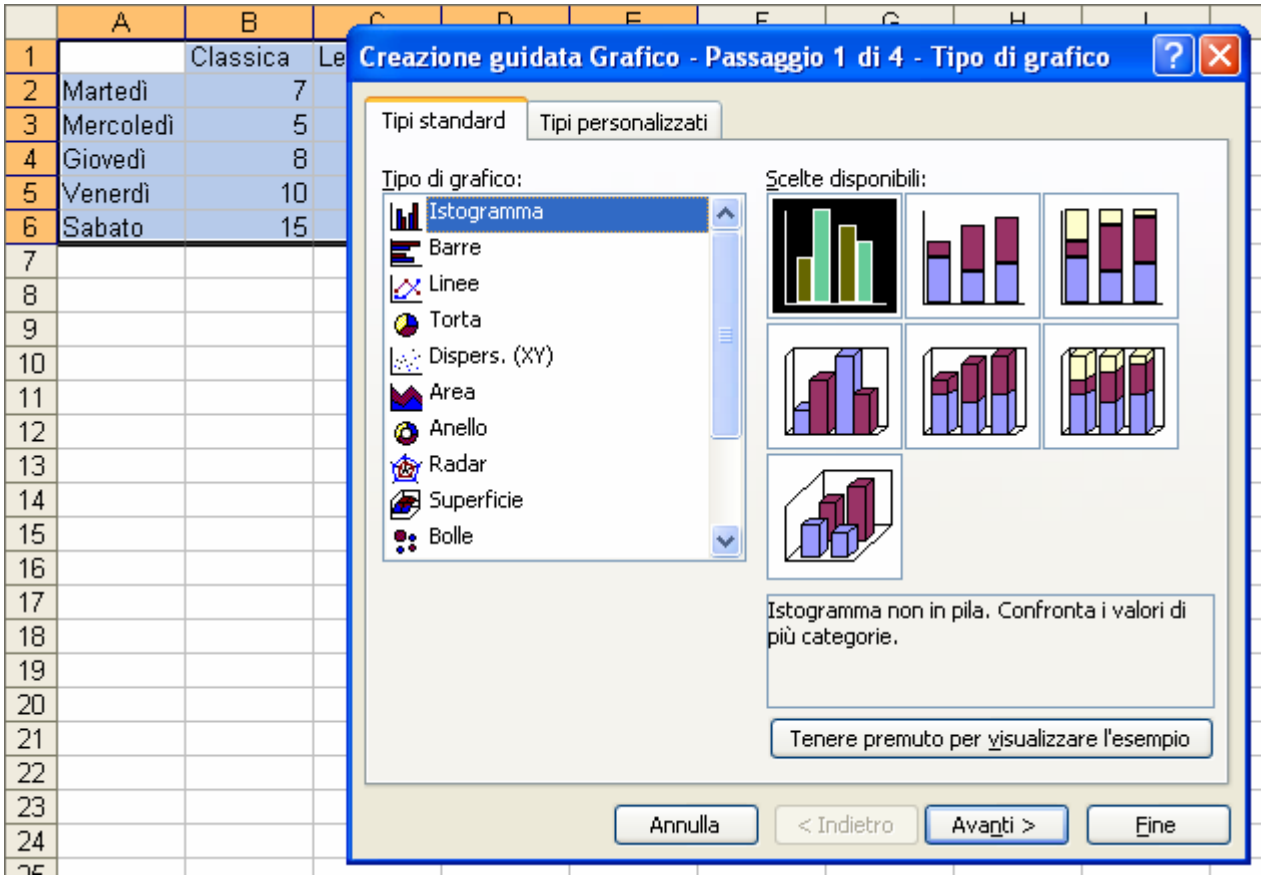
Selezioniamo, trascinando col mouse, la tabella, e clicchiamo sull'icona



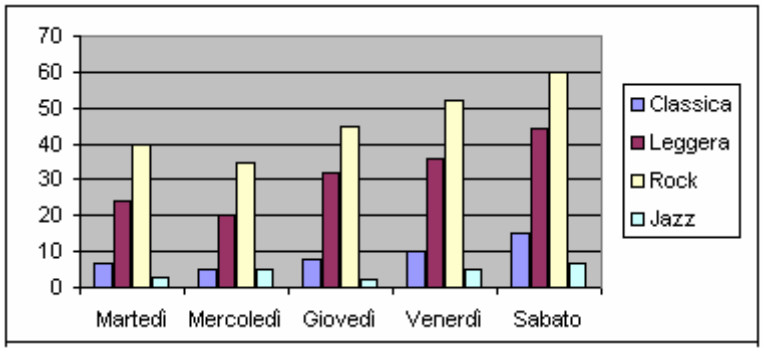
(se non compare, apriamo il menu Inserisci)

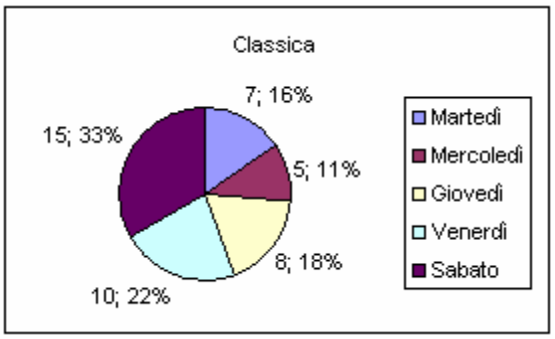
	A	B	C	D	E
1		Classica	Leggera	Rock	Jazz
2	Martedì	7	24	40	3
3	Mercoledì	5	20	35	5
4	Giovedì	8	32	45	2
5	Venerdì	10	36	52	5
6	Sabato	15	44	60	7

Ci troveremo di fronte una finestra tipo la seguente



a partire dalla quale, a colpi di clic, potremo scegliere il tipo di grafico, decidere se includervi valori o percentuali, e completare il diagramma, **controllando passo dopo passo se quello che "esce" è coerente coi nostri desideri**. La pratica diretta ci permetterà di imparare la terminologia e le tante opzioni disponibili.





- CONTA.SE

  La formula = CONTA.SE(A1:A20; "<100") , digitata in una cella,
  restituisce il numero delle celle, nella fascia da A1 ad A20, il cui contenuto è <100.
  Notare le virgolette nella sintassi.

  Purtroppo la formula "impazzisce" se tentiamo di inserire una condizione *composta*, tramite una E o una O.

  Ma allora, come si potrà procedere, se ad esempio si vogliono contare le celle, nel rettangolo A1:G8,
  il cui contenuto è compreso fra 15 e 30 (>15 e <30)?
  Beh, si ricorrerà ad un "trucco", scrivendo

  = CONTA.SE(A1:G8; ">15")– CONTA.SE(A1:G8; ">=30")

  Nell'esempio dato, gli estremi 15 e 30 dell'intervallo avrebbero potuto anche
  essere inseriti in due apposite celle, poniamo ad esempio A11 e A12.
  Allora la formula avrebbe dovuto essere riscritta come

  = CONTA.SE(A1:G8; ">"&A11)– CONTA.SE(A1:G8; ">="&A12)

- NUMERI CASUALI, O MEGLIO: PSEUDOCASUALI

  Possiamo pure ordinare a un foglio elettronico di generare numeri *casuali*, o meglio "*pseudo*casuali":
  essi infatti hanno l'*apparenza* della casualità, ma in realtà non sono realmente casuali in quanto
  sono costruiti tramite un algoritmo a partire da un valore iniziale, detto "seme", quello *sì* – ma *solo quello* –
  da ritenersi casuale (si tratta, di norma, del numero di secondi trascorsi da una certa data del passato).

  Digitando in una cella

  = CASUALE() [notare la coppia di parentesi senza niente all'interno!]

  si genera, in quella cella, un numero casuale con la virgola *x* che può andare da 0 (incluso) a 1 (escluso):

  $0 \le x < 1$

  Questo numero cambierà ogniqualvolta nel foglio elettronico un dato verrà inserito, o cancellato
  (o anche semplicemente se si preme, posizionati in una cella vuota, il tasto CANC;
  oppure ancora, premendo il tasto-funzione F9 in alto sulla tastiera); come pure, ad ogni riapertura del file.

  - E se volessimo un numero casuale fra 0 (compreso) e 6 (escluso)? Beh, ci basterebbe scrivere
    = CASUALE()*6
  - E fra 1 (compreso) e 15 (escluso)?
    = CASUALE()*14+1
  - E se volessimo simulare il lancio di un dado, quindi ci servisse un numero INTERO casuale fra 1 e 6?
    In questo caso potremmo ricorrere a una combinazione fra la funzione CASUALE e la funzione INT.

    INT tronca un numero all'intero più vicino per difetto, quindi, ad esempio, INT(3,8) = 3

    Allora la formula
    = INT(CASUALE()*6+1)
    ci fornirà per l'appunto un intero che potrà valere, con ugual probabilità, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
    Infatti, = CASUALE()*6 genera un numero con la virgola che può andare da 0 (compreso) a 6 (escluso);
    aggiungendo 1 si ottiene un numero con la virgola che può andare da 1 (compreso) a 7 (escluso);
    dopodiché la funzione INT, troncando il numero ottenuto, lo fa diventare un intero compreso fra 1 e 6.
  - Analogamente, il lancio di una moneta potrà essere simulato da
    = INT(CASUALE()*2)
    Il risultato dell'applicazione della formula potrà essere il numero 0, oppure il numero 1:
    bene, "0" potrà essere interpretato come "Testa" e "1" come "Croce", o viceversa.

ESERCIZI sul foglio elettronico

1) *Gli anni di nascita delle persone residenti in un paesino di montagna decedute nell'anno 2009.*

   Programma il foglio elettronico in modo che calcoli l'età (approssimativa) in cui sono morte e la media delle età raggiunte.

   In pratica:
   l'utente inserisce i dati nella colonna A;
   il foglio elettronico
   riempie automaticamente
   la colonna B, compresa la cella B12.

	A	B
1	Anno nascita	Età morte
2	1911	98
3	1920	
4	1919	
5	1922	
6	1923	
7	1915	
8	1944	
9	1930	
10	1928	
11	1920	
12		85,8

2) In C1 il commerciante inserisce la *percentuale di sconto* da concedere, e in colonna A i *prezzi da scontare*. Occhio alla questione degli *indirizzi relativi e assoluti*!

	A	B	C
1	Prezzo	Scontato	20
2	100	80	
3	200	160	
4	140	112	
5	158	126,4	

3) Ogni studente ha avuto 5 voti. Il foglio elettronico deve calcolare la *media*, e pure individuare la *differenza fra il voto massimo e il voto minimo* (funzioni *MEDIA*, *MIN*, *MAX*, delle quali puoi cercare le caratteristiche cliccando su un'icona come Σ o f_x)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1							Media	Diff
2	Amato	6	7	6,5	8	7	6,9	2
3	Baldi	6	4	6	7	5	5,6	3
4	Carli	6,5	8	6,5	8	7	7,2	1,5

4) Imposta il foglio elettronico in modo che l'utente possa inserire i valori in A2, B2, … , F2 e il foglio calcoli automaticamente le *somme parziali, giorno per giorno*.

	A	B	C	D	E	F
1	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	Sab
2	125	232	167	283	352	420
3	125	357	524	807	1159	1579

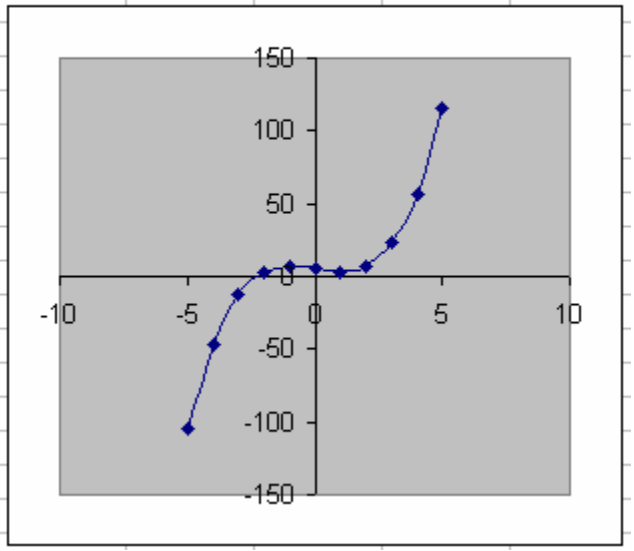
5) a) Calcolo delle potenze successive di 2, scrivendo *una sola formula* da sottoporre poi al copia-incolla:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

b) Utilizza poi il foglio così impostato per verificare che la somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+...$ si avvicina, come valore, a 1, quanto più è alto il numero degli addendi che si prendono.

6) Calcolo del *valore di un polinomio di 3° grado*, per vari valori di *x*. *Grafico*. [Indirizzi relativi e assoluti].

	A	B	C	D
1	VALORE DI UN POLINOMIO DI 3° GRADO ax^3+bx^2+cx+d			
2				
3	**a**	**b**	**c**	**d**
4	1	0	-3	5
5				
6	**x**	**val. pol.**		
7	-5	-105		
8	-4	-47		
9	-3	-13		
10	-2	3		
11	-1	7		
12	0	5		
13	1	3		
14	2	7		
15	3	23		
16	4	57		
17	5	115		



7) E' bellissima ♥ la *formula (di Leibniz)*:
$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-...=\frac{\pi}{4}$.
Essa significa che, con la somma algebrica di tantissimi addendi come quelli a 1° membro, ci avvicineremo a *pi*/4.

Sapresti programmare il foglio elettronico in modo che fornisca una approssimazione di *pi*?

♪ Il simbolo *pi* è sovente utilizzato al posto della lettera greca π per indicare il numero 3,14159265358979 … che interviene nello studio della circonferenza e del cerchio.

♫ Nel foglio elettronico la funzione che restituisce *pi* (o meglio, una sua approssimazione) è PI.GRECO()

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	
2	3	0,333333333	-1	-0,333333333	
3	5	0,2	1	0,2	
4	7	0,142857143	-1	-0,142857143	
5	9	0,111111111	1	0,111111111	
6	11	0,090909091	-1	-0,090909091	
7	13	0,076923077	1	0,076923077	
8	15	0,066666667	-1	-0,066666667	
9	17	0,058823529	1	0,058823529	
10	19	0,052631579	-1	-0,052631579	
11	21	0,047619048	1	0,047619048	
12	23	0,043478261	-1	-0,043478261	
13	25	0,04	1	0,04	
14	27	0,037037037	-1	-0,037037037	
15	29	0,034482759	1	0,034482759	
16	31	0,032258065	-1	-0,032258065	
17				0,769788349	3,079153394
18				pi/4	pi

8) Questo esercizio è finalizzato a prender confidenza con gli indirizzi "misti", metà relativi e metà assoluti.
Come riempire la *tabella di moltiplicazione* sottostante inserendo UNA SOLA FORMULA
della quale si farà poi il copia-incolla?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	
2	**1**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
3	**2**	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	
4	**3**	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	
5	**4**	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	
6	**5**	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	
7	**6**	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	
8	**7**	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	
9	**8**	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	
10	**9**	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	
11	**10**	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	
12	**11**	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	
13	**12**	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	
14	**13**	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	
15	**14**	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	
16	**15**	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	
17																	

9) Hai un fratellino o una sorellina che fa le elementari e sta imparando le *tabelline*? No? Uhm … fa lo stesso.
Programma il foglio elettronico in modo che in prima e seconda colonna
l'istruttore possa inserire coppie di numeri da lui scelti fra 1 e 10,
in terza colonna il bambino scriva quello che ritiene essere il risultato della loro moltiplicazione,
e in quarta colonna esca OK o NO a seconda dei casi. Prevedi:

- 10 operazioni,
- conteggio automatico delle risposte esatte,
- un complimento al bambino se raggiunge o supera il punteggio minimo posto in F1.

NOTA - *Si può anche rendere casuale la comparsa dei numeri nelle colonne A e B.*
L'unico inconveniente è che quando il bambino risponde … Provaci!

	A	B	C	D	E	F
1			Risultato della "PER"?			7
2	9	10	90	OK		punt. min.
3	3	5	15	OK		
4	7	8	46	NO		
5	4	2	8	OK		
6	3	1	3	OK		
7	2	7	14	OK		
8	4	8	32	OK		
9	5	9	45	OK		
10	5	3	15	OK		
11	6	2	12	OK		
12				9	numero risposte esatte	
13				Bravissimo!		

10) Le celle del rettangolo da A1 ad H8
vengono riempite
con *numeri con la virgola casuali*
da 0 fino a 1 escluso;
si calcola poi
la media di questi 64 numeri.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0,9016	0,3271	0,3338	0,5098	0,904	0,7361	0,8273	0,8084
2	0,0538	0,9334	0,3281	0,0716	0,8896	0,5204	0,5912	0,2331
3	0,1484	0,7137	0,7485	0,2121	0,0551	0,6182	0,7443	0,056
4	0,3504	0,8705	0,6363	0,8288	0,4879	0,5767	0,0072	0,1711
5	0,8931	0,4227	0,439	0,7296	0,4546	0,8107	0,1633	0,1225
6	0,3052	0,7595	0,1972	0,5094	0,2173	0,6209	0,6785	0,2472
7	0,0696	0,9051	0,4714	0,772	0,0169	0,3088	0,0934	0,7147
8	0,1328	0,4445	0,9574	0,0248	0,887	0,8116	0,4552	0,8249
9	**0,4946**	media						

7. ESERCIZI sulle rappresentazioni grafiche

(risposte a pag. 422)

1) La popolazione mondiale, in milioni di abitanti, nel 2009 (dal sito www.statistiques-mondiales.com).

Africa	996
America	923
Asia	4228
Europa	588
Oceania	35
Totale	6776

   a) Stabilisci, senza accendere il computer, di quanti gradi dovrebbe essere ciascun settore circolare in un diagramma a torta.
   b) Diagramma a torta, prima "a mano" sul quaderno poi con un foglio elettronico

2) Percentuale approssimata, in peso, degli elementi chimici sulla crosta terrestre (dati presi da http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu e provenienti da *Lutgens and Tarbuck, Essentials of Geology*)

Element	*Approximate % by weight*
Oxygen	46,6
Silicon	27,7
Aluminum	8,1
Iron	5,0
Calcium	3,6
Sodium	2,8
Potassium	2,6
Magnesium	2,1
All others	1,5

   a) Determina l'angolo al centro corrispondente a ciascun settore
   b) poi traccia sul tuo quaderno il diagramma a torta
   c) e infine costruisci lo stesso diagramma con un foglio elettronico, stampa, appiccicalo accanto al tuo.

3) Lo stesso sito http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu riporta anche la seguente tabella, tratta da *Biology, Life on Earth* di Teresa e Gerald Audesirk:

Element	*Symbol*	*Atomic Number*	*Percent in Universe*	*Percent in Earth*	*Percent in Human Body*
Hydrogen	H	1	91	0,14	9,5
Helium	He	2	9	Trace	Trace
Carbon	C	6	0,02	0,03	18,5
Nitrogen	N	7	0,04	Trace	3,3
Oxygen	O	8	0,06	47	65
Sodium	Na	11	Trace	2,8	0,2
Magnesium	Mg	12	Trace	2,1	0,1
Phosphorus	P	15	Trace	0,07	1
Sulfur	S	16	Trace	0,03	0,3
Chlorine	Cl	17	Trace	0,01	0,2
Potassium	K	19	Trace	2,6	0,4
Calcium	Ca	20	Trace	3,6	1,5
Iron	Fe	26	Trace	5	Trace

   Utilizza l'ultima colonna per tracciare un diagramma a torta sulla composizione chimica del corpo umano.

4) Dati da US Geological - I maggiori produttori d'oro nel 2007:

Nazione	*Tonnellate*
Australia	280
Sud Africa	270
Cina	250
Stati Uniti	240
Peru	170
Russia	160
Indonesia	120
Canada	100

   Istogramma (=diagramma a barre verticali), prima sul quaderno e poi al computer con un foglio elettronico.

5) Da http://nineplanets.org, alcuni dati sui pianeti del sistema solare.

Planet	Distance from Sun (1000 km)	Radius (Km)	Mass (Kg)	Discoverer-Date
Mercury	57.910	2 439	3,30e23 (NOTA)	
Venus	108.200	6 052	4,87e24	
Earth	149.600	6 378	5,98e24	
Mars	227.940	3 397	6,42e23	
Jupiter	778.330	71 492	1,90e27	
Saturn	1.426.940	60 268	5,69e26	
Uranus	2.870.990	25 559	8,69e25	Herschel - 1781
Neptune	4.497.070	24 764	1,02e26	Galle - 1846
Pluto	5.913.520	1 160	1,31e22	Tombaugh - 1930

Realizza un diagramma a barre orizzontali, con un foglio elettronico, per la colonna del raggio.
NOTA: 3,30e23 significa (notazione esponenziale): $3{,}30 \cdot 10^{23}$

6) Mortalità infantile in Italia:
numero morti nel primo anno di vita per ogni 1000 nati vivi.

Traccia la "serie storica".

1865	30,3
1905	27,3
1935	21,6
1965	16,6
1985	13,9
2002	4,1

7) Una volante della polizia si apposta per rilevare la velocità delle macchine che transitano.
Gli esiti di una serie di 60 controlli sono i seguenti (in Km/h):

57	61	52	48	68	48	55	56	72	49	50	55
54	61	58	63	64	61	47	52	53	59	48	54
56	60	51	51	50	78	67	61	58	55	59	53
62	54	49	45	56	60	51	52	60	54	55	51
48	57	56	55	58	53	59	70	74	64	81	52

Suddividi i dati in classi di frequenza, traccia l'istogramma.

8) I punteggi
a) base b) dell'esame scritto c) dell'esame orale
alla prova finale, per una classe di 18 candidati, sono stati i seguenti.
Con un foglio elettronico, costruisci la rappresentazione più opportuna.

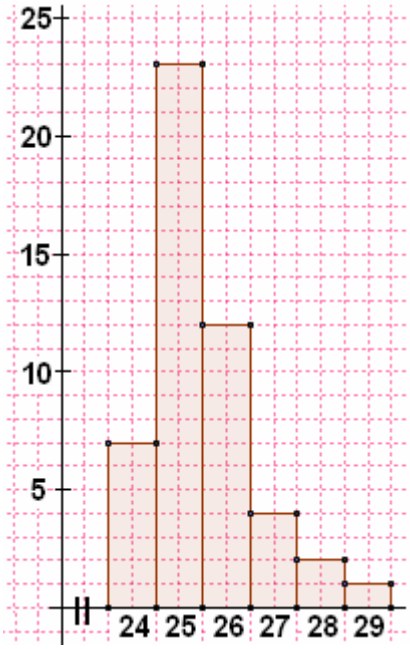
a)	15	18	24	25	21	17	19	16	20	21	23	20	16	18	18	22	25	24
b)	29	32	33	32	30	29	28	28	34	39	42	37	32	32	33	35	45	43
c)	20	22	24	30	22	24	27	19	25	24	24	20	18	19	21	25	30	30

9) Un gruppo di ingegneri ha dichiarato
di aver conseguito la laurea specialistica
alle età che sono indicate dall'istogramma qui a fianco.

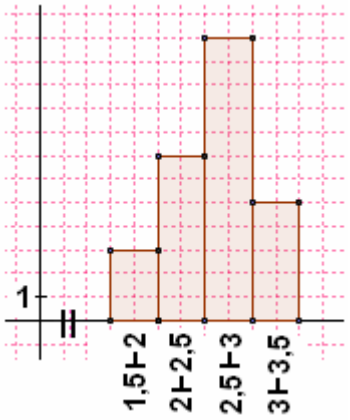
a) Quante persone sono state intervistate?

b) Quali sono la frequenza assoluta, relativa e percentuale di coloro che si sono laureati non prima dei 27 anni?

c) Qual è, sul totale, la percentuale di ingegneri che si è laureata prima dei 26 anni?



10) Un insegnante di Educazione Fisica fa effettuare le prove preliminari ai suoi giovani allievi, e registra nell'istogramma qui riportato le misure raggiunte nel salto in lungo.



Si domanda la frequenza
- assoluta
- relativa (arrotondata ai centesimi)
- e percentuale (arrotondata alle unità)

di coloro che hanno saltato almeno 3 metri.

La regola per arrotondare è richiamata alla pag. 66 di questo volume.

11) Rappresenta graficamente in modo adeguato alcuni degli esiti 1) … 15) del "questionario del curiosone" di pag. 8

12) La tabella qui a fianco riporta:
in 2ª colonna, i nati in totale (valore medio annuo in migliaia);
in 3ª colonna, i nati per 1000 abitanti
(i dati provengono da www.istitutodeglinnocenti.it).

1861-70	947	37,6
1891-900	1099	35,0
1911-20	972	27,2
1931-40	1008	23,6
1951-60	872	17,9
1961-70	953	18,3
1971-80	791	14,2
1981-85	600	10,6
2005	554	9,5

a) Con un foglio elettronico, traccia la serie storica
b) Quante nascite in totale si sono avute, pressappoco, in Italia, nell'arco di tempo dal 1931 al 1940?
c) Come si concilia il fatto che nella seconda colonna la differenza relativa dei dati non sia forte mentre in terza colonna decisamente sì?

13) 4 associazioni A, B, C, D di appassionati hanno contribuito a una mostra di minerali rispettivamente con 45, 72, 18 e 29 pezzi. Traccia sul quaderno, e trova poi il modo di realizzare pure con un foglio elettronico, un diagramma formato da un'unica striscia orizzontale ⊢⊣⊢⊣, che visualizzi la ripartizione.

14) Da ISTAT, "Italia in cifre":

DISTRIBUZIONE DELLA POPOLAZIONE DI 6 ANNI E PIÙ PER TITOLO DI STUDIO Censimenti 1951-2001, composizioni percentuali

	Laureati	Diplomati	Con licenza media	Con licenza elementare	Alfabeti privi di titoli di studio	Analfabeti
1951	1,0	3,3	5,9	30,6	46,3	12,9
1961	1,3	4,3	9,6	42,3	34,2	8,3
1971	1,8	6,9	14,7	44,3	27,1	5,2
1981	2,8	11,5	23,8	40,6	18,2	3,1
1991	4,2	18,2	30,7	32,6	12,2	2,1
2001	7,1	26,2	30,1	25,4	9,7	1,5

Con un foglio elettronico, traccia diversi tipi di diagramma per illustrare le situazioni e confrontarle fra loro. Esempi:

a) un diagramma a barre verticali che presenti il livello di istruzione nel 2001
b) un diagramma a barre orizzontali che faccia vedere le percentuali dei diplomati nei vari anni
c) un diagramma a torta che evidenzi il livello di istruzione nel 1951
d) un diagramma cartesiano (serie storica) che mostri, in simultanea, l'evoluzione negli anni del numero di laureati e di analfabeti

15) Richieste analoghe a quelle dell'esercizio precedente per la tabella che segue (dati ISTAT).

MEZZI DI TRASPORTO UTILIZZATI PER ANDARE AL LAVORO
Anni 1997-2008, per 100 occupati di 15 anni e più che escono di casa per andare al lavoro

	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2008
Treno	2,1	2,4	2,6	2,3	2,6	2,9	2,9
Tram, bus	4,9	5,5	5,0	5,0	5,0	5,5	4,9
Metropolitana	1,8	1,9	1,8	2,2	2,2	2,5	2,5
Pullman	2,0	2,4	1,9	2,1	3,0	3,2	2,9
Automobile	72,0	72,0	75,0	75,2	76,8	74,4	75,7
Moto, ciclomotore	4,0	4,7	4,3	5,0	4,2	4,4	4,6
Bicicletta	2,6	3,6	2,7	3,0	2,9	3,2	3,1
A piedi	13,6	11,8	11,6	10,9	11,1	11,2	11,1

16) Nelle due filiali che una banca ha recentemente aperto in una cittadina, l'ispettore inviato dalla direzione centrale organizza un sondaggio sul grado di soddisfazione dei clienti riguardo ai vari servizi.
Viene raccolto il parere di 47 persone nella prima filiale e di 35 nella seconda.

Filiale A	Poco soddisfatto	Sufficientemente soddisfatto	Molto soddisfatto
Cortesia ed efficienza degli impiegati	2	31	14
Qualità della consulenza finanziaria	9	34	4
Tempi di attesa allo sportello	2	23	22

Filiale B	Poco soddisfatto	Sufficientemente soddisfatto	Molto soddisfatto
Cortesia ed efficienza degli impiegati	5	28	2
Qualità della consulenza finanziaria	8	23	4
Tempi di attesa allo sportello	5	27	3

Quale rappresentazione grafica ti sembra più adeguata a illustrare visivamente la situazione ai fini di un'analisi e di un confronto? Realizzala al computer con un foglio elettronico.

17) Considera la tabella sottostante (ISTAT , "Italia in cifre", anno 2007) e traduci un suo aspetto a tua scelta (ad esempio, potresti prendere i totali per settore sull'intera Italia …)
in un ideogramma basato sull'icona qui a fianco
(puoi scegliere se restringere/allargare l'icona, oppure in alternativa riportarla più volte).



OCCUPATI PER POSIZIONE PROFESSIONALE, SETTORE DI ATTIVITÀ E AREA GEOGRAFICA
Anno 2008, migliaia di persone

	Nord	Centro	Mezzogiorno	Italia
AGRICOLTURA				
Dipendenti	114	49	263	425
Indipendenti	232	67	172	470
Totale	**346**	**115**	**434**	**895**
INDUSTRIA				
Dipendenti	3.340	984	1.175	5.499
Indipendenti	818	309	329	1.456
Totale	**4.157**	**1.293**	**1.504**	**6.955**
SERVIZI				
Dipendenti	5.627	2.568	3.326	11.522
Indipendenti	1.936	880	1.217	4.033
Totale	**7.563**	**3.448**	**4.543**	**15.555**
TOTALE GENERALE				
Dipendenti	9.081	3.601	4.764	17.446
Indipendenti	2.985	1.256	1.718	5.959
Totale	**12.066**	**4.857**	**6.482**	**23.405**

18) I seguenti dati provengono dalla WAN, World Association of Newspapers:
numero di copie di quotidiani diffuse giornalmente ogni 1000 abitanti nell'anno 2002.

a) Vuoi scegliere 5 o 6 nazioni nel lungo elenco e tracciare un diagramma a barre?

b) E che ne diresti di un ideogramma a icona singola (rimpicciolita o ingrandita)?
O di un ideogramma con icone ripetute (doppio numero di icone = doppia diffusione del quotidiano)?

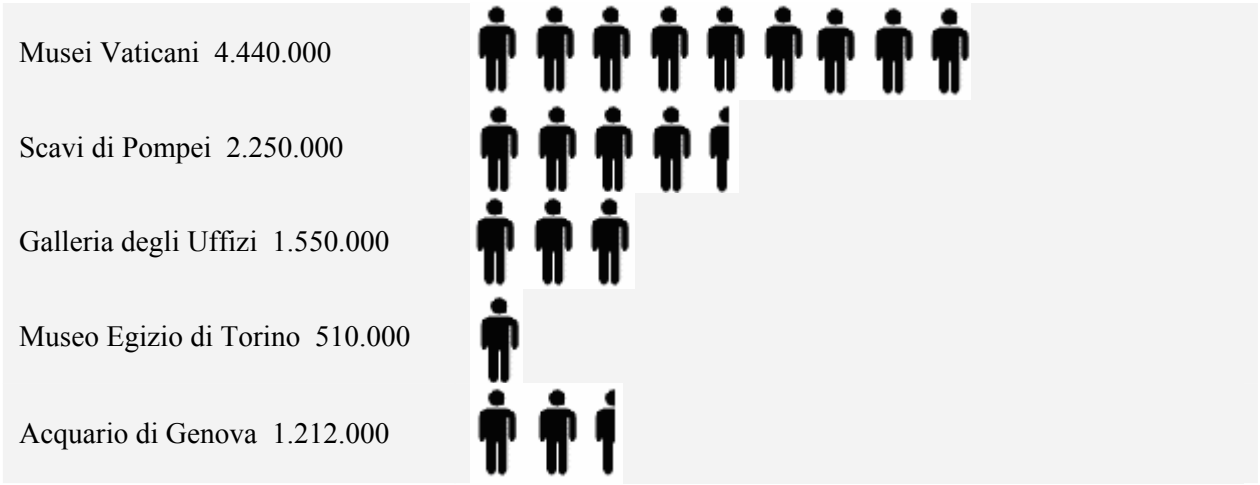
1. Norvegia	705	14. Usa	274	27. Francia	181	40. Cipro	94
2. Giappone	664	15. Nuova Zelanda	259	28. Belgio	175	41. Polonia	92
3. Finlandia	544	16. Estonia	234	29. Russia	146	42. Portogallo	91
4. Svezia	543	17. Thailandia	234	30. Turchia	131	43. Grecia	81
5. Svizzera	444	18. Irlanda	233	31. Cina	130	44. Brasile	64
6. Islanda	393	19. Slovenia	214	32. Croazia	128	45. Argentina	56
7. Regno Unito	383	20. Malesia	209	33. Italia	128	46. India	48
8. Germania	371	21. Rep. Ceca	206	34. Spagna	120	47. Sud Africa	40
9. Danimarca	371	22. Bulgaria	203	35. Costarica	120	48. Sri Lanka	35
10. Austria	363	23. Australia	202	36. Rep. Slovacca	117	49. Indonesia	31
11. Olanda	363	24. Ungheria	199	37. Ucraina	105	50. Kenya	14
12. Lussemburgo	339	25. Canada	189	38. Filippine	99		
13. Singapore	331	26. Lettonia	184	39. Libano	96		

19) La più recente serata del sabato sera (intervista-flash ai ragazzi in uscita da una scuola superiore).

Discoteca	*Birreria*	*Cinema*	*Casa di amici*	*Altro*
43	98	26	57	75

Rappresenta gli esiti del sondaggio
a) con un diagramma a barre
b) con un ideogramma a figure ripetute (magari utilizzando come icona l'omino dell'esercizio 17)
c) con un diagramma costituito da un'unica striscia orizzontale ⊢—+—⊣

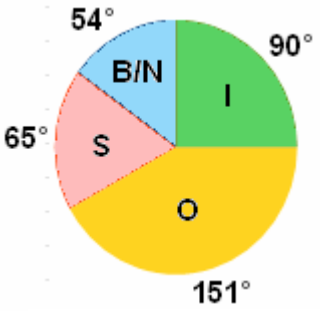
20) La seguente rappresentazione per ideogrammi è relativa al numero (approssimativo) di visitatori totali di alcuni musei italiani, nell'anno 2008 (dati dal sito del Touring Club).



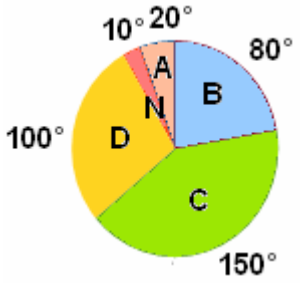
Guardando solo l'ideogramma e non i numeri, stabilisci quale è stata all'incirca la percentuale delle visite all'Acquario di Genova, rispetto alla Galleria degli Uffizi.

21) Determina le percentuali approssimative di voti totalizzate dai tre partiti →
- *Insieme per il buon governo* (angolo di 90°)
- *Onestà e competenza* (approssimativamente 151°)
- *Siamo con voi* (all'incirca 65°)

(ci sono state anche molte schede *Bianche o Nulle* in questa votazione)



22) Se in totale i ragazzi della scuola sono 324, e il diagramma qui a fianco ne riporta la ripartizione fra coloro che, promossi, hanno avuto quest'anno in pagella finale la media dei voti compresa fra 6 e 7 (escluso), fra 7 e 8 (escluso), fra 8 e 9 (escluso), non inferiore a 9, oppure non sono stati ammessi alla classe successiva, determinare il numero dei ripetenti e degli eccellenti.



N: Non ammessi
D: $6 \le m < 7$
C: $7 \le m < 8$
B: $8 \le m < 9$
A: $m \ge 9$

23) Un *bed and breakfast* di una località montana ha suddiviso la sua attività in tre periodi: da marzo a giugno; luglio+agosto; da settembre a novembre.
Per l'anno passato, sono andati persi i dati di ciascun giorno ma rimangono i dati complessivi dei 3 periodi: 598 ospiti da marzo a giugno; 895 in luglio+agosto; 327 da settembre a novembre.
Costruisci un istogramma che illustri la situazione, con
- tre intervalli in ascissa proporzionali alle rispettive durate
- *aree* dei rettangoli proporzionali al numero di persone ospitate.

24) Un'azienda, in occasione del ventennale della sua fondazione, stila un quadro del numero di dipendenti ripartendoli per anzianità di servizio. Vengono distinte 3 categorie:

fino a 2 anni	25
più di 2 e fino a 5	45
più di 5 e fino a 20	48

Disegna un istogramma, nel quale siano le *aree* a rappresentare il numero di dipendenti in una determinata fascia di anzianità.

25) Illustra la relazione esistente nella tua classe fra numero di scarpe e altezza in centimetri compilando, tramite un foglio elettronico, una *tabella a doppia entrata* che porti, per i vari numeri di scarpe e opportune fasce di altezze, la frequenza, nella tua classe, di quel doppio dato.

26) Nel 2010, secondo il CDIAC, Carbon Dioxide Information Analysis Center (http://cdiac.ornl.gov/), il tristissimo primato **dell'emissione di anidride carbonica nell'aria** spettava ai 10 paesi seguenti, per i quali viene specificato anche il numero di tonnellate che si stima abbiano diffuso in quell'anno:

Cina	USA	India	Russia	Giappone	Germania	Iran	Corea	Canada	Arabia
8240958	5492170	2069738	1688688	1138432	762543	574667	563126	518475	493726

Poiché questi dati non comprendono gli altri paesi del mondo, che pure contribuiscono all'inquinamento globale, qui un diagramma a barre è preferibile rispetto a un diagramma a torta. Realizzalo al computer.

… Una delle cose che possiamo fare, per combattere
contro questa folle corsa del mondo all'autodistruzione,
è abituarci al pensiero che
una vita semplice, con una forte autoriduzione dei consumi,
è la sola compatibile con la finitezza delle risorse della Terra,
ed è anche di gran lunga più degna e gioiosa.

MDF PIL
MOVIMENTO PER LA DECRESCITA FELICE
http://decrescitafelice.it/

27) La causa primaria della deforestazione dell'Amazzonia sta nell'abbattimento di vasti tratti di foresta che viene rimpiazzata con coltivazioni destinate al nutrimento degli animali fornitori di **carne**.

CAUSA DI DEFORESTAZIONE	PERCENTUALE
Allevamento di animali e coltivazioni relative	**60-70%**
Agricoltura di sussistenza e su piccola scala	30-40%
Agricoltura commerciale su vasta scala	1-2%
Taglio di alberi per legname, legale e illegale	1-2%
Incendi, miniere, strade, dighe, urbanizzazione	2-4%

La tabella qui a fianco è tratta da Mongabay.com, Rhett A. Butler - San Francisco, CA., 2000-2007

Si stima che nel 1977, pur essendo già iniziata l'opera di decimazione, rimanessero circa 3 955 870 km^2 di foresta in Amazzonia. La tabella indica i km^2 approssimativamente persi negli anni successivi.

1978-1987	21130	1992	13786	1997	13227	2002	21394
1988	21050	1993	14896	1998	17383	2003	25247
1989	17770	1994	14896	1999	17259	2004	27423
1990	13730	1995	29059	2000	18226	2005	18846
1991	11030	1996	18161	2001	18165	2006	14109

Con un foglio elettronico, traccia:
- □ un diagramma a torta per le cause della deforestazione amazzonica;
- □ una serie storica che rappresenti l'estensione della foresta nel periodo 1977-2006.

Il problema delle risorse che vanno in fumo a causa degli allevamenti intensivi è ENORME.

Se le immense estensioni di terreno utilizzate per dar da mangiare agli "animali da carne"
fossero convertite in coltivazioni di ottima verdura o cereali da destinare all'alimentazione umana,
TANTI PROBLEMI DI DEFORESTAZIONE E DEGRADO AMBIENTALE SAREBBERO RISOLTI:
basti pensare che un ettaro coltivato a patate o a riso è in grado di provvedere al nutrimento annuo rispettivamente di 22 e 19 persone, mentre quando lo stesso ettaro è destinato alla produzione di vegetali per l'ingrasso dei manzi, la carne che se ne ricava può bastare per UNA SOLA persona.

Leggi a proposito questo interessantissimo articolo, che analizza tutti gli aspetti della questione: ⇨

E ancor prima … ma che diritto ha la arrogante e presuntuosa razza umana,
di sfruttare senza pietà, imprigionare, umiliare e trattare alla stregua di oggetti
degli esseri senzienti capaci di provare dolore e terrore e impossibilitati a difendersi???



Una dieta vegana o pesco-vegana (*)
oltretutto è IDEALE PER LA SALUTE!
Vedi ad esempio il riquadro qui a sinistra.

(*) La dieta pesco-vegana consente il consumo di pesci purché NON di allevamento

Pitagora, Seneca, Leonardo, Gandhi,
Tolstoj, Einstein, Paul McCartney ...
… Ragione, pietà e spirito nelle parole
dei grandi vegetariani-vegani ⇨



8. GLI INDICI DI POSIZIONE (o "di centralità")

A) LE MEDIE "FERME"

(una media si dice "**ferma**" se **il suo valore varia senz'altro, qualora uno solo dei termini in gioco cambi**).

❑ HO COMINCIATO AD ALLENARMI PER LA MARATONA DI NEW YORK!

Lunedì ho corso per 4 km, martedì per 6,5 km, mercoledì per 8 km, giovedì per 2,5 km, venerdì per 5 km, sabato per 7,5 km, domenica per 8,5 km.
Quanti km ho percorso in media al giorno?

Una "**media**" **fra più numeri**, che esprimono quantità della stessa specie, **è un numero avente la proprietà di essere compreso ("medio" = "che sta in mezzo") tra il minore e il maggiore dei numeri dati**.

La risposta alla nostra domanda NON sarà però, evidentemente,
uno qualsiasi fra i valori compresi tra 2,5 e 8,5
e nemmeno *il numero esattamente intermedio* fra 2,5 e 8,5 (che sarebbe 5,5)!

Ragioniamo. Noi vogliamo trovare quel numero x tale che,
se in ognuno dei 7 giorni della settimana io avessi corso ogni volta per esattamente x km,
la distanza complessiva percorsa in tutta la settimana sarebbe stata la medesima! Allora

$$7x = 4+6{,}5+8+2{,}5+5+7{,}5+8{,}5$$

da cui

$$x = media\ dei\ km = n°\ di\ km\ \ percorsi\ mediamente\ in\ 1\ giorno = \frac{4+6{,}5+8+2{,}5+5+7{,}5+8{,}5}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

In effetti, se ogni giorno della settimana il mio percorso fosse stato di esattamente 6 km,
complessivamente nella settimana mi sarei allenato per un totale di $6+6+6+6+6+6+6 = 42$ km,
esattamente come è $4+6{,}5+8+2{,}5+5+7{,}5+8{,}5 = 42$.

❑ E' ragionevole supporre che la prestazione complessiva di uno studente, che ha preso diversi voti

$$v_1, v_2, \dots, v_n,$$

possa essere bene rappresentata dal particolare voto v che, se fosse stato preso, *sempre quello*, tutte le n volte, avrebbe dato luogo alla *stessa somma di voti*. Dunque

$$nv = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$v = media\ dei\ voti = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}$$

Ad es., se quello studente ha preso i 5 voti $6\ \ 7\ \ 7\ \ 8\ \ 6$, la sua media è stata $\frac{6+7+7+8+6}{5} = \frac{34}{5} = 6{,}8$.

E in effetti, se quello studente avesse invece preso come voti successivi $6{,}8\ \ 6{,}8\ \ 6{,}8\ \ 6{,}8\ \ 6{,}8$
la somma dei suoi voti, ossia la sua "prestazione totale", sarebbe stata $6{,}8+6{,}8+6{,}8+6{,}8+6{,}8 = 34$
esattamente uguale alla prestazione effettiva totale $6+7+7+8+6 = 34$

Si dice **MEDIA ARITMETICA** M fra n numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$, il numero

$$\boxed{M = media\ aritmetica = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}.$$

**La media aritmetica fra più valori, è uguale alla loro somma, divisa per il numero dei valori stessi;
ed è quel nuovo valore il quale, se sostituito al posto di ciascuno dei singoli valori in gioco,
ne lascerebbe invariata la somma.**

ESERCIZI

1) Verifica che se ho mangiato il minestrone 3 volte in novembre, 8 in dicembre, 8 in gennaio, 5 in febbraio, e 9 volte in totale gli altri mesi dell'anno, in media è come se l'avessi mangiato 2,75 volte al mese.

2) Calcola la media del numero di scarpe, fra i compagni di classe: a) maschi; b) femmine; c) tutti.
In generale la media c) *non* coincide con la media delle due medie a) e b) … a meno che …

3) Con riferimento alle classi I A, I B di cui a pagina 354, con un foglio elettronico rappresenta la "serie storica" delle medie aritmetiche dei punteggi (mettendo, ogni anno, assieme le due classi a formare un unico gruppo).
Le "lagnanze" di cui si parla nella stessa pagina sono giustificate, a giudicare da questa successione di medie?

La "media" di cui ci siamo occupati fin qui è stata la media "aritmetica"
(anche se sovente, per brevità, l'aggettivo viene lasciato sottinteso);
in effetti, **ci sono altri tipi di "medie"**, oltre a questa, e ora andremo brevemente a illustrarli.

❑ Se il COSTO DI UNA MATERIA PRIMA è aumentato:
- del 5% nel 2001 (s'intende: da inizio a fine anno);
- del 6% nel 2002;
- dell'8% nel 2003;
- dell'8% ancora nel 2004;
- e del 4% nel 2005,

a) di quanto è aumentato *complessivamente* nel quinquennio 2001-2005?

b) E di quanto è aumentato *mediamente* ogni anno, in questo quinquennio?

Ragioniamo.

a) Se il prezzo all'inizio del 2001 era 100,
- alla fine del 2001 è diventato $100\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)=100\boxed{\cdot 1,05}=105$
- alla fine del 2002 è diventato $105\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)=105\boxed{\cdot 1,06}=111,3$
- alla fine del 2003 è diventato $111,3\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right)=111,3\boxed{\cdot 1,08}=120,2$ (*circa*)
- alla fine del 2004 è diventato *circa* $120,2\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right)=120,2\boxed{\cdot 1,08}=$ *circa* $129,8$
- alla fine del 2005 è diventato *circa* $129,8\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)=129,8\boxed{\cdot 1,04}=$ *circa* 135;

è perciò aumentato, questo prezzo, da inizio 2001 a fine 2005, complessivamente intorno al 35%.

b) E *mediamente*, quanto è aumentato?
Noi *cerchiamo* in questo momento *una percentuale annua x tale che*,
se *l'aumento fosse stato ogni anno esattamente dell'x%, si sarebbe raggiunto il medesimo prezzo finale*.
Quindi

$$\cancel{100}\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=\cancel{100}\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)\left(1+\frac{8}{100}\right)\left(1+\frac{8}{100}\right)\left(1+\frac{4}{100}\right)$$

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^5=1,05\cdot 1,06\cdot 1,08\cdot 1,08\cdot 1,04$$

$$1+\frac{x}{100}=\sqrt[5]{1,05\cdot 1,06\cdot 1,08\cdot 1,08\cdot 1,04}$$

$$1+p=\sqrt[5]{1,05\cdot 1,06\cdot 1,08\cdot 1,08\cdot 1,04}\approx\sqrt[5]{1,35}\approx 1,062 \quad da\ cui \quad p=\sqrt[5]{1,05\cdot 1,06\cdot 1,08\cdot 1,08\cdot 1,04}-1\approx 0,062=6,2\%$$

Vuol dire che, se quel prezzo iniziale fosse aumentato ogni anno del $6,2\%$, si sarebbe raggiunto,
dopo un quinquennio, lo stesso prezzo finale che si è ottenuto con gli aumenti del 5%, 6%, 8%, 8%, 4%.
Vuoi provare a verificarlo col calcolo?

Presi dunque i valori $1,05$ $1,06$ $1,08$ $1,08$ $1,04$
che davano il numero per cui moltiplicare il prezzo all'inizio dell'anno, onde ottenere il prezzo alla fine,
la "media sul quinquennio" di questi moltiplicatori è la radice quinta del loro prodotto
(e non, come nel caso della media aritmetica, la quinta parte della loro somma)!

Si definisce "MEDIA GEOMETRICA" fra più valori, quel nuovo valore il quale,
se sostituito al posto di ciascuno dei singoli valori in gioco, ne lascerebbe invariato il prodotto.
Si dimostra facilmente che la media geometrica fra n valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ è data da

$$\boxed{M_G = media\ geometrica = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}}$$

Infatti, poiché si desidera che questa media, sostituita a ciascuno dei valori, non ne alteri il prodotto:

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n = M_G\cdot M_G\cdot\ldots\cdot M_G$$
$$M_G{}^n = x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$$
$$M_G = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$$

Come indicazione generale, possiamo dire che la media geometrica
si utilizza quando i dati sono tali che per essi l' "operazione regina"
è il *prodotto*, piuttosto che la somma.
Quindi, in un contesto di tassi di interesse bancari,
o di aumento o diminuzione (rara …) dei prezzi,
o di incremento o decremento del PIL, o di tasso di crescita di una popolazione,
dobbiamo aspettarci di incontrare medie geometriche piuttosto che aritmetiche.



Robert Kennedy
Discorso sul PIL
(marzo 1968)

❑ Facciamo UN ALTRO ESEMPIO DI NATURA DIVERSA, molto significativo.

$v = \frac{s}{t}$
$s = vt$
$t = \frac{s}{v}$

Se ho percorso in auto un totale di 100 km, la prima metà andando ai 100 km/h
e la metà successiva, dopo aver visto un brutto incidente, agli 80 km/h soltanto,
quale è stata la mia velocità media?

Rispondere che è stata la media aritmetica delle due velocità,

quindi $\frac{100+80}{2} = 90$ km/h, sarebbe magari istintivo … ma clamorosamente SBAGLIATO.

Infatti è logico partire dal presupposto che per "velocità media", in questo contesto, si debba intendere
quella velocità la quale, se mantenuta costante per tutto il tragitto di 100 km,
mi avrebbe permesso di coprirlo nel medesimo tempo.

E *quanto tempo* ci ho messo a fare i miei 100 km,
andando per 50 km ai 100 all'ora e per 50 km agli 80 all'ora?

Vediamo.
La prima metà del percorso ha richiesto un tempo, in ore, uguale a

$\frac{s}{v} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$ (mezz'ora, dunque),

mentre la seconda metà ha richiesto un numero di ore dato da

$\frac{s}{v} = \frac{50}{80} = 0,625$ (0,625 ore, o anche: 37 minuti e mezzo).

Il tempo totale per coprire il tragitto di 100 km è stato perciò di ore $0,5 + 0,625 = 1,125$ $(1h\ 7'\ 30'')$.

Ma se una distanza di 100 km venisse percorsa ad andatura costante in ore 1,125
vorrebbe dire che quella velocità costante è di

km/h $\frac{100}{1,125} \approx$ km/h 88,9

Quindi in questo caso per calcolare la "velocità media"
NON si deve fare la "media aritmetica delle due velocità"!

Si deve invece procedere
1) direttamente col ragionamento e col calcolo, come abbiamo fatto noi;
2) oppure (lo si potrebbe dimostrare) calcolando la cosiddetta *media armonica* delle velocità.

$$M_A = \textit{media armonica} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}}$$

Si definisce "MEDIA ARMONICA" fra *n* valori, quel nuovo valore il quale, se sostituito al posto di ciascuno dei singoli valori in gioco, ne lascerebbe invariata la somma dei reciproci. Essa coincide col reciproco della media aritmetica dei reciproci dei valori in gioco.

Si può far vedere (vuoi provarci?) che, se una data distanza d viene suddivisa
in n tratti tutti uguali fra loro (ogni tratto ha quindi lunghezza d/n),
e questi tratti vengono percorsi alle velocità $v_1, v_2, \ldots, v_n$ rispettivamente,
per cui il viaggio richiede un certo tempo totale t,
allora la "velocità media", intesa come la velocità costante
alla quale occorrerebbe muoversi per percorrere la stessa distanza d nello stesso tempo t,

- *non dipende dalla distanza* d
- *ed è data dalla media armonica delle velocità:*

$$v = \frac{1}{\frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}{n}}$$

OSSERVAZIONE
Invece, se noi avessimo un tempo di viaggio fissato t suddiviso in n intervalli di ugual durata t/n,
e in questi n intervalli uguali di tempo si procedesse alle velocità costanti $v_1, v_2, \ldots, v_n$,
percorrendo una determinata distanza totale d,
la velocità costante alla quale procedere se si desidera, sempre nel tempo t, percorrere la stessa distanza d
non dipenderebbe da t e sarebbe data dalla *media aritmetica* delle velocità $v' = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$ (dimostralo!)

- Ancora:

  Si definisce "MEDIA QUADRATICA" fra più valori, quel nuovo valore il quale, se sostituito al posto di ciascuno dei singoli valori in gioco, ne lascerebbe invariata la somma dei quadrati.

  Si dimostra che la media quadratica fra n valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ è data da

$$M_Q = \text{media quadratica} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Cercando di trarre le conclusioni da questo tentativo di GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI "MEDIA", potremo dire (traducendo in forma più semplice una definizione di Oscar Chisini, 1889-1967) che **se si hanno n valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ di una grandezza, si può parlare di "media" ogniqualvolta si desidera determinare un valore x che, qualora venisse sostituito al posto di ciascuno dei valori dati, ne lascerebbe invariata, a seconda del tipo di "media":**

- **la somma;**
- **o il prodotto;**
- **…**
- **oppure una qualunque determinata loro "funzione", ossia grandezza che dipenda, secondo una legge ben definita, dalle grandezze date.**

UNA MEDIA

a) … IN PARTE DISTRUGGE, E IN PARTE RIESCE A MANTENERE L'INFORMAZIONE;

b) … E' UN VALORE "TEORICO";

c) … E CI DA' SOLO QUELLO CHE DA LEI SAPPIAMO DI POTERCI ASPETTARE!

a) Una media, di qualsiasi tipo essa sia, cerca di sintetizzare in un singolo numero un'informazione relativa a una pluralità di dati (sovente, a *tantissimi* dati). Evidentemente, essa *non* può pretendere di condensare in sé tutto il contenuto informativo insito nell'insieme *effettivo* dei dati; passando alla "media" tale contenuto in gran parte va perso … *e tuttavia qualcosa, peraltro di molto importante, rimane.*

b) Una media è un valore "TEORICO", nel senso che ben raramente coincide con uno dei dati in questione (e, se anche ciò avviene, questo fatto non è comunque particolarmente interessante).

c) Una media "CI DA' SOLO QUELLO CHE DA LEI CI ASPETTIAMO", nel senso che, ad esempio,

- una media *aritmetica* ci dà quel valore che, se venisse sostituito a ciascuno dei dati, ne lascerebbe inalterata la somma;
- una media *geometrica* ci dà quel valore che, se venisse sostituito a ciascuno dei dati, ne lascerebbe inalterato il prodotto;
- una media *armonica* ci dà quel valore che, se venisse sostituito a ciascuno dei dati, ne lascerebbe inalterata la somma dei reciproci;
- eccetera.

LA PIENA COMPRENSIONE DEL SIGNIFICATO DI UNA "MEDIA", cioè del tipo di informazione che essa ci dà, È LEGATA ALLA CONSAPEVOLEZZA DI "QUAL È LA QUANTITÀ CHE RESTEREBBE INALTERATA SE AL POSTO DI CIASCUNO DEI DATI SI SOSTITUISSE LA MEDIA DEI DATI STESSI"



Si dice che la media in esame "CONSERVA" quella determinata quantità: ad esempio, la media aritmetica "conserva la somma", perché, se venisse sostituita al posto di ciascuno dei dati, la somma di questi non muterebbe.

- La media con cui lo studente ha quasi sempre a che fare è la media *aritmetica*
  (quando si dice semplicemente "*media*", *senza aggettivi*, è alla *media aritmetica* che ci si riferisce).
- Per la precisione, nelle pagine precedenti, avremmo dovuto scrivere
  "media aritmetica *semplice*", "media geometrica *semplice*", "media armonica *semplice*", …
  per distinguere le medie introdotte dalle corrispondenti medie "*ponderate*".
  Alla media aritmetica "ponderata" faremo cenno fra breve.

In un'indagine statistica, o in un diagramma statistico,
i "dati" di cui fare la "media" sono le "modalità"
(è ovvio che ha senso farne la media soltanto se queste sono espresse numericamente);
ciascuna modalità viene contata tante volte quant'è la sua frequenza nella popolazione statistica in esame.

Ad esempio, nella rilevazione del numero di figli da 0 a 10 anni di un gruppo di 20 famiglie,
la distribuzione di frequenze potrebbe essere

0	1	2	3
7	8	4	1

E in questo caso avrebbe senso fare la media aritmetica del numero dei figli, che sarebbe

$$M = \frac{0+0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1+2+2+2+2+3}{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95$$

Se i dati sono stati ripartiti in intervalli ossia, come si dice, in "**CLASSI DI FREQUENZA**"
(ad esempio in una rilevazione di altezze: *cm* $150 \le h < cm$ 154, $154 \le h < 158$, $158 \le h < 162$, *ecc.*),
nel calcolo di una media si prende, per ciascuna classe, il cosiddetto "**VALORE CENTRALE**" **della classe**,
ossia la **semisomma** (= la media) **delle estremità dell'intervallo**. Esempio:

$150 \le h < 154$	$154 \le h < 158$	$158 \le h < 162$	$162 \le h < 166$	$166 \le h < 170$
2	5	8	10	15
$170 \le h < 174$	$174 \le h < 178$	$178 \le h < 182$	$182 \le h < 186$	$186 \le h < 190$
9	7	5	2	1

$$M = \frac{152\cdot 2+156\cdot 5+160\cdot 8+164\cdot 10+168\cdot 15+172\cdot 9+176\cdot 7+180\cdot 5+184\cdot 2+188\cdot 1}{2+5+8+10+15+9+7+5+2+1} = \frac{10760}{64} = 168{,}125$$

Nell'ultimo esempio anziché sommare un certo numero di addendi uguali
abbiamo moltiplicato ciascun addendo per il numero di volte in cui questo andava considerato;
abbiamo cioè fatto quella che, come vedremo poco più avanti, si chiama una "media PONDERATA".

E' evidente che questo metodo del "valore centrale" non fornisce come risultato la media "esatta",
ma solo un valore approssimato della "vera" media.
La "vera" media, infatti, dovrebbe tenere conto di *tutti* i singoli valori osservati
(che per comodità sono invece stati riuniti in classi);
ciascun singolo valore dovrebbe essere moltiplicato per la sua brava frequenza,
questi prodotti sommati e infine questa somma divisa per il numero totale dei valori considerati.
L'approssimazione però in genere è molto buona …
Rinunciamo ad ulteriori approfondimenti, ma possiamo comunque fare un "esperimento" pratico.
Riprendiamo la tabella precedente ed entriamo nel dettaglio delle singole osservazioni:

$150 \le h < 154$		$154 \le h < 158$		$158 \le h < 162$		$162 \le h < 166$		$166 \le h < 170$	
150	0	154	0	158	1	162	2	166	4
151	0	155	1	159	2	163	2	167	4
152	1	156	2	160	3	164	3	168	3
153	1	157	2	161	2	165	3	169	4
	2		5		8		10		15

$170 \le h < 174$		$174 \le h < 178$		$178 \le h < 182$		$182 \le h < 186$		$186 \le h < 190$	
170	3	174	3	178	2	182	1	186	0
171	2	175	1	179	1	183	0	187	1
172	2	176	2	180	0	184	1	188	0
173	2	177	1	181	2	185	0	189	0
	9		7		5		2		1

Facendo, questa volta, la "vera" media si ottiene un valore vicino a $167{,}67$
quindi non molto differente da quello ricavato prima.

PROPRIETA' DEI VARI TIPI DI MEDIA

Se i nostri dati sono $x_1, x_2, \dots, x_n$, e la loro media aritmetica è $M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$,

i loro "scarti" dalla media sono le differenze fra i dati stessi e la media:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - M \\ x_2 - M \\ \dots \\ x_n - M \end{array}\right\} \textit{ scarti dei dati dalla media}$$

Ecco la tabella delle altezze superate, in cm, da 7 atleti ad una gara dilettantistica di salto in alto:

180	180	184	184	184	190	200

Se ne calcoli la media, avrai

$$M = \frac{180+180+184+184+184+190+200}{7} = \frac{1302}{7} = 186$$

Ora scriviamo, sotto ciascuno dei dati, il suo scarto dalla media:

180	180	184	184	184	190	200
–6	–6	–2	–2	–2	+4	+14

Se a questo punto sommiamo algebricamente questi 7 scarti, avremo

$$-6-6-2-2-2+4+14 = 0$$

Il fatto che la somma algebrica degli scarti dalla media aritmetica sia 0 è del tutto generale.

In effetti, se $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono i dati,
e quindi $x_1 - M, x_2 - M, \dots, x_n - M$ sono i loro scarti dalla media aritmetica, avremo

$$\textit{somma scarti} = (x_1 - M) + (x_2 - M) + \dots + (x_n - M) = x_1 - M + x_2 - M + \dots + x_n - M =$$

$$= x_1 + x_2 + \dots + x_n - nM = x_1 + x_2 + \dots + x_n - \cancel{n} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\cancel{n}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0$$

PROPRIETÀ: **La somma degli scarti dei dati dalla media aritmetica dei dati stessi è sempre uguale a 0.**

Un'altra proprietà interessante della media aritmetica è la seguente:

PROPRIETÀ (che non dimostriamo; potresti però verificarla su di un esempio, tramite un foglio elettronico …)
La media aritmetica è quel valore rispetto al quale è minima la somma dei QUADRATI degli scarti.
Vale a dire, se io calcolo la somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica,
questa somma sarà certamente minore di ciò che otterrei se, al posto degli scarti dalla media aritmetica M,
considerassi gli scarti da un qualsiasi altro valore a.
Schematicamente: se $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono i dati, e M è la loro media aritmetica, allora la quantità

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2$$

è minima nel caso $a = M$.

RIASSUNTO SCHEMATICO (INDICI DI POSIZIONE: le medie "ferme")

$\textbf{MEDIA ARITMETICA} = M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$	"Conserva" la somma. EXCEL, OPENOFFICE CALC: = **MEDIA()**
$\textbf{MEDIA GEOMETRICA} = M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$	"Conserva" il prodotto
$\textbf{MEDIA QUADRATICA} = M_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$	"Conserva" la somma dei quadrati
$\textbf{MEDIA ARMONICA} = M_A = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}}$	"Conserva" la somma dei reciproci

B) MEDIE PONDERATE

1	9
2	14
3	25
4	22
5	10
	80

Avevamo già fatto qualche anticipazione. Riprendiamo il discorso.
Un test su 80 studenti universitari ha fatto registrare i punteggi della tabella qui a fianco (accanto a ciascun possibile punteggio, da 1 a 5, è stata annotata la relativa "frequenza", ossia il numero di studenti che hanno conseguito *quel* punteggio).
Qual è stata la media dei punteggi di questo gruppo di studenti?

$$M = \frac{\overbrace{1+\ldots+1}^{9\ addendi} + \overbrace{2+\ldots+2}^{14\ addendi} + \overbrace{3+\ldots+3}^{25\ addendi} + \overbrace{4+\ldots+4}^{22\ addendi} + \overbrace{5+\ldots+5}^{10\ addendi}}{80} = \boxed{\frac{1\cdot 9+2\cdot 14+3\cdot 25+4\cdot 22+5\cdot 10}{80}} =$$

$$= \frac{9+28+75+88+50}{80} = \frac{250}{80} = 3{,}125$$

Si dice "MEDIA PONDERATA" (o "MEDIA PESATA") una media nella quale ciascun dato viene moltiplicato per un fattore dato dalla sua frequenza assoluta, ossia è contato per un numero di volte uguale alla sua frequenza assoluta.

Nell'esempio di cui sopra, il dato "1" ha "peso" 9, il dato "2" ha "peso" 14, ecc.

Dunque, in generale, si ha,
per una media (aritmetica) ponderata,

$$\text{Media aritmetica ponderata} = M = \frac{x_1\cdot f_1 + x_2\cdot f_2 + \ldots + x_n\cdot f_n}{\underbrace{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}_{\text{numero totale dei dati}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot f_k}{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f_k}_{\text{numero totale dei dati}}}$$

f_k = *frequenza assoluta del k-esimo dato* (*numero di volte in cui compare*)

In questa interpretazione (ma vedi poi il riquadro sottostante), una "media ponderata" non differisce da una normalissima media. Semplicemente, visto che un dato si è presentato nella rilevazione più volte, lo si scrive, per comodità, una volta sola, *moltiplicandolo per la sua frequenza*, ossia per il numero di volte in cui compare.

Il simbolo $\sum_{k=\ldots}^{\ldots}$ si chiama "simbolo di *sommatoria*".

Scrivere $\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot f_k$ significa che si vuole eseguire la somma di tanti addendi $x_k\cdot f_k$, dove k assume:

- il valore 1 (1° addendo),
- poi il valore 2 (2° addendo),
- eccetera,
- fino al valore n.

- ❑ Verifica che se 26 persone hanno donato 5 euro e 14 persone 10 euro, la media dell'offerta è stata di euro 6,75
- ❑ Calcola la media del voto in condotta, nella pagella più recente, di tutti gli studenti della tua classe

Si parla di "media ponderata" anche quando si vogliono assegnare, ai dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$, "PESI" DIVERSI in quanto i dati vengono ritenuti di diversa "importanza". La formula è la stessa, solo che al posto delle frequenze $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ci sono i "pesi" $p_1, p_2, \ldots, p_n$ che si è deciso di attribuire ai vari dati; vedi qui a destra →

Un'ALTRA INTERPRETAZIONE ♥ della media ponderata

$$M = \frac{x_1\cdot p_1 + x_2\cdot p_2 + \ldots + x_n\cdot p_n}{\underbrace{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}_{\text{somma dei pesi}}}$$

- ❑ Verifica che se i punteggi ottenuti da uno studente per i tre esercizi A, B, C sono stati rispettivamente 10, 8 e 7, e ai tre esercizi l'insegnante ha ritenuto di attribuire rispettivamente i "pesi" 2, 3 e 3, allora il punteggio dato dalla media ponderata risulta essere 8,125.
  Verifica poi che se invece i "pesi" fossero 2, 3 e 4, quello studente otterrebbe come punteggio finale 8, mentre la media aritmetica "semplice" (= non ponderata) degli stessi punteggi è 8,333…
- ❑ Se in una doppia prova scritto+orale Anna è stata valutata rispettivamente 7 e 9, e la prof. intende assegnare peso 3 allo scritto e peso 1 all'orale per fare poi una media ponderata tramite la formula nell'ultimo riquadro, è come se Anna avesse preso i 4 voti 7, 7, 7 e 9 di cui fare poi la media "semplice" (= normale): verificalo.

C) LE MEDIE "LASCHE": MEDIANA E MODA (lasco = *allentato, molle, non teso*)

(Una media si dice "lasca" se potrebbe pure restare invariata, qualora cambiasse uno dei termini)

4	1
5	5
6	7
7	7
8	3
9	3
10	1
	27

In un test, i punteggi dei 27 studenti sono stati quelli riassunti dalla tabella qui a fianco (punteggio sulla colonna sinistra, frequenza assoluta di quel punteggio sulla colonna destra).

Se trascriviamo i punteggi uno a uno in ordine crescente, avremo

4	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**8**	**8**	**8**	**9**	**9**	**9**	**10**

Consideriamo ora il punteggio che, nella striscia, occupa la **posizione centrale**:

4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	**7**	7	7	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10

Questo punteggio è 7. Diremo dunque che la "**mediana**" della distribuzione in esame è 7.
Se poi il "mostro" che ha preso 10 fosse stato assente, la striscia dei punteggi avrebbe contenuto 26 numeri:

4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9

In questo caso un numero che occupi la posizione centrale … non c'è. In tale eventualità (**numero pari di dati**)
si assume, convenzionalmente, come mediana la semisomma (= la media aritmetica)
dei due valori che stanno all'immediata sinistra e all'immediata destra della posizione centrale.

Nell'esempio considerato, quindi, la *mediana* sarebbe stata $\frac{6+7}{2}=6,5$.

Osserviamo che la *media aritmetica* dei punteggi della classe è
$\frac{181}{27}\approx 6,704$ con la presenza del "mostro", $\frac{171}{26}\approx 6,577$ supponendo il "mostro" assente. Dunque:

La **MEDIANA** è definita quando si ha un insieme di dati, disposti in ordine crescente.
Si tratta allora del **dato che "occupa il posto centrale"** ,
nel senso che **metà dei dati considerati sta a sinistra e metà a destra della mediana**.

Nel caso in cui il numero di questi dati sia pari, un "dato centrale" non esiste
e quindi, convenzionalmente, si assume come mediana la media aritmetica
fra i due dati che stanno immediatamente prima e immediatamente dopo, rispetto alla posizione centrale.

Qualora i dati non siano numerici, ma abbia comunque senso ordinarli
(livelli di istruzione, aggettivi che esprimono un gradimento …)
non ha senso pensare ad una "media" … ma a una *mediana*, in generale, sì.

Quando è possibile determinare sia la media aritmetica che la mediana, cioè con dati numerici,
la "mediana" ci dà un'informazione diversa rispetto alla "media".

Abbiamo già visto che la media aritmetica è quel valore che,
se venisse sostituito al posto di ciascuno di dati, ne lascerebbe inalterata la somma;
la mediana ci dice invece qual è il valore "centrale" della successione di dati, nel senso che,
se conosciamo la mediana, possiamo dire che un 50% dei dati è $\leq$ e l'altro 50% è $\geq$ della mediana.

La mediana, rispetto alla media aritmetica,
è meno "sensibile" alla presenza di "dati anomali", cioè di dati "lontani dalla centralità".

Se nel precedente insieme di punteggi il punteggio più basso fosse stato "2" anziché "4",
la mediana non sarebbe variata, la media aritmetica sì.

PROPRIETÀ: **La mediana, se è un valore numerico,**
è quel valore rispetto al quale è minima la somma dei valori assoluti degli scarti.
Vale a dire, se io calcolo la somma dei valori assoluti degli scarti dalla mediana,
questa somma sarà certamente minore di ciò che otterrei se, al posto degli scarti dalla mediana,
considerassi gli scarti da un qualsiasi altro valore. *Verificalo empiricamente col foglio elettronico*!

E parliamo, infine, di **moda**.



Per MODA si intende **il dato che si è presentato con più frequenza**.

La moda potrebbe anche non essere unica!

Nell'esempio sopra considerato della classe col suo test,
ci sarebbero state due "mode": 6 e 7 (si parla in questo caso di distribuzione "bimodale").

Nel caso in cui le modalità sono suddivise in "classi", più che parlare di "moda"
è corretto parlare di "**CLASSE MODALE**" (= la classe con maggiore frequenza).

Quando abbia senso parlare tanto di media aritmetica, quanto di mediana, quanto di moda,
la moda ci dà un'informazione diversa rispetto alla media e alla mediana.

E osserviamo che nel caso in cui i dati siano di carattere qualitativo, e non abbia gran senso ordinarli,
non si può parlare né di media né di mediana, mentre la moda è comunque determinabile.

punt	freq
4	1
5	5
6	**7**
7	**7**
8	3
9	3
10	1

Se ad esempio un certo giorno di Agosto una gelateria ha venduto
12 granite al limone, 15 all'arancia e 7 al cedro, quel giorno la "moda" per le granite è stata "arancia",
senza che ovviamente si potesse parlare né di media aritmetica né di mediana.

UN'ESERCITAZIONE COL FOGLIO ELETTRONICO: MEDIE, CONTEGGI, ISTOGRAMMA

I pesi in kg dei 240 maschi maggiorenni di un villaggio sul fiume Yukon, in Alaska, sono stati registrati in un foglio elettronico.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	70,0	80,5	80,7	83,9	72,7	82,8	83,6	69,5	73,8	78,6	73,1	101,2	60,6	80,4	76,4	76,5
2	78,6	69,1	93,2	69,4	76,2	61,9	101,8	104,3	88,8	75,8	77,7	94,7	67,4	79,9	77,5	86,9
3	69,9	87,2	83,2	110,8	99,1	80,4	85,6	73,4	94,9	72,5	74,3	75,3	61,6	102,9	83,1	99,4
4	83,8	75,0	68,7	87,8	112,2	68,6	73,7	64,5	83,3	85,3	68,2	88,5	57,8	65,9	80,9	70,4
5	83,6	77,9	70,2	101,9	87,0	88,9	71,0	81,5	96,0	70,8	86,3	72,8	71,8	68,5	73,9	86,1
6	95,4	77,7	70,4	73,8	91,7	83,6	89,4	57,4	81,2	94,6	77,5	72,5	63,2	109,4	79,5	57,8
7	82,1	89,4	71,1	81,6	89,2	63,5	90,0	76,9	90,9	93,7	76,2	63,7	62,3	84,9	71,7	101,8
8	79,8	71,2	76,0	70,9	114,7	99,2	78,8	90,0	63,6	65,2	75,8	98,1	69,3	106,5	80,4	106,3
9	86,6	76,3	66,6	76,2	92,1	98,4	78,4	79,2	67,5	101,2	71,6	76,3	61,8	99,5	81,2	103,3
10	89,9	84,4	72,9	75,9	119,2	75,4	89,2	76,1	68,6	69,1	72,6	88,3	89,8	53,8	86,6	90,5
11	84,5	75,6	56,7	77,5	93,0	101,9	80,3	67,0	72,2	109,7	80,2	78,4	82,3	66,1	85,1	70,5
12	98,0	85,2	64,9	80,9	98,4	103,5	75,1	82,7	59,6	66,2	79,8	99,3	91,3	72,2	93,7	97,8
13	81,9	76,3	67,2	68,0	96,2	78,4	90,8	79,6	67,1	71,1	80,3	67,7	91,9	77,3	84,0	60,9
14	93,1	96,5	73,7	90,9	56,8	69,1	92,2	73,4	60,4	90,8	81,5	70,1	81,5	76,0	72,7	91,2
15	85,2	80,2	80,6	83,5	74,5	57,0	88,0	71,6	72,9	77,8	75,0	90,4	98,0	105,6	68,7	84,7

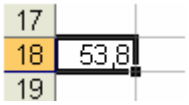
a) Determinare il peso minimo e il peso massimo
b) determinare media e mediana dei pesi
c) contare il numero di persone il cui peso rientra nella fascia da 50 kg a 60 kg (esclusi), da 60 a 70, ecc., e tracciare un istogramma;
d) determinare la media dei pesi suddivisi in "classi", assegnando a ogni classe il peso centrale fra i suoi due estremi, e ricalcolare la media per confrontarla con la media reale.

a) Possiamo posizionarci in una cella libera qualsiasi, ad esempio la A18, e digitare
= min(A1 : P15)

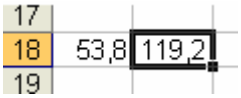
BELLO

Osserviamo che dopo aver digitato **= min(**
se **clicchiamo sulla cella A1** il foglio inserirà **automaticamente** nella formula il riferimento ad A1.
A questo punto digiteremo i "due punti": dopodiché potremo cliccare su P15 e infine chiudere la parentesi.
Comoda alternativa: si può digitare **= min(** poi **TRASCINARE** il mouse sul rettangolo da A1 a P15.

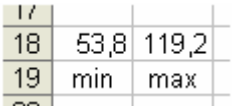
L'effetto finale, in A18, sarà



Allo stesso modo, in B18 inseriremo la formula
= max(A1 : P15)
ottenendo

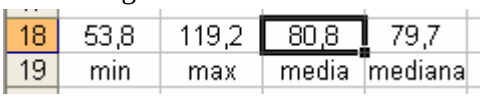


Naturalmente, sarà opportuno inserire in celle adiacenti, **stringhe adeguate** che ci aiutino a ricordare il significato dei numeri ottenuti: ad es.



b) Digitiamo, ad esempio in C18 e in D18, le formule
= media(A1 : P15)
e rispettivamente
= mediana(A1 : P15) …

… nonché, in C19 e D19, le **stringhe opportune**, con l'effetto seguente:



c) Digitiamo in E18:
= conta.se(A1 : P15;" >= 50") – conta.se(A1 : P15;" >= 60")
e ci comparirà così, in E18, il numero di dati compresi fra 50 (incluso) e 60 (escluso):

	A	B	C	D	E
17					50-60
18	53,8	119,2	80,8	79,7	8
19	min	max	media	mediana	

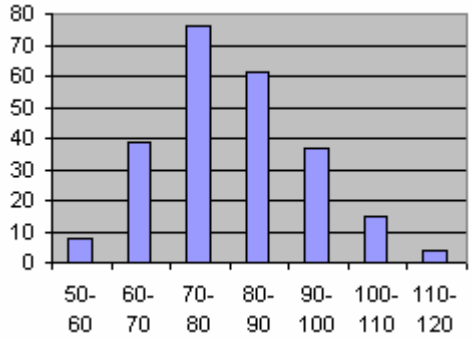
Procediamo in modo analogo sulle celle F18, G 18 … fino a K18:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
17					50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
18	53,8	119,2	80,8	79,7	8	38	77	61	37	15	4
19	min	max	media	mediana							

Ora possiamo **selezionare, trascinando col mouse, il rettangolo di celle E17:K18**

17					50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
18	53,8	119,2	80,8	79,7	8	38	77	61	37	15	4
19	min	max	media	mediana							

… **cliccare su**  e, con qualche passaggio molto intuitivo, **ottenere finalmente l'istogramma**:

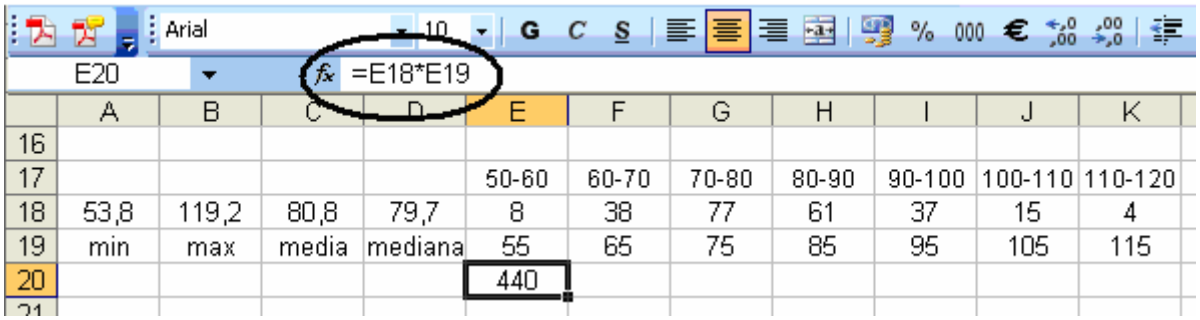


d) **Digitiamo, accanto alle frequenze delle classi, il "valore centrale" della classe …**

17					50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
18	53,8	119,2	80,8	79,7	8	38	77	61	37	15	4
19	min	max	media	mediana	55	65	75	85	95	105	115

… e avviamoci ora a calcolare una MEDIA PONDERATA. In E20 inseriremo la formula

= E18 * E19



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
16											
17					50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
18	53,8	119,2	80,8	79,7	8	38	77	61	37	15	4
19	min	max	media	mediana	55	65	75	85	95	105	115
20					440						

che poi incolleremo, trascinando il quadratino in basso a destra della cella, sulle celle limitrofe F20 … K20

17					50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
18	53,8	119,2	80,8	79,7	8	38	77	61	37	15	4
19	min	max	media	mediana	55	65	75	85	95	105	115
20					440	2470	5775	5185	3515	1575	460

Ora in L18 e in L20 calcoliamo la **somma delle frequenze assolute** e, risp., la **somma dei prodotti** …

17					50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	
18	53,8	119,2	80,8	79,7	8	38	77	61	37	15	4	240
19	min	max	media	mediana	55	65	75	85	95	105	115	
20					440	2470	5775	5185	3515	1575	460	19420

… per terminare in bellezza con la formula, inserita in L21:

= L20 / L18

che ci dà la "**MEDIA PER CLASSI**", molto vicina, come possiamo osservare, alla vera media precedentemente determinata.

15	4	240
105	115	
1575	460	19420
		80,917

9. GLI INDICI DI DISPERSIONE

Ritorniamo alla congettura del professor Curiosi (pagina 354) riguardo alle sue nuove classi I A e I B.

Il professore aveva avuto l'impressione, da una iniziale sommaria conoscenza,
che in una di esse gli studenti fossero "meno omogenei nella preparazione":
che ci fosse, insomma, un gruppo abbastanza nutrito di allievi molto bravi e un altro gruppo sostanzioso di scarsi.
Nell'altra classe la situazione gli era sembrata diversa, più equilibrata.

Dopodiché il professore aveva somministrato alle due classi il medesimo test di ingresso,
che aveva fatto registrare i punteggi seguenti (M = media):

I A 51 62 42 58 60 68 61 68 64 70 71 60 51 62 41 51 36 47 58 73 37 54 63 65 ($M \approx 57{,}2$)

I B 45 48 51 63 51 60 29 52 47 41 52 50 56 62 57 70 55 64 59 55 67 ($M = 54$)

Ci domandiamo ora:
esisterà un indicatore statistico adeguato a valutare se il test effettuato conferma l'impressione iniziale?

Un primo indicatore di "dispersione" (= di "sparpagliamento" dei dati) potrebbe essere
la *differenza fra il dato massimo e il dato minimo* in ciascuna delle due classi.
Vediamo che

- per la I A questa differenza, detta in statistica "**campo di variabilità**", vale $73 - 36 = 37$
- mentre in I B vale $70 - 29 = 41$.

$$\textit{campo di variabilità} = \textit{dato massimo} - \textit{dato minimo} = x_{\text{MAX}} - x_{\text{min}}$$

A giudicare dal "campo di variabilità", sembrerebbero quindi più disomogenee le prestazioni della I B …

… tuttavia, va osservato che il "campo di variabilità" tiene conto di DUE SOLI valori (quelli estremi)
mentre non risente per nulla di tutti i valori intermedi … la presenza, nella classe, anche di *un singolo*
caso isolato di alunno molto bravo o molto poco preparato potrebbe allora condizionarlo pesantemente.
Le prestazioni della "massa" degli allievi non influiscono in alcun modo sul calcolo di questo indicatore!

Riflettiamo. Quello che veramente ci interessa è di investigare
in quale delle due classi i valori "sono mediamente più lontani dalla media aritmetica".

Potremmo allora pensare, per ciascuna classe, di elencare tutti gli "scarti dalla media".

I A		51	62	42	58	…
$M \approx 57{,}2$	Scarti	–6,2	+4,8	–15,2	+0,8	…
I B		45	48	51	63	…
$M = 54$	Scarti	–9	–6	–3	+9	…

Questo sarebbe un buon inizio, ma poi?
Se ora andassimo a calcolare la *media aritmetica di questi scarti*, per entrambe le classi *otterremmo 0*!
E certo! Come sappiamo, infatti, la somma algebrica degli scarti dalla media aritmetica è sempre 0.

Sorge allora l'idea di calcolare la media aritmetica … *non* degli scarti, ma del VALORE ASSOLUTO di questi.
Tale media si dice "**scarto medio**" o (più correttamente) "**scarto assoluto medio**".

$$\textit{scarto medio} = \textit{media aritmetica dei valori assoluti degli scarti dalla media aritmetica} = \frac{|x_1 - M| + |x_2 - M| + \ldots + |x_n - M|}{n} \quad (\textit{è più corretto dire: "scarto assoluto medio"})$$

Così facendo, otteniamo (verificalo con un foglio elettronico!) $\textit{scarto}(\text{IA}) \approx 8{,}74$; $\textit{scarto}(\text{IB}) \approx 7{,}05$.

Vediamo di trarre qualche conclusione.
Per la I A, abbiamo ottenuto $\textit{campo di variabilità}\ (\text{IA}) = 37$; $\textit{scarto assoluto medio}\ (\text{IA}) \approx 8{,}74$
e per la I B $\textit{campo di variabilità}\ (\text{IB}) = 41$; $\textit{scarto assoluto medio}\ (\text{IB}) \approx 7{,}05$

♪ **La I A ha uno scarto assoluto medio maggiore**:
i punteggi sono mediamente più lontani, in questa classe, dalla media aritmetica della classe,
segno della presenza "importante" di fasce di allievi che si allontanano alquanto dalla media

♫ D'altra parte, il **campo di variabilità è maggiore per la I B**:
di ciò è responsabile il povero alunno che, purtroppo, ha conseguito un punteggio bassissimo (29 punti).

Anziché fare la media dei valori assoluti degli scarti,
avremmo potuto anche *elevare ciascuno scarto al quadrato*, ottenendo così un valore certamente positivo,
per poi fare la media aritmetica dei QUADRATI degli scarti (detta "varianza").

$$\textit{varianza} = \textit{media aritmetica dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica} = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}$$

In questo modo avremmo avuto $\textit{varianza}\ (\text{I A}) \approx 109{,}8$; $\textit{varianza}\ (\text{I B}) \approx 83{,}2$

Varianza *maggiore* comporta *maggiore dispersione dei dati rispetto alla media della popolazione*:
la varianza, in accordo con lo scarto assoluto medio, indica dunque nella I A la classe più disomogenea.

Son pronto a scommettere che la "varianza" ti appare d'istinto più "antipatica" rispetto allo "scarto assoluto medio", che a prima vista sembra assai più semplice e più "spontaneo" da usare, come indice di dispersione.
Tuttavia, ti segnalo che nella pratica si preferisce invece utilizzare la "varianza", e ancora di più
la sua radice quadrata che è chiamata "scarto quadratico medio", anziché lo "scarto assoluto medio".

I motivi per cui la "varianza" ha un rilievo speciale in statistica sono parecchi.
Qui ci limitiamo a citarne soltanto due.

1) La **varianza** $\dfrac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}$

   è legata alla media aritmetica in modo assai peculiare.
   Infatti si può dimostrare che essa è sempre inferiore a qualsivoglia analoga quantità
   $\dfrac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \ldots + (x_n - a)^2}{n}$ nella quale gli scarti vengano calcolati,
   invece che rispetto alla media aritmetica *M*, rispetto ad un altro qualsiasi valore *a*.

   Lo "**scarto assoluto medio**" dal canto suo **si ricollega piuttosto ad *un altro* indice** di posizione centrale:
   la mediana. In effetti la quantità $\dfrac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \ldots + |x_n - a|}{n}$ è minima (come si potrebbe dimostrare)
   quando il valore *a* è la *mediana*, NON la media aritmetica dei dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) **La varianza è il quadrato dello "scarto quadratico medio"**, di cui andiamo a parlare qui di seguito,
   e lo "scarto quadratico medio" ha un'importanza colossale in svariate questioni,
   come la teoria degli errori di misura.

Lo "**scarto quadratico medio**" o "**deviazione standard**" è la radice quadrata della varianza:

$$\textit{scarto quadratico medio o deviazione standard} = \textit{radice quadrata della varianza} = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}} = \textit{media quadratica degli scarti}$$

Lo scarto quadratico medio viene generalmente indicato con σ ("sigma"), e la varianza con σ^2.

Nell'esempio precedentemente considerato dei punteggi delle due classi I A e I B, si ha:

$$\sigma^2(\text{I A}) = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n} \approx \frac{(51 - 57{,}2)^2 + (62 - 57{,}2)^2 + \ldots + (65 - 57{,}2)^2}{24} \approx 109{,}8$$

$$\sigma^2(\text{I B}) = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n} = \frac{(45 - 54)^2 + (48 - 54)^2 + \ldots + (67 - 54)^2}{21} \approx 83{,}2$$

da cui $\sigma(\text{I A}) = \sqrt{\sigma^2(\text{I A})} \approx 10{,}5$; $\sigma(\text{I B}) = \sqrt{\sigma^2(\text{I B})} \approx 9{,}1$

Se i dati provengono da una tabella con le frequenze, evidentemente sarà, dette f_i le frequenze (assolute):

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 f_1 + (x_2 - M)^2 f_2 + \ldots + (x_p - M)^2 f_p}{f_1 + f_2 + \ldots + f_p}}$$

Le ragioni per cui lo scarto quadratico medio è preferito alla varianza sono sostanzialmente due.

1) La prima è che, se i dati sono, ad esempio, dei metri, la "varianza" sarebbe espressa in "metri quadrati",
   e lo scarto quadratico medio invece ancora in metri. Insomma,
   lo scarto quadratico medio ha il pregio di avere la stessa unità di misura dei dati dei quali proviene.

2) La seconda ragione è il **ruolo cruciale dello scarto quadratico medio nella cosiddetta "gaussiana"**,
   alla quale accenneremo parlando, più avanti, di "**errori di misura**".

Per il calcolo dello scarto quadratico medio, anziché la formula $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}}$,

si può anche utilizzare una formula equivalente, più comoda, che è $\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - M^2}$.

Per *confrontare* due distribuzioni in quanto alla loro "variabilità", alla loro "dispersione",
si utilizza un indice che è detto "coefficiente di variazione" (di solito espresso come percentuale,
non calcolabile se la media dei dati è 0, e comunque poco significativo quando la media dei dati è vicina a 0):

$$\textit{coefficiente di variazione} = \frac{\textit{scarto quadratico medio}}{|\textit{media aritmetica}|} = \frac{\sigma}{|M|}$$

NOTA - **Il coefficiente di variazione**, essendo il rapporto fra due quantità, σ e $|M|$, che sono espresse nella stessa unità di misura, **è un numero puro, senza unità di misura** (si dice che è "adimensionale").

Ad esempio, se si vanno a misurare i pesi dei bambini nati in un certo periodo in un grande ospedale, e simultaneamente i pesi delle loro mamme, si osserverà certamente una deviazione standard molto inferiore nell'insieme dei bambini … Per forza! Infatti i bambini appena nati pesano soltanto due-tre o quattro chili … quindi anche gli scarti dalla media dei loro pesi saranno piccolini!!! Volendo confrontare le due "variabilità" (quella dei pesi dei neonati con quella dei pesi delle mamme) si farà ricorso allora al coeff. di variazione.

RIASSUNTO SCHEMATICO (INDICI DI DISPERSIONE)

Indicatori di "DISPERSIONE" o di "VARIABILITÀ": ci dicono
QUANTO, GLOBALMENTE, I DATI SONO LONTANI DALLA LORO MEDIA ARITMETICA *M*.

Ogni indicatore di dispersione ha la proprietà di essere maggiore quando i dati si allontanano maggiormente, nel loro complesso, dalla centralità.

CAMPO DI VARIABILITA' = $= \textit{dato massimo} - \textit{dato minimo} = x_{MAX} - x_{min}$	E' un indicatore piuttosto "grezzo", perché dipende esclusivamente dai due valori estremi ignorando quelli intermedi	EXCEL, OPENOFFICE: **MAX()–MIN()**
SCARTO MEDIO = **SCARTO ASSOLUTO MEDIO** = $= \textit{m. aritm. dei val. ass. degli scarti dalla m. aritm.} = \frac{|x_1 - M| + |x_2 - M| + \ldots + |x_n - M|}{n}$	Sarebbe minimo qualora al posto della media *M* ci fosse, nella formula, la mediana	EXCEL, OPENOFFICE: **MEDIA.DEV()**
VARIANZA = $= \sigma^2 = \textit{m. aritm. dei quadr. degli scarti dalla m. aritm.} = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}$	Ha il difetto di non essere espressa nella stessa unità di misura dei dati	EXCEL, OPENOFFICE: **VAR.POP()** (NOTA)
SCARTO QUADR. MEDIO o DEVIAZ. STANDARD = $= \sigma = \textit{radice quadrata della varianza} = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}} = \textit{media quadratica degli scarti}$	E' l'indicatore di dispersione più utilizzato in statistica; è espresso nella stessa unità di misura dei dati, e ha un'importanza decisiva nella teoria degli errori di misura, e, in generale, nelle distribuzioni che tendono a identificarsi con la cosiddetta "gaussiana"	EXCEL, OPENOFFICE: **DEV.ST.POP()** (NOTA)
Comodissima formula alternativa: $\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - M^2}$		
COEFF. DI VARIAZ. = $\frac{\textit{scarto quadratico medio}}{|\textit{media aritmetica}|} = \frac{\sigma}{|M|}$	E' un numero puro, senza unità di misura, ottimo per confrontare fra loro distribuzioni differenti.	

NOTA su alcune funzioni statistiche nel foglio elettronico

$$\text{VAR.POP} = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}, \quad \text{VAR} = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n-1}$$

VAR è dunque, per il foglio elettronico, la cosiddetta "**varianza corretta**", ossia un indicatore statistico che, calcolato su di un campione, permette di stimare meglio la varianza incognita dell'intera popolazione.
La "varianza corretta" e l'analoga "deviazione standard corretta" si utilizzano quindi in statistica inferenziale … questo tuttavia è un discorso che, se affrontato seriamente, presenta grande interesse ma anche una certa difficoltà.

TM	TF	BM	BF
96,3	96,4	58	57
96,7	96,7	63	57
96,9	96,8	64	59
97	97,2	64	61
97,1	97,2	64	61
97,1	97,4	65	62
97,1	97,6	66	62
97,2	97,7	66	64
97,3	97,7	67	64
97,4	97,8	67	64
97,4	97,8	68	65
97,4	97,8	68	65
97,4	97,9	68	66
97,5	97,9	69	66
97,5	97,9	69	68
97,6	98	70	68
97,6	98	70	68
97,6	98	70	69
97,7	98	70	69
97,8	98	70	69
97,8	98,1	70	69
97,8	98,2	71	70
97,8	98,2	71	71
97,9	98,2	71	72
97,9	98,2	71	73
98	98,2	71	73
98	98,2	72	73
98	98,3	72	73
98	98,3	72	73
98	98,3	72	74
98	98,4	73	74
98,1	98,4	73	75
98,1	98,4	73	76
98,2	98,4	73	76
98,2	98,4	73	77
98,2	98,5	74	77
98,2	98,6	74	77
98,3	98,6	74	77
98,3	98,6	74	77
98,4	98,6	75	78
98,4	98,7	75	78
98,4	98,7	75	78
98,4	98,7	75	79
98,5	98,7	76	79
98,5	98,7	77	79
98,6	98,7	77	79
98,6	98,8	78	79
98,6	98,8	78	79
98,6	98,8	78	80
98,6	98,8	78	80
98,6	98,8	78	81
98,7	98,8	78	81
98,7	98,8	78	81
98,8	98,9	79	82
98,8	99	80	82
98,8	99	80	83
98,9	99,1	81	83
99	99,1	81	84
99	99,2	82	84
99	99,2	82	84
99,1	99,3	82	85
99,2	99,4	83	86
99,3	99,9	83	87
99,4	100	84	89
99,5	100,8	86	89

I dati qui a sinistra sono tratti dal
Journal of the American Medical Association, vol. 268.

Di 130 soggetti, 65 uomini e 65 donne,
rappresentanti un campione casuale della popolazione locale,
sono stati misurati

- la temperatura corporea, in gradi Fahrenheit,
- e il numero di battiti cardiaci al minuto.

Utilizza un foglio elettronico per calcolare, di ciascuna colonna,

- la media
- lo scarto quadratico medio o deviazione standard
- lo scarto quadratico medio "corretto"
- il coefficiente di variazione
  (prendi lo sc. q. m. "non corretto" per determinarlo)

Le risposte sono qui in fondo alla pagina, capovolte,
ma tu guardale solo alla fine!

Per trovare altri gruppi di dati reali "grezzi" su cui lavorare,
puoi ad esempio consultare le pagine web

www.amstat.org/publications/jse/jse_data_archive.htm
e
http://www2.stetson.edu/~jrasp/data.htm

LA STATISTICA di *Trilussa*

Sai ched'è la statistica? È 'na cosa
che serve pe' fa' un conto in generale
de la gente che nasce, che sta male,
che more, che va in carcere e che spósa.
Ma pe' me la statistica curiosa
è dove c'entra la percentuale,
pe' via che, lì, la media è sempre eguale
puro co' la persona bisognosa.
Me spiego: da li conti che se fanno
seconno le statistiche d'adesso
risurta che te tocca un pollo all'anno:
e, se nun entra ne le spese tue,
t'entra ne la statistica lo stesso
perchè c'è un antro che ne magna due.

In tutti i casi seguenti
c'è chi mangia 0 polli e chi ne mangia di più:
secondo te, quali situazioni sono
più equilibrate, meno ingiuste?

Prova a calcolare media,
scarto quadratico medio,
coefficiente di variazione …

2 persone: 0 polli, 2 polli
3 persone: 0 1 2
5 persone: 0 1 1 1 2
6 persone: 0 0 1 1 2 2
4 persone: 0 0 0 4
6 persone: 0 0 0 1 1 4
3 persone: 0 2 4
5 persone: 0 3 3 3 6

media	74,15384615	73,36923077	98,39384615	98,10461538
devstandard	8,042637855	5,829815225	0,737746449	0,693359884
coeffvariaz	0,108458809	0,079458585	0,007497892	0,007067556
devstandardcorr	8,105227421	5,875184122	0,743487753	0,698755762

10. - ESERCIZI

Sugli INDICI DI POSIZIONE (risposte a pag. 423)

A) MEDIA ARITMETICA, MEDIANA, MODA

1) I voti di una verifica sono stati i seguenti. Quanto valgono la media, la moda e la mediana?

7	7,5	8,5	5,5	6	8	7,5	6,5	5,5	8	4
6	4	6,5	6,5	7,5	9	5	4,5	7	8,5	9

2) "Ti ricordi quante erano mediamente le tue ore di studio pomeridiane, l'anno scorso"?
Fu fatta questa domanda a un gruppo di alunni di Prima Liceo, ed essi risposero così:

1	0,5	2	3	1,5	3	3	2	1	1	1,5	3	2,5	2	1,5	1,5
2	1,5	4	1	1,5	2,5	2	0,5	3	1,5	3	2	1	1,5	2	

Determina media aritmetica, mediana e moda di questi dati.

3) L'altezza media di 5 pallavoliste professioniste è di m 1,78. Quanto dovrebbe essere alta, al minimo, una sesta atleta, per far sì che la media raggiunga almeno metri 1,80?

4) Immaginiamo di suddividere un insieme di dati in due parti.
La media (aritmetica) generale coinciderà con la media delle due medie? Tu cosa ne dici?

5) Se in una regione un certo partito ha avuto il 26% dei consensi fra gli aventi diritto al voto e nella regione limitrofa solo il 16%, riunendo insieme le due regioni che percentuale si otterrebbe?

6) Aldo e Bruno si sono allenati sullo stesso percorso podistico.
Aldo, tutti i giorni feriali della settimana;
Bruno un giorno in meno perché ha perso, per un impegno, un allenamento.
I tempi di percorrenza sono stati quelli in tabella.
Aldo ha dunque fatto il "record" con 24' 19".
E riguardo alle medie delle prestazioni, chi è stato il più veloce?

	Aldo	*Bruno*
Lunedì	25' 54"	26' 04"
Martedì	24' 45"	25' 55"
Mercoledì	25' 58"	24' 35"
Giovedì	26' 24"	
Venerdì	24' 19"	25' 18"

B) MEDIA ARITMETICA PER CLASSI

7) Numero di giorni in cui un libro è stato trattenuto in prestito dagli utenti di una biblioteca scolastica.

7	15	4	10	21	11	9	5	23	28	18	12	15	14	13	22	19	20	7	15	18	12	18
13	12	9	7	9	15	14	10	5	14	16	18	19	21	22	3	16	19	7	26	15	17	12

a) Calcola la media

b) Ricalcola la media dopo aver raggruppato i dati in intervalli ("classi di frequenza") di 7 giorni (da 1 a 7; da 8 a 14; da 15 a 21; da 22 a 28 giorni).
Ricorda che, quando i dati sono suddivisi in classi, il valore che si attribuisce a ciascuna classe è la *semisomma* degli estremi dell'intervallo. Nel nostro esempio, la classe "da 1 a 7 " ha frequenza 8 (se fai il conteggio, vedrai che sono 8 gli utenti che hanno trattenuto il libro da 1 a 7 giorni); bene, allora nel calcolo della media per classi si moltiplicherà per 8 il valore centrale della classe ossia (1+7)/2=4.
La media *per classi* trovata differisce di molto dalla media "normale"?

8) Ecco qui di seguito la spesa registrata da una delle casse di un supermercato per 100 persone consecutive.

13,65	83,20	12,45	7,05	123,40	22,10	75,25	32,15	95,50	135,45
67,25	31,20	14,70	68,80	72,15	25,50	151,15	39,80	48,45	35,50
19,95	64,10	84,15	30,95	22,85	36,70	61,85	14,40	23,55	82,15
23,60	35,90	41,10	52,80	7,65	23,30	129,25	57,15	18,10	97,25
32,10	45,45	59,65	34,45	47,10	22,50	33,90	97,05	24,55	149,60
19,95	42,50	76,20	84,15	24,5	32,45	23,20	60,35	43,80	25,55
28,10	39,10	45,50	71,05	30,90	28,15	16,25	77,10	36,35	42,15
254,50	100,90	93,15	27,75	9,90	38,45	26,50	20,95	30,40	55,00
36,10	28,90	73,85	48,70	98,95	29,40	35,15	44,20	36,30	22,55
19,95	20,75	66,80	51,05	34,70	40,80	46,05	63,25	89,10	33,80

Con un foglio elettronico:
a) individua la spesa minima e la massima b) calcola la spesa media individuale
c) ordina i dati d) suddividi i dati in classi la cui ampiezza sia 10 euro
e) ricalcola la media "per classi" (si conta il numero di clienti la cui spesa rientra in una data classe, e si attribuisce come spesa a ciascuno di quei clienti il valore centrale della classe).
La media "esatta" e la media "per classi" così determinate differiscono di molto?

9) I prezzi di un articolo, rilevati in un gruppo di 72 esercizi commerciali italiani, sono stati quelli riportati nella tabella qui a fianco.

Se ti viene richiesta la media dei prezzi in questo insieme di negozi, sei in grado di calcolarla?

Prezzo (in euro)	*Numero punti vendita*
$8,00 \le p < 8,50$	2
$8,50 \le p < 9,00$	5
$9,00 \le p < 9,50$	15
$9,50 \le p < 10,00$	24
$10,00 \le p < 10,50$	18
$10,50 \le p < 11,00$	7
$11,00 \le p < 11,50$	1

C) MEDIA ARITMETICA PONDERATA (NELLE DUE INTERPRETAZIONI)

10) I genitori modificano la paghetta settimanale del figlio a seconda del comportamento, e dei voti a scuola. L'anno passato il ragazzo ha avuto: per 25 settimane 20 euro a settimana, per 18 settimane 10 euro e per le rimanenti 9 settimane … 0 euro.
Quale è stata la paghetta settimanale media?

11) In occasione del pensionamento di un collega, viene fatta una colletta per acquistare un regalo e 5 partecipanti donano 20 euro ciascuno, 18 contribuiscono con 10 euro, i rimanenti 23 ci mettono 5 euro. Calcola media, mediana e moda delle offerte.

12) In una colonia estiva i ragazzi hanno le età in tabella.

Età	Numero ragazzi
10	25
11	28
12	31
13	18

Qual è l'età media? L'età mediana? La moda delle età?

13) Un grosso complesso residenziale ha appartamenti di varia conformazione. La tabella indica quanti fra gli appartamenti hanno *n* vani. Determina la media, la mediana, la moda del numero di vani.

	n
4	2
15	3
25	4
20	5
5	6
2	7

14) a) Una giovane insegnante con poca esperienza decide di assegnare un punteggio da 0 a 10 a ciascuna delle 5 parti A, B, C, D, E in cui si articola una prova scritta. Corregge i primi 3 elaborati e annota i vari giudizi parziali in una griglia, ripromettendosi poi di fare la media su ogni riga:

Studente	A	B	C	D	E
Paolo	8	7	7	7	8
Serena	7	8	8	8	9
Martina	8	9	9	6	7

Le tre correzioni effettuate, però, inducono la professoressa ad un ripensamento, perché fanno emergere con chiarezza che non sarebbe corretto considerare i 5 quesiti equivalenti fra loro: alcuni infatti risultano essere ben più impegnativi di altri.
Decide allora di "pesare" in modo diverso le differenti sezioni, e attribuisce i pesi in questo modo:

Parte	A	B	C	D	E
Peso	1	1,5	0,8	2	0,5

Come verranno valutati dunque Paolo, Serena e Martina, se quello che si vuole è un voto finale da 0 a 10?

E se si desidera un voto finale dal 2 al 10?

b) Realizza un **foglio elettronico** in cui un insegnante possa inserire, per una verifica con 5 esercizi: il punteggio (da 0 a *puntmax*) acquisito in ciascun esercizio; il "peso" attribuito a ogni esercizio; il voto minimo e il voto massimo previsti. Chiaramente, ne dovrà uscire il voto assegnato.

15) Una ditta che vuole assumere tecnici specializzati valuta per ciascun candidato: il curriculum iniziale; gli esiti di un esame scritto; gli esiti di un colloquio orale. I punteggi sono in decimi; tuttavia, si è deciso di assegnare peso 1,5 all'esame scritto, ritenuto più indicativo degli altri due elementi di giudizio, mentre sia al curriculum che all'esame orale verrà attribuito peso 1.

Ciò premesso, con un foglio elettronico determina le medie ponderate degli 8 candidati. Qual è la minima fra queste?

Candidato	Curriculum	Scritto	Orale
A	5	7	7
B	4	6	8
C	7	5	5
D	2	8	9
E	8	7	8
F	4	6	6
G	3	5	4
H	7	9	8

D) ALTRI ESERCIZI SU MEDIA ARITMETICA, MEDIANA E MODA

16) Nella classe Seconda A, che ha 22 allievi, la media dei punteggi di un test è stata 7,25.
Nella Seconda B gli allievi sono 28 e la media dei punteggi dello stesso test è risultata essere 7,8.
E' possibile, con questi dati, calcolare esattamente la media complessiva, ossia la media dei punteggi ottenibili mettendo insieme in un unico gruppo tutti gli studenti di entrambe le classi?

17) Una squadra di basket, con 10 giocatori fra titolari e riserve, ha la sua brava distribuzione di altezze.
Se il giocatore più alto (m 1,98) viene venduto ad un'altra squadra e il suo posto viene preso da un giocatore alto addirittura m 2,04, cambieranno media aritmetica e mediana delle altezze?
Supponendo di suddividere le altezze in intervalli di 5 cm, cambierà la classe modale?

18) Al termine della frequentazione di una scuola privata, viene rilasciato un diploma comprensivo di valutazione finale che può essere un numero intero da 6 a 10.
Se nella storia di quell'istituto scolastico fino ad oggi il 20% dei diplomati è uscito col 6, il 40% col 7, il 22% con l'8, il 12% col 9 e il 6% col 10, quale è stata la media di tutti i voti?

19) Con gli esiti del "questionario del curiosone" (pag. 360), calcola la *media* dei dati, laddove abbia significato, ossia per 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 11), 12), 13), 15).
Per 1), ripeti poi il calcolo della media suddividendo le altezze in intervalli ("classi") di 3 cm e assumendo come valore, per ogni classe, il "punto di mezzo" di quella classe.
Ad esempio, se una delle classi è formata dalle altezze di cm 170-171-172, e gli alunni di questa fascia sono 5 con altezze date da 170, 170, 171, 171, 172, allora il valore centrale è 171 e nella media generale, anziché la somma 170+170+171+171+172, a numeratore comparirà 171 moltiplicato per 5.
Confronta il valore così ottenuto con la media calcolata precedentemente.

20) Con gli esiti del "questionario del curiosone", calcola la *mediana* dei dati, laddove abbia significato, ossia per 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 10), 11), 12), 13), 15)

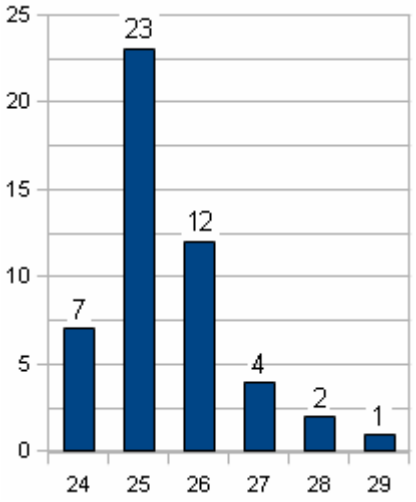
21) Con gli esiti del "questionario del curiosone", calcola la *moda* dei dati, laddove abbia significato, ossia per 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 8), 9), 10), 11), 12), 13), 14), 15).
Per 1), 2) e pure 3), 5), 7), 13), 15), prima di determinare la moda converrà suddividere i dati in intervalli, o "classi" (esempio: le altezze in intervalli di 2-3 cm, il n° di amici su Facebook in intervalli di 100 …)

22) Una gara ciclistica per dilettanti in 3 tappe è stata vinta da un atleta che ha fatto registrare i tempi riportati in tabella.
Quale è stata la velocità media dell'atleta nell'intera gara?

	km	*tempo*
Prima tappa	155	4h 42' 27"
Seconda tappa	94,5	2h 45' 08"
Terza tappa	147	4h 01' 45"

23) L'istogramma qui a destra (tracciato con OpenOffice Calc) → è relativo a un gruppo di ingegneri laureatisi a diverse età.

Quali sono la media, la mediana e la moda della distribuzione?



24) Con riferimento ai dati, già precedentemente considerati, e che qui sotto riportiamo, delle velocità di 60 auto controllate dalla Polizia, si domanda quali sono la media, la mediana e la moda della distribuzione.

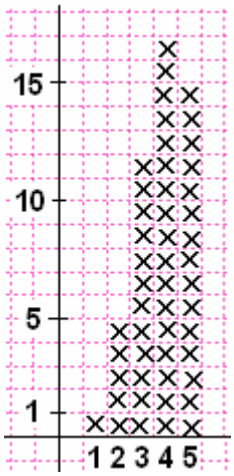
Supponiamo ora di suddividere i dati in classi:
da 45 km/h a 49 estremi inclusi, da 50 a 54, …

Quali sarebbero la *moda* (= *classe modale*), la *classe mediana* e la *media per classi* in questo caso?

57	61	52	48	68	48	55	56	72	49	50	55
54	61	58	63	64	61	47	52	53	59	48	54
56	60	51	51	50	78	67	61	58	55	59	53
62	54	49	45	56	60	51	52	60	54	55	51
48	57	56	55	58	53	59	70	74	64	81	52

Traccia (col foglio elettronico) l'istogramma dei dati suddivisi in classi.

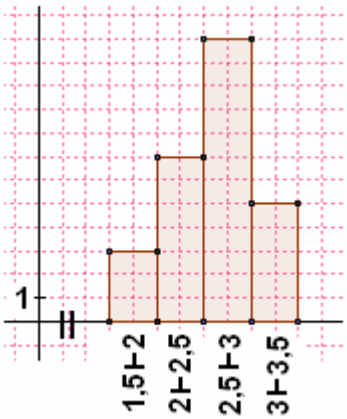
25) Cosa ti aspetti facendo la media degli esiti di tanti lanci di un dado? Lanciane effettivamente uno, almeno 50-100 volte (può essere un "lavoro di gruppo" … fossero tutti così, i lavori … ☺)



26) A un gruppo di residenti in un piccolo paese è stato chiesto di esprimere con un punteggio da 1 a 5 il proprio gradimento per la giunta comunale.

Le risposte si sono ripartite come illustrato dall'istogramma qui a sinistra.

Determina media, mediana e moda della distribuzione.



27) Andiamo a riprendere i dati registrati dall'insegnante di Educazione Fisica riguardo alle distanze saltate in lungo dai giovani allievi. Quali sono la media, la mediana e la moda della distribuzione?

28) La tabella sottostante, tratta da *Regards sur l'éducation 2008: Les indicateurs de l'OCDE* e relativa però a dati del 2006, mostra un indicatore della preparazione scientifica posseduta dagli studenti dei paesi aderenti all'organizzazione.
Con un foglio elettronico, ordina i dati e determinane la media e la mediana.
Fai poi comparire accanto a ciascun dato il suo scarto (positivo o negativo) dalla media.
Calcola la somma di questi scarti: cosa ti aspetti che esca?

Australie	527	Allemagne	516	Luxembourg	486	Espagne	488
Autriche	511	Grèce	473	Mexique	410	Suède	503
Belgique	510	Hongrie	504	Pays-Bas	525	Suisse	512
Canada	534	Islande	491	Nouvelle-Zélande	530	Turquie	424
Rép. chèque	513	Irlande	508	Norvège	487	Royaume-Uni	515
Danemark	496	Italie	475	Pologne	498	États-Unis	489
Finlande	563	Japon	531	Portugal	474		
France	495	Corée	522	Rép. slovaque	488		

29) Una pasticceria domanda alle famiglie dei suoi 3 dipendenti di assaggiare una nuova torta assegnandole un giudizio di gradimento da 0 a 5. Si decide però di attribuire peso 3 ai giudizi delle mamme, 2 a quelli dei figli, 1 a quelli dei papà. Se gli assaggiatori si sono espressi come segue, qual è la media finale?

M	P	F	F	M	P	F	F	F	M	P	F	F
4	4	5	4	3	3	4	4	4	3	4	5	4

30) Famiglie residenti in Italia classificate per numero di componenti (valori assoluti in migliaia e composizioni percentuali) - Dati ISTAT

Numero di componenti	1961	1971	1981	1991	2001
1	10,6	12,9	17,9	20,6	24,9
2	19,6	22,0	23,6	24,7	27,1
3	22,4	22,4	22,1	22,2	21,6
4	20,4	21,2	21,5	21,2	19,0
5	12,6	11,8	9,5	7,9	5,8
6 o più	14,4	9,7	5,4	3,4	1,7
Totale	13747	15981	18632	19909	21811

Si può calcolare la media dei componenti di una famiglia in un dato anno, poniamo nel 1961?
E il numero approssimativo totale dei residenti in un dato anno, poniamo il 2001?

E) ALTRI TIPI DI MEDIA, OLTRE A QUELLA ARITMETICA

31) Per i seguenti dati determina

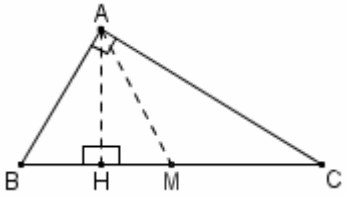
I) media aritmetica (senza usare né il computer né la calcolatrice)
II) media geometrica (calcolatrice: estrarre, ad es., la radice quinta, è come elevare all'esponente $1/5 = 0{,}2$)
III) media armonica (col computer: foglio elettronico)
IV) media quadratica (col computer: foglio elettronico)

a)	7	5	1	3	4
b)	1	1	1	2	1
c)	1	1/2	1/4		

32) Una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo ha dimensioni (in cm) $30 \text{ X } 40 \text{ X } 50$.
Che spigolo dovrebbe avere un cubo (quindi: un parallelepipedo rettangolo con le 3 dimensioni uguali), se si desidera che il suo volume sia uguale a quello della scatola?
A quale quantità da noi studiata corrisponde la lunghezza dello spigolo di questo cubo?

33) Il "**quesito di Briatore**"
Tempo fa, a un noto VIP italiano, facente parte del mondo della Formula 1, venne posto il seguente quesito:
Qual è la velocità media di un'automobile in un circuito,
se metà dei giri sono coperti a 100 km/h e l'altra metà a 300 Km/h?
La risposta di Briatore fu (sorprendentemente, per alcuni) corretta.
Qual è questa risposta esatta? E come è presumibile che ci sia arrivato il VIP?

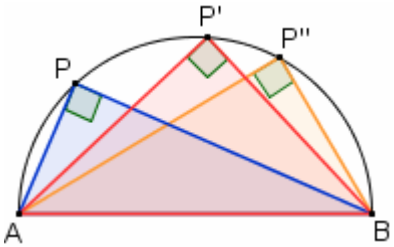
34) Considera, in un triangolo ABC rettangolo in A, l'altezza AH relativa all'ipotenusa e le due proiezioni BH e HC dei cateti sull'ipotenusa.
Il II° Teorema di Euclide afferma che vale la proporzione
BH : AH = AH : HC
Ma da ciò segue allora che AH rappresenta la media …… dei due segmenti BH e HC.



E a ben guardare, anche la mediana AM relativa all'ipotenusa può essere considerata come una media in relazione a BH e HC!
E' noto infatti che la mediana relativa all'ipotenusa in un triangolo rettangolo è metà dell'ipotenusa stessa; e ciò significa che la mediana AM rappresenta, dei due segmenti BH e HC, la media ……

35) L'esercizio 34) può servire a dimostrare geometricamente che dati due numeri positivi, la loro media geometrica non può mai essere maggiore della loro media aritmetica $(M_G \le M)$. Perché?

36) Si può dimostrare che se un angolo è "inscritto in una semicirconferenza" (vedi figura), allora è di 90°. →
Perciò i triangoli ABP, ABP', ABP", ... in figura sono tutti rettangoli;
Bene, le coppie di cateti hanno "qualcosa" in comune che ha a che fare con il discorso "medie".
Che cosa?



37) Percorro in motorino l'anello di 2500 metri intorno al mio isolato, tenendo il tachimetro sui 30 km/h al primo giro, sui 35 km/h al secondo e sui 45 km/h al terzo.
Qual è la mia velocità media sui tre giri?

38) Percorro in motorino l'anello che circonda il mio isolato, tenendo il tachimetro sui 30 km/h per 5 minuti, sui 35 km/h per altri $5'$ e sui 45 km/h per ulteriori $5'$.
Qual è la mia velocità media in questo quarto d'ora?

39) Trova la velocità media nei seguenti due casi:
a) Si procede per ½ ora a 1 km all'ora, per ½ ora a 2 km all'ora e infine per un'altra ½ ora a 6 km all'ora
b) Si procede per ½ km a 1 km all'ora, per ½ km a 2 km all'ora e infine per un'altro ½ km a 6 km all'ora

40) Sono un ciclista dilettante, e mi alleno. Ho pedalato ¾ d'ora ai 24 km/h.
A che velocità dovrei procedere i successivi ¾ d'ora,
se desiderassi ottenere una velocità media complessiva di 27 km/h?

41) Sono un ciclista dilettante, e mi alleno. Ho pedalato 1 quarto d'ora ai 24 km/h.
A che velocità dovrei procedere i successivi ¾ d'ora,
se desiderassi ottenere una velocità media complessiva di 27 km/h?

42) Sono un ciclista dilettante, e mi alleno. Ho percorso 6 km ai 24 km/h. A che velocità dovrei coprire i 6 km restanti, se desiderassi ottenere una velocità media complessiva di 27 km/h?

43) Sono un ciclista dilettante, e mi alleno. Ho percorso 6 km in 1 quarto d'ora. A che velocità dovrei coprire i successivi 24 km del tragitto, se desiderassi ottenere una velocità media complessiva di 27 km/h?

44) Un "amico" mi ha persuaso a un investimento col quale ho guadagnato il 3% il 1° anno, ho guadagnato ancora il 5% il 2° anno (NOTA), e ho perso però poi l'8% il 3° anno ☹.
Qual è la mia situazione finanziaria dopo tutto ciò?

NOTA - Quando si dice "guadagno il p%", occorrerebbe sempre specificare *rispetto a che cosa* quel p% deve essere calcolato. In casi come il nostro, quando ci si riferisce a guadagni o perdite *anno dopo anno*, si intende che il p% sia da calcolarsi rispetto alla cifra che si possedeva *all'inizio dell'anno in questione.*

45) Con un foglio elettronico, traccia una “serie storica” che illustri l’evolversi di un capitale di 100 euro, i cui incrementi annui, in un triennio, siano stati rispettivamente del 3%, del 5% e del -8%.

46) Se un usuraio, dopo aver prestato 100, richiede 150 dopo 2 anni, è come se avesse applicato il tasso di interesse medio annuo del … ?

47) Nel giro di 2 anni, per via della crisi di una grande azienda, il valore delle sue azioni è dimezzato. Quale è stata la diminuzione percentuale media annua?
(Suggerimento: se ogni anno la diminuzione in percentuale fosse sempre stata la medesima, allora, indicando con x questa percentuale, dopo 1 anno il prezzo iniziale p ce lo saremmo ritrovato moltiplicato per $1-\frac{x}{100}$, dopo due anni per $\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$, da cui l’equazione …)

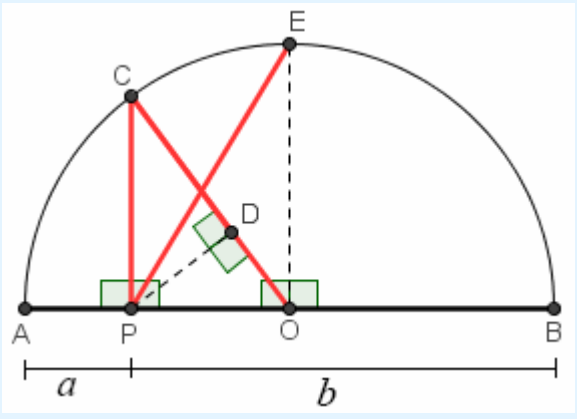
48) Un’azienda meccanica utilizza una vecchia apparecchiatura M_1 in grado di produrre 24 pezzi all’ora. Questa macchina viene lasciata in funzione per un tempo t_1, fino a che ha prodotto k pezzi. Successivamente viene spenta e al suo posto ne viene sperimentata un’altra, M_2, di ultima generazione, che lavora al ritmo di 40 pezzi all’ora. Questa seconda macchina viene lasciata in funzione per un tempo t_2, fino a che ha prodotto anch’essa k pezzi. Quanti pezzi all’ora dovrebbe produrre una 3ª macchina M_3, se si desidera che possa fabbricare k pezzi nella media aritmetica $\frac{t_1+t_2}{2}$ dei due tempi t_1 e t_2?

La risposta sta in una delle medie da noi studiate?

E terminiamo con due esercizi davvero molto belli, ma difficili.
Essi richiedono qualche nozione di Geometria che nelle scuole superiori italiane dovrebbe senz’altro essere acquisita entro il primo biennio (angoli inscritti in semicirconferenze, teoremi di Euclide o anche solo conoscenza delle Similitudini, ecc.).
Dimostra i seguenti enunciati:

49)
Sia $AP = a$, $PB = b$. Tracciamo
la semicirconferenza di diametro AB,
poi per P la perpendicolare al diametro
fino a raggiungere la semicirconferenza in C,
quindi il raggio OC,
la distanza PD di P da OC,
la perpendicolare per il centro O al diametro
fino a raggiungere la semicirconferenza in E,
la congiungente PE.
Allora i segmenti OC, PC, DC, PE
sono altrettante medie fra a e b:

OC = media *aritmetica*;
PC = media *geometrica*
DC = media *armonica*;
PE = media *quadratica*



E da tutto ciò si può trarre che è sempre
(per a, b positivi):

$$M_Q \geq M \geq M_G \geq M_A$$

50)
In un trapezio le due basi misurano a, b.

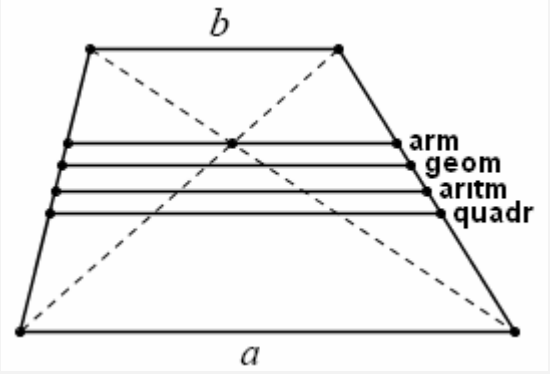
Allora quattro segmenti,
ciascuno interno al trapezio
e parallelo alle sue due basi,
rappresentano altrettanti tipi di media fra a e b.

I) Il segmento equidistante dalle due basi
ne rappresenta la media *aritmetica*

II) Il segmento, che ha la proprietà di dividere
il trapezio in due trapezi simili fra loro,
ne rappresenta la media *geometrica*

III) Il segmento, che ha la proprietà di dividere
il trapezio in due trapezi aventi ugual area,
ne rappresenta la media *quadratica*

IV) Il segmento che passa
per il punto di intersezione
delle due diagonali
ne rappresenta la media *armonica*



Sugli INDICI DI DISPERSIONE

(risposte a pag. 425)

Da Wikipedia l'enciclopedia libera

Consider a **population** consisting of the following eight values: 2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9

The eight data points have a **mean** (or **average**) value of 5: $\frac{1}{8}(2+4+4+4+5+5+7+9)=5$

To calculate the population standard deviation,
first compute the difference of each data point from the mean, and square the result:

$$(2-5)^2=(-3)^2=9 \quad (4-5)^2=(-1)^2=1 \quad (4-5)^2=(-1)^2=1 \quad (4-5)^2=(-1)^2=1$$
$$(5-5)^2=0^2=0 \quad (5-5)^2=0^2=0 \quad (7-5)^2=2^2=4 \quad (9-5)^2=4^2=16$$

Next divide the sum of these values by the number of values and take the square root to give the standard deviation: $\sqrt{\frac{1}{8}(9+1+1+1+0+0+4+16)}=2$

1) Per ciascuna delle tre serie di dati riportati in tabella determina:
   I) campo di variabilità
   II) scarto assoluto medio
   III) scarto quadratico medio o deviazione standard, sia con la formula-base

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-M)^2+(x_2-M)^2+\ldots+(x_n-M)^2}{n}}$$

   che con la formula alternativa $\sigma=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-M^2}$

   IV) coefficiente di variazione

a)	7	5	1	3	4
b)	1	1	1	2	1
c)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		

2) Fra le locuzioni "scarto medio", "scarto assoluto medio" e "scarto medio assoluto", quale è più corretta?

3) In un campione di persone appartenenti a una riserva indiana viene misurata la lunghezza della spanna, e si trova una media di 18,0 cm con una deviazione standard di 0,8 cm mentre misurando la lunghezza del piede si trova una media di 24,2 cm e una deviazione standard di cm 1,1.
Il grado di "dispersione" delle misure è maggiore per la mano o per il piede?

4) Lavoro di gruppo in laboratorio.

Si raccolgono, in un foglio elettronico,
i numeri di scarpe di tutte le femmine della classe;
si fa lo stesso per tutti i maschi.

Poi si fa in modo che il foglio elettronico calcoli,
per ciascuno dei due insiemi di dati:

- la media;
- il campo di variabilità;
- lo scarto quadratico medio;
- il coefficiente di variazione.

Cosa dovrebbe guardare chi desiderasse farsi un'idea se siano più omogenee
le "dimensioni" della parte femminile oppure di quella maschile della classe?

5) La tabella che segue registra il numero di anni di permanenza al trono dei regnanti inglesi da King Athelstan (924-940) a Queen Elizabeth II (in carica il 30/6/2010, data dell'ultimo aggiornamento).
Le durate sono state disposte in ordine crescente, e i dati arrotondati all'intero più vicino.

1	1	1	2	2	3	4	4	4	5	6	6	7	9	9	9	10	12	13	13	13	13
15	16	16	18	19	19	19	20	21	21	22	23	24	24	24	25	26	33	35	35	35	38
38	39	44	50	56	58	60	64														

   a) Calcola, con un foglio elettronico, la media e lo scarto quadratico medio di questi dati.
   b) Successivamente, raggruppa i dati in classi di 3 anni (da 1 a 3; da 4 a 6 …), determina la frequenza di ciascuna classe e calcola nuovamente la media, prendendo come valore corrispondente a ogni classe il valore centrale di quest'ultima.
   Infine, fai lo stesso per classi di 5 anni (da 1 a 5, da 6 a 10 …).
   Le medie così calcolate sono prossime fra loro?

6) Considera i seguenti tre insiemi di dati: A) 7 8 6 6 8 B) 9 7 7 5 7 C) 7 8 7 6 7
Si tratta dei voti di matematica presi da tre diversi studenti nel corso dell'anno scolastico.
Potrai verificare che la media è la medesima;
tuttavia, uno di questi ragazzi è stato, per così dire, più "costante" degli altri nelle sue *performance*.
Di chi si sta parlando: dello studente A, B o C?

7) Quattro padri e quattro figli, appassionati di atletica,
hanno fatto registrare i tempi seguenti in una corsa campestre:
25', 34', 27' e 29' i padri; 36', 45', 47' e 43' i figli.
Nel complesso, hanno avuto prestazioni più disomogenee i padri o i figli?

8) Una *software house* dispone di due uffici tecnici, uno a Torino e l'altro a Milano,
cui si rivolgono, tramite Internet, i clienti di tutta Italia per consulenze
riguardo a problemi vari inerenti alla installazione e gestione del software.
E' interessante analizzare l'insieme di dati costituito dal numero di minuti che sono intercorsi,
nei due uffici, fra l'apertura della email che richiedeva l'intervento e la prima email di risposta
finalizzata alla risoluzione del problema, per un campione di 50 interventi consecutivi.

Ufficio torinese:

10	38	36	10	12	14	45	43	42	16	41	37	13	6	11	39	48	39	44	2	9	15	7	14	40
41	8	10	13	12	42	8	10	38	36	41	39	39	16	8	39	39	42	45	43	7	9	39	44	16

Ufficio milanese:

68	72	68	68	65	25	29	75	30	32	36	17	24	77	32	36	64	67	75	21	75	29	73	67	69
28	76	39	33	38	75	37	37	30	80	32	70	28	25	67	70	30	31	72	71	67	78	67	64	29

Che ipotesi si possono fare sul modo di lavorare delle due squadre di tecnici?

9) La tabella sottostante, tratta da *Regards sur l'éducation 2008: les indicateurs de l'OCDE*
e relativa però a dati del 2006, mostra un indicatore della preparazione scientifica
posseduta dagli studenti dei paesi aderenti all'organizzazione.

Con un foglio elettronico, determina il campo di variabilità di questi dati
sulle competenze scientifiche degli studenti, senza ordinare i dati medesimi.
Determina pure scarto assoluto medio, varianza, scarto quadratico medio, e coefficiente di variazione.

Calcola altresì lo scarto quadratico medio "corretto", quello
che si ottiene con la formula a fianco e che, per n grande,
è molto prossimo allo scarto quadratico medio "non corretto".

$$\sqrt{\frac{(x_1-M)^2+(x_2-M)^2+\ldots+(x_n-M)^2}{n-1}}$$

Australie	527	Allemagne	516	Luxembourg	486	Espagne	488
Autriche	511	Grèce	473	Mexique	410	Suède	503
Belgique	510	Hongrie	504	Pays-Bas	525	Suisse	512
Canada	534	Islande	491	Nouvelle-Zélande	530	Turquie	424
Rép. chèque	513	Irlande	508	Norvège	487	Royaume-Uni	515
Danemark	496	Italie	475	Pologne	498	États-Unis	489
Finlande	563	Japon	531	Portugal	474		
France	495	Corée	522	Rép. slovaque	488		

10) E sai a cosa si riferiscono questi dati, tratti dalla stessa fonte di prima?
Al numero medio di ore annue obbligatorie passate a scuola da uno studente di 15 anni (nel 2006).

Australie	Autriche	R. tch.	Danemark	Angleterre	Finlande	France	Allemagne	Grèce
968	1005	960	900	760	856	1033	900	1117
Hongrie	Islande	Irlande	Italie	Norvège	Portugal	Espagne	Suède	Turquie
763	888	802	1089	855	826	979	741	810

Richieste come per l'esercizio precedente.

11) Dimostra che $\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-M)^2+(x_2-M)^2+\ldots+(x_n-M)^2}{n}}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-M^2}$, nel caso $n=2$.

12) La quantità $\sqrt{\frac{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2}{n}}$ è minima quando $a=M=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Con un foglio elettronico, verifica questo fatto su di un esempio.

11. GLI ERRORI DI MISURA

Prendi un metro da muratore (di quelli pieghevoli, formati da più aste collegate da cerniere, totale 2 m) e prova a misurare, al centimetro, la lunghezza del corridoio della tua scuola.
Ripeti l'operazione più volte, segnando sempre su di un taccuino il valore ottenuto.

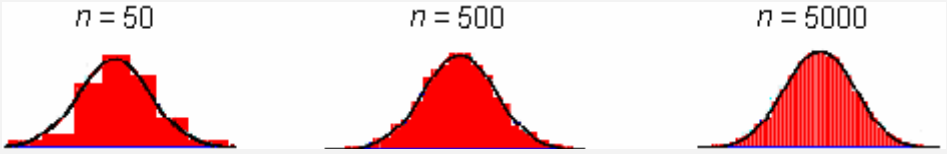
Certamente non otterrai la stessa misura ad ogni prova:
infatti, nel disporre il metro sul pavimento, ti capiterà di non iniziare esattamente dallo stesso punto, di riportare il metro non sempre con precisione quando devi spostarlo per ricollocarne un'estremità nella posizione alla quale eri giunto al passo precedente, di piegarlo leggermente, e così via.

Adesso coraggio, perché ho bisogno che tu faccia TANTE misurazioni, diciamo 100 (sono certo che i tuoi compagni di classe si presteranno a collaborare … ognuno potrebbe fare 4-5 misurazioni).

Ora hai a disposizione 100 numeri.
Può darsi che alcuni di questi numeri coincidano, ma in generale saranno invece un poco diversi fra loro.
Considera il minimo e il massimo valore rilevato, e suddividi l'intervallo $[x_{\min}, x_{MAX}]$ in un certo numero di sottointervalli, diciamo otto-dieci (in generale, se le misure sono n, si consiglia di far sì che il numero di intervalli non superi $\sqrt{n}$) : ad esempio, se la minima e la massima delle misure registrate sono state di m 23,92 e di m 24,11, avremo $24{,}11-23{,}92=0{,}19$ e questo intervallo di metri 0,19 (19 cm) potrà portarci a definire 10 sottointervalli di 2 cm ciascuno: [23,92; 23,94), [23,94; 23,96), [23,96; 23,98), ... , [24,10; 24,12) .
Ora, per ciascun sottointervallo, conta la rispettiva "frequenza", ossia conta il numero di misure, fra le 100 registrate, che cadono in quel sottointervallo; traccia, con un foglio elettronico, un istogramma con le *classi di misura* in *orizzontale* e le *frequenze* in *verticale*.

Potrai osservare che le misure "centrali" della distribuzione saranno in linea di massima più frequenti, e quelle estreme meno. In effetti, nell'atto pratico della misurazione, si commettono sempre **errori "casuali"** talvolta in difetto talvolta in eccesso, e **se il numero di misurazioni effettuate diventa alto**, **l'istogramma tenderà ad assomigliare a una curva "a campana"** detta "**gaussiana**" (F. Gauss, 1777-1855).

Ecco qui di seguito un "fumetto" di possibili configurazioni dell'istogramma delle frequenze al crescere del numero n di misure effettuate.



La **Gaussiana** è una curva la cui equazione è nientemeno che $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, dove:

$\pi=3{,}14159...$ (ben noto); $e=2{,}71828...$ (numero di Nepéro);
μ, σ sono due numeri fissi che, nel caso in cui la curva abbia a che fare con il problema da noi esaminato, ossia quello delle misure ripetute di una quantità (affette da errori "casuali" o "statistici"), sono interpretabili come rispettivamente la **media aritmetica** e lo **scarto quadratico medio che si otterrebbero facendo un numero colossale (= *tendente all'infinito*) di misure**.

Trovi la cosa complicata? In effetti, lo è … ☹
Questi studi richiedono nozioni matematiche più avanzate (la teoria delle "*distribuzioni di probabilità*") e non è facile, in una trattazione di carattere non specialistico, mantenere il discorso su di un livello che sia nel contempo accessibile e rigoroso …

… ma noi ci proviamo ☺.

Se le misurazioni effettuate, affette da errore casuale, sono tante (di solito, detto n il numero di misure, "tante" significa perlomeno $n>30$, ma alcuni Autori scrivono $n>50$ o $n>60$, altri $n>100$ … e insomma, più sono, meglio è), allora l'istogramma delle frequenze tende ad assomigliare ad una gaussiana;
e *quanto più* tale somiglianza sussiste, *tanto più*,

detta $\bar{x}$ la media di queste misure $\boxed{\bar{x}=\text{MEDIA}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}$

e detto s il loro scarto quadratico medio $\boxed{s=\text{S.Q.M.}=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}}}$,

sono corrette le affermazioni seguenti:

a) $\bar{x}$ **è un valore prossimo al vero valore della grandezza in questione, dove per "vero" valore si intende quello che si otterrebbe come media su di un numero enorme di misure**

b) circa il 68% delle misure effettuate rientra nell'intervallo $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$
circa il 95% delle misure effettuate rientra nell'intervallo $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$
circa il 99,7% delle misure effettuate rientra nell'intervallo $(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$

c) se facessi un'ulteriore misura, questa avrebbe
circa il 68% di probabilità di cadere nell'intervallo $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$
circa il 95% di probabilità di cadere nell'intervallo $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$
circa il 99,7% di probabilità di cadere nell'intervallo $(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$

Di solito, per misurare una grandezza fisica, si effettua un certo numero *n* di operazioni di misura, si calcolano la media $\bar{x}$ **e lo scarto quadratico medio** s **degli *n* valori così trovati, poi si scrive che la grandezza in gioco vale**

$$\bar{x} \pm s \ ,$$

dove per la piena comprensione di questa scrittura occorre tenere presenti le 3 considerazioni a), b), c).

Torniamo soltanto a ribadire alcuni concetti davvero fondamentali.

Affinché le affermazioni precedenti siano corrette, il numero *n* delle misure deve essere "GRANDE"…

Inoltre LE AFFERMAZIONI CONTENGONO DEGLI AVVERBI "CIRCA", NON SOLO PER IL FATTO CHE I VALORI 68%, 95%, 99,7% SONO TUTTI APPROSSIMATI, MA SOPRATTUTTO PER IL FATTO CHE SI STA PENSANDO AD UNA CONFIGURAZIONE PROBABILISTICA IDEALE ALLA QUALE SI TENDE AD AVVICINARSI (SENZA PERO' RAGGIUNGERLA) AL CRESCERE DI *n* .

La veridicità di a), b), c) è tanto maggiore quanto più $\bar{x}$ **(media delle *n* misure realmente effettuate) è prossimo a** μ **(vero valore della grandezza, media su un numero di misure che tende all'infinito) e quanto più *s* (s. q. m. delle *n* misure realmente effettuate) è prossimo a** σ **(s. q. m. su "infinite" misure); ed è all'aumentare del numero delle misure che effettivamente** $\bar{x}, s$ **tendono a identificarsi con** μ, σ **!!!**

ESEMPIO

Qui sotto riportiamo 96 misure in mm della larghezza della lavagna di un'aula, rilevate dai 24 studenti, che hanno effettuato 4 misurazioni ciascuno:

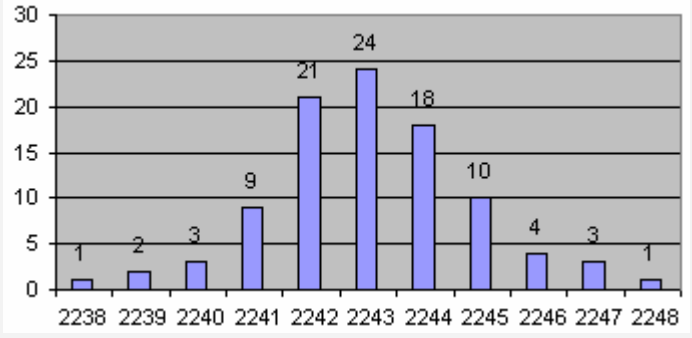
2242	2240	2244	2243	2244	2244	2242	2247	2244	2242	2246	2244	2241	2244	2242	2241	2244	2243	2242	2241
2242	2242	2243	2242	2246	2243	2245	2238	2246	2244	2244	2244	2243	2242	2245	2241	2243	2239	2244	2243
2245	2243	2247	2243	2244	2245	2242	2243	2245	2239	2246	2242	2243	2241	2244	2245	2244	2241	2242	2241
2243	2242	2243	2244	2243	2248	2243	2242	2241	2245	2243	2242	2240	2245	2244	2242	2243	2242	2241	2243
2243	2244	2243	2242	2245	2244	2243	2242	2243	2245	2242	2240	2243	2242	2243	2247				

Il calcolo ci dà

$$media = \bar{x} = 2243{,}06\ldots; \quad scarto\ quadratico\ medio = s = 1{,}79\ldots$$

Se ora andiamo a contare il numero di misure che sono comprese nell'intervallo $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$, vediamo che tali misure sono $21+24+18=63$.
Bene, 63 è assai prossimo al 68% di 96 (che vale circa 65). [vedi NOTA]

Ecco l'istogramma della distribuzione di frequenza, che in effetti presenta, pur con irregolarità, il tipico andamento "a campana".



NOTA - Per la precisione, quello che abbiamo inizialmente indicato come il 68% avrebbe potuto essere meglio approssimato come 68,3%, e il 95% come 95,4%. Oppure, si sarebbe potuto scrivere 95% ma sostituendo il fattore 2 con un più preciso 1,96.

Lo diciamo per scrupolo, e tuttavia insistiamo: **non dobbiamo confondere la configurazione probabilistica ideale, teorica, alla quale ci si avvicinerebbe se *n* tendesse a infinito, con la situazione reale, che è approssimata bene, ma non certo alla perfezione, quando *n* comincia ad esser >30, o meglio ancora >100.**

Un'ultima puntualizzazione.
La Statistica Inferenziale insegna che, per meglio stimare lo scarto quadratico medio σ relativo alle "infinite" misure, è più giusto calcolare lo scarto quadratico medio s del "campione di n misure" attraverso la formula "corretta" che si ottiene prendendo come denominatore $n-1$ anziché n:

$$\text{scarto quadratico medio "corretto"} = \hat{s} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot s$$

E' pur vero che **quando n è grande, scarto quadratico medio "corretto" e "non corretto" differiscono di pochissimo; e quando n non è grande, la teoria esposta non vale più!**
Già per valori di n dell'ordine di qualche decina, la differenza è assai piccola.
Ad esempio, con $n=30$, il fattore $\sqrt{n/(n-1)}$ vale $\sqrt{30/29}\approx 1{,}017$ che è molto vicino a 1!

In **EXCEL** e in **OPENOFFICE CALC**
lo **scarto quadratico medio "non corretto"** è **dev.st.pop()** mentre quello "**corretto**" è **dev.st()**

APPROFONDIMENTO (NON SEMPLICE): INTERVALLI DI CONFIDENZA, ERRORE STANDARD
In realtà, quando andiamo a calcolare la media $\bar{x}$ e lo scarto quadratico medio s
sulle n misure che abbiamo effettuato, il nostro interesse è puntato, più che a *quelle* particolari n misure,
al valore "*vero*" – che ci è sconosciuto – della grandezza in esame.
Ora, abbiamo già detto che quest'ultimo può essere pensato come
"quel valore μ che si otterrebbe come media su di un numero sterminato di misure".
Ma fino a che punto possiamo ritenere che la media $\bar{x}$ da noi calcolata sia prossima al "vero" valore μ?
La "statistica inferenziale" ci insegna che se noi effettuiamo una serie di n misure,
ed n è grande (certi Autori scrivono $n>30$, altri $n>50$ o 60, altri ancora $n>100$;
… in realtà … quanto stiamo dicendo tende ad essere tanto più veritiero quanto più n è alto),
allora, determinando per queste n misure la media $\bar{x}$ e lo scarto quadratico medio s,
il *vero* valore μ avrà una probabilità

- **del 68% circa di rientrare nell'intervallo** $\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
- **del 95% circa di rientrare nell'intervallo** $\left(\bar{x}-2\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+2\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
- **del 99,7% circa di rientrare nell'intervallo** $\left(\bar{x}-3\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+3\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

anche se per *maggiore precisione concettuale*, poiché il "vero valore" è … quello che è, è *costante*,
mentre *a variare è invece l'insieme delle n misure e con esso l'intervallo* che ne deriva
(è come se noi "estraessimo a sorte un intervallo, per poi domandarci se comprende o no il valore 'vero' "),
bisognerebbe piuttosto partire "dal punto di vista dell'intervallo", dicendo che

- **il 68% circa degli intervalli** $\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
  costruiti ciascuno facendo n misure e calcolandone i relativi $\bar{x}$ e s
  contiene al suo interno il "vero" valore (e il 32% circa lo lascia invece al suo esterno)
- **il 95% circa degli intervalli ecc. ecc.**
- **il 99,7% circa degli intervalli ecc. ecc.**

Questi intervalli di cui abbiamo parlato vengono chiamati "INTERVALLI DI CONFIDENZA".
Ad es., $\left(\bar{x}-3\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+3\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ **è un "intervallo di confidenza al 99,7%" per il vero valore della grandezza.**

Osserviamo l'uso del termine "confidenza" (= fiducia) al posto di "probabilità".

La quantità $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ viene detta "**ERRORE STANDARD DELLA MEDIA**" (brevemente: "errore standard"),
e, se n è grande, così come $\bar{x}$ è una buona approssimazione per μ, allo stesso modo s
è una buona approssimazione per σ e quindi $\frac{s}{\sqrt{n}}$ è una buona approssimazione per $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Il discorso è intrigante, ma complicato. RICAPITOLIAMO LE PREMESSE E LA SIMBOLOGIA.

Stiamo supponendo di ricercare il valore "vero" di una determinata grandezza, tramite una misura, anzi: tramite una serie di *n* misure, di cui faremo poi la media.

μ è il vero valore della grandezza. μ è incognito e viene approssimato con la media $\bar{x}$ delle *n* misure realizzate.

Se noi avessimo la possibilità di effettuare un numero grandissimissimissimo di misure, al tendere all'infinito di questo numero, la media delle misure tenderebbe a μ.

Ma noi per forza di cose ci dobbiamo accontentare delle nostre *n* misure.

n è grande, ma non colossale: prenderemo *n* almeno maggiore di 30, preferibilmente maggiore di 100 … tuttavia le nostre misure, pur essendo tante, saranno *n* e basta.

Calcoleremo dunque la media $\bar{x}$ e lo scarto quadratico medio s delle nostre *n* misure.

Bene, avendo preso *n* piuttosto grande abbiamo fiducia che $\bar{x}$ sia già una approssimazione piuttosto precisa per μ, e che s sia già prossimo a quello che sarebbe lo s. q. m. σ se noi potessimo effettuare "infinite" misure.

Possiamo anzi "quantificare" questa nostra "fiducia".

Se consideriamo, ad esempio, l'intervallo $\left(\bar{x}-2\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+2\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$,

la nostra fiducia che questo intervallo contenga μ è all'incirca del 95%, perché la Statistica Inferenziale insegna che, qualora andassimo a barbosissimamente effettuare 100 serie, o 1000 serie, … , di *n* misure ciascuna, calcolando per ognuna di queste il relativo $\bar{x}$ e il relativo s,

all'incirca il 95% degli intervalli $\left(\bar{x}-2\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+2\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ così costruiti conterrebbero μ.

Questo è tanto più vicino al vero quanto più *n* è grande, ma a partire da $n>30$ cominciamo già ad andar benino!

ESEMPIO

Prendiamo in prestito un esempio dal testo "**Essential medical statistics**" di B. R. Kirkwood e J. A. C. Sterne, dove ogni cosa è spiegata con calma, precisione, e ottimi riferimenti concreti (*hats off*, tanto di cappello!)

In realtà qui si ragiona in un ambito più generale del nostro.

Viene infatti esaminata non una singola grandezza misurata più volte, bensì una "*popolazione*" limitata (l'insieme delle 10000 case), nonché un suo "*campione*" (le 100 case che vengono visitate).

Ma lo stesso discorso fatto per le misure vale, nei suoi tratti essenziali, anche in questo contesto, perché si può osservare che la quantità di cui ci si sta occupando (la superficie da disinfestare nelle case) è uno degli svariati fenomeni della realtà che presentano una *Gauss-like distribution*, vale a dire: una distribuzione simile alla gaussiana.

Nell'ambito di un piano per l'eradicazione della malaria
si progetta di trattare con insetticida tutte le 10000 case di una certa area rurale.
Problema: quanto insetticida acquistare?
Per deciderlo, si estrae da quelle 10000 case un campione casuale di 100 case,
e le si ispeziona per misurare in ciascuna casa la superficie che richiede di essere bonificata.

In quelle 100 case la superficie media su cui spruzzare l'insetticida
risulta essere di $\bar{x}=24,2\ m^2$ *con uno scarto quadratico medio* $s=5,9\ m^2$.

Non è realistico a questo punto supporre che la superficie media $\bar{x}$ *rilevata nel campione di 100 case coincida con la media* μ *della superficie da disinfestare nell'intera "popolazione" delle 10000 case; tuttavia, è possibile valutare quanto sia da ritenere affidabile la media campionaria* $\bar{x}=24,2\ m^2$

se si va a calcolare l'errore standard, approssimabile con $\frac{s}{\sqrt{100}}=\frac{s}{10}=\frac{5,9}{10}=0,59\approx 0,6$.

A questo punto, infatti, si può dire che l'intervallo $(24,2\pm 0,6)\ m^2$ *ha una probabilità del 68% circa di contenere il valore incognito* μ *della media di tutta la "popolazione" delle 10000 case;*
e che l'intervallo $(24,2\pm 2\cdot 0,6)\ m^2=(24,2\pm 1,2)\ m^2$ *ha una probabilità del 95% circa di contenere* μ.

Allora l'intervallo $(24,2\pm 1,2)\ m^2$ *è un intervallo di confidenza al 95% per* μ *; se quindi ipotizziamo che questo intervallo contenga* μ *, abbiamo una probabilità del 95% circa di ipotizzare il vero.*

μ *dovrebbe perciò, al 95% di "confidenza", di "fiducia", non essere superiore a* $(24,2+1,2)\ m^2=25,4\ m^2$
per cui se acquistiamo una quantità di insetticida tale da poter coprire $25,4\cdot 10000\ m^2=254000\ m^2$
abbiamo il 95% di probabilità che questo sia sufficiente al bisogno.

Tutto il discorso fatto regge bene perché la numerosità del nostro campione (n = 100) è decisamente alta.
Coraggio, allora: abbiamo stimato quanto insetticida plausibilmente ci serve, andiamo a procurarcelo.

E se volessimo comprare l'insetticida sulla base di una confidenza del 99,7% circa?
Per quanti metri quadrati dovremmo attrezzarci? Fai tu il semplice calcolo: troverai circa $260000\ m^2$.

MEAN ± SD oppure MEAN ± SEM ???

Il ruolo dello *scarto quadratico medio* (**SD, Standard Deviation**) e quello dell'*errore standard della media* o semplicemente *errore standard* (**SEM, Standard Error of the Mean**) non devono essere confusi.

Sovente alcuni risultati, ad esempio in Medicina, vengono scritti con un'incertezza uguale al SEM, che è sempre per definizione minore della SD, proprio per dare l'idea di una minore variabilità … ma ciò può essere fonte di fraintendimenti gravi, se il lettore poi confonde questo SEM con la SD.

Cerco di spiegarmi. Supponiamo che una certa caratteristica quantitativa x relativa al sangue umano venga testata su di un campione di 400 individui presi a caso dalla popolazione generale, e si trovi che in questi individui la caratteristica in gioco vale 235 ± 42, essendo 235 la media calcolata sui 400 individui osservati, e 42 la SD delle 400 osservazioni.

Supponiamo inoltre che si sappia che la caratteristica studiata si distribuisce nella popolazione secondo la "campana" di Gauss o comunque una sua buona approssimazione (NOTA ♥)

Bene, se si scrive che la caratteristica in esame è stata osservata, in quel campione di 400 soggetti, con un valore dato da 235 ± 42 (*mean, SD*), allora un medico che legge l'articolo scientifico potrà dire:

> in quel campione di 400 persone, pressappoco il 95% aveva quel valore compreso fra $235 - 2 \cdot 42 = 151$ e $235 + 2 \cdot 42 = 319$, e siccome quel campione (essendo abbastanza numeroso) è un'immagine piuttosto fedele dell'intera popolazione, se si presenta da me un paziente che ha quel valore minore di 151 o maggiore di 319, sono portato a classificare quel caso come anomalo e tale da richiedere ulteriori indagini cliniche; se invece in un paziente il valore è esterno all'intervallo $235 \pm 2 \cdot 2{,}1$ (2,1 è il valore approssimato dell'Errore Standard della Media o SEM, che si desume da una SD di 42 con $n = 400$: $42 / \sqrt{400} = 42 / 20 = 2{,}1$), questo non mi preoccuperà affatto!
>
> Piuttosto, l'intervallo $235 \pm 2 \cdot 2{,}1$ è un *intervallo di confidenza* al 95% per x, nel senso che ha il 95% di probabilità di contenere il "vero valore" di x, ossia la media dei valori di x nell'intera popolazione.

Quindi

- ♪ il **SEM** mi interessa per valutare con quale probabilità un dato intervallo intorno alla media campionaria contenga la media dell'intera popolazione, ossia per la **STIMA DELLA MEDIA INCOGNITA** μ,
- ♫ mentre la **SD** mi interessa per quantificare la **DISPERSIONE delle rilevazioni NEL MIO CAMPIONE**, considerazioni che poi posso estendere tali e quali all'intera popolazione, perché, dato il numero elevato di elementi del campione e dato che erano stati estratti casualmente dalla popolazione, **il campione rappresenterà abbastanza fedelmente la popolazione intera**.

NOTA IMPORTANTE ♥

Questa richiesta è essenziale, perché

PARECCHI FENOMENI DELLA REALTA' PRESENTANO UNA "GAUSS-LIKE DISTRIBUTION", MA CIÒ NON VALE PER ALTRI!

Ad esempio, hanno una distribuzione più o meno sovrapponibile alla gaussiana

- gli errori di misura, come abbiamo visto (ma, a dire il vero, *non proprio sempre*)
- le distanze dal centro di un bersaglio per una serie di tiri
- i quozienti di intelligenza
- le altezze degli adulti di una stessa etnìa e sesso



… mentre per la distribuzione dei *pesi* delle persone la differenza rispetto alla gaussiana è già più marcata.

SINONIMO di "**DISTRIBUZIONE GAUSSIANA**" è "**DISTRIBUZIONE NORMALE**".

Le considerazioni sopra riportate possono rendere una prima idea di alcune fra le questioni di cui si occupa la

STATISTICA INFERENZIALE.

Essa **interviene quando si cerca di studiare una caratteristica dell'intera popolazione tramite osservazioni condotte su di un suo sottoinsieme ("campione"), e occorre quantificare il grado di attendibilità di questo procedimento**.

Come nei **sondaggi elettorali**.

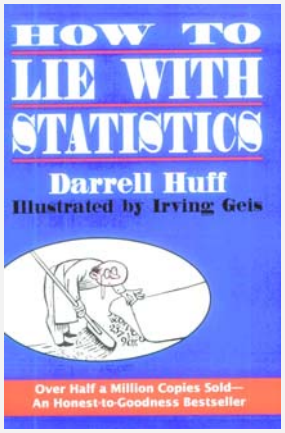
Come nelle **ricerche farmacologiche**, dove si va a confrontare l'evoluzione clinica di due gruppi di malati, a uno dei quali viene somministrata la sostanza attiva e all'altro, invece, un preparato inerte (il "*placebo*").

Come nei **test finalizzati a verificare** (in un determinato contesto) **la bontà di una ipotesi**.

La statistica inferenziale considera anche il caso in cui siano disponibili solo **piccoli campioni**.

Noi però, nei limiti del nostro corso, ci dobbiamo fermare ai pochi cenni dati, senza approfondire oltre.

How to Lie with Statistics



E' un libretto di divulgazione, scritto da Darrell Huff nel lontano 1954, che ha avuto uno straordinario successo di vendite, e conserva ancor oggi piena attualità.
Aiutandosi con garbate illustrazioni, passa in rassegna i modi attraverso i quali la pubblicità e la politica manipolano e presentano in modo parziale e distorto le statistiche, per spingere il consumatore o l'elettore a conclusioni sbagliate.

Il campione con l'errore incorporato

Alle interviste sulle letture abituali probabilmente la gente risponderà mentendo, almeno parzialmente, perché "confessare" letture frivole o imbarazzanti non fa fare bella figura. Analogo il discorso per l'igiene personale.
Poi le persone contattate hanno tendenza a dare quelle risposte che pensano possan far piacere a chi conduce l'intervista: l'autore riferisce, come esempio significativo, di un'analisi statistica a soggetto politico che aveva avuto esiti radicalmente diversi con intervistatori di pelle bianca o rispettivamente nera.
Le persone in una stazione ferroviaria sono rappresentative della popolazione generale? Probabilmente no: le madri di bambini piccoli, ad esempio, potrebbero scarseggiare in quel campione.
E gli incaricati a svolgere sondaggi per strada potranno tendere a scegliere persone più pulite o più gradevoli, o chi intuiscono sia più disponibile a rispondere, specie se devono terminare il loro compito in tempi ristretti.

La media ben scelta

Quando si parla di "media", in realtà ci si sta riferendo a una *media aritmetica*, a una *mediana* o a una *moda*?
Dire che lo stipendio medio annuo dei dipendenti di un'azienda è, poniamo, di 38.500 dollari, può essere comodo per i dirigenti. Ma questa media, che è l'ordinaria *media aritmetica*, è comprensiva anche dei compensi stratosferici dei pochissimi manager strapagati, e i sindacalisti potrebbero invece considerare come stipendio "medio" la *mediana* degli stipendi, pari a 20.000 dollari (in pratica: solo metà dei dipendenti percepisce uno stipendio superiore a 20.000 dollari, l'altra metà inferiore). E' possibile che dirigenza e sindacati usino dunque il medesimo termine "media", in relazione a indicatori ben diversi.

Quei piccoli numeri che non ci sono

E' purtroppo frequente che si utilizzino (senza segnalarlo), per un'indagine statistica, campioni troppo piccoli per poter dare risultati attendibili; che si ometta la specificazione del grado di "dispersione" dei dati …

Molto rumore per praticamente nulla

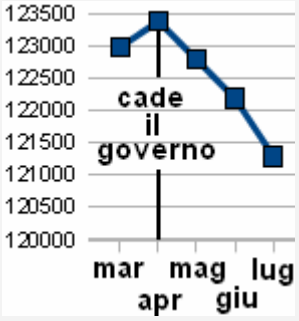
Del tutto inutile confrontare due dati non molto differenti fra loro, senza specificare quale sia l'intervallo di "incertezza" di questi dati! Oppure: se abbiamo l'elenco completo delle marche di sigarette in commercio, elencate per grado di pericolosità decrescente ma tutte pressappoco allo stesso livello di tossicità, è insensato e ingannevole pubblicizzare la marca che sta in fondo all'elenco dicendo che è la "più raccomandabile"!

Il grafico fantasmagorico

"Tagliare" in modo scaltro i grafici, e/o scegliere furbamente le lunghezze dei segmenti che rappresentano date quantità in orizzontale e in verticale, può favorire forti distorsioni nella percezione di chi osserva. Il diagramma in basso a sinistra nella pagina mira maliziosamente a suggerire che il numero di copie vendute da una rivista di politica sia crollato dopo la caduta del governo, mentre si è mantenuto pressoché stabile.

L'immagine monodimensionale

Rappresentare una quantità con ideogrammi ha un'insidia: se due raffigurazioni "in scala" di altezza una doppia dell'altra vengono utilizzate per illustrare il fatto che un certo valore è raddoppiato, l'osservatore ha comunque un'impressione diversa: l'area della seconda figura è *quadrupla* rispetto alla prima, e se anzi le figure vengono pensate come tridimensionali un raddoppio dell'altezza comporta un volume che è addirittura 8 volte tanto.
Quindi disegni di questo tipo possono essere impiegati per indurre la sensazione di una crescita (o diminuzione) più forte di quella reale. L'immagine in basso a destra dà un esempio di questo effetto psicologico.



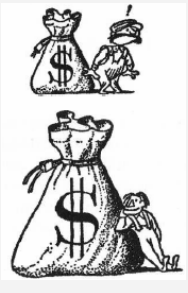
Tracollo … o sostanziale stabilità delle vendite?

Il numero pseudoconnesso

"Se qualcuno non può dimostrare ciò che vorrebbe dimostrare, può dimostrare qualcos'altro e far finta che sia la stessa cosa" …

Il vecchio *post hoc* ritorna in sella

Se B segue, in ordine di tempo, A, ciò non implica che A sia causa di B.
Nelle Nuove Ebridi si era convinti che i pidocchi facessero bene alla salute ☺; in realtà, è ben facile che una persona ammalata sviluppi la febbre, e l'aumento di temperatura … scaccia i pidocchi! Causa ed effetto completamente ribaltati.



Il signore il basso guadagna… il doppio, il quadruplo, o 8 volte tanto?

ALTRI MODI DI QUANTIFICARE L'INCERTEZZA DELLA MISURA (per la distinzione fra la parola "errore" - spesso adoperata impropriamente - e la parola "incertezza", vedi l'importante NOTA a pag. 421)

a) **SCARTO ASSOLUTO MEDIO (SCARTO MEDIO, DEVIAZIONE MEDIA, ERRORE MEDIO)**

Al posto dello scarto quadratico medio s, si può prendere lo "scarto assoluto medio" δ

ossia la **media dei valori assoluti degli scarti dalla media**: $\delta = \dfrac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$.

Si scriverà allora che la grandezza in esame vale $\bar{x} \pm \delta$

b) **SEMIDISPERSIONE (INCERTEZZA ASSOLUTA, ERRORE ASSOLUTO, ERR. MASSIMO)**

Effettuate le n misure $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e calcolata la media $\bar{x}$ di queste, si va a determinare la "semidispersione" (da alcuni detta "incertezza assoluta" o "errore assoluto" o "errore massimo")

cioè la **semidifferenza fra la più grande e la più piccola delle misure rilevate**: $d = \dfrac{x_{MAX} - x_{min}}{2}$

poi si scrive semplicemente che il valore della grandezza in questione è $\bar{x} \pm d$.

Questo metodo molto elementare della semidispersione viene impiegato più che altro QUANDO IL NUMERO DELLE MISURE A DISPOSIZIONE È BASSO O MOLTO BASSO.

La semidispersione è sovente indicata col simbolo Δx (naturalmente, se la grandezza è t, si userà Δt !)
Si legge "delta x"; quel Δ è un simbolo utilizzato, in questo e in altri casi, come "operatore di differenza".

c) **IL CASO DELLA MISURA UNICA, AD ES. PERCHE' LO STRUMENTO E' POCO SENSIBILE**

Quando, infine, lo strumento di misura è poco sensibile, cosicché gli errori "casuali" o "statistici" non emergono e si rileva dunque sempre la stessa, grossolana, misura; oppure anche quando l'operazione di misura viene effettuata una sola volta,

si scrive, detta $\bar{x}$ la misura trovata, che il valore della grandezza è $\bar{x} \pm a$,

essendo a l'**ampiezza** dell'**intervallo che corrisponde a due "tacche" consecutive del misuratore** (o la **semiampiezza** nel caso le tacche siano abbastanza distanziate).

In qualsiasi caso, l'incertezza dichiarata riguardo a una misura non dovrebbe mai essere inferiore a quella dovuta alla sensibilità dello strumento.

"*In generale, la presenza di errori casuali nella misura fa sì che l'errore statistico risulti maggiore dell'errore strumentale (la sensibilità dello strumento), ma talvolta può accadere il contrario! Si stabilisce allora che l'incertezza nelle misure è data dal maggiore tra questi due errori*"
(prof. Aurelio Agliolo Gallitto, Dipartimento di Fisica, Università di Palermo, http://portale.unipa.it)

Quando poi si è scelto quale tipo di incertezza (si trova spesso scritto, impropriamente: di *errore* ☹) si vuol scrivere accanto alla media delle misure, sarebbe bene **indicare questa scelta ESPLICITAMENTE**!

Vediamo un **ESEMPIO**.

40 misurazioni del periodo T di oscillazione di un pendolo hanno fatto registrare questi valori (in secondi):

4,80	4,82	4,84	4,83	4,79	4,83	4,86	4,86	4,82	4,83	4,87	4,88	4,87	4,89
4,83	4,75	4,86	4,82	4,84	4,87	4,81	4,78	4,85	4,86	4,84	4,79	4,84	4,88
4,85	4,80	4,84	4,85	4,89	4,85	4,83	4,79	4,84	4,81	4,85	4,84		

- La **media** delle misure è stata quindi $4{,}83625$, arrotondata a $4{,}84$
- la **semidispersione** è stata $0{,}07$ per cui potremo scrivere, tenendo conto di essa, $T = 4{,}84 \pm 0{,}07$
- lo **scarto assoluto medio ("errore medio")** è stato $0{,}0243125$ arrotondabile a $0{,}02$ o a $0{,}024$ per cui, tenendo conto di esso, $T = 4{,}84 \pm 0{,}02$ o in alternativa $T = 4{,}836 \pm 0{,}024$
- lo **scarto quadratico medio** è stato $s = 0{,}0309586...$ arrotondato a $0{,}03$ da cui $T = 4{,}84 \pm 0{,}03$ (verifica che la percentuale dei valori compresi fra $4{,}84 - 0{,}03$ e $4{,}84 + 0{,}03$ non si discosta molto dal 68%!)

Come si vede,

l'intervallo, intorno alla media, che si utilizza per esprimere il valore di una grandezza, dipende dal modo col quale viene espressa l'incertezza;
e la corretta interpretazione della scrittura " ... ± ... "
sarà legata alla conoscenza del significato delle varie quantità δ, d, a, s, $s/\sqrt{n}$
… tenendo in debito conto il numero di misure effettuate.



ERRORI RELATIVI / INCERTEZZE RELATIVE
(♥ noiosamente ribadiamolo: è brutta consuetudine ☹ della letteratura scientifica scrivere, tendenzialmente, la parola "errore" anche nei casi in cui il termine corretto sarebbe "incertezza")

L' "errore/incertezza relativo/a" è il quoziente, il rapporto, fra un errore/incertezza (di qualsiasi tipo!) e il valore della grandezza da misurare (valutato tramite la media delle misure rilevate; se tale valore fosse negativo, si intende di ignorarne il segno, cioè di prenderlo in valore assoluto).

Consideriamo nuovamente le 40 misure del periodo di un pendolo elencate a pag. 414.

- La media delle misure è stata $4{,}83625$, arrotondata a $4{,}84$
  La semidispersione è stata $0{,}07$, da cui la possibilità di scrivere $T = 4{,}84 \pm 0{,}07$.
  Dunque l'incertezza assoluta viene qui valutata in $0{,}07$:
  bene, l'incertezza relativa sarà allora all'incirca di $\frac{0{,}07}{4{,}84} \approx 0{,}014$.
  In forma percentuale, l'incertezza relativa è (circa) dell'$1{,}4\,\%$
- L'errore medio è stato $0{,}0243125$ arrotondato a $0{,}02$ per cui, tenendo conto di esso, $T = 4{,}84 \pm 0{,}02$:
  l'errore medio relativo è (circa) $\frac{0{,}02}{4{,}84} \approx 0{,}004$, e l'errore medio relativo percentuale circa dello $0{,}4\%$
- Lo scarto quadratico medio è stato $s = 0{,}0309586...$ arrotondato a $0{,}03$ da cui $T = 4{,}84 \pm 0{,}03$
  quindi lo **scarto quadratico medio relativo** - detto, come sappiamo, "**coefficiente di variazione**" -
  è (circa) $\frac{0{,}03}{4{,}84} \approx 0{,}006$, e lo scarto quadratico medio relativo percentuale è all'incirca dello $0{,}6\%$

L'incertezza relativa può essere impiegata per confrontare la precisione di misure di quantità diverse.

Ad esempio, se nella misura dell'altezza di una parete A c'è l'incertezza di 10 cm
mentre nella misura dell'altezza di un'altra parete B l'incertezza è di 20 cm,
non possiamo affermare che la misura di A sia più precisa di quella di B
se non conosciamo quanto valgono, all'incirca, le altezze di A e di B …
Poniamo che A sia una casa a due piani alta pressappoco 6 metri e B un grattacielo di circa 130 metri:
l'incertezza relativa su A sarà di $\frac{0{,}10}{6} \approx 0{,}017$ mentre l'incertezza relativa su B di $\frac{0{,}20}{130} \approx 0{,}0015$ (meno della decima parte della precedente!), quindi in questo caso va considerata di gran lunga più precisa la misura di B.

GLI ERRORI "SISTEMATICI"

Nel valutare la misura di una grandezza fisica,
oltre agli **errori "CASUALI" (detti anche "ACCIDENTALI" o "STATISTICI")**
(ossia: oltre agli errori **legati a circostanze *imprevedibili* e mai completamente controllabili**,
le quali possono influire sul risultato della misura *ora per difetto, ora per eccesso*),
si possono commettere anche errori cosiddetti **SISTEMATICI**.

Questi **influiscono sempre per difetto o sempre per eccesso sul valore rilevato**, e derivano:

- ❑ dall'**inadeguatezza dello strumento di misura** (esempi: un orologio che "ritardi", un termometro che con la propria temperatura vada a modificare in modo sensibile la temperatura dell'oggetto in esame …)
- ❑ dall'**uso non appropriato di tale strumento** (es.: dimenticarsi di "azzerarlo", quando ciò sia necessario)
- ❑ da **applicazione di leggi sbagliate o metodi sbagliati di indagine**
  (ad esempio cercare di determinare la profondità di un pozzo lasciandovi cadere una pietra e annotando dopo quanti secondi si sente "splash", per poi utilizzare la formula nota che regola spazi e tempi nella caduta dei gravi … ma senza tener conto che il suono dell'impatto con l'acqua ci mette a sua volta un certo tempo per salire dal fondo del pozzo alle nostre orecchie).

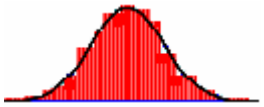
Gli errori sistematici possono essere individuati ed eliminati o perlomeno minimizzati, mentre sugli errori accidentali non possiamo far nulla
(a parte, è ovvio, cercare di effettuare l'operazione di misura con tutta l'attenzione di cui siamo capaci);
l'incertezza legata agli errori accidentali è ineliminabile: può solo essere quantificata coi metodi visti sopra, e ridotta facendo, se possibile, un numero elevato di misure.

Alcuni testi introducono come categoria a sé stante gli "**ERRORI DI SENSIBILITA'** ",
ossia quelli **legati alla sensibilità dello strumento**.
Se misuro la larghezza di un foglio di carta con un righello le cui tacche più ravvicinate siano quelle dei mm,
a ogni misura sarà comunque associata un'incertezza di $0{,}5$ mm (secondo alcuni, di 1 mm)

Gli errori casuali si presentano solo quando sono maggiori della sensibilità dello strumento!!!

ESERCIZI (risposte a pag. 426)

1) Calcola, per il seguente insieme di dati: 0 1 2 2 5
   a) la media …… b) la semidispersione …….. c) lo scarto assoluto medio ……
   d) la varianza …… e) lo scarto quadratico medio (arrotondato a 1 cifra dopo la virgola) ……

2) VERO O FALSO?
   a) "*Scarto quadratico medio*" e "*deviazione standard*" sono sinonimi
   b) Se effettuo tantissime misure di una grandezza G,
      e calcolo la loro media $\bar{x}$ e la loro deviazione standard s,
      nello scrivere $G = \bar{x} \pm s$ io intendo che l'intervallo da $\bar{x} - s$ a $\bar{x} + s$
      ha una probabilità del 68% circa di contenere il vero valore della grandezza
   c) La media $\bar{x}$ fra un numero elevato n di misure è una buona approssimazione del valore vero μ
      della grandezza, e se a questo punto faccio k misure in più e vado a calcolare la media fra tutte
      le $n + k$ misure, certamente tale nuova media sarà ancora più vicina al vero valore della grandezza
   d) Nella figura  che si riferisce alle ripetute misurazioni di una quantità fisica,
      le altezze dei rettangoli rappresentano le frequenze
   e) Nella stessa figura di prima, le basi dei rettangoli rappresentano le classi di misura
   f) Lo scarto quadratico medio "corretto" è minore di quello "non corretto"
   g) La funzione "scarto quadratico medio" (non corretto) si indica, nel foglio elettronico, con dev.st.()
   h) Per dimezzare l' "errore standard della media" occorre raddoppiare il numero delle misure

3) Sono state rilevate 625 misure. La media di queste è stata $\bar{x} = 152{,}4$ e lo scarto quadratico medio $s = 2{,}5$.
   a) Un intervallo nel quale rientrerà, pressappoco, il 95% delle misure effettuate è quello che va
      da …… a ……
   b) Un intervallo di confidenza al 95% per il vero valore della grandezza in esame
      (ossia, un intervallo che ha una probabilità intorno al 95% di contenere il vero valore della grandezza)
      è invece quello compreso fra …… e ……

4) La media fra 64 misurazioni di una grandezza risulta essere 173,5 e il loro scarto quadratico medio 2,3.
   a) Determina un intervallo nel quale dovrebbe rientrare pressappoco il 68% di questi 64 dati
   b) Determina un intervallo di confidenza al 68% per il valore della grandezza in esame

5) Misurando 80 volte il tempo di caduta di un grave da una data altezza, in secondi, sono stati trovati i valori:

43,3	41,2	42,5	42,4	43,4	43	44	42	41,6	40,8	42,4	44	43,8	42	43,4	42,2
42,8	41,5	44,5	43,3	42,5	44,2	41,8	42,4	42,2	43,2	42,2	41,8	42,1	43,1	41,7	42,1
42,8	44	43,3	42,7	44,3	44,1	41,4	42,5	42,8	42,8	43,1	42,1	43	42	42,2	42
42,5	41	43,6	43,3	42,9	43,2	42,3	42,9	42,3	41,8	42,2	42,7	41,3	44,4	42,8	42,8
42,1	40,9	43,7	43,6	43,4	43	42,4	44,3	41,7	43,7	42,7	43,4	42,3	42,1	43,3	42

Foglio elettronico!

   a) Esprimi quel tempo come $\ldots \pm \ldots$ utilizzando la deviazione standard e arrotondando media e dev. standard
      a 1 cifra dopo la virgola. Conta il numero di dati tra $\bar{x} - s$ e $\bar{x} + s$ e il numero di quelli tra $\bar{x} - 2s$ e $\bar{x} + 2s$.
   b) Determina un intervallo di confidenza al 95% (cosa significa?) per il valore della grandezza in esame.

6) Clicca sulla freccia per un altro esercizio di questo tipo, con 400 dati già pronti ⇨

7) Si vuole stimare l'età media in cui si presenta una data patologia.
I 400 pazienti seguiti da un famoso centro specializzato hanno contratto la malattia all'età media di 44 anni.
La distribuzione di queste 400 età è *Gauss-like*, con scarto quadratico medio uguale a 10 anni.
Se ne deduce allora che l'intervallo di età che va da … anni a … anni ha una probabilità valutabile intorno al 95% di contenere l'età media di insorgenza della malattia, qualora venisse calcolata sui malati di tutta Italia.
Si può anche dire che, in quel campione di 400 malati, pressappoco il 95% avrà contratto la malattia nell'intervallo di età che va da … anni a … anni;
e siccome il campione, piuttosto numeroso, rispecchia la popolazione generale, tale intervallo di età sarà anche quello entro il quale sviluppa la malattia il 95% circa degli italiani che si ammalano.

8) Dal sito www.regentsprep.org:
Battery lifetime is normally distributed (= segue la distribuzione *normale*, cioè *gaussiana*)
for large samples (*sample* = *campione*).
The mean lifetime is 500 days and the standard deviation is 61 days.
What percent of batteries have lifetimes longer than 561 days?



9) Supponi che in una grande città sudamericana sia stata rilevata l'altezza di 420 ragazzi quattordicenni, ottenendo una media di m 1,67 e uno scarto quadratico medio di cm 10.
Allora un intervallo di altezze che ha il 95% di probabilità di contenere l'altezza media di tutti i ragazzi di quell'età, residenti in quella città, è quello che va da ……. a …….

10) I moderni test per attribuire il cosiddetto "quoziente di intelligenza" (Q.I.) sono progettati in modo che nella curva, approssimativamente gaussiana, ottenuta disponendo in orizzontale i vari punteggi realizzabili e in verticale il numero di persone, tutte di una stessa età e, che hanno realizzato quella determinata fascia di punteggio, la media risulti uguale a 100 e la deviazione standard a 15.
In questo modo, pressoché il 95% delle persone della stessa età avrà un Q.I. che si collocherà fra … e …

11) Per una certa popolazione di rane allo stato naturale, si è visto che la lunghezza della vita è distribuita normalmente (cioè, segue una distribuzione gaussiana) con media 10 anni e deviazione standard di 3 anni (www.cli.di.unipi.it).
Quale percentuale di queste rane sopravvive oltre i 16 anni?



12) Sono state effettuate solo 5 misure, che hanno fornito gli esiti seguenti: 85 86,5 85,5 88 86
Se vogliamo esprimere il valore della grandezza con una scrittura del tipo ... ± ... , come faremo?

13) Misurando ripetutamente una grandezza sono stati trovati i valori
2,60 2,59 2,58 2,59 2,59 2,54 2,58.
a) Esprimi quella grandezza come ... ± ... utilizzando la semidispersione.
b) Se scriviamo $G = \bar{x} \pm d$, dove d è la semidispersione,
in generale siamo sicuri che tutte le osservazioni effettuate rientrino fra $\bar{x} - d$ e $\bar{x} + d$?

14) In un sito Internet troviamo che la misura di un dato tempo è $(3,27 \pm 0,02)\,s$ e che la misura di una data velocità è $(24,4 \pm 0,3)$ $(mean \pm SD)$. Ma nessuna delle due scritture è scientificamente corretta: perché?

15) Stabilisci quale delle due scritture seguenti esprime una misura di velocità più precisa:
$(3,24 \pm 0,04)\,m/s$ $(mean; SD)$; $(40,5 \pm 0,5)\,m/s$ $(mean; SD)$

16) Esprimendo un tempo come $(8,0 \pm 0,2)\,s$, qual è l'incertezza relativa percentuale?

17) Se si prendono i due insiemi di dati seguenti: a) 0 3 3 3 6 b) 0 1 2 3 4 per confrontarli, onde stabilire se i dati sono più "sparpagliati" nel primo caso o nel secondo, cosa occorrerebbe calcolare?

18) Lo scarto quadratico medio di n misure è risultato uguale a $2,0$ e calcolando l'errore standard della media si è ottenuto $0,1$. Quante misure sono state effettuate? ……

19) La tabella qui a destra riporta, in tre casi, il valore di una misura con a fianco l'incertezza da cui questo dato è affetto.
Stabilisci quale delle tre misure può essere considerata la più precisa.

a)	1,25	0,05
b)	10,0	0,3
c)	0,0040	0,0001

20) Una ditta produce camomilla in bustine da 5 grammi.
Si vuole controllare che non troppe bustine abbiano un peso sensibilmente diverso dal valore ottimale.
Pesando 40 bustine prodotte consecutivamente da un macchinario, si trovano i seguenti valori in grammi:

4,89	5,21	5,20	4,76	4,78	5,16	4,84	4,78	4,86	4,88
5,04	5,26	4,74	5,14	4,88	4,82	4,80	5,08	5,20	5,18
5,03	5,18	4,81	4,77	5,20	5,19	5,25	4,75	4,77	4,78
4,90	4,80	4,86	5,18	4,85	4,87	5,05	5,21	5,11	4,82



Quali sono la media e la deviazione standard di questo campione?
Se si è osservato che i dati in esame presentano una *Gauss-like distribution*, delle circa 48000 bustine prodotte in una giornata lavorativa, quante si può presumere che andranno a pesare non più di 4,60 grammi?

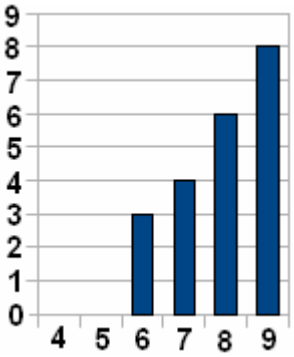
21) SOLO ALCUNE DISTRIBUZIONI SONO GAUSSIANE O *GAUSS-LIKE* , ALTRE NO!!!

Se consideriamo ad esempio la distribuzione dei *pesi delle persone*, o la distribuzione dei *tempi di attesa* dei clienti in una filiale bancaria, capiremo che *le differenze rispetto alla distribuzione normale sono notevoli*.

a) Spiega in che senso queste due distribuzioni, se confrontate con la normale, presentano una "coda verso destra" nella campana.

❑ Nelle **distribuzioni "non normali"** non si ha necessariamente la coincidenza fra media, moda, mediana.

b) Per fare un esempio semplice, quanto valgono media, mediana e moda nella distribuzione della figura a destra, relativa ai voti dati in una classe di 21 studenti da un insegnante generosissimo? ……. ……. …….



12. ARROTONDAMENTI E CIFRE SIGNIFICATIVE

E' assai comune nella vita quotidiana fare uso di *approssimazioni* di un valore "vero": quando dico "il mio appartamento è di 70 m^2", oppure "sono le 11 di sera", o "vado in ferie in un paesino di 200 abitanti", io per l'appunto "approssimo", "arrotondo", e in tutti questi esempi è evidente che lo faccio perché, in simili contesti, non ho bisogno di una precisione più elevata.
Ma anche nelle Scienze sperimentali, ad esempio in Fisica, l'approssimazione di valori numerici è la norma.

LA REGOLA PER ARROTONDARE

La **REGOLA** che si applica per l'arrotondamento di un numero è la seguente.

♪ **Se vengono trasformate in "0" tutte le cifre a partire da una certa cifra e verso destra, quando la prima cifra da trasformare in "0" è 0, 1, 2, 3 o 4, allora nell'arrotondamento la cifra precedente resta invariata;**

♫ **se invece la prima cifra da trasformare in "0" è 5 (ma vedi NOTA), 6, 7, 8 o 9, allora nell'arrotondamento la cifra precedente viene aumentata di un'unità.**

Esempi: l'arrotondamento di 12328 alle centinaia è 12300; quello di 0,1372 ai centesimi è 0,14

NOTA: l'arrotondamento "del banchiere" (banker's rounding, o round-to-even method)

Se la **prima cifra da mutare in 0** è **5**, e tale cifra è **l'ultima del numero**, oppure è **seguita solo da zeri**, allora il passaggio al "valore più vicino" potrebbe essere fatto indifferentemente per difetto o per eccesso, perché ad esempio il numero 1,235 ha la stessa distanza sia da 1,23 che da 1,24;
per questo motivo, nel caso in cui i numeri da sottoporre ad arrotondamento siano tanti, c'è chi preferisce procedere in modo un poco diverso dalla *regola* che abbiamo illustrato, ossia:

se la cifra che precede il 5 è pari, la si lascia invariata, mentre se è dispari, la si aumenta di un'unità.

In tal modo le approssimazioni per difetto e per eccesso così effettuate tenderanno a "bilanciarsi" (sui valori arrotondati secondo questa convenzione, metà circa lo saranno per difetto e metà per eccesso), e l'insieme di dati risentirà il meno possibile, globalmente, delle modifiche apportate.

Per esempio, volendo arrotondare ai centesimi	3,875	3,645	3,735	3,865
si scriverà rispettivamente	3,88	3,64	3,74	3,86

Col "banker's rounding", l'ultima cifra del numero arrotondato sarà sempre pari! (*even* = pari)

LE CIFRE SIGNIFICATIVE NELLE SCIENZE SPERIMENTALI

Nelle scienze sperimentali è frequentissimo avere a che fare con numeri dei quali conosciamo con certezza alcune cifre (le prime a sinistra), ma non tutte.

Sono allora "significative" tutte le cifre certe del numero, più la prima cifra incerta.
Questo come idea generale: occhio tuttavia alle specificazioni che seguono.

- Tutte le cifre diverse da 0 sono significative. Ad es., la misura di tempo 11,27 s ha 4 cifre significative.
- Gli 0 iniziali NON sono significativi. Ad esempio, la lunghezza 0,0000245 m ha 3 cifre significative.
- Gli 0 compresi fra cifre non nulle sono significativi.
  4,05 m/s è una velocità espressa con 3 cifre significative.
- Gli 0 finali vanno scritti soltanto se sono significativi,
  cioè corrispondono alla precisione effettivamente raggiungibile dallo strumento di misura.

  Mi spiego: cm 15,7 può denotare una misura rilevata con uno strumento che ha la precisione dei millimetri, mentre cm 15,70 significherà che lo strumento usato è in grado di apprezzare anche i decimi di millimetro.
  Ancora:
  scrivendo m 1350 per indicare una profondità marina, sottintendo che anche lo 0 finale sia significativo, ossia dichiaro di aver utilizzato una tecnica di misura che mi permetteva di valutare anche il singolo metro.
  Supponiamo invece che già la cifra 5 sia incerta
  (cioè, che le misurazioni effettuate non andassero oltre la precisione dei 10 metri):
  bene, dovrei allora scrivere $1{,}35\cdot10^3$ metri.
- Scrivere il numero in **NOTAZIONE ESPONENZIALE** permette di vedere bene le cifre significative (sono tutte e sole quelle del moltiplicatore della potenza di 10).

  Esempi:
  $0{,}000107 = 1{,}07\cdot10^{-4}$ (3 *cifre significative*) $\quad 5{,}4\cdot10^6$ (2 *cifre significative*)
  $5{,}40\cdot10^6$ (3 *cifre sign.; scrivendo così, si evidenzia che anche lo* 0 *è significativo* : 4 *è certa*, 0 *è incerto*)

QUALORA SI SIA FATTO UN CERTO NUMERO DI MISURE PER UNA DATA QUANTITÀ, IL VALORE DELLA QUANTITÀ IN ESAME SI ESPRIMERÀ FACENDO LA MEDIA $\bar{x}$ DELLE MISURE TROVATE, POI SCRIVENDO CHE LA GRANDEZZA IN GIOCO VALE $\bar{x} \pm \Delta x$, dove quel Δx è l'INCERTEZZA (di solito si trova scritto impropriamente: l'ERRORE) che associamo al valore $\bar{x}$, incertezza data dalla semidispersione, oppure dallo scarto quadratico medio o da un suo multiplo, ecc., come abbiamo spiegato nel paragrafo precedente.

Il simbolo Δ ("delta") è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età "delta *e*": $\Delta e = 47 - 15 = 32$.
Se considero, in Fisica, due istanti di tempo successivi t_1 e t_2, nei quali la velocità di un corpo è risp. v_1 e v_2, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'incremento di velocità $(>, <$ o $= 0)$ è dato da $\Delta v = v_2 - v_1$.

D'altra parte, **sia la media che l'incertezza subiscono sempre un ARROTONDAMENTO. Vediamo come**.

Andiamo a riprendere i dati sul periodo del pendolo. Le 40 rilevazioni avevano fornito i valori (in secondi):

4,80	4,82	4,84	4,83	4,79	4,83	4,86	4,86	4,82	4,83	4,87	4,88	4,87	4,89
4,83	4,75	4,86	4,82	4,84	4,87	4,81	4,78	4,85	4,86	4,84	4,79	4,84	4,88
4,85	4,80	4,84	4,85	4,89	4,85	4,83	4,79	4,84	4,81	4,85	4,84		

E' evidente che si era utilizzato un dispositivo in grado di apprezzare i *centesimi di secondo*.
La media di queste misure è 4,83625 , e lo scarto quadratico medio 0,0309586... . Bene!

Nelle scienze sperimentali di solito si osserva la prassi seguente:



a) L'INCERTEZZA Δx VIENE SEMPRE ARROTONDATA IN MODO CHE CONSERVI UNA CIFRA SIGNIFICATIVA SOLTANTO O AL MASSIMO DUE CIFRE SIGNIFICATIVE SE LA PRIMA DI ESSE È 1 (NOTA)

b) DOPODICHE' LA MEDIA DELLE MISURE SI ARROTONDA IN MODO CHE LA SUA CIFRA PIÙ A DESTRA (= LA CIFRA MENO SIGNIFICATIVA) ABBIA LO STESSO POSTO DECIMALE DELLA CIFRA MENO SIGNIFICATIVA PRESENTE NELL'INCERTEZZA Δx

Insomma, vanno bene $25,7 \pm 0,3$; 178 ± 4 ; $8,54 \pm 0,07$;
$0,483 \pm 0,016$ (*notare qui la cifra in più nell'incertezza*!)
ma *non* andrebbe bene invece $4,197 \pm 0,05$ oppure $27 \pm 0,4$

Di conseguenza, nel caso del pendolo da noi considerato,
a) **arrotonderemo l'incertezza**: $0,0309586... \rightarrow 0,03$ **in modo che conservi una sola cifra non nulla**;
b) **poi arrotonderemo la media** $4,83625 \rightarrow 4,84$ **in modo che la sua cifra più a destra abbia la stessa posizione decimale della cifra più a destra dell'incertezza** (nel nostro caso, i centesimi).
E scriveremo in definitiva che il periodo del nostro pendolo è di secondi $T = 4,84 \pm 0,03$.
Ribadiamolo: 0,03 è qui lo scarto quadratico medio, e il suo significato è di affermare che circa il 68% delle misure effettuate si trova nell'intervallo che ha centro la media e raggio 0,03 e che … ecc. ecc.

- Trovo come media 42,625 e come scarto quadratico medio 0,418 ?
  Bene, allora arrotondo lo scarto quadratico medio a 0,4 (in modo che rimanga 1 sola cifra significativa) e a questo punto arrotondo pure la media a 42,6 scrivendo il valore della grandezza come $42,6 \pm 0,4$
- Trovo come media 528,25 e come scarto quadratico medio 2,781 ?
  Bene, allora arrotondo lo scarto quadratico medio a 3 (in modo che rimanga 1 sola cifra significativa) e a questo punto arrotondo pure la media a 528 scrivendo il valore della grandezza come 528 ± 3
- Trovo come media 2,208 e come scarto quadratico medio 0,0331?
  Arrotondo allora lo scarto quadratico medio a 0,03 (in modo che rimanga 1 sola cifra significativa) e a questo punto arrotondo pure la media a 2,21 scrivendo il valore della grandezza come $2,21 \pm 0,03$
- Trovo come media 1,5257 e come scarto quadratico medio 0,0143?
  Arrotondo lo sc. q. m. a 0,014 (ho deciso di tenere 2 cifre significative perché la prima di esse è 1) e a questo punto arrotondo pure la media a 1,526 scrivendo il valore della grandezza come $1,526 \pm 0,014$
- Ho fatto poche misure. La loro media è 10584 e la loro semidispersione è $30 = 3 \cdot 10$.
  La semidispersione ha già una cifra significativa soltanto: va bene così com'è. Ma allora devo arrotondare la media alle decine, e scrivere il valore come 10580 ± 30 o meglio come $(1058 \pm 3) \cdot 10$

NOTA - *Non tutti sono concordi. Noi faremo così, ma alcuni accettano nell'incertezza fino a 2 cifre significative. Altri suggeriscono di usare due cifre significative se la prima cifra è bassa (c'è chi dice 1 o 2, c'è chi dice 1, 2, 3 o 4), altrimenti una. In effetti, se la prima cifra è piccola, eliminare con l'arrotondamento la seconda porterebbe ad una perdita di precisione ritenuta eccessiva anche per un'incertezza. Ma occorre trovare sempre un buon compromesso fra una ragionevole precisione, da una parte, e l'immediata leggibilità della scrittura, dall'altra.*

Supponiamo che un dato sperimentale *non* venga presentato sotto la forma $x \pm \Delta x$, ossia che **non venga specificata nessuna incertezza**: allora si intende che l'**incertezza** sia **implicita nell'ultima cifra**.
Il guaio è che tutto ciò non viene interpretato universalmente allo stesso modo!
Ad esempio, per alcuni 12,3 è da leggersi come $12{,}3 \pm 0{,}05$ ossia $12{,}25 < x < 12{,}35$;
per altri, 12,3 va letto come $12{,}3 \pm 0{,}1$ ossia $12{,}2 < x < 12{,}4$ ☹

ALTRI ESEMPI

$2{,}47 \pm 0{,}03241$ Qui l'incertezza non va bene, va riscritta con una sola cifra significativa: $2{,}47 \pm 0{,}03$

$48{,}57 \pm 0{,}3$ Qui è il valore che va riscritto. La scrittura dev'essere corretta in $48{,}6 \pm 0{,}3$ in maniera che l'ultima cifra della grandezza e l'ultima cifra dell'incertezza abbiano lo stesso posto decimale.

$3831{,}7 \pm 20$ Non va. L'incertezza è alle decine, quindi il valore va a sua volta arrotondato alle decine:
3830 ± 20 o meglio $(383 \pm 2) \cdot 10$

$18{,}79 \pm 0{,}33$ L'incertezza non va, dobbiamo ridurla a una sola cifra significativa.
Scriveremo $18{,}8 \pm 0{,}3$ arrotondando anche il valore della grandezza in modo che la sua ultima cifra a destra abbia ugual posto dell'analoga per l'incertezza.

$18{,}79 \pm 0{,}13$ Qui possiamo lasciare l'incertezza così com'è, con 2 cifre significative (quindi la scrittura va bene):
"l'incertezza Δx viene sempre arrotondata in modo che conservi 1 cifra significativa soltanto,
o al massimo due cifre sign. se la prima di esse è 1 (c'è chi dice: se la prima di esse è 'piccola')".
Questa eccezione viene accettata perché, se non si facesse così, in casi simili l'arrotondamento dell'incertezza sarebbe troppo "pesante" se rapportato con l'incertezza stessa.

ESERCIZIO (risposte a pag. 427)

1) Prendi in esame ciascuna delle seguenti scritture, per stabilire se è corretta o no.
In quest'ultimo caso, apporta le modifiche appropriate.

a) $x = 27{,}88 \pm 0{,}4$ b) $x = 35{,}73 \pm 0{,}42$ c) $x = 2{,}3 \pm 0{,}0531$ d) $x = 3{,}25 \pm 0{,}14$
e) $x = 7{,}342 \pm 0{,}079$ f) $x = 4532 \pm 50$ g) $x = 91{,}3 \pm 2$ h) $x = 0{,}50 \pm 0{,}01$

QUANTE CIFRE LASCIARE NEL RISULTATO DI UN CALCOLO SU DATI INCERTI?

Quando si fa una ADDIZIONE o una SOTTRAZIONE
fra numeri che derivano da misurazioni affette da incertezza, il risultato dovrà contenere lo stesso numero di CIFRE DOPO LA VIRGOLA dell'addendo che ne contiene di meno.

Facciamo qualche esempio.

- $9{,}57 + 12{,}3 + 2{,}001 = 23{,}871$ ma siccome l'addendo con meno cifre dopo la virgola ne contiene 1 sola, la somma 23,871 dev'essere arrotondata a 23,9
- $9{,}57 + 12 + 2{,}001 = 23{,}571$ però qui l'addendo con meno cifre dopo la virgola non ne ha nessuna per cui dobbiamo arrotondare la somma ottenuta alle unità e scriverla come 24
- $3{,}2 + 8{,}77 = 11{,}97$ che però dev'essere arrotondato a 12,0
(e il ",0" va conservato perché comunque la cifra 0 dopo la virgola è significativa)

Quando si fa una MOLTIPLICAZIONE o una DIVISIONE
fra numeri che derivano da misurazioni affette da incertezza, il risultato dovrà contenere lo stesso numero di CIFRE SIGNIFICATIVE del termine che ne contiene di meno.

Esempi.

- $7{,}081 \cdot 4{,}32 = 30{,}58992$
ma per conservare solo 3 cifre significative (quante ne ha il 2° fattore), siamo costretti ad arrotondare a 30,6
- $7{,}4 \cdot 1{,}43 = 10{,}582$
e tuttavia dovremo arrotondare in modo che le cifre significative siano solo 2 … scrivendo perciò 11
- $58{,}4 : 0{,}023 = 2539{,}13...$
… però il risultato non potrà essere scritto con più di 2 cifre significative (quante ne ha il divisore)
quindi andrebbe arrotondato a 2500, che tuttavia, scritto così, di cifre significative pare averne quattro …
… risolviamo l'inghippo scrivendo il quoziente in notazione esponenziale, come $2{,}5 \cdot 10^3$
- $4{,}02 \cdot 0{,}49754 = 2{,}0001108$ ma qui occorre fare in modo che nel risultato le cifre significative siano soltanto tre, come nel primo fattore. Bene: il risultato andrà allora scritto come 2,00

ESERCIZIO (risposte a pag. 427)

2) Considera le coppie *x*, *y* di dati seguenti. L'ultima cifra a destra è incerta.

a)	b)	c)	d)
$x=9,5$	$x=32,6$	$x=54,3$	$x=2,355$
$y=2,37$	$y=43$	$y=0,24$	$y=3,2$

E' richiesto di scrivere col numero corretto di cifre I) $x+y$ II) $x-y$ III) xy IV) $\frac{x}{y}$

LA "PROPAGAZIONE" DEGLI ERRORI, O MEGLIO: DELLE "INCERTEZZE"

NOTA
SULLA DISTINZIONE FRA "ERRORE" E "INCERTEZZA"



Cos'è l' ERRORE? E' la differenza (presa in valore assoluto) fra il valore approssimato, o il valore ricavato da una misura, e il valore vero.

Occhio … SI È PURTROPPO AFFERMATA L'INFELICE CONSUETUDINE DI CHIAMARE SBRIGATIVAMENTE E IMPROPRIAMENTE "ERRORE" ANCHE CIÒ CHE IN REALTÀ DOVREBBE ESSERE DENOMINATO "INCERTEZZA". ☹

Il termine "INCERTEZZA" denota

- **in senso stretto, una "maggiorazione dell'errore": se il valore approssimato o rilevato è *x* , insomma, e l'incertezza, intesa in questo modo, è *k* , allora il vero valore sarà compreso fra $x-k$ e $x+k$;**
- **in un'accezione più generale, il grado di indeterminazione cui è soggetto il valore che viene attribuito a una data quantità.**

Siano a, b due grandezze, e sia G una terza grandezza che derivi da un'operazione aritmetica su a, b . Allora:

- **L' incertezza della SOMMA $G=a+b$ è la somma delle incertezze da cui sono affetti gli addendi:** $\Delta G=\Delta a+\Delta b \;\; \text{se} \;\; G=a+b$

  Di solito questa regola viene enunciata impropriamente così ☹ :
  L'errore della somma è uguale alla somma degli errori degli addendi

- **La stessa identica regola vale per la differenza: l' incertezza della DIFFERENZA $G=a-b$ è la somma delle incertezze da cui sono affetti i termini:** $\Delta G=\Delta a+\Delta b \;\; \text{se} \;\; G=a-b$

- **L'incertezza del PRODOTTO $G=ca$ DI UN NUMERO COSTANTE $c>0$ PER UNA GRANDEZZA è il prodotto del numero fisso per l'incertezza della grandezza:** $\Delta G=c\Delta a \;\; \text{se} \;\; G=ca$

- **L' *incertezza relativa* (OCCHIO! RELATIVA, questa volta, non assoluta!) del PRODOTTO $G=a\cdot b$ è la somma delle *incertezze relative* dei fattori:** $\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b} \;\; \text{se} \;\; G=a\cdot b$

  Di solito questa regola viene enunciata impropriamente così ☹ :
  L'errore *relativo* del *prodotto* è la *somma* degli errori *relativi* dei fattori

- **Del tutto analoga a quella sul prodotto, e come essa basata sulle incertezze *relative*, è la regola per il QUOZIENTE $G=\frac{a}{b}$:** $\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b} \;\; \text{se} \;\; G=\frac{a}{b}$

- **Per la POTENZA $G=a^n$:** $\frac{\Delta G}{G}=n\frac{\Delta a}{a} \;\; \text{se} \;\; G=a^n$ valida anche se *n* è frazionario, ossia con le radici! $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

ESERCIZIO (risposte a pag. 427)

3) Considera le coppie *x*, *y* di dati seguenti; per ciascun dato è specificata l'incertezza da cui è affetto.

a)	b)	c)	d)
$x=9,5\pm0,5$	$x=32,6\pm0,4$	$x=54,3\pm0,8$	$x=2,355\pm0,006$
$y=2,37\pm0,03$	$y=43\pm1$	$y=0,24\pm0,02$	$y=3,2\pm0,1$

Determina le incertezze *assoluta* e *relativa* di: I) $x+y$ II) $x-y$ III) xy IV) x/y V) x^4 VI) $\sqrt{x}$

NOTA - In casi come questi, si fanno i calcoli intermedi con la totalità delle cifre; *soltanto alla fine* si arrotonda.

13. RISPOSTE AGLI ESERCIZI

RISPOSTE agli esercizi delle pagg. 360-361 (CONCETTI INTRODUTTIVI)

2) a) quant. discr. b) qual. sconn. c) quant. discr. d) quant. cont. e) quant. discr. f) qual. ord. g) qual. sconn. h) quant. discr., anche se poi è opportuno che i dati vengano ripartiti in "classi" (es.: *meno di 5000* abitanti …)

3e) "Mai": 33; 0,66; 66%; …

6)

Numero figli	Freq. ass.	Freq. rel.	Freq. perc.
0	8	8/40 = 0,2	20%
…	…	…	…

7) Molto+Abbastanza+Poco+Pochissimo = 12 + 5 + 5 + 2 = 24 ; 24 = 80/100 x (x = n° totale) da cui $x = 30$ e perciò Moltissimo = 30 – 24 = 6; Freq. rel. (Moltissimo) = 0,2; Freq. rel. (Molto) = 12/30 = 0,4; ecc.

8) La somma delle freq. rel. è sempre 1.
La freq. rel. della modalità rimanente è perciò $1-0,35-0,4-0,2=0,05$ che corrisponde a una perc. del 5%.

9) a) F b) F c) F d) F e) F

11) Ad esempio, per classi di 1 voto:

Classe di freq.	Freq. ass.
$4 \le x < 5$	1
…	…

… e per classi di ½ voto:

Classe di freq.	Freq. ass.
$4 \le x < 4,5$	0
…	…

12) Ad esempio, per classi di 7 giorni:

Classe di freq.	Freq. ass.	Freq. rel.	Freq. perc.
Da 1 a 7 gg.	8	0,17	17%
…	…	…	…

13) a) Sì b) Sì c) Sì d) No e) No (anche se si potrebbe inserire un rarissimo "4 o più") f) Sì g) No h) Sì

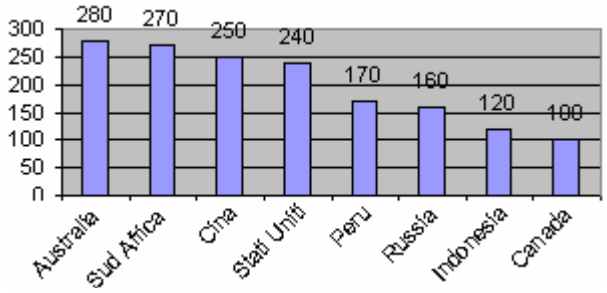
RISPOSTE agli esercizi delle pagg. da 380 a 385 (RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE)

1) Ad esempio, arrotondando all'intero, $\alpha°(Africa) = 996/6776 \cdot 360° \approx 53°$

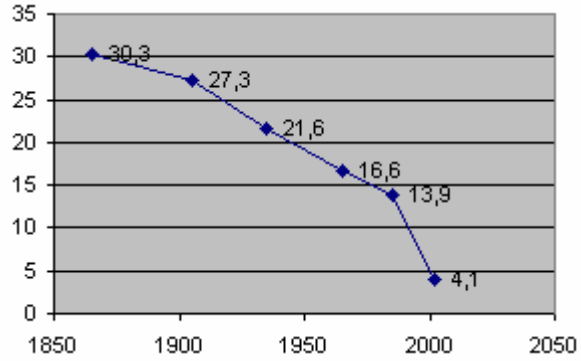
2) Ad esempio, arrotondando all'intero, $\alpha°(Ossigeno) = 46,6/100 \cdot 360° \approx 168°$

3) Si potrebbe prevedere una "fetta" unica per tutti gli elementi presenti in percentuale < 1%, o in tracce.

4)



6)

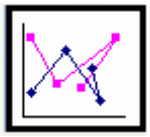


← Serie storica tracciata con Excel 2003

a) scegliendo Dispers. (XY)



b) poi "Dispersione con coordinate unite da linee"

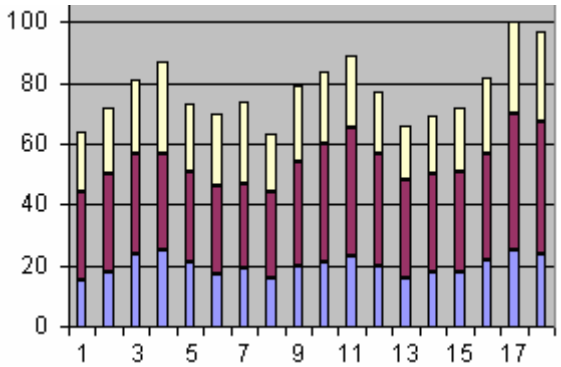


c) cliccando su "Etichette dati", quindi sul quadratino accanto a "Valori (Y)"



7) Si potrebbe, ad esempio, pensare alle classi:
da 45 km/h compresi a 50 km/h esclusi;
da 50 compresi a 55 esclusi; ecc.
Per contare il numero di dati di ciascuna classe, puoi ricorrere ad un uso accorto della funzione CONTA.SE, come spiegato a pag. 377.

8) In questo caso, la rappresentazione più "espressiva" è senz'altro quella del tipo "Istogramma in pila" →



9) a) 49 b) 7; 0,14 circa; 14% circa c) circa il 61% 10) 5; 0,19 (con arrotondamento); 19% (circa)

12) b) 10 080 000 circa c) perché diminuisce la natalità (fortissima discesa in 3ª colonna) ma simultaneamente la popolazione è in aumento (principalmente in quanto si vive mediamente più a lungo)

20) Guardando solo l'ideogramma, $\frac{2,5}{3}\cdot 100 \approx 83\%$. Coi numeri, più precisamente, $\frac{1212000}{1550000}\cdot 100 \approx 78\%$

21) Onestà e competenza = 42% circa … 22) 18 eccellenti (media non inferiore a 9) …

23) Ad esempio, il rettangolo più a sinistra ha base 4 e altezza 149,5

RISPOSTE agli esercizi delle pagg. da 400 a 405 (INDICI DI POSIZIONE)

1) Media leggerissimamente superiore a 6,7 (6,7045…); due "mode": 6,5 e 7,5; mediana = 6,75

2) Media leggerissimamente superiore a 1,9 ore (1,903…); mediana = 2; moda = 1,5

3) $\frac{1,78\cdot 5 + x}{6} = 1,80; \quad 8,90 + x = 10,80; \quad x = 1,90$

4) In generale, no: non coinciderà. Potrebbe eccezionalmente coincidere in casi particolari: ad esempio, se i gruppi hanno ugual numero di elementi, coincide.
Dimostra questo fatto per un caso particolare: ad esempio, considerando 6 dati $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.
Se questo insieme di 6 elementi viene spezzato in 2 gruppi di 3 elementi ciascuno, oppure in 3 gruppi di 2 elementi ciascuno, la media generale sarà senz'altro uguale alla media delle medie.

5) Non è possibile rispondere basandosi solo su questi dati!
Bisognerebbe infatti sapere quanti sono gli abitanti, o più precisamente gli aventi diritto al voto, in ciascuna delle due regioni, o almeno qual è il rapporto fra il loro numero nella regione A e nella regione B.

6) Stessa identica media! (25' 28")

7) a) *Media* $\approx 14,24$ giorni
b) La media *per classi* di 7 gg. non differisce di molto dalla media "normale": si trova infatti $\approx 14,04$ gg.

8) a) spesa minima 7,05 euro, spesa massima 254,50 euro b) spesa media individuale $\approx 50,53$ euro
e) La media "esatta" e quella "per classi" di 10 euro differiscono di pochissimo: facendo la media per classi si trova infatti esattamente 50,50 euro

9) Beh, la media esatta, no, ma la media per "classi", prendendo per ciascuna classe il suo valore centrale, sì. E, come abbiamo precedentemente visto su un paio di esempi e come si potrebbe verificare, la media così calcolata è una buona approssimazione della vera media.
Si ottiene nel nostro caso una media prossima a 9,78 euro.

10) Poco più di 13 euro 11) Media $\approx 8,59$ euro (arrotondando ai centesimi); mediana = 7,5; moda = 5

12) Media leggermente sup. a 11,4 anni; mediana = 11; moda = 12 13) Media $\approx 4,2$; mediana = 4; moda = 4

14) Voto finale da 0 a 10: ad esempio, $Voto\ Paolo = \frac{8\cdot 1 + 7\cdot 1,5 + 7\cdot 0,8 + 7\cdot 2 + 8\cdot 0,5}{1 + 1,5 + 0,8 + 2 + 0,5} \approx 7,26$

Per Serena e Martina si ottengono, arrotondando sempre a due cifre dopo la virgola, le medie seguenti: *Serena* $\approx 7,91$; *Martina* $\approx 7,62$. Certo, l'insegnante dovrà poi procedere a un arrotondamento ulteriore …

Voto finale dal 2 al 10: si tratta
I) di restringere la fascia da 0 a 10, in modo che al suo posto si abbia una fascia da 0 a 8
II) poi di traslare verso l'alto di 2 unità: $v' = \frac{4}{5}v + 2$, dove si determina prima v col metodo precedente.

15) $media_{min} \approx 4,14$

16) Sì, perché conoscendo la media e il numero dei dati è possibile risalire alla somma dei dati.
La somma di tutti i punteggi della II A è $7,25\cdot 22 = 159,5$ e quella dei punteggi di II B è $7,8\cdot 28 = 218,4$.
Quindi la somma dei punteggi riunendo insieme i 2 gruppi è $377,9$ e la media gen. è $377,9/50 = 7,558$

17) Cambierebbe la media aritmetica, ma mediana e classe modale resterebbero inalterate 18) 7,44

22) Sommando i tempi si ottiene 11h 29' 20", e sommando le distanze 396,5 km. La velocità media sull'intero tragitto è perciò $\frac{396,5\text{ km}}{11h\ 29'\ 20"} \approx \frac{396,5\text{ km}}{11,49\text{ h}} \approx 34,51\text{ km/h}$ [11h 29' 20" = 41360" = = 41360:3600 h ≈ 11,49 h]

23) *Media* $\approx 25,47$; *mediana* $= 25$; *moda* $= 25$

24) *Media* $= 57$ km/h; *mediana* $= 55,5$; *moda* $= 55$. Per classi (da 45 km/h a 49, da 50 a 54, …):
2 *classi modali*, $50 \le v \le 54$ *e* $55 \le v \le 59$; *classe mediana* $55 \le v \le 59$; *media per classi* $= 57$ km/h

25) Vedrai che uscirà come media un valore molto prossimo a 3,5.

26) *Media* $= 3,8$; *mediana* $=$ *moda* $= 4$ 27) *Media* (*per classi*) $\approx 2,60$; *cl. mediana* $=$ *cl. modale*: $2,5 \le x < 3$

29) $\approx 3,9$

30) Il problema sta nella genericità di quel "6 O PIÙ". Supponendo che il "6 o più" sia un 6, si ottiene nel 1961 una media di 3,48 componenti per famiglia; questa è dunque una stima per difetto. Per il numero approssimativo totale dei residenti basta moltiplicare il numero medio di componenti per famiglia per il numero delle famiglie, disponibile sull'ultima riga (che dà il numero di *migliaia* di famiglie relativo a quell'anno). Per il 2001, data la bassa percentuale di famiglie con "6 o più" componenti, la media calcolata sostituendo quel "6 o più" con 6 è più attendibile rispetto all'analoga per il 1961. Si ottiene, per il 2001, media $\approx 2,59$ componenti per famiglia e numero totale residenti vicino a 56.500.000.

31) Qui scriveremo i risultati arrotondandoli a 2 cifre decimali (se ne avevano più di 2). La REGOLA che applicheremo per l'arrotondamento di un numero è la seguente.

- ♪ Se vengono trasformate in "0" tutte le cifre a partire da una certa cifra e verso destra, quando la prima cifra da trasformare in "0" è 0, 1, 2, 3 o 4, allora nell'arrotondamento la cifra precedente resta invariata; es. $8,137105 \to 8,1$
- ♫ se invece la prima cifra da trasformare in "0" è 5, 6, 7, 8 o 9, allora nell'arrotondamento la cifra precedente viene aumentata di un'unità; es. $8,16 \to 8,2$

a) $M = 4$; $M_G \approx 3,35$; $M_A \approx 2,60$; $M_Q \approx 4,47$; b) $M = 1,2$; $M_G \approx 1,15$; $M_A \approx 1,11$; $M_Q \approx 1,26$;

c) $M \approx 0,58$; $M_G = 0,5$; $M_A \approx 0,43$; $M_Q \approx 0,66$

32) $x^3 = 30 \cdot 40 \cdot 50$ *da cui* $x = \sqrt[3]{30 \cdot 40 \cdot 50} = \sqrt[3]{60000} \approx 39,15$ (media geometrica delle dimensioni).

33) La risposta esatta è 150 km/h, ossia la media armonica $v = \dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{100} + \frac{1}{300}}{2}}$.

E' presumibile che il VIP non sia caduto nel tranello di utilizzare la media aritmetica perché conosceva già la risposta a questo quesito o comunque a quesiti simili; o anche perché, con la sua intelligenza "pratica", aveva capito immediatamente che la domanda era stata posta per metterlo in difficoltà, e quindi la risposta più "banale" (media aritmetica, 200 km/h) non poteva essere quella giusta. In ogni caso è stato bravo, e probabilmente non ha sfruttato direttamente la formula per la media armonica, ma ha ragionato in questo modo, dando allo spazio totale un valore "comodo per i calcoli": supponiamo che il percorso complessivo sia di 600 km; per fare i primi 300 ci si mette 3 ore, per fare gli altri 300 ci si impiega 1 ora. 4 ore in totale, 600 km, da cui 600:4 = 150 kilometri all'ora.

34) AH rappresenta la media geometrica di BH e HC, AM la media aritmetica.

35) Perché nel triangolo rettangolo AHM il cateto AH è sempre < dell'ipotenusa AM. Si avrebbe l'uguaglianza $AH = AM$ se i due segmenti fossero fra loro sovrapposti, il che avviene quando ABC è isoscele.

36) La media quadratica dei cateti. Infatti, per qualunque coppia di cateti, è (Teorema di Pitagora)
$\sqrt{PA^2 + PB^2} = \sqrt{P'A^2 + P'B^2} = \sqrt{P''A^2 + P''B^2} = AB = costante$.

Quindi è costante, per ogni coppia di cateti a, b, anche la quantità $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$ (media quadr.)

37) $v = \dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45}}{3}} = \dfrac{3}{\dfrac{35 \cdot 45 + 30 \cdot 45 + 30 \cdot 35}{30 \cdot 35 \cdot 45}} = \dfrac{3 \cdot 30 \cdot 35 \cdot 45}{1575 + 1350 + 1050} = \dfrac{141750}{3975} \approx 35,66$ (km/h)

E' la media armonica delle 3 velocità. Osserviamo che la risposta non dipende dalla lunghezza del percorso: se il circuito fosse stato di 5 km, o di 700 metri, avremmo ottenuto il medesimo risultato.

38) $\dfrac{30 + 35 + 45}{3}$ km/h $\approx 36,67$ km/h (media aritmetica delle tre velocità)

Osserviamo che la risposta non dipende dal tempo, nel senso che sostituendo a "5 minuti" un altro intervallo di tempo qualsiasi, la velocità media rimarrebbe sempre la stessa.

39) a) 6 km/h b) 1,8 km/h *Rifletti sul motivo della grande differenza rispetto alla risposta a)* ... 40) $\dfrac{24 + v}{2} = 27$; $24 + v = 54$; $v = 30$ km/h

41) $\dfrac{24 + v + v + v}{4} = 27$; $24 + 3v = 108$; $3v = 84$; $v = 28$ km/h *OPPURE*: $\dfrac{s}{t} = \dfrac{\frac{1}{4} \cdot 24 + \frac{3}{4} \cdot v}{1} = 27$; $\dfrac{3}{4}v = 21$; $v = 28$ km/h

42) $\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{24}+\frac{1}{v}}{2}}=27;\quad \dfrac{2}{\frac{1}{24}+\frac{1}{v}}=27;\quad \dfrac{2}{\frac{v+24}{24v}}=27;\quad \dfrac{48v}{v+24}=27;\quad 48v=27v+24\cdot 27;\quad 21v=648;\quad v\approx 30{,}86$

43) Nel 1° tratto di 6 km, velocità $=\dfrac{6\text{ km}}{\frac{1}{4}\text{ h}}=24\text{ km/h}\ \rightarrow\ \dfrac{1}{\frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{v}+\frac{1}{v}+\frac{1}{v}+\frac{1}{v}}{5}}=27;\ \ldots\ v\approx 27{,}87$ *OPPURE*: $\dfrac{s}{t}=\dfrac{6+24}{\frac{1}{4}+\frac{24}{v}}=27$ ecc.

44) Al termine del terzo anno il posseggo il 99,498% di ciò che possedevo inizialmente: ci ho quindi perso un pochino (leggermente più dello 0,5%)

46) Il tasso di interesse medio annuo è del 22,4745% circa (approssimazione per leggerissimo eccesso). In sé questo 22,4745 (approssimato) non rappresenta una media di alcun tipo, ma si può dire che 122,4745 (ammontare del debito dopo 1 anno, se la cifra iniziale era 100) rappresenta la media geometrica fra 100 e 150

47) $\cancel{p}\left(1-\dfrac{x}{100}\right)^2=0{,}5\cancel{p};\ 1-\dfrac{x}{100}=\sqrt{0{,}5};\ -\dfrac{x}{100}=\sqrt{0{,}5}-1;\ \dfrac{x}{100}=1-\sqrt{0{,}5};\ x=100\cdot\left(1-\sqrt{0{,}5}\right)\approx$

$\approx 100\cdot(1-0{,}707)=100\cdot 0{,}293=29{,}3$ La perdita di valore media annua è stata circa del 29,3%

48) $\dfrac{k}{\frac{\frac{k}{24}+\frac{k}{40}}{2}}=\dfrac{1}{\frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{40}}{2}}=\dfrac{2}{\frac{1}{24}+\frac{1}{40}}=\dfrac{2}{\frac{40+24}{24\cdot 40}}=\dfrac{2\cdot 24\cdot 40}{64}=30$ (*media armonica*)

49) Traccia innanzitutto CA, CB; $A\hat{C}B$ sarà di 90° perché inscritto in una semicirconferenza; per Euclide II°, o coi triangoli simili, si ha allora

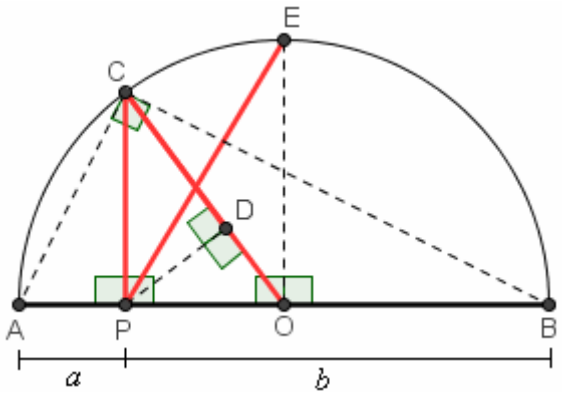
$PC=\sqrt{AP\cdot PB}=\sqrt{ab}=M_G(a,b)$.

Poi: $OC=r=AB/2=(a+b)/2=M(a,b)$;

$DC:PC=PC:OC$ (*PDC simile con OPC*) $\rightarrow$

$\rightarrow DC=\dfrac{PC^2}{OC}=\dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\dfrac{1}{\frac{a+b}{ab}}=\dfrac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}=M_A(a,b);$

…



RISPOSTE agli esercizi delle pagg. 406-407 (INDICI DI DISPERSIONE)

1) a) I) campo di variabilità = 6 II) scarto ass. medio = 1,6 III) deviaz. st. = 2 IV) coeff. di variaz. = 0,5

b) I) campo di var. = 1 II) scarto ass. medio = 0,32 III) deviaz. st. = 0,4 IV) coeff. di variaz. = 1/3

c) I) c. var. = 3/4 II) scarto ass. medio = 5/18 III) dev. st. = $\sqrt{7/72}\approx 0{,}3118$ IV) coeff. var. $\approx$ 0,5345

2) Senza dubbio è preferibile "scarto assoluto medio" (= la media degli scarti, presi in valore assoluto). "Scarto medio", per la smania di abbreviare evitando un aggettivo, in realtà pretende che il lettore questo aggettivo lo tenga presente molto bene, perché la media degli scarti "e-basta" sarebbe 0! "Scarto medio assoluto", se presa alla lettera, vorrebbe dire che calcolo la media degli scarti (ottenendo 0), poi di questa media faccio il valore assoluto: risultato finale 0.

3) Sono pressappoco uguali (coeff. di var.: $\approx 0{,}044$ e $\approx 0{,}045$), con una leggerissima prevalenza per il piede.

4) I due coefficienti di variazione, soprattutto; e anche i due campi di variabilità, rapportati alle rispettive medie.

5) *media* $\approx 20{,}85$; *sc. q. m.* $\approx 16{,}44$; *media per classi di* 3 *anni* $\approx 20{,}92$; *media per cl. di* 5 *anni* $\approx 20{,}69$

6) Il più "regolare" è lo studente C che, a parità di media, ha avuto scarto quadratico medio inferiore

7) I padri, il cui coefficiente di variazione è maggiore, sono stati i più disomogenei

11) Ad esempio una catena dimostrativa potrebbe essere la seguente:

$$\sqrt{\frac{(x_1-M)^2+(x_2-M)^2}{2}}=\sqrt{\frac{x_1^2-2Mx_1+M^2+x_2^2-2Mx_2+M^2}{2}}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+\frac{2M^2-2Mx_1-2Mx_2}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+M^2-Mx_1-Mx_2}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+M^2-M(x_1+x_2)}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+M^2-M\cdot 2M}=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-M^2}$$

RISPOSTE agli esercizi di pag. 416-417 (ERRORI DI MISURA)

1) a) $\frac{0+1+2+2+5}{5}=2$ b) $\frac{5-0}{2}=2,5$ c) $\frac{|0-2|+|1-2|+|2-2|+|2-2|+|5-2|}{5}=\frac{2+1+0+0+3}{5}=\frac{6}{5}=1,2$

d) $\frac{(0-2)^2+(1-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2+(5-2)^2}{5}=\frac{4+1+0+0+9}{5}=\frac{14}{5}=2,8$ e) $\sqrt{2,8}\approx 1,7$

2) a) V

b) F. Scrivendo $G=\bar{x}\pm s$, con $\bar{x}$ media e s scarto quadratico medio, intendo che pressappoco il 68% delle misure effettuate rientra in quell'intervallo.

Detto *n* il numero delle misure eseguite, è invece l'intervallo (molto più piccolo) di estremi $\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}$, quello che ha circa il 68% di probabilità di contenere il vero valore della grandezza in esame

c) F (*probabilmente*, non "certamente") d) V e) V f) F g) F: *dev.st.pop*() h) F: *quadruplicarlo*

3) a) da $152,4-2\cdot 2,5=152,4-5=147,4$ a $152,4+2\cdot 2,5=152,4+5=157,4$

b) fra $152,4-2\cdot\frac{2,5}{\sqrt{625}}=152,4-2\cdot\frac{2,5}{25}=152,4-2\cdot 0,1=152,4-0,2=152,2$ e $152,4+0,2=152,6$

4) a) Tra 171,2 e 175,8 b) Arrotondando $2,3/\sqrt{64}=0,2875$ a $0,3$, si ottiene l'intervallo da 173,2 a 173,8

5) a) $\bar{x}\approx 42,7;\ s\approx 0,9$. Quindi scriveremo $(42,7\pm 0,9)$ *secondi*.
Il significato della scrittura è che circa il 68% delle misure dovrebbe essere compreso tra $42,7-0,9$ e $42,7+0,9$ (estremi esclusi). Se vai a contare il numero di valori nell'intervallo $(42,7-0,9\ ;\ 42,7+0,9)$ ossia $(41,8\ ;\ 43,6)$ ne troverai 53; ora, $53/80=0,6625$ che è prossimo a 0,68 (68%) in accordo con quanto detto. Invece i valori tra $\bar{x}-2s$ e $\bar{x}+2s$, ossia tra $42,7-1,8=40,9$ e $42,7+1,8=44,5$ sono 77 e $77/80=0,9625$ che è vicino al 95% (0,95) della teoria.

b) Il valore di $s/\sqrt{n}=s/\sqrt{80}$ è $\approx 0,1$. Allora un intervallo di confidenza al 95% per il valore della grandezza è quello di estremi $42,7\pm 2\cdot 0,1=42,7\pm 0,2$. Ciò significa che tale intervallo $(42,5\ ;\ 42,9)$ ha una probabilità del 95% circa di contenere il valore sconosciuto del tempo di caduta in esame.

7) da 43 a 45 anni; da 24 a 64 anni 8) Circa il $(100\%-68\%)/2=16\%$

9) Un intervallo che ha il 95 % di probabilità di contenere l'altezza media di tutti i ragazzi di quell'età, residenti in quella città, è quello che va da cm $167-2\cdot 10/\sqrt{420}\approx 166$ a cm $167+2\cdot 10/\sqrt{420}\approx 168$

10) fra 70 e 130 11) $16=10+2\cdot 3$ quindi la distanza dalla media è di 2 dev. st.: circa il $(100\%-95\%)/2=2,5\%$

12) Quando le misure sono poche, si utilizza preferibilmente la semidispersione d. In questo caso, $d=1,5$ mentre la media delle misure è 86,2; si scriverà il valore della grandezza come $\bar{x}\pm d=86,2\pm 1,5$

13) a) Si ottiene $2,58\pm 0,03$ con un arrotondamento ai centesimi per $\bar{x}$

b) La scrittura $2,58\pm 0,03$ che utilizza la semidispersione dà un'informazione di facile leggibilità sulla media delle misure rilevate e sull'intervallo nel quale approssimativamente si sono distribuite, ma osserviamo che comunque IN GENERE NON TUTTE le misure rientrano nell'intervallo così determinato.
In questo esempio, la misura più piccola è esterna all'intervallo; nel precedente, lo era la misura più grande.

14) La 1^a non è corretta perché non viene specificato di che tipo è l'incertezza; nella 2^a manca l'unità di misura.

15) 1^a scrittura : *incertezza rel.* $=\frac{0,04}{3,24}=\frac{1}{81}$; 2^a scrittura : *incert. rel.* $=\frac{0,5}{40,5}=\frac{1}{81}$. Sono precise allo stesso modo!

16) $0,2/8,0=0,025$. L'incertezza relativa percentuale è del 2,5%

17) I due "coefficienti di variazione" (rapporti fra scarto quadratico medio e media). E' minore quello del caso a).

18) $2,0/\sqrt{n}=0,1;\ \sqrt{n}=20;\ n=400$

19) Le rispettive incertezze relative sono: 0,04; 0,03; 0,025. La misura più precisa è dunque la c).

20) La differenza fra 4,97 (media) e 4,60 è 0,37, vicina al doppio dello scarto quadratico medio che è circa 0,18. Fermo restando che il campione di bustine esaminate è un po' piccolino ai fini di una stima attendibile delle condizioni di tutto l'insieme delle bustine prodotte in una giornata, possiamo presumere che sulle ≈ 48000 peserà non più di 4,6 grammi una percentuale prossima alla metà del 5%, che corrisponde a 1200 bustine.

21) a) Distribuzione con "coda verso destra"  (*positively skewed*) ⇨ b) *media* $\approx 7,9$; *mediana* $=8$; *moda* $=9$

RISPOSTE agli esercizi delle pagg. 420-421 (ARROTONDAMENTI E CIFRE SIGNIFICATIVE)

1) a) NO. $x = 27{,}9 \pm 0{,}4$ b) NO. $x = 35{,}7 \pm 0{,}4$ c) NO. $x = 2{,}30 \pm 0{,}05$ d) SI'
e) NO. $x = 7{,}34 \pm 0{,}08$ f) NO. $x = 4530 \pm 50 = (453 \pm 5) \cdot 10$ g) NO. $x = 91 \pm 2$ h) SI'

2) a)
$x + y = \cancel{11{,}87}\ 11{,}9$
$x - y = \cancel{7{,}13}\ 7{,}1$
$xy = \cancel{22{,}515}\ 23$
$x / y = \cancel{4{,}008}\ldots\ 4{,}0$

b)
$x + y = \cancel{75{,}6}\ 76$
$x - y = \cancel{-10{,}4}\ -10$
$xy = \cancel{1401{,}8}\ \cancel{1400}\ 14 \cdot 10^2$
$x / y = \cancel{0{,}758}\ldots\ 0{,}76$

c)
$x + y = \cancel{54{,}54}\ 54{,}5$
$x - y = \cancel{54{,}06}\ 54{,}1$
$xy = \cancel{13{,}032}\ 13$
$x / y = \cancel{226{,}25}\ \cancel{230}\ 23 \cdot 10$

d)
$x + y = \cancel{5{,}555}\ 5{,}6$
$x - y = \cancel{-0{,}845}\ -0{,}8$
$xy = \cancel{7{,}536}\ 7{,}5$
$x / y = \cancel{0{,}73593}\ldots\ 0{,}74$

3) a) I) assoluta: $\cancel{0{,}53}\ 0{,}5$ relativa: $\cancel{0{,}04465}\ldots\ 0{,}04$ II) assoluta: $\cancel{0{,}53}\ 0{,}5$ relativa: $\cancel{0{,}07433}\ldots\ 0{,}07$
III) relativa: $\cancel{0{,}06528}\ldots\ 0{,}07$ assoluta: $\cancel{1{,}47}\ 1{,}5$ IV) relativa: $\cancel{0{,}06528}\ldots\ 0{,}07$ assoluta: $\cancel{0{,}2617}\ldots\ 0{,}3$
V) rel.: $\cancel{0{,}21052}\ldots\ 0{,}2$ ass.: $\cancel{1714{,}75}\ 1700 = 1{,}7 \cdot 10^3$ VI) rel.: $\cancel{0{,}02631}\ldots\ 0{,}03$ ass.: $\cancel{0{,}08111}\ldots\ 0{,}08$

b) I) assoluta: $1{,}4$ (NOTA 1); relativa: $\cancel{0{,}01851}\ldots\ 0{,}02$ (NOTA 2)

NOTA 1

Abbiamo detto che nelle scienze sperimentali si solito si osserva la prassi seguente:

L'incertezza Δx viene sempre arrotondata in modo che conservi una cifra significativa soltanto O AL MASSIMO DUE CIFRE SIGNIFICATIVE SE LA PRIMA DI ESSE È 1

Avevamo poi specificato che non tutti sono concordi in questo.
Alcuni accettano nell'incertezza fino a due cifre significative; altri suggeriscono di usare due cifre significative se la prima cifra è bassa (c'è chi dice 1 o 2, c'è chi dice 1, 2, 3 o 4), altrimenti una.

In effetti, se la prima cifra è piccola, eliminare con l'arrotondamento la seconda porterebbe ad una perdita di precisione ritenuta eccessiva anche per un'incertezza.

Vediamo di spiegarci con un esempio.
Se arrotondo $8{,}4$ a 8, come si deforma il mio valore?
Di poco, perché cambia di 0,4; e $0{,}4/8 = 0{,}05$: cambia quindi del 5%.

Se invece arrotondo $1{,}4$ a 1, qual è la perdita in precisione? E' $0{,}4/1 = 0{,}4$ che corrisponde addirittura al 40%.

Ecco perché **se la prima cifra è piccola**
(noi abbiamo scelto di considerare tale solo la cifra 1,
altri fanno rientrare nelle cifre "basse" anche il 2, qualcuno si spinge fino al 3 e al 4)
è ragionevole mantenere 2 cifre significative:
la compattezza del dato ne risente un poco, ma si evita una perdita di precisione "importante" in percentuale.

NOTA 2

E' vero che la prima cifra significativa dell'incertezza relativa comincia qui con 1,
e che in questo caso avevamo scritto di tenere due cifre significative anziché una,
ma di fronte al valore $0{,}01851\ldots$ non sembra comunque opportuno fare questa scelta (che porterebbe a 0,019),
perché con l'arrotondamento a 0,02 alteriamo di ben poco, in percentuale, il numero 0,01851…
e in compenso otteniamo una leggibilità decisamente maggiore.

In generale **si incoraggia a usare il "buon senso" in queste scelte se arrotondare o no**, badando,

- ♪ da una parte, che il valore arrotondato non sia molto diverso, in percentuale, rispetto al valore originario,
- ♫ dall'altra alla compattezza e facile leggibilità dell'espressione

e **tenendo sempre presente il contesto**:

- ❑ in che modo sono stati rilevati i dati sperimentali?
- ❑ di che tipo è l'incertezza?
- ❑ che finalità ha il nostro studio, o a chi è rivolta la nostra esposizione?

II) assoluta: $1{,}4$ relativa: $\cancel{0{,}13461}\ldots\ 0{,}13$ III) relativa: $\cancel{0{,}03552}\ldots\ 0{,}04$ assoluta: $\cancel{49{,}8}\ 50 = 5 \cdot 10$
IV) relativa: $\cancel{0{,}03552}\ldots\ 0{,}04$ assoluta: $\cancel{0{,}02693}\ldots\ 0{,}03$
V) rel.: $\cancel{0{,}04907}\ldots\ 0{,}05$ ass.: $\cancel{55433{,}5616}\ \cancel{60000}\ 6 \cdot 10^4$ VI) rel.: $\cancel{0{,}00613}\ldots\ 0{,}006$ ass.: $\cancel{0{,}03502}\ldots\ 0{,}04$

c) I) assoluta: $\cancel{0{,}82}\ 0{,}8$ relativa: $\cancel{0{,}01503}\ldots\ 0{,}015$ II) assoluta: $\cancel{0{,}82}\ 0{,}8$ relativa: $\cancel{0{,}01516}\ldots\ 0{,}015$
III) relativa: $\cancel{0{,}098}\ldots\ 0{,}1$ assoluta: $\cancel{1{,}278}\ 1{,}3$ IV) relativa: $\cancel{0{,}098}\ldots\ 0{,}1$ assoluta: $\cancel{22{,}1875}\ 20 = 2 \cdot 10$
V) rel.: $\cancel{0{,}05893}\ldots\ 0{,}06$ ass.: $\cancel{512329{,}6224}\ \cancel{500000}\ 5 \cdot 10^5$ VI) rel.: $\cancel{0{,}00736}\ldots\ 0{,}007$ ass.: $\cancel{0{,}05428}\ldots\ 0{,}05$

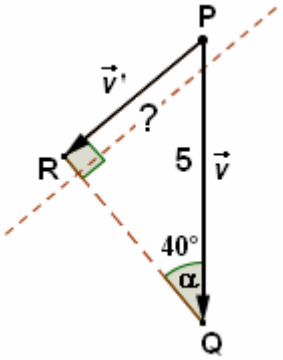
d) I) assoluta: $\cancel{0{,}106}\ 0{,}11$ relativa: $\cancel{0{,}01908}\ldots\ 0{,}02$ II) assoluta: $\cancel{0{,}106}\ 0{,}11$ relativa: $\cancel{0{,}12544}\ldots\ 0{,}13$
III) relativa: $\cancel{0{,}03379}\ldots\ 0{,}03$ assoluta: $\cancel{0{,}2547}\ 0{,}3$ IV) relativa: $\cancel{0{,}03379}\ldots\ 0{,}03$ assoluta: $\cancel{0{,}02487}\ldots\ 0{,}02$
V) relativa: $\cancel{0{,}01019}\ldots\ 0{,}01$ assoluta: $\cancel{0{,}31346}\ldots\ 0{,}3$ VI) rel.: $\cancel{0{,}00127}\ldots\ 0{,}0013$ ass.: $\cancel{0{,}00195}\ldots\ 0{,}002$

INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

1. SENO, COSENO E TANGENTE DI UN ANGOLO: UN PRIMO APPROCCIO

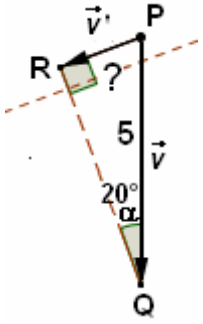
NOTA - In questo capitolo utilizzeremo ♥ il PUNTO, anziché la virgola, come separatore per i decimali

Il vettore $\overrightarrow{PQ}=\vec{v}$ in figura ha modulo 5; l'ampiezza dell'angolo α è di 40°. Quanto misurerà il modulo di $\overrightarrow{PR}=\vec{v}\,'$?



Problemi di questo tipo si presentano di frequente in Fisica. Fra i tantissimi esempi, possiamo pensare allo studio del moto su di un piano inclinato sotto l'azione della forza di gravità: è proprio la situazione a cui si ispira la figura.

Come è ovvio, la risposta dipende strettamente dal fatto che l'angolo α è proprio di 40°. Se, poniamo, α misurasse invece 20° (e la misura di $\vec{v}$ fosse sempre 5: figura qui a destra), la risposta cambierebbe: $\vec{v}\,'$ avrebbe, in questo caso, un modulo più piccolino (osserviamo comunque, per inciso, che nel passaggio da $\alpha=40°$ ad $\alpha=20°$ il valore del modulo di $\vec{v}\,'$ NON diventerebbe esattamente la metà!). Bene:



chiamiamo "seno" di un angolo acuto α un numero, che è caratteristico dell'angolo stesso; il "seno" di α è il numero per cui moltiplicare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha un angolo acuto uguale ad α, per ottenere la misura del cateto opposto !!!

Prendi la macchinetta calcolatrice e digita 40 sul display.

Premi ora il tasto sin .

Sul display comparirà il numero cercato, che si scrive "*sen* α" o "*sin* α" (leggi: "*sen alfa*" o "*seno di alfa*"): in questo caso, si tratterà di "*sen* 40°", leggi "*seno di* 40°".
Esso è 0.6427876 (valore approssimato; salvo casi particolarissimi, i numeri così ottenuti hanno infinite cifre decimali, e la macchinetta li arrotonda).

Se ora moltiplichi il modulo di $\vec{v}$ (che è 5) per $sen\,\alpha = sen\,40° = 0.6427876$, otterrai 3.2139381 che è il modulo di $\vec{v}\,'$.

Fai poi la stessa cosa supponendo che l'angolo α misuri 20°.
Otterrai $sen\,20° = 0.3420201$ che è dunque il valore per cui moltiplicare il modulo di $\vec{v}$ se si desidera ottenere il modulo di $\vec{v}\,'$, qualora sia $\alpha = 20°$.
Perciò il modulo di $\vec{v}\,'$ sarà in questo caso $0.3420201 \cdot 5 = 1.7101008$

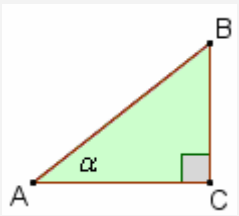
IL SENO DI UN ANGOLO ACUTO α

$sen\,\alpha$ = numero per cui moltiplicare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che abbia α come angolo acuto, se si vuole ottenere il cateto opposto

$$CB = AB \cdot sen\,\alpha \qquad sen\,\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

Il seno di un angolo acuto α è quindi uguale al rapporto, al quoziente, fra il cateto opposto e l'ipotenusa, in un triangolo rettangolo che abbia α come angolo interno.

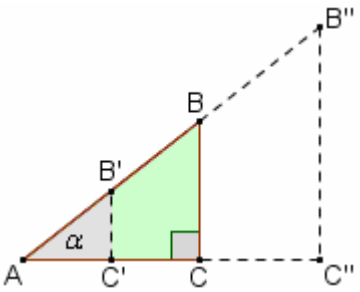
Poiché in un triangolo rettangolo ogni cateto è minore dell'ipotenusa, **il seno di un angolo acuto sarà sempre <1**.



$sen\,\alpha$ oppure $sin\,\alpha$
Latino *sinus*, inglese *sine*

$$sen\,\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

Osserviamo che se noi teniamo fissa l'ampiezza dell'angolo α, ma restringiamo o allarghiamo il triangolo rettangolo, il rapporto *cateto opposto/ipotenusa*, ossia il seno, non cambia, perché se ad esempio il cateto si riduce alla metà, la stessa cosa avviene anche all'ipotenusa, per cui il loro quoziente rimane inalterato:
$CB/AB = C'B' : AB' = C''B'' : AB'' = \ldots$



Per questo **la definizione è "ben posta": la quantità *sen* α dipende esclusivamente dall'angolo α, e non dal particolare triangolo rettangolo considerato**.

Si dice che **IL "SENO" È UNA "FUNZIONE ANGOLARE"**.
"Funzione" indica una quantità che dipende in modo univoco da un'altra.
Nel nostro caso, il valore del seno dipende in modo univoco dall'ampiezza dell'angolo.

NELLA FUNZIONE "SENO"
- al raddoppiare dell'angolo, il seno NON raddoppia;
- se l'angolo diventa triplo, il seno NON diventa triplo;
- se l'angolo dimezza, il seno NON dimezza …

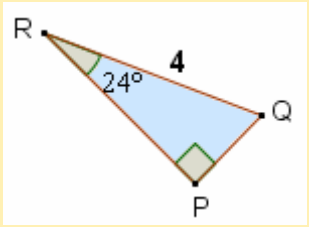
eccetera.



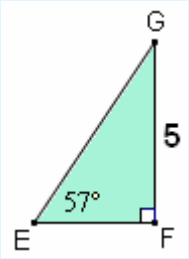
OCCHIO a non fare confusione.
La scrittura $sen\ \alpha$ non ha proprio NIENTE A CHE FARE con una moltiplicazione: non significa "*sen*" moltiplicato "α" … per carità, non avrebbe nessun senso!
Come non avrebbe senso scrivere "*sen*" e basta. La scrittura $sen\ \alpha$ significa "il seno di α": α è l'angolo e *sen* indica la funzione, indica che vogliamo passare dall'ampiezza dell'angolo a quel numero che ne esprime il "seno", e del quale ben conosciamo il significato geometrico.

Vediamo se hai capito. Copri con la mano le risposte, che sono riportate immediatamente sotto.

PROBLEMA 1)
Se nel triangolo rettangolo in figura io conosco $RQ = 4$ m , $\hat{R} = 24°$ e dispongo di una macchinetta calcolatrice, potrò determinare tutti gli altri lati?



PROBLEMA 2)
Se nel triangolo rettangolo in figura io conosco $FG = 5$ cm , $\hat{E} = 57°$ e dispongo di una macchinetta calcolatrice, potrò determinare tutti i lati?



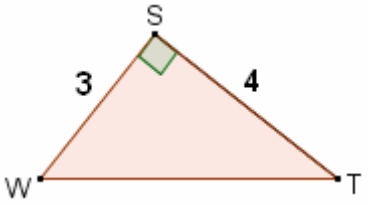
RISPOSTE

1) Sì. $PQ = RQ \cdot sen\ 24° = 4 \cdot 0.4067366 = 1.6269466$. RP potrà essere calcolato con Pitagora oppure così:
$\hat{Q} = 180° - 90° - 24° = 66°$; $RP = RQ \cdot sen\ 66° = 4 \cdot 0.9135454 = 3.6541818$

2) Sì. $sen\ \hat{E} = \frac{FG}{EG} \rightarrow EG = \frac{FG}{sen\ \hat{E}} = \frac{5}{sen\ 57°} = \frac{5}{0.8386705} = 5.961817$, poi EF con Pitagora oppure facendo:
$\hat{G} = 180° - 90° - 57° = 33°$; $EF = EG \cdot sen\ 33° = 5.961817 \cdot 0.544639 = 3.2470383$

COME RISALIRE DAL VALORE DEL SENO ALL'AMPIEZZA DELL'ANGOLO

Se nel triangolo rettangolo in figura io conosco $SW = 3$ cm , $ST = 4$ cm e dispongo di una macchinetta calcolatrice, potrò determinare le ampiezze degli angoli acuti?



Certamente!

Prima, con Pitagora, $WT = \sqrt{SW^2 + ST^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, quindi $sen\ \hat{W} = \frac{ST}{WT} = \frac{4}{5} = 0.8$

da cui potrò risalire all'ampiezza di $\hat{W}$ digitando 0.8 con la calcolatrice poi **premendo il tasto** $\boxed{\sin^{-1}}$.

Questa in genere nelle macchinette è una "seconda funzione": per attivarla si premerà prima il tasto $\boxed{\text{2ndF}}$.

Si trova 53.130102 ovvero **una misura in: gradi, decimi di grado, centesimi di grado …**

❑ **Volendo trasformare in gradi, primi** (60-esimi di grado) **e secondi** (60-esimi di primo), **come si può fare?**
Si prende la parte dopo il punto decimale ossia 0.130102
e ci si chiede innanzitutto a quanti primi, ossia a quanti 60-esimi di grado, corrisponde:

$$0.130102 = \frac{x}{60} \rightarrow x = 0.130102 \cdot 60 = 7.80612 \text{ quindi } 7' + 0.80612'.$$

Ma a quanti secondi (= 60-esimi di primo) corrispondono ora $0.80612'$?

$$0.80612 = \frac{y}{60} \rightarrow y = 0.80612 \cdot 60 = 48.3672 \text{ cioè } 48'' + \text{ancora una frazione di secondo.}$$

A questo punto possiamo però accontentarci, e approssimare $53.130102°$ con $53°\ 7'\ 48''$.



OSSERVAZIONE - Il tasto, sulla macchinetta, per **risalire dal seno all'angolo**, è dunque $\boxed{\sin^{-1}}$; comunque quel "-1" in alto a destra *non è un esponente*, è piuttosto uno PSEUDO-esponente: non significa "fare il reciproco", ma "applicare la funzione inversa, quella che fa tornare indietro".

E veniamo ora alla funzione "sorella" del *seno*: il *coseno*, e a una "cugina": la *tangente*.

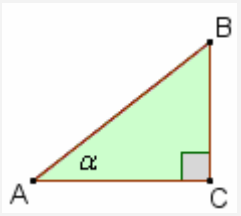
IL COSENO DI UN ANGOLO ACUTO α

$\cos\alpha$ = numero per cui moltiplicare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che abbia α come angolo acuto, se si vuole ottenere il cateto adiacente

$AC = AB \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}}$

Il coseno di un angolo acuto α è quindi uguale al rapporto, al quoziente, fra il cateto adiacente e l'ipotenusa, in un triangolo rettangolo che abbia α come angolo interno.

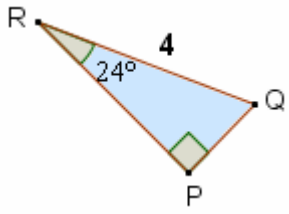
Poiché in un triangolo rettangolo ogni cateto è minore dell'ipotenusa, **il coseno di un angolo acuto sarà sempre <1.**



$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

Riprendiamo un attimo il problema 1).
Si trattava di determinare i lati del triangolo in figura sapendo che

$RQ = 4$ m , $\hat{R} = 24°$



Bene: per calcolare RP, si potrebbe dunque utilizzare il coseno e scrivere

$RP = RQ \cdot \cos\hat{R} = RQ \cdot \cos 24° = 4 \cdot 0.9135454$

dove il valore del coseno è stato ricavato tramite una macchinetta calcolatrice, digitando 24 poi pigiando il tasto [cos].

Il tasto, sulla macchinetta, che permette di **risalire dal coseno all'angolo**, è [$\cos^{-1}$]

LA TANGENTE DI UN ANGOLO ACUTO α

$tg\,\alpha$ = numero per cui moltiplicare il cateto adiacente ad α in un triangolo rettangolo che abbia α come angolo acuto, per ottenere il cateto opposto

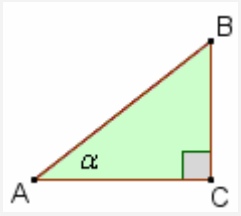
$CB = AC \cdot tg\,\alpha$ $\qquad$ $\boldsymbol{tg\,\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}}$

La tangente goniometrica di un angolo acuto α è quindi uguale al rapporto, al quoziente, fra il cateto opposto e il cateto adiacente, in un triangolo rettangolo che abbia α come angolo interno.

La tangente goniometrica (di solito si dice, per abbreviare: "la tangente") **di un angolo acuto può assumere valori qualsiasi**, anche molto grandi.

La tangente è legata al seno e al coseno da una semplice relazione:

$$tg\,\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{\frac{CB}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$



$$tg\,\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

$tg\,\alpha$ oppure $\tan\alpha$

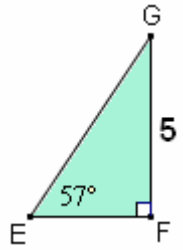
Si legge "*tangentalfa*"

Riprendiamo il problema 2).
I dati erano: $FG = 5$ cm , $\hat{E} = 57°$. Per calcolare EF, si potrebbe procedere così:

$\hat{G} = 180° - 90° - 57° = 33°$; $EF = FG \cdot tg\,\hat{G} = FG \cdot tg\,33° = 5 \cdot 0.6494075 = 3.247038$

Il tasto sulla calcolatrice per ottenere la tangente porta in genere la scritta [tan].

In alternativa: $FG = EF \cdot tg\,\hat{E} = EF \cdot tg\,57° \rightarrow EF = \frac{FG}{tg\,57°} = \frac{5}{1.539865} = 3.247038$

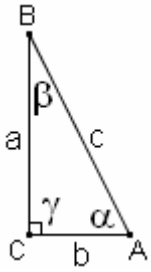


Il tasto, sulla macchinetta, che permette di **risalire dalla tangente all'angolo**, è [$\tan^{-1}$]

OSSERVAZIONE - In questo paragrafo, per semplicità, abbiamo utilizzato sempre il simbolo = anche quando, per via dei valori approssimati, avremmo dovuto, più rigorosamente, scrivere $\approx$ che significa "**uguale circa**".

ESERCIZI (risposte a pag. 433)

1)

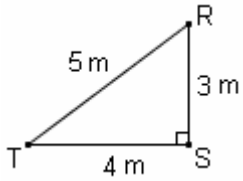


I) $sen\,\alpha = ?$ a) $\frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente}$ b) $\frac{cateto\ opposto}{ipotenusa}$ c) $\frac{cateto\ adiacente}{cateto\ opposto}$ d) $\frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa}$ e) $\frac{ipotenusa}{cateto\ opposto}$ f) $\frac{ipotenusa}{cateto\ adiacente}$

II) $cos\,\alpha = ?$ a) $\frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente}$ b) $\frac{cateto\ opposto}{ipotenusa}$ c) $\frac{cateto\ adiacente}{cateto\ opposto}$ d) $\frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa}$ e) $\frac{ipotenusa}{cateto\ opposto}$ f) $\frac{ipotenusa}{cateto\ adiacente}$

III) $tg\,\alpha = ?$ a) $\frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente}$ b) $\frac{cateto\ opposto}{ipotenusa}$ c) $\frac{cateto\ adiacente}{cateto\ opposto}$ d) $\frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa}$ e) $\frac{ipotenusa}{cateto\ opposto}$ f) $\frac{ipotenusa}{cateto\ adiacente}$

2)

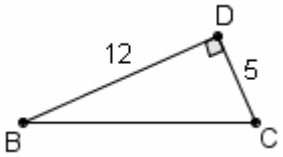


I) $sen\,\hat{R} = ?$ a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{5}$ f) $\frac{5}{3}$

II) $cos\,\hat{R} = ?$ a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{5}$ f) $\frac{5}{3}$

III) $tg\,\hat{R} = ?$ a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{5}$ f) $\frac{5}{3}$

3)



I) a) $sen\,\hat{B} = ?$ … b) $cos\,\hat{B} = ?\ldots$ c) $tg\,\hat{B} = ?\ldots$

II) a) $sen\,\hat{C} = ?$ … b) $cos\,\hat{C} = ?\ldots$ c) $tg\,\hat{C} = ?\ldots$

4) La tabella seguente riporta i valori di seno, coseno e tangente di alcuni angoli particolari (arrotondati a 2 cifre decimali: fanno eccezione solo *sen* 30° e *cos* 60° che valgono *esattamente* 0.5). Utilizzando la tabella, determina i valori approssimati dei segmenti che nelle varie figure sono indicati col "punto interrogativo".

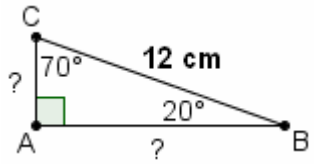
$\alpha°$	**10°**	**20°**	**30°**	**40°**	**50°**	**60°**	**70°**	**80°**
$sen\,\alpha$	0.17	0.34	0.50	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98
$cos\,\alpha$	0.98	0.94	0.87	0.77	0.64	0.50	0.34	0.17
$tg\,\alpha$	0.18	0.36	0.58	0.84	1.19	1.73	2.75	5.67

Prima di svolgere gli esercizi osserva la tabella:

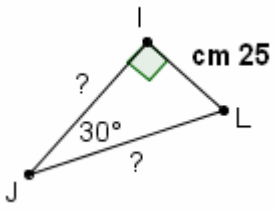
♪ potrai notare che **il seno di un angolo coincide col coseno dell'angolo complementare (due angoli sono fra loro "complementari" quando sono del tipo α, $90° - \alpha$** ossia quando **la loro somma è di 90°**: ad esempio, un angolo di 20° e uno di 70° sono complementari).

♫ **quando l'angolo raddoppia, NON è vero che seno, coseno, tangente raddoppino** (il loro valore è *piuttosto* vicino al doppio *solo quando l'angolo è piccolo*, ma conservando un numero maggiore di cifre decimali, si potrebbe osservare che nemmeno per gli angoli piccoli al raddoppiare dell'angolo si ha un valore della funzione *esattamente* doppio).

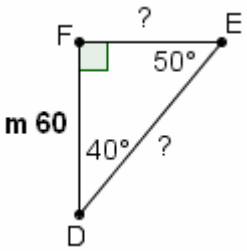
a)



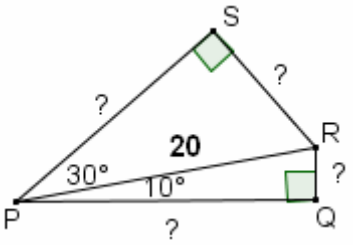
b)



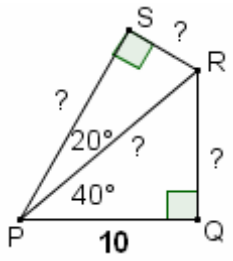
c)



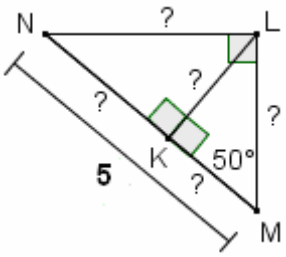
d)



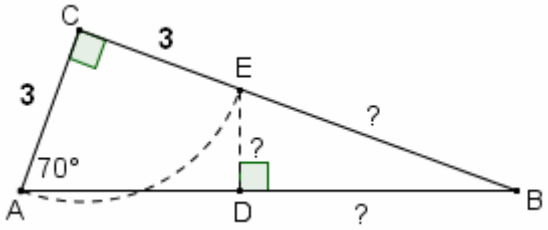
e)



f)



g)



5) Sapendo che $sen\,\alpha = 0.95$ e $cos\,\beta = 0.92$
con una macchinetta calcolatrice determina, arrotondandole al grado,
le misure degli angoli α, β, γ di un triangolo ABC.

6) a) Prova a inserire nella macchinetta calcolatrice il numero 2 e a pigiare poi il tasto (seconda funzione) sen^{-1}. Che succede? … Cosa significa tutto ciò?

b) Che valore ti aspetti di ottenere, a "occhio", se fai invece il calcolo $tan^{-1}(2)$?

7) **TRASFORMARE IN GRADI, PRIMI E SECONDI UN ANGOLO ESPRESSO IN GRADI, DECIMI DI GRADO, ECCETERA**

Esempio:

$$13.548° = 13° + 0.548°$$
$$0.548 \cdot 60 = 32.88$$
$$13.548° = 13° + 32' + 0.88'$$
$$0.88 \cdot 60 = 52.8$$
$$13.548° \approx 13°\ 32'\ 53''$$

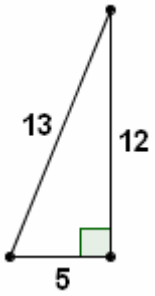
ESERCIZI

a) 19.72° b) 2.4837° c) 133.842° d) 12.12° e) 38.245° f) 48.357° g) 19.88°

8) Con la calcolatrice tascabile, stabilisci quanto misurano gli angoli acuti dei triangoli rettangoli che corrispondono alle quattro "terne pitagoriche"

a) 5, 12, 13
b) 7, 24, 25
c) 9, 40, 41
d) 48, 55, 73

E' richiesto di approssimare l'angolo ai gradi e ai PRIMI.



9) **TRASFORMARE IN GRADI, DECIMI DI GRADO, ECCETERA, UN ANGOLO ESPRESSO IN GRADI, PRIMI, SECONDI**

Esempio:

$$45°\ 32'\ 27'' = \left(45 + \frac{32}{60} + \frac{27}{3600}\right)° = \left(45 + \frac{32 \cdot 60 + 27}{3600}\right)° = 45.540833...° \approx 45.54°$$

ESERCIZI

a) 3° 14' b) 89° 59' 28" c) 23° 8' 30" d) 75° 24' e) 1° 2' 3" f) 123° 47' 38"

10) Con **GeoGebra**,
disegna un triangolo rettangolo ("retta perpendicolare"),
evidenzia l'angolo retto (GeoGebra lo marcherà con un quadratino),
poi evidenzia un angolo acuto e, tramite i rapporti

- cateto opposto/ipotenusa,
- cateto adiacente/ipotenusa,
- cateto opposto/cateto adiacente,

servendoti di "testi dinamici" (vol. 1, Geometria, cap. 4),
visualizza i valori di seno, coseno, tangente di quell'angolo.
Come devi deformare il triangolo se vuoi che si avvicini a 1 il valore del seno/del coseno/della tangente?

RISPOSTE

1) I) b II) d III) a 2) I) c II) e III) b 3) I) a) 5/13 b) 12/13 c) 5/12 II) a) 12/13 b) 5/13 c) 12/5

4) NOTA - Se un calcolo darà come risultato un numero con più di 2 cifre dopo la virgola,
arrotonderemo ai centesimi, seguendo la **REGOLA PER GLI ARROTONDAMENTI** seguente:



♪ **Se vengono trasformate in "0" tutte le cifre a partire da una certa cifra e verso destra, quando la prima cifra da trasformare in "0" è 0, 1, 2, 3 o 4, allora nell'arrotondamento la cifra precedente resta invariata;**

♫ **se invece la prima cifra da trasformare in "0" è 5, 6, 7, 8 o 9, allora nell'arrotondamento la cifra precedente viene aumentata di un'unità.**

Esempi:
l'arrotondamento di 2.4763 ai centesimi è 2.48; quello di 0.372 sempre ai centesimi è 0.37.

a) $AC = 12 \cdot sen\,20° \approx 12 \cdot 0.34 = 4.08$ $AB = 12 \cdot cos\,20° \approx 12 \cdot 0.94 = 11.28$

b) $JL = 25 / sen\,30° = 25 / 0.5 = 50$ (non abbiamo messo il simbolo $\approx$ perché il valore 0.5 per *sen* 30° è, eccezionalmente, un valore esatto e non approssimato; inoltre, pure il calcolo 25/0.5 dà *esattamente* 50)

$IJ = JL \cdot cos\ 30° \approx 50 \cdot 0.87 = 43.5$
oppure $IJ = IL / tg\ 30° \approx 25 / 0.58 \approx 43.10$
oppure $IJ = IL \cdot tg\ \hat{L} = IL \cdot tg\ 60° \approx 25 \cdot 1.73 = 43.25$

dove le differenze fra i valori trovati coi tre metodi si devono al fatto che nella nostra tabella i valori di seno, coseno e tangente non sono in generale esatti ma approssimati

c) $FE = 60 \cdot tg\,40° \approx 60 \cdot 0.84 = 50.4$ $ED = 60 / cos\,40° \approx 60 / 0.77 \approx 77.92$

d) $RQ = 20 \cdot sen\,10° \approx 20 \cdot 0.17 = 3.4$ $PQ = 20 \cdot cos\,10° \approx 20 \cdot 0.98 = 19.6$
$RS = 20 \cdot sen\,30° = 20 \cdot 0.50 = 10$ $PS = 20 \cdot cos\,30° \approx 20 \cdot 0.87 = 17.4$

e) $RQ = 10 \cdot tg\,40° \approx 10 \cdot 0.84 = 8.4$ $PR = 10 / cos\,40° \approx 10 / 0.77 \approx 12.99$
$RS \approx 12.99 \cdot sen\,20° \approx 12.99 \cdot 0.34 \approx 4.42$ $PS \approx 12.99 \cdot cos\,20° \approx 12.99 \cdot 0.94 \approx 12.21$

f) $LN = 5 \cdot sen\,50° \approx 5 \cdot 0.77 = 3.85$ $LM = 5 \cdot cos\,50° \approx 5 \cdot 0.64 = 3.2$ $LK = LM \cdot sen\,50° \approx ... \approx 2.46$ (NOTA)
$MK = LM \cdot cos\,50° \approx 3.2 \cdot 0.64 \approx 2.05$ $KN = 5 - MK \approx 5 - 2.05 = 2.95$

g) $BC = AC \cdot tg\,70° \approx 3 \cdot 2.75 = 8.25$ $BE = BC - 3 \approx 8.25 - 3 = 5.25$ $\hat{B} = 180° - 90° - 70° = 20°$
$DE \approx 5.25 \cdot sen\,20° \approx 5.25 \cdot 0.34 \approx 1.79$ $DB \approx 5.25 \cdot \cos 20° \approx 5.25 \cdot 0.94 \approx 4.94$

NOTA - Se a questo punto si ricalcolasse LN come LK/*sen* 40° ,
uscirebbe una lunghezza leggermente diversa da quella trovata prima.
In questo contesto ci interessa poco, tant'è vero che abbiamo deciso di approssimare a due cifre decimali anche i seni, i coseni e le tangenti;
ma in generale, in calcoli di questo genere,



è sempre **BUONA NORMA**
CERCARE DI COINVOLGERE VALORI "BASE",
E NON VALORI GIÀ CALCOLATI, QUINDI AFFETTI DA APPROSSIMAZIONE.

5) 72°, 23°, 85°

6) a) Messaggio di errore. Non può esistere un angolo il cui seno sia maggiore di 1.
b) Disegna un triangolo rettangolo coi cateti uno doppio dell'altro …
Vedrai che l'angolo acuto maggiore è compreso fra i 60° e i 70° (più precisamente, è di 63° 26' circa)

7) a) 19° 43'12" b) ≈2° 29'1" c) ≈133° 50'31" d) 12° 7'12" e) 38° 14' 42" f) ≈48° 21' 25" g) 19°52'48"

8) a) ≈22° 37', ≈67° 23' b) ≈16° 16', ≈73° 44' c) ≈12° 41', ≈77° 19' d) ≈41° 7', ≈48° 53'

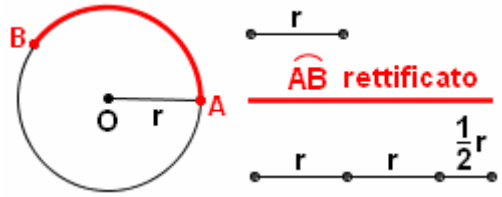
9) a) ≈3.23° b) ≈89.99° c) ≈23.14° d) 75.4° e) ≈1.034° f) ≈123.794°

2. MISURA DI UN ARCO DI CIRCONFERENZA IN RADIANTI

Si dice che un arco di circonferenza è misurato in radianti quando lo si misura assumendo come unità di misura il raggio della circonferenza stessa.

Vale a dire: per misurare un arco di circonferenza in radianti, **si immagina di rettificare questo arco, poi si misura il segmento così ottenuto, prendendo come unità di misura il raggio**.

Ad esempio, la lunghezza di un certo arco in radianti è 2.5 (= un certo arco misura 2.5 radianti) se rettificando quell'arco si ottiene un segmento lungo esattamente 2.5 volte il raggio (vedi figura sottostante). Un arco misura quindi UN radiante quando la lunghezza di quell'arco, supposto rettificato, è uguale alla lunghezza del raggio della circonferenza.



In questa figura, l'arco $\overset{\frown}{AB}$ misura 2.5 radianti: infatti è esattamente due volte e mezza il raggio.

NOTA - "Misurare" un segmento **s** rispetto ad un altro segmento **u** (unità di misura) vuol dire stabilire "quante volte" il segmento **u** che fa da unità di misura è contenuto in **s**: e a tale scopo, qualora si conoscano le misure di **s** e di **u** rispetto ad **un'altra** unità di misura **u'** , basterà fare il quoziente fra tali due misure per conoscere la misura di **s** rispetto a **u** (Teorema del Rapporto). Per questo, misurare un arco in radianti equivale a calcolare il quoziente, il rapporto, fra la lunghezza dell'arco e la lunghezza del raggio della circonferenza, determinate entrambe rispetto a una medesima unità di misura.

In pratica, il Teorema del Rapporto può essere illustrato con l'esempio seguente. Supponiamo che un pensionato sia abituato a utilizzare il suo bastone per calcolare le lunghezze, e abbia constatato che la misura del campo da bocce, quando l'unità di misura è il bastone, vale 8.5 (perché "il bastone ci sta esattamente 8 volte e mezzo nel campo da bocce"). Bene! Allora quel pensionato, qualora andasse a misurare sia il campo da bocce che il bastone in metri, e facesse poi la divisione fra le due misure in metri ottenute, troverebbe come quoziente proprio 8.5.

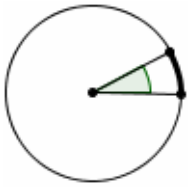
UN ARCO SI PUO' MISURARE SIA IN RADIANTI CHE IN GRADI E UN ANGOLO SI PUO' MISURARE SIA IN GRADI CHE IN RADIANTI

In una data circonferenza la lunghezza di un arco dipende in modo univoco dall'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente, e viceversa. Perciò

- **UN ARCO DI CIRCONFERENZA SI PUO' MISURARE SIA IN RADIANTI CHE IN GRADI;**
- **E UN ANGOLO, SIA IN GRADI CHE IN RADIANTI**

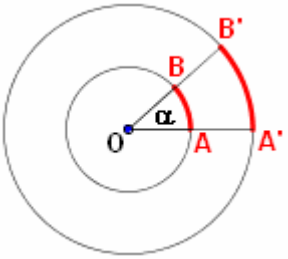
[Evidentemente, per "misura in radianti di un angolo α" si intenderà la misura in radianti dell'arco che α stacca su di una qualsiasi circonferenza avente il centro nel vertice di α (NOTA)]

Dell'arco in figura, posso dire indifferentemente che misura



- **0.5 radianti** *(perché è lungo la metà del raggio)*
- **OPPURE 28° 39'** *(circa), perché tale è l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente.*

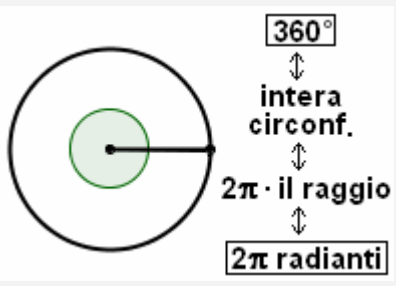
NOTA
E' intuitivo – e, volendo, dimostrabile – che la misura ottenuta è del tutto indipendente dal raggio della circonferenza che viene tracciata, perché – ad esempio – raddoppiando il raggio raddoppia anche la lunghezza dell'arco e allora il rapporto *arco*/*raggio* rimane costante.



$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{OA} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{OA'} =$$

= misura in radianti di : $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$, α

Se il raggio di una circonferenza è r , l'intera circonferenza misura 2π r : cioè, 2π moltiplicato il raggio (= circa 6.28 volte il raggio). Perciò,
se come unità di misura si sceglie proprio il raggio, la lunghezza dell'intera circonferenza risulta uguale a 2π .
Di conseguenza,
la misura in radianti dell'intera circonferenza, ossia dell'arco che corrisponde ad un angolo al centro di 360°, è 2π (circa 6.28): come misura di angolo o di arco, **360° EQUIVALE A 2π RADIANTI** .



Dunque avremo:

Gradi	**360°**	$\mathbf{180° = \frac{1}{2}\cdot 360°}$	$\mathbf{90° = \frac{1}{4}\cdot 360° = \frac{1}{2}\cdot 180°}$
Radianti	$\mathbf{2\pi}$	$\mathbf{\pi}$	$\mathbf{\pi/2}$

Possiamo ora proseguire, ricavando ad esempio

$45° = \frac{1}{2}\cdot 90° \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$30° = \frac{1}{3}\cdot 90° = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

NOTA: il simbolo " = " non è qui del tutto rigoroso; ci concediamo una licenza! Non si tratta, infatti, di una vera uguaglianza, ma piuttosto di una **corrispondenza** fra due misure che sono numericamente diverse perché completamente diverse sono le unità di misura utilizzate: il grado (ampiezza) a 1° membro, e il radiante (lunghezza) a 2° membro.

$60° = \frac{1}{3}\cdot 180° = \frac{1}{3}\cdot\pi = \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{oppure } 60° = 2\cdot 30° = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\right)$

$120° = 2\cdot 60° = 2\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ $135° = 3\cdot 45° = 3\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

$40° = 2\cdot 20° = 2\cdot\frac{1}{9}\cdot 180° = 2\cdot\frac{1}{9}\pi = \frac{2}{9}\pi$ $75° = \frac{1}{2}\cdot 150° = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 30° = \frac{5}{2}\cdot 30° = \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi$

$\boxed{\mathbf{1° = \frac{1}{180}\cdot 180° = \frac{1}{180}\pi = \frac{\pi}{180}}}$ $111° = 111\cdot 1° = 111\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\cancel{111}^{37}}{\cancel{180}_{60}}\pi$

Negli esercizi (e in talune applicazioni) compaiono con particolare frequenza gli **angoli multipli di 30° e di 45°.** Ecco la **tabella dei corrispondenti valori in radianti**:

Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.
0°	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	180°	π	270°	$\frac{3}{2}\pi$	360°	2π
30°	$\frac{\pi}{6}$	120°	$\frac{2}{3}\pi$	210°	$\frac{7}{6}\pi$	300°	$\frac{5}{3}\pi$	390°	$\frac{13}{6}\pi$
45°	$\frac{\pi}{4}$	135°	$\frac{3}{4}\pi$	225°	$\frac{5}{4}\pi$	315°	$\frac{7}{4}\pi$	405°	$\frac{9}{4}\pi$
60°	$\frac{\pi}{3}$	150°	$\frac{5}{6}\pi$	240°	$\frac{4}{3}\pi$	330°	$\frac{11}{6}\pi$	420°	$\frac{7}{3}\pi$

Gli angoli che superano i 360° sono quelli che "vanno oltre il giro completo". Si fa un giro (360°), poi si prosegue.

Più avanti parleremo pure di angoli negativi.

D'ora in poi, data la stretta corrispondenza fra "angolo" (pensato come "angolo al centro di una circonferenza") e "arco", **parleremo indifferentemente di "angolo" e di "arco", trattando questi due concetti come "equivalenti" ed "intercambiabili"**.

Di norma, quando si ragiona in "radianti" si preferisce dire "arco", quando si usano i "gradi", "angolo".

Abbiamo visto sopra che l'angolo di 1 grado misura, in radianti, $\pi/180$ ossia circa 0.01745.

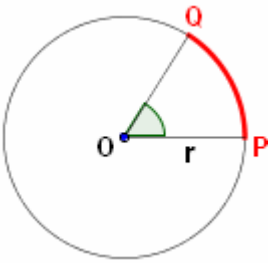
Quanto misurerà, in gradi, l'arco di 1 radiante?

Possiamo rispondere mediante la proporzione

$1 : \pi = x° : 180°$ da cui

misura in gradi dell'arco di 1 radiante =

$= \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.14159...} \approx \mathbf{57.3° = 57°18'}$



La misura trovata, poco più di 57°, è del tutto "convincente" dato che l'arco di 1 radiante è poi l'arco il quale, se rettificato, darebbe luogo a un segmento uguale al raggio (vedi figura qui a fianco, nella quale è appunto $\overset{\frown}{PQ} = 1$ radiante).

E COME SI PASSA, IN GENERALE, DAI GRADI AI RADIANTI E VICEVERSA?

DAI GRADI AI RADIANTI

$\boxed{x_{rad} : \pi = x° : 180° \rightarrow x_{rad} = \frac{\pi\cdot x°}{180°} = \frac{x°}{180°}\cdot\pi}$

Si prende dunque la misura, es. $72° 32'$, la si trasforma in "gradi virgola …": $72° 32' = 72.533333...°$ poi si divide per 180 e si moltiplica per π :

$72° 32' = 72.5333...° = \frac{72.5333...}{180}\cdot\pi\ rad = 1.2659...\ rad$

La sigla *rad* viene di norma omessa.

DAI RADIANTI AI GRADI

$\boxed{x_{rad} : \pi = x° : 180° \rightarrow x° = \frac{x_{rad}\cdot 180°}{\pi} = \frac{x_{rad}}{\pi}\cdot 180°}$

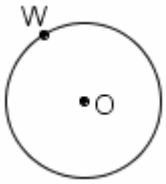
Si prende la misura in radianti, es. 2.493 la si divide per π e si moltiplica per 180:

$2.493\ radianti \rightarrow \frac{2.493}{\pi}\cdot 180° = 142.838...°$

Naturalmente, volendo, questi "gradi virgola …" possono poi essere trasformati in gradi, primi e secondi.

ESERCIZI

1) a) A partire dal punto W disegna:
   - ♪ in senso antiorario, un arco di 3 radianti
   - ♫ e in senso orario, uno di 0.8 radianti.



   b) Quanti radianti misura l'intera circonferenza? Perché?
   c) E 1/16 di circonferenza, quanti radianti misura?

2) Ricordando che π corrisponde a 180° (perché? …)
   I) trova le misure in gradi dei seguenti angoli espressi in radianti:
   a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{3}{4}\pi$ d) $\frac{1}{90}\pi$ e) $\frac{3}{2}\pi$ f) $\frac{5}{3}\pi$ g) $\frac{6}{5}\pi$ h) 3 radianti i) 2.2 rad l) 0.8 rad

   II) trova le misure in radianti di un angolo di:
   a) 50° b) 36° c) 210° d) 225° e) 20° f) 330° g) 140°

3) π *radianti* $\leftrightarrow 180°$ da cui la proporzione fondamentale $x_{rad} : \pi = x° : 180°$.

   I) Completa ora le formule: $x_{rad} = \frac{\cdots}{\cdots} \cdot \pi$; $x° = \frac{\cdots}{\cdots} \cdot 180°$

   II) Trasforma da gradi-primi-secondi a radianti (approssimando a 2 cifre decimali), e viceversa:
   a) $141° = \ldots$ *rad* b) 1.2 *rad* = … ° c) $14°15' = (\ldots..)° = \ldots$ *rad* d) 2,45 *rad* = … °
   e) $24° = \ldots$ *rad* f) $55° = \ldots$ *rad* g) $11°\,30' = \ldots$ *rad* h) $95°\,20' = \ldots$ *rad*
   i) $137°\,6' = \ldots$ *rad* l) 1,42 *rad* = … ° m) 0.4 *rad* = … ° n) $200{,}5° = \ldots$ *rad*

4) Data la lunghezza del raggio e l'ampiezza dell'angolo, determina la lunghezza dell'arco
   a) $r = 3.7$ km; $\alpha = 48°$ b) $r = 4$ cm; $\alpha = 22°45'$

5) Data la lunghezza dell'arco e il raggio, trova l'angolo al centro corrispondente in gradi e in primi.
   a) $\ell = 5.4$; $r = 12$ b) $\ell = 0.154$; $r = 0.245$

6) Un arco è lungo cm 4.7, ed è sotteso da un angolo al centro di 23.4°.
   Quanto misura il raggio della circonferenza?

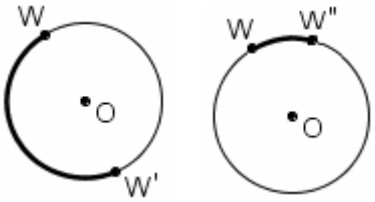
7) Un arco è lungo m 0.03, ed è sotteso da un angolo al centro di 2°.
   Quanto misura il raggio della circonferenza?

8) In un cerchio di raggio 4.5 metri, quanto è lungo un arco di 2 radianti?
   In un cerchio di raggio 4.5 metri, quanto è lungo un arco di 2°?
   In un cerchio di raggio 2 m, quanto è lungo un arco di 25° 30' ?

9) In una circonferenza di diametro 4 metri, che angolo al centro corrisponde a un arco lungo 1 metro?
   Esprimi la risposta in gradi, primi e secondi.

Puoi trovare altri esercizi di questo tipo, e dei tipi successivi, su ⇨

RISPOSTE



1) a) Vedi figura (il triplo del raggio; 0.8 volte il raggio = gli 8/10 del raggio)
   b) 2π, perché è uguale a 2π volte il raggio c) $2\pi \cdot \frac{1}{16} = \frac{\pi}{8} \approx 0.39$

2) I) a) 60° b) 150° c) 135° d) 2° e) 270° f) 300° g) 216°
   h) Proporzione: $3 : \pi = x° : 180°$ da cui $x° = \frac{3 \cdot 180°}{\pi} \approx 171.9°$
   i) $2.2 \cdot 180° / \pi \approx 126.1°$ l) $0.8 \cdot 180° / \pi \approx 45.8° = 45°48'$
   II) a) $\frac{5}{18}\pi$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{7}{6}\pi$ d) $\frac{5}{4}\pi$ e) $\frac{\pi}{9}$ f) $\frac{11}{6}\pi$ g) $\frac{7}{9}\pi$

3) I) $x_{rad} = \frac{x°}{180°} \cdot \pi$; $x° = \frac{x_{rad}}{\pi} \cdot 180°$
   II) a) 2.46 *rad* b) 68° 45' 18" c) $14°15' = 14.25° \approx 0.25$ *rad* d) 140° 22' 29" e) 0.42 *rad*
   f) 0.96 *rad* g) 0.20 *rad* h) 1.66 *rad* i) 2.39 *rad* l) 81° 21' 36" m) 22° 55' 6" n) 3.50 *rad*

4) a) Circa 3.10 km b) Circa 1.59 cm 5) a) ≈ 25° 47' b) ≈ 36° 1'

6) ≈ cm 11.5 7) ≈ m 0.86 8) m 9; ≈ m 0.157; ≈ 0.89 m 9) ≈ 28° 38' 52"

3. CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Ora andremo a **RIDEFINIRE**, da un punto di vista ben più generale rispetto al paragrafo 1, le "**funzioni angolari**" **SENO**, **COSENO** e **TANGENTE**.

Le definizioni che daremo si riferiranno ad angoli qualsiasi, anche maggiori o uguali a 90°, anche maggiori di 360°, anche nulli o negativi, e tuttavia saranno perfettamente EQUIVALENTI, per gli angoli acuti, a quelle con cui abbiamo in precedenza avviato il discorso.

L'equivalenza fra definizioni "vecchie" e definizioni "nuove" verrà rigorosamente dimostrata in un paragrafo dedicato ai "teoremi sui triangoli rettangoli".

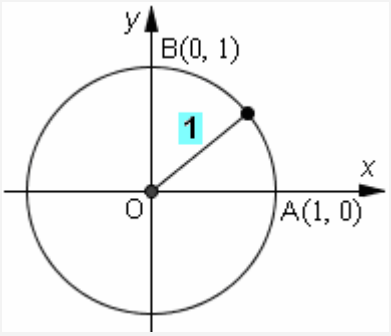
Lo studio delle funzioni angolari (ossia di quelle quantità, come il seno, il coseno e la tangente, il cui valore dipende dall'ampiezza di un angolo - o, in modo equivalente, dalla misura di un arco) viene chiamato "**GONIOMETRIA**" (in greco, **gonos = angolo** e **metron = misura**) oppure "**TRIGONOMETRIA**", termine che è praticamente un sinonimo di "goniometria" ma mette maggiormente in rilievo il fatto che, molto sovente, interessa applicare le formule studiate ai tre angoli interni di un *triangolo*.

Lo strumento concettuale che è posto alla base della goniometria è la "**circonferenza goniometrica**".

Cos'è, dunque, la "**CIRCONFERENZA GONIOMETRICA**"?

E' una circonferenza

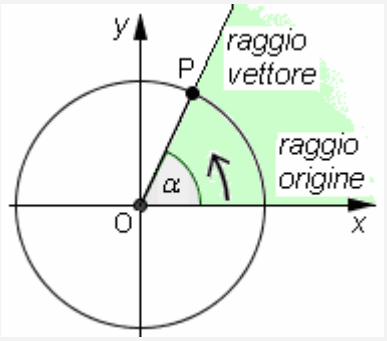
- **avente il centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani**
- **e (importantissimo!) RAGGIO UGUALE A 1**
  (cioè, raggio uguale all'unità di misura del sistema di riferimento).



S'intende che sulla circonferenza goniometrica gli ANGOLI vadano sempre riportati

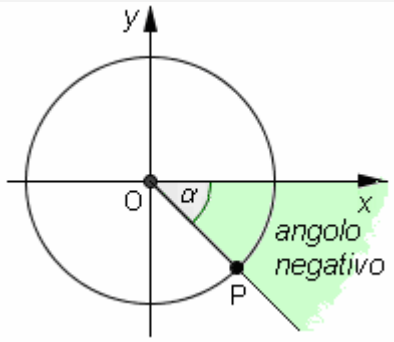
- **con vertice nel centro (= nell'origine)**
- **a partire dal semiasse delle ascisse positive**
  (che sarà dunque sempre il "primo lato" dell'angolo)
- **e in SENSO ANTIORARIO** ↺**.**

Il "primo lato" dell'angolo, ossia il semiasse delle ascisse positive, viene anche detto "**raggio origine**" dell'angolo, mentre il secondo lato (semiretta OP nella figura) è detto "**raggio vettore**".



Agli angoli riportati in senso ORARIO si assegna MISURA NEGATIVA:

ad esempio,
l'angolo qui a fianco raffigurato misurerà $-45°$
(oppure, in radianti, $-\frac{\pi}{4}$).

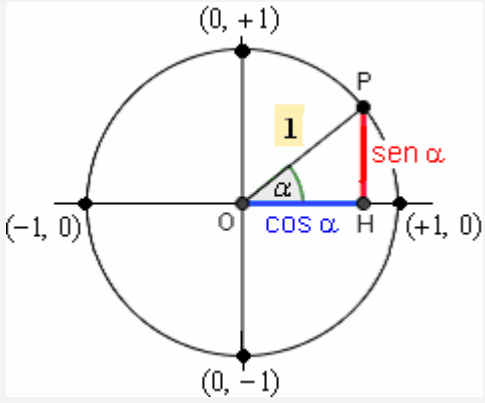


4. SENO E COSENO DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo un certo angolo α
(che di norma sarà compreso fra 0° e 360°, ma potrebbe pure essere negativo, o maggiore di 360°):
cosa intendiamo per "seno di α ($\operatorname{sen}\alpha$)" e per "coseno di α ($\cos\alpha$)" ?

Andiamo a considerare il punto P in cui il raggio vettore di α interseca la circonferenza goniometrica:

- ♪ **il SENO di α è, per definizione, l'ORDINATA di P,**
- ♫ **mentre il COSENO di α è, per definizione, l'ASCISSA di P.**



sen α = ordinata di P = misura (con segno) di HP
cos α = ascissa di P = misura (con segno) di OH

La circonferenza goniometrica ha, come abbiamo detto, centro nell'origine e raggio 1; quindi i suoi punti hanno

- ascissa che può andare da un minimo di -1 a un max di $+1$;
- ordinata che può andare, anch'essa, da un minimo di -1 a un massimo di $+1$.

Pertanto **il seno e il coseno di un angolo α sono sempre compresi fra -1 e $+1$**:

$$\forall \alpha, \quad -1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1 \quad -1 \le \cos\alpha \le 1$$

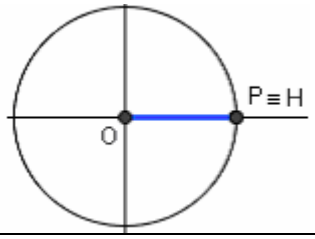
Si ha subito (Pitagora) la **1ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA**: qualunque sia l'angolo α (anche, eventualmente, con $\alpha > 360°$, o $\alpha < 0°$), è sempre

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

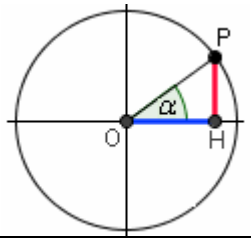
NOTA: $\operatorname{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ sono scritture abbreviate di: $(\operatorname{sen}\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$



Per $\alpha = 0°$ (0 radianti)
$\operatorname{sen}\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$

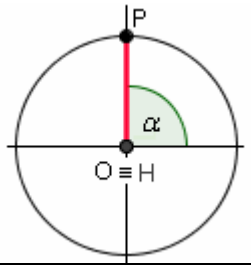


Nel 1° quadrante, ossia per $0° < \alpha < 90°$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, è $\operatorname{sen}\alpha > 0,\ \cos\alpha > 0$

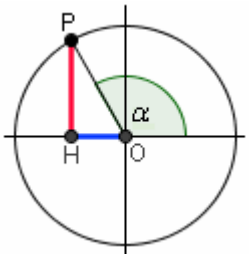


… e quando α cresce da 0° a 90°,
$\operatorname{sen}\alpha$ cresce (da 0 a 1)
$\cos\alpha$ decresce (da 1 a 0)

Per $\alpha = 90°$ ($\pi/2$ radianti)
$\operatorname{sen}\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$

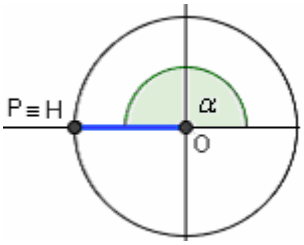


Nel 2° quadrante, ossia per $90° < \alpha < 180°$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, è $\operatorname{sen}\alpha > 0,\ \cos\alpha < 0$

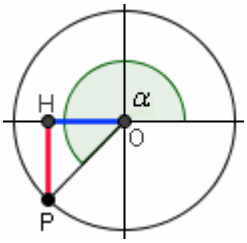


… e quando α cresce da 90° a 180°,
$\operatorname{sen}\alpha$ decresce (da 1 a 0)
$\cos\alpha$ decresce (da 0 a -1)

Per $\alpha = 180°$ (π radianti)
$\operatorname{sen}\alpha = 0$; $\cos\alpha = -1$

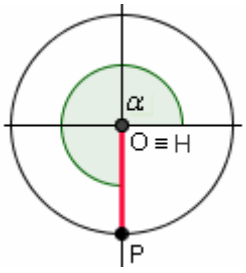


Nel 3° quadrante, ossia per $180° < \alpha < 270°$ $\left(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi\right)$, è $\operatorname{sen}\alpha < 0,\ \cos\alpha < 0$

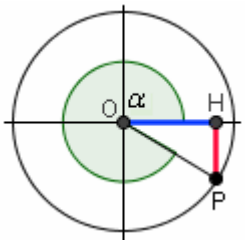


… e quando α cresce da 180° a 270°,
$\operatorname{sen}\alpha$ decresce (da 0 a -1)
$\cos\alpha$ cresce (da -1 a 0)

Per $\alpha = 270°$ $\left(\frac{3}{2}\pi \text{ radianti}\right)$
$\operatorname{sen}\alpha = -1$; $\cos\alpha = 0$



Nel 4° quadrante, ossia per $270° < \alpha < 360°$ $\left(\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$, è $\operatorname{sen}\alpha < 0,\ \cos\alpha > 0$

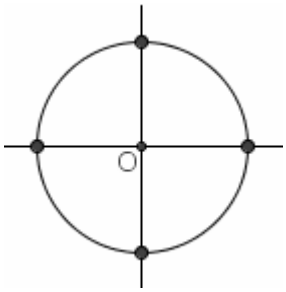


… e quando α cresce da 270° a 360°,
$\operatorname{sen}\alpha$ cresce (da -1 a 0)
$\cos\alpha$ cresce (da 0 a 1)

Quando α raggiunge e poi supera i 360°, i valori di $\operatorname{sen}\alpha$ e di $\cos\alpha$ "ripartono come se si ripartisse da 0° "; cioè, **le funzioni "seno" e "coseno" sono "periodiche di periodo 360° "**. Ne riparleremo.

Clicca QUI ⇨ per una bella figura "dinamica" (GeoGebra) sulla variazione di seno e coseno al variare dell'arco

ESERCIZI



1) Nella circonferenza goniometrica in figura

I) scrivi la coppia delle coordinate di ciascuno dei cinque punti evidenziati

II) disegna: a) l'angolo di 135°; b) quello che misura $\frac{7}{6}\pi$; c) quello di $-80°$

III) e disegna inoltre una coppia di angoli fra loro complementari: α e $90° - \alpha$ (potrebbero essere, ad esempio, 25° e 65° …)
per constatare un fatto importante, che vale poi per qualsiasi valore di α, anche maggiore di 90° o di 180° o di 360°, anche negativo: si ha sempre

$\boxed{sen(90° - \alpha) = cos\,\alpha}$ e $\boxed{cos(90° - \alpha) = sen\,\alpha}$

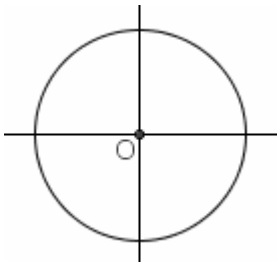
PASSANDO DA UN ANGOLO AL SUO COMPLEMENTARE, I VALORI DI SENO E COSENO SI SCAMBIANO FRA LORO.



2) Sapendo che $sen\,43° \approx 0.68$, $cos\,43° \approx 0.73$, riempi i puntini: $sen\,47° \approx \ldots$, $cos\,47° \approx \ldots$

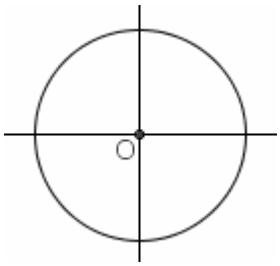
3) a) Noto il valore $sen\,\alpha$ del seno di un angolo, ci sono due modi per ricavare $cos\,\alpha$. Quali?
b) Determina: il coseno di un angolo ottuso il cui seno vale 0.39
c) Determina il seno di un angolo acuto il cui coseno vale 0.14

4) Quali sono gli angoli, compresi fra 0° e 360°,
a) il cui seno è uguale a 0? b) il cui coseno è uguale a 0? c) il cui seno è uguale a 1?
d) il cui coseno è uguale a 1? e) il cui seno è uguale a -1? f) il cui coseno è uguale a -1?
g) il cui seno è uguale al coseno? h) il cui seno è l'opposto del coseno?
i) Se un angolo α compreso fra 0° e 360° ha coseno < 0, in quale intervallo di ampiezze può trovarsi?



5)

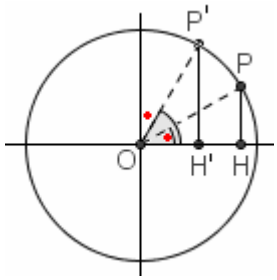
sen 122° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
cos 122° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
sen 180° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
cos 180° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
sen 214° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
cos 214° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
sen 270° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
cos 270° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
sen 355° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1
cos 355° è:	a) >0	b) <0	c) = 0	d) = +1	e) = −1



6) Utilizzando una matita e una circonf. goniometrica, individua la risposta corretta:

$sen(\alpha + 180°) = ?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$sen(180° - \alpha) = ?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$sen(90° - \alpha) = ?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$sen(90° + \alpha) = ?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$sen(-\alpha) = ?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$
$cos(180° - \alpha) = ?$	a) $sen\,\alpha$	b) $cos\,\alpha$	c) $-sen\,\alpha$	d) $-cos\,\alpha$

RISPOSTE



1) III) In effetti, nella figura qui a destra, si ha: $P\hat{O}H = \alpha$, $P'\hat{O}H' = 90° - \alpha$,
$PH = sen\,\alpha$, $OH = cos\,\alpha$, $P'H' = sen(90° - \alpha)$, $OH' = cos(90° - \alpha)$
e si può osservare (e dimostrare) che è $P'H' = OH$, $OH' = PH$

2) $sen\,47° = cos(90° - 47°) = cos\,43° \approx 0.73$
$cos\,47° = sen(90° - 47°) = sen\,43° \approx 0.68$

3) a) Primo modo: $cos\,\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\,\alpha}$ *dove il segno dev'essere deciso in base all'ampiezza dell'angolo*
Secondo modo: con la macchinetta, risalire dal seno all'angolo (tasto sen^{-1}), poi calcolare il coseno (*cos*)
b) ≈ -0.92 c) ≈ 0.99

4) a) 0°, 180°, 360° b) 90°, 270° c) 90° d) 0°, 360° e) 270°
f) 180° g) 45°, 225° h) 135°, 315° i) $90° < \alpha < 270°$

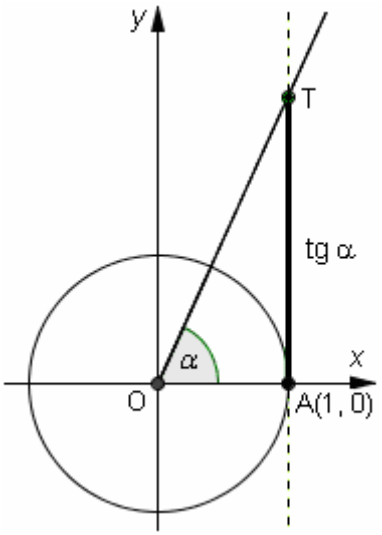
5) $sen\,122° > 0$, $cos\,122° < 0$, $sen\,180° = 0$, $cos\,180° = -1$, $sen\,214° < 0$,
$cos\,214° < 0$, $sen\,270° = -1$, $cos\,270° = 0$, $sen\,355° < 0$, $cos\,355° > 0$

6) $sen(\alpha + 180°) = -sen\,\alpha$, $sen(180° - \alpha) = sen\,\alpha$, $sen(90° - \alpha) = cos\,\alpha$,
$sen(90° + \alpha) = cos\,\alpha$, $sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$, $cos(180° - \alpha) = -cos\,\alpha$

5. TANGENTE DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo il punto A che sta "all'estrema destra", di coordinate $(1,0)$.
Per A tracciamo la retta "verticale", ossia quella parallela all'asse y,
e indichiamo con T il punto di intersezione fra tale retta e il raggio vettore di un dato angolo α
(o, eventualmente, il prolungamento del raggio vettore dalla parte dell'origine).

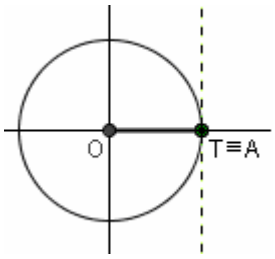
Si dice "tangente di α" l'ordinata del punto T, ossia la misura (con segno) del segmento AT in figura.

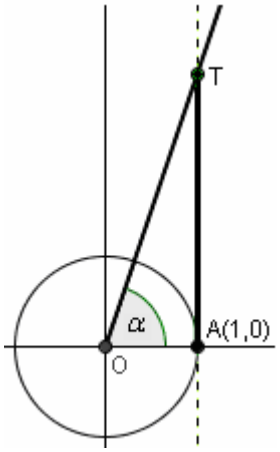


$\mathrm{tg}\,\alpha$ = ordinata di T = misura (con segno) di AT

Clicca QUI ⇨
per una bella figura dinamica
(software GeoGebra)
che ti permetterà di osservare
la variazione della tangente goniometrica
al variare dell'angolo.

Per $\alpha = 0°$ (0 radianti)
$\mathrm{tg}\,\alpha = 0$



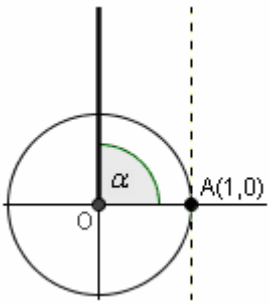


Nel 1° quadrante, ossia
per $0° < \alpha < 90°$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$,
si ha $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$

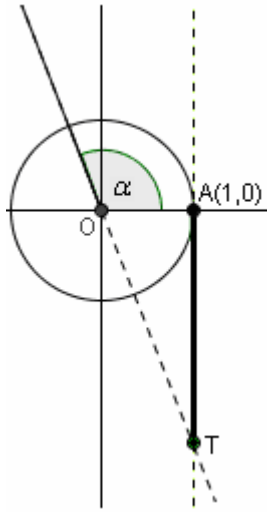
… e quando α si avvicina a 90°,
mantenendosi però *minore* di 90°,
$\mathrm{tg}\,\alpha$ diventa altissima,
"tende a $+\infty$".

Ad esempio, si ha
$\mathrm{tg}\ 89.97° \approx 1909.86$

Per $\alpha = 90°$ $(\pi/2$ radianti)
$\mathrm{tg}\,\alpha$ NON ESISTE!



Il raggio vettore, ossia
il secondo lato dell'angolo,
in questo caso coincide col
semiasse delle ordinate positive.
Ma allora il punto T "non si trova",
perché il raggio vettore
e la retta tratteggiata
sono parallele
e quindi non si incontrano.



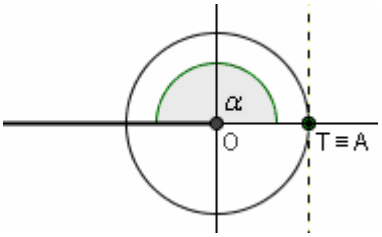
Nel 2° quadrante, ossia
per $90° < \alpha < 180°$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$,
si ha $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$

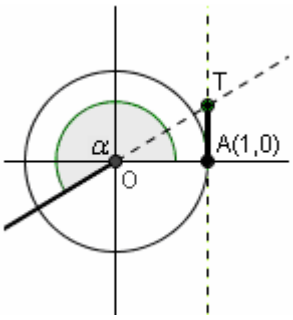
Il raggio vettore è una semiretta
immersa nel 2° quadrante,
ma la definizione di tangente goniometrica
prevede che si debba sempre considerare
l'intersezione fra la retta verticale per A
e il raggio vettore o, eventualmente
(come in questo caso), il suo prolungamento.

Quando α si avvicina a 90°,
mantenendosi però *maggiore* di 90°
(ossia: decrescendo),
$\mathrm{tg}\,\alpha$ diventa altissima in valore assoluto,
ma negativa in segno:
si dice che "tende a $-\infty$"

Ad es., si ha $\mathrm{tg}\ 90.01° \approx -5729.58$

Per $\alpha = 180°$ (π radianti)
è di nuovo $\operatorname{tg}\alpha = 0$

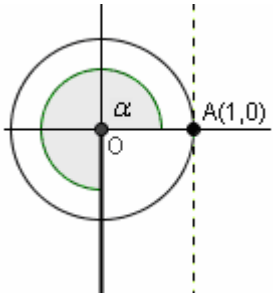


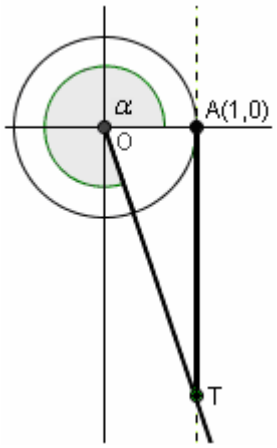


Nel 3° quadrante, ossia
per $180° < \alpha < 270°$ $\left(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi\right)$,
ritorna ad essere $\operatorname{tg}\alpha > 0$

Osserva che,
appena l'angolo supera i 180°,
la tangente riprende gli stessi valori
che aveva a partire da 0°.

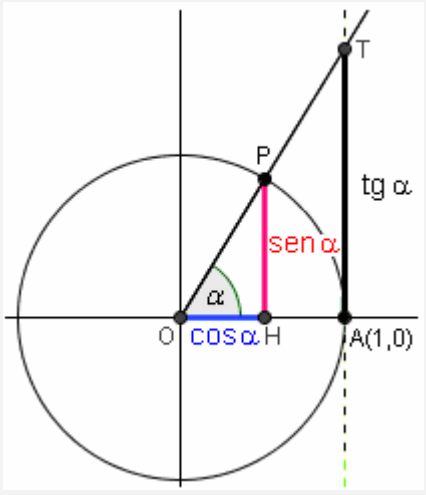
Per $\alpha = 270°$ $\left(\frac{3}{2}\pi \text{ radianti}\right)$
$\operatorname{tg}\alpha$, nuovamente, NON ESISTE.





Nel 4° quadrante, ossia
per $270° < \alpha < 360°$ $\left(\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$,
ritorna ad essere $\operatorname{tg}\alpha < 0$

Quando l'angolo α raggiunge e poi supera i 360°, i valori della tangente "ripartono come se si ripartisse da 0° ".
Ma in fondo vediamo che questo "ricominciare da capo" si ha già quando l'angolo raggiunge e poi supera **180°**!
Insomma, **la funzione "tangente" è "periodica di periodo 180°"**; di questo torneremo a parlare più avanti.



La figura qui a fianco mostra
$AT = \operatorname{tg}\alpha$, $HP = \operatorname{sen}\alpha$, $OH = \cos\alpha$.
I due triangoli OAT, OHP sono simili
(sono entrambi rettangoli,
hanno l'angolo α in comune
e i due angoli acuti di vertici T e P uguali
per differenza rispetto a 180°).
Perciò vale la proporzione $AT : OA = HP : OH$
la quale si può riscrivere come

Due triangoli
con gli angoli
rispettivamente uguali
sono detti "*simili*",
e hanno anche
i lati in proporzione.
Breve spiegazione
alle pagine 442-443.

$\operatorname{tg}\alpha : 1 = \operatorname{sen}\alpha : \cos\alpha$ ossia $\boxed{\mathbf{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}}$.



L'uguaglianza nel riquadro prende il nome di

2ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA.

Possiamo a questo punto osservare che la 2ª rel. fondamentale della goniometria è coerente col fatto che

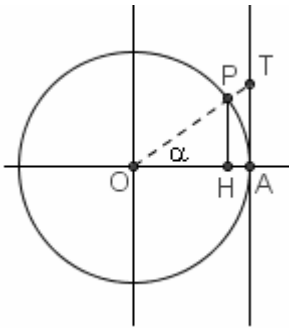
- **la tangente vale 0 per tutti e soli quegli angoli il cui seno è 0**, che sono poi: **0°, 180°, 360°**
  e, andando fuori dai confini del 1° giro, **360° + 180° = 540°, 540° + 180° = 720°, ... ; −180°, −360°, ...** ;
  più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
  $\boldsymbol{k \cdot 180°}$, essendo k un intero relativo ($\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$);
- **la tangente non esiste ("va all'infinito") per tutti e soli quegli angoli il cui coseno è 0** cioè **90°, 270°**
  e, andando fuori dai confini del 1° giro, **270° + 180° = 450°, 450° + 180° = 630°, ... ; − 90°, − 270°, ...**
  più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
  $\boldsymbol{90° + k \cdot 180°}$, essendo k un intero relativo ($\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$)

IL TENDERE A INFINITO. Dire, ad es., che **la tangente "va all'infinito a 90°"**, significa affermare che **quando l'angolo si fa molto vicino a 90°, la rispettiva tangente diventa grandissima in valore assoluto**:

- **per un angolo di pochissimo inferiore a 90°**, ossia **quando l'angolo tende a 90° "per difetto" (1° quadrante)**, **la tangente è grandissima in valore assoluto e positiva ("tende a $+\infty$")**
- mentre **per un angolo appena superiore a 90°**, ossia **quando l'angolo tende a 90° "per eccesso" (2° quadrante)**, **la tangente è grandissima in valore assoluto e negativa ("tende a $-\infty$").**

ESERCIZI

1)



Sui lati del triangolo OAT nella circonferenza goniometrica in figura, pianta le seguenti due bandierine: $\boxed{tg\,\alpha}$ $\boxed{1}$

Invece sui lati di OPH pianta le bandierine: $\boxed{sen\,\alpha}$ $\boxed{cos\,\alpha}$ $\boxed{1}$

Ora i due triangoli OHP, OAT sono "simili": cosa vuol dire?
Scrivi la proporzione fra i loro lati, che porta alla
"2^a relazione fondamentale della goniometria".

2) Fra gli angoli compresi fra 0° e 360°,
   a) quali sono quelli la cui tangente è < 0? b) quali quelli la cui tangente non esiste?
   c) quali quelli la cui tangente è uguale a $+1$? d) e a -1?

3) Cosa si può dire della tangente degli angoli il cui coseno vale 0?

4) Secondo te, a "occhio" (fai un disegno!), l'angolo acuto la cui tangente goniometrica misura 4 è compreso:
   a) fra 50° e 60° ? b) fra 60° e 70° ? c) fra 70° e 80°?
   Servendoti di una macchinetta calcolatrice, stabilisci la misura di quell'angolo (in gradi e primi), poi trasformala in radianti (approssimando ai centesimi).

5) Disponendo di una macchinetta calcolatrice, calcola $tg\,54°$ senza però mai pigiare il tasto tan.

6) E' vero che $tg\,(90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$?

RISPOSTE

2) a) sono gli angoli α tali che $90° < \alpha < 180°$ e $270° < \alpha < 360°$ b) 90°, 270° c) 45°, 225° d) 135°, 315°

3) Quando il coseno di un angolo vale 0, la tangente di quell'angolo non esiste.
Questo si vede a partire dalla circonferenza goniometrica, o anche dalla 2^a Relazione Fondamentale: essa ci dice che $tg\,\alpha = sen\,\alpha / cos\,\alpha$, e quando il denominatore è 0 una frazione non è definita.

4) c) $\approx 75°\ 58'$; ≈ 1.33 radianti 5) Basta fare $sen\,54° / cos\,54°$. Si ottiene ≈ 1.376

6) Sì, è vero. $tg\,(90° - \alpha) = sen\,(90° - \alpha) / cos\,(90° - \alpha) = cos\,\alpha / sen\,\alpha = 1/(sen\,\alpha / cos\,\alpha) = 1/tg\,\alpha$

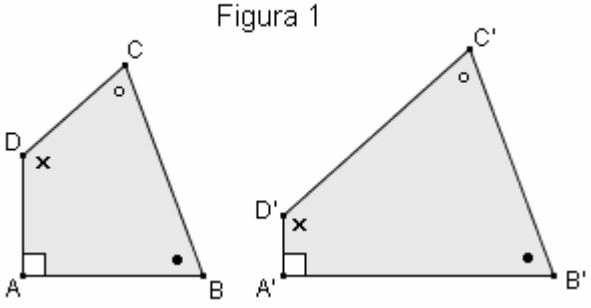
6. POLIGONI SIMILI (CENNI)

Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono "simili" se sono uno l'ingrandimento dell'altro.

Se ti sforzi di disegnare due poligoni, ad esempio due quadrilateri,
in modo che **uno di essi appaia come l'ingrandimento dell'altro**, ti renderai conto che
dovrai innanzitutto disegnarli con **gli angoli rispettivamente uguali**; … ma ciò **non sarà sufficiente**:
ci vorrà qualcosa in più, e precisamente dovrai fare in modo che **i lati siano in proporzione**.

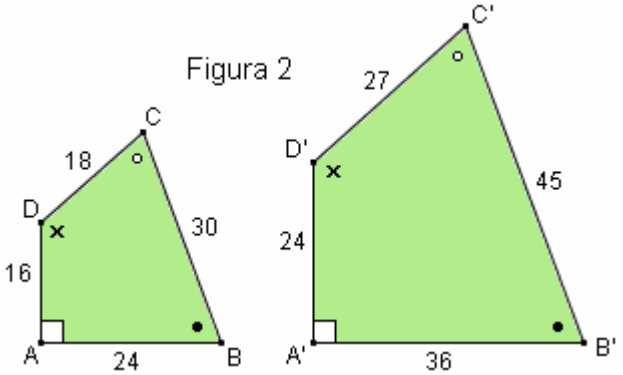
I due poligoni della figura sottostante
hanno gli angoli rispettivamente uguali.
Eppure, evidentemente,
NON sono "uno l'ingrandimento dell'altro"…

Figura 1



… Invece i due poligoni di quest'altra figura,
oltre ad avere gli angoli rispettivamente uguali,
hanno pure i lati proporzionali,
perché ciascun lato del primo poligono
è i 2/3 del lato che gli corrisponde nel secondo poligono.
In questa Figura 2, i due poligoni in gioco appaiono
"uno l'ingrandimento dell'altro".

Figura 2



Dire che "hanno i lati corrispondenti proporzionali" significa dire
che il rapporto fra due lati corrispondenti è lo stesso per ogni coppia di lati corrispondenti.

Con riferimento alla *Figura 2*, $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'$.

Tale rapporto costante si dice "**rapporto di similitudine**".

Ad esempio, in *Figura 2*, il rapporto di similitudine dei due quadrilateri ABCD, A'B'C'D'
(presi in quest'ordine), è 2/3 (prendendoli invece nell'ordine opposto, il rapporto di similitudine sarebbe 3/2)

❑ TRIANGOLI SIMILI

Abbiamo visto che due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli risp. uguali e i lati corrisp. proporzionali.

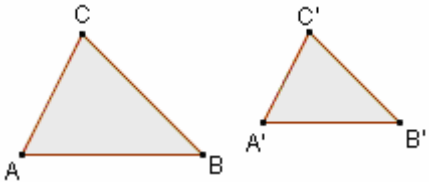
Nel caso dei triangoli, tuttavia, **questa definizione si rivela sovrabbondante**, perché si può dimostrare che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora hanno SENZ'ALTRO anche i lati corrispondenti proporzionali; cosa che invece non necessariamente accade per i poligoni con più di 3 lati.

Questo enunciato (di cui non diamo qui la dimostrazione) prende il nome di "Primo Criterio di Similitudine".

TEOREMA (1° Criterio di similitudine) - Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora sono simili, cioè hanno anche i lati corrispondenti proporzionali.

LA PROPORZIONALITA' SI PUO' "VEDERE" IN DUE MODI

Se abbiamo due triangoli simili, l'affermazione che "i lati corrispondenti sono proporzionali" può essere interpretata indifferentemente in due modi, che si equivalgono perfettamente fra loro.



AB : A'B' = AC : A'C'
ma anche **AB : AC = A'B' : A'C'**

Le due proporzioni qui a fianco sono equivalenti: si possono ricavare l'una dall'altra applicando la proprietà del permutare i medi.

♪ Si può dire che il rapporto tra due lati corrispondenti è costante, cioè che

"un lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente, come un altro lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente"

$AB : A'B' = AC : A'C'$ $\quad AB : A'B' = BC : B'C'$ $\quad AC : A'C' = BC : B'C'$

♫ … e si può anche dire che il rapporto di due lati del 1° triangolo è uguale al rapporto dei due lati corrispondenti del 2° triangolo (presi nello stesso ordine), cioè che

"un lato (del 1° triangolo) sta ad un altro lato (sempre del 1° triangolo) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo"

$AB : AC = A'B' : A'C'$ $\quad AB : BC = A'B' : B'C'$ $\quad AC : BC = A'C' : B'C'$

E' chiaro che ciascuno è liberissimo di "vedere", di esprimere, la similitudine, nel modo che preferisce!

Il 1° Criterio di Similitudine è un teorema che si applica con **grandissima frequenza** negli esercizi.
Osserviamo fra l'altro che si può subito concludere che due triangoli dati sono simili
anche soltanto sapendo che hanno **DUE angoli rispettivamente uguali**,
perché **allora (per differenza rispetto a 180°) saranno certo uguali anche gli angoli rimanenti**.

COROLLARIO del 1° Criterio di similitudine
Una retta parallela ad un lato di un triangolo stacca da questo un triangolo simile al dato

"Corollario"= affermazione che è conseguenza immediata di un'altra

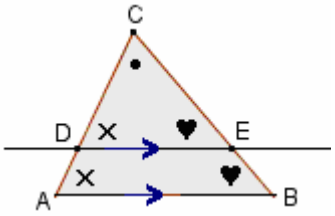


Figura qui a fianco: basta tener presente che, quando si hanno due parallele con trasversale, gli angoli corrispondenti sono uguali …

TEOREMA (2° Criterio di similitudine)
Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali, allora sono simili

Quindi possiamo ad es. dire che sono simili due triangoli ABC e PQR tali che: $\hat{A} = \hat{P}$, $AB = 5\,PQ$, $AC = 5\,PR$

TEOREMA (3° Criterio di similitudine)
Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente proporzionali, allora sono simili

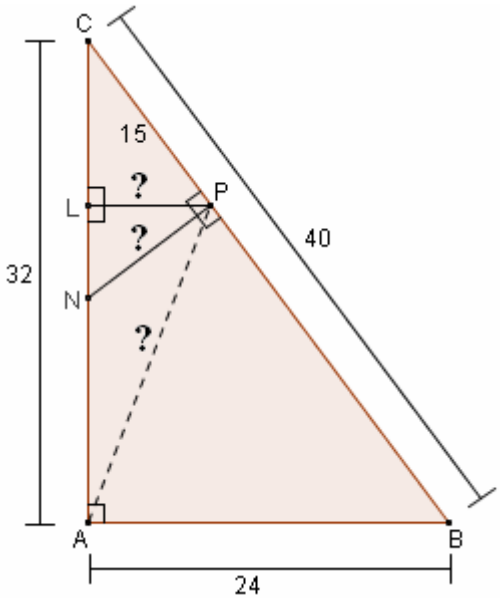
Ad es., se i lati di ABC misurano 6, 8 e 12 e quelli di DEF misurano 9, 12 e 18 (una volta e mezza), allora ABC e DEF sono simili. Se noi raddoppiamo, o triplichiamo, o dimezziamo, o riduciamo alla 3^a parte, … , insomma: moltiplichiamo per uno stesso numero $k > 0$, tutti e tre i lati di un triangolo,
otterremo in questo modo un triangolo che sarà sicuramente simile a quello di partenza.

PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI: UN ESEMPIO SVOLTO

In un triangolo rettangolo ABC i due cateti AB e AC misurano rispettivamente 24 cm e 32 cm.
Sull'ipotenusa BC si prende un segmento CP = 15 cm e per P si tracciano:

- la perpendicolare ad AC, fino ad incontrare AC in L
- e la perpendicolare a BC, fino ad incontrare AC in N.

Quanto misurano i tre segmenti PL, PN, PA?



$B\hat{A}C = 90°$

$AB = 24$ cm

$AC = 32$ cm

$CP = 15$ cm

$PL \perp AC$

$PN \perp BC$

$PL = ?$

$PN = ?$

$PA = ?$

Ripasso
PROPRIETA' FONDAMENTALE
DELLE PROPORZIONI:
$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$
"In una proporzione, il prodotto dei medi
è uguale al prodotto degli estremi;
E, VICEVERSA,
se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto
di due di essi è uguale al prodotto degli altri due,
allora con tali quattro numeri si può costruire
una proporzione, a patto di prendere come medi
(o come estremi) i fattori di uno stesso prodotto".

Conseguenza:
se il termine incognito è un estremo, sarà uguale
al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;
se il termine incognito è un medio, sarà uguale
al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto

Esempio $25 : x = 20 : 12 \quad x = \dfrac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \cancel{12}^{3}}{\cancel{20}_{4}} = 15$

$BC \underset{\text{Pitagora}}{=} \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40$ cm

Il simbolo "simile con" è un serpentello: ~

LPC ~ ABC (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

$PL : AB = PC : BC$ *oppure* $PL : PC = AB : BC$

(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente)

(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

$PL : 24 = 15 : 40$

$\boxed{PL =} \dfrac{\cancel{24}^{3} \cdot \cancel{15}^{3}}{\cancel{40}_{5}} = \boxed{9 \text{ cm}}$

$PL : 15 = 24 : 40$

$\boxed{PL =} \dfrac{\cancel{15}^{3} \cdot \cancel{24}^{3}}{\cancel{40}_{5}} = \boxed{9 \text{ cm}}$

NOTA

Nei due triangoli considerati, i due lati PL ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

In due triangoli simili, due lati si corrispondono se stanno opposti ad angoli uguali (o allo stesso angolo)

PNC ~ ABC (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

$PN : AB = PC : AC$ *oppure* $PN : PC = AB : AC$

(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente)

(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

$PN : 24 = 15 : 32$

$\boxed{PN =} \dfrac{\cancel{24}^{3} \cdot 15}{\cancel{32}_{4}} = \boxed{\dfrac{45}{4} \text{ cm}}$

$PN : 15 = 24 : 32$

$\boxed{PN =} \dfrac{15 \cdot \cancel{24}^{3}}{\cancel{32}_{4}} = \boxed{\dfrac{45}{4} \text{ cm}}$

NOTA

Nei due triangoli considerati, i due lati PN ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

Per quanto riguarda PA, lo ricaveremo con Pitagora su APL, dopo aver calcolato AL:

$CL = \sqrt{PC^2 - PL^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ cm $\qquad AL = AC - CL = 32 - 12 = 20$ cm

$\boxed{PA =} \sqrt{AL^2 + PL^2} = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{400 + 81} = \boxed{\sqrt{481} \text{ cm}}$

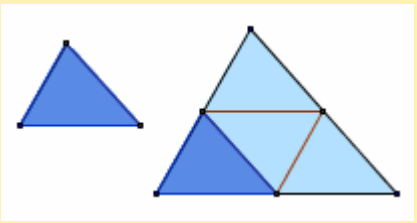
Nel passaggio da un triangolo a un altro simile, LE AREE stanno fra loro come i QUADRATI di due lati omologhi (= corrispondenti).

Ad esempio: *Ogni lato raddoppia* ? Allora

- anche IL PERIMETRO *raddoppierà*,
- ciascuna ALTEZZA *raddoppierà*,
- ma l'AREA *diventerà il quadruplo*.

♥ *Lati* doppi?
Area quadrupla!





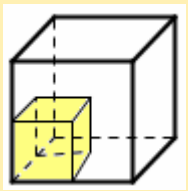
Se poi il lato triplica, l'area diventa 9 volte tanto (= subisce una moltiplicazione per $3^2 = 9$), ecc.

Questo vale, più in generale, per tutte le FIGURE PIANE sottoposte a DILATAZIONE O CONTRAZIONE:
nel passaggio da una figura piana ad un'altra che ne sia la dilatazione o la contrazione "in scala", LE AREE STANNO FRA LORO COME IL QUADRATO DEL RAPPORTO DI SCALA.

Nello SPAZIO TRIDIMENSIONALE,
avviene qualcosa del genere ma coi VOLUMI e coi CUBI anziché con le aree e coi quadrati.
Nel passaggio da una figura solida a un'altra che ne sia la DILATAZIONE o la CONTRAZIONE "in scala", I VOLUMI STANNO FRA LORO COME IL CUBO DEL RAPPORTO DI SCALA.

Se un solido subisce, ad es., una dilatazione in modo che ogni misura lineare raddoppi, il suo volume diventerà 8 volte tanto.

♥ *Spigoli* doppi? *Volume* moltiplicato per 8!

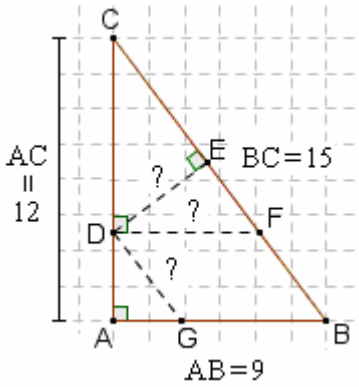


Il cubo di lato doppio richiede 8 cubetti piccoli per essere riempito. Quindi il suo volume è 8 volte il volume del cubetto piccolo.

ESERCIZI (le risposte sono a pag. 450)

1) Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha i lati di 9 cm, 12 cm, 15 cm.
Da un punto D preso sul cateto maggiore AC, in modo che DC = 2AD, si tracciano:
- la perpendicolare DE a BC;
- la parallela DF ad AB;
- la parallela DG a BC.

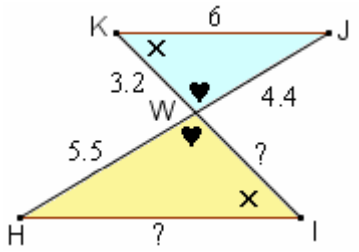
Determinare le misure dei tre segmenti DE, DF, DG.



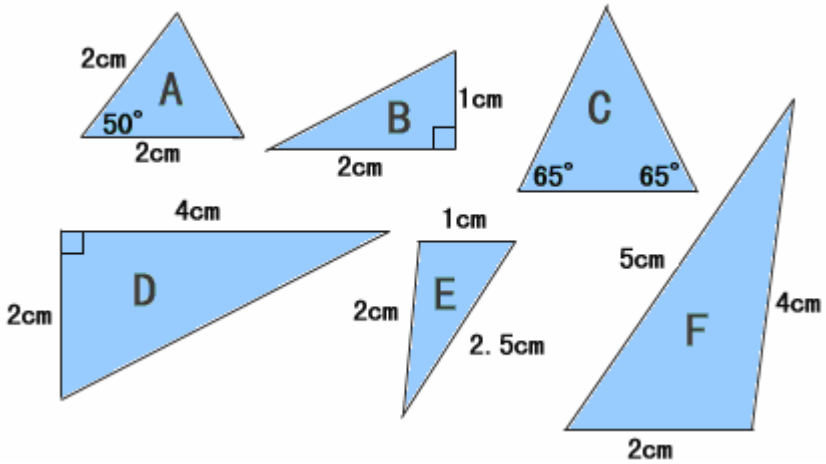
2) La figura mostra due triangoli KWJ, IWH i quali, per avere due angoli rispettivamente uguali, avranno (per diff. rispetto a 180°) uguale anche l'angolo rimanente e perciò saranno simili.
Del triangolo KWJ sono note (e indicate in figura) le misure di tutti e tre i lati; del triangolo IWH si sa solo che HW = 5.5

a) Determina i due lati rimanenti del secondo triangolo

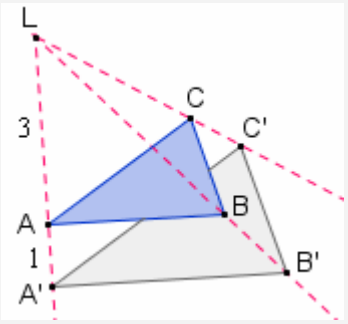
b) Per quale numero si deve moltiplicare l'area del triangolo più piccolo, se si vuole ottenere quella del triangolo più grande?



3) Ci sono triangoli simili in figura? (da http://www.ies.co.jp/math/)



4) A'B'C' è l'ombra di ABC.
Se LA = 3 e AA' = 1, qual è il rapporto fra il perimetro di A'B'C' e quello di ABC?
E qual è il rapporto fra le aree?

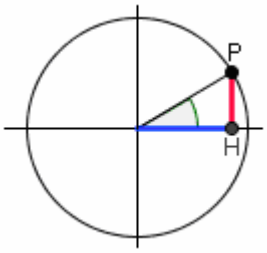


7. PERIODICITA' DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

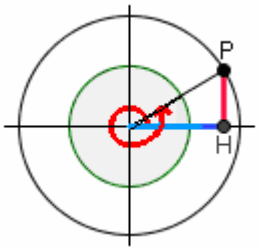
I VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE SENO, COSENO E TANGENTE "SI RIPETONO DOPO UN GIRO COMPLETO". Insomma:

sulla circonferenza goniometrica, un angolo di $30°$
"vale come un angolo di $30° + 360° = 390°$,
o come un angolo di $30° - 360° = -330°$"
dal punto di vista dei valori delle tre funzioni goniometriche.

a) $30°$

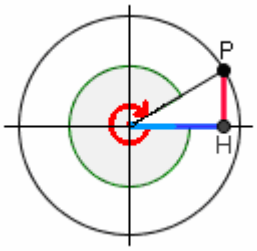


b) $30° + 360° = 390°$
Si prosegue, oltre l'angolo di $30°$,
di un altro giro in senso ANTIORARIO …



… e il punto P ritorna NELLA STESSA POSIZIONE DI PRIMA!

c) $30° - 360° = -330°$
Da $30°$ si toglie,
ruotando in senso ORARIO,
un giro completo
(cioè, tutti i $30°$ poi altri $330°$):
l'effetto è di ripartire
dal semiasse delle ascisse positive
ruotando di $330°$ in senso ORARIO …

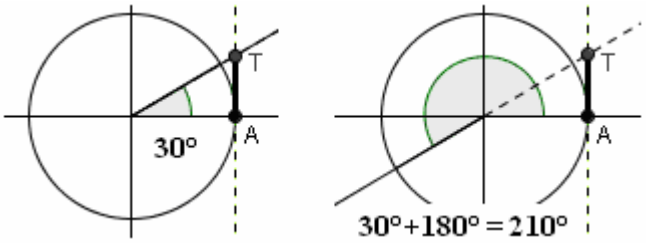


… e il punto P ritorna NELLA STESSA POSIZIONE DI PRIMA!

Più in generale, **prendendo un angolo α,**
e aumentandolo, o anche diminuendolo, di un giro completo (= 360°)
o di un numero intero di giri completi (= un multiplo di 360°),
le tre funzioni goniometriche restano inalterate.

PER LA TANGENTE, ADDIRITTURA,
BASTA CHE L'ANGOLO α SUBISCA UN AUMENTO, O UNA DIMINUZIONE,
ANCHE SOLO DI "MEZZO GIRO" (= 180°)
O DI UN MULTIPLO DI MEZZO GIRO (= UN MULTIPLO DI 180°),
PERCHÉ TALE FUNZIONE RESTI INVARIATA.

La figura qui a fianco, ad esempio,
mostra che
la tangente non cambia
se l'angolo subisce
un aumento di 180°.



Questo ripetersi del valore di $sen\alpha$ e $cos\alpha$,
quando α aumenta o diminuisce di $360°$ o di un multiplo di $360°$,
e questo ripetersi del valore di $tg\alpha$,
quando α aumenta o diminuisce di $180°$ o di un multiplo di $180°$,
viene chiamato la "**PERIODICITÀ**".
Si dice che

- **LE FUNZIONI "SENO" E "COSENO" SONO PERIODICHE DI PERIODO 360°,**
- **LA FUNZIONE "TANGENTE" È PERIODICA DI PERIODO 180°.**

8. CALCOLATRICI E FUNZIONI GONIOMETRICHE

Come fa la calcolatrice tascabile a determinare i valori delle funzioni goniometriche, dirette e inverse?

La matematica mette a disposizione, per calcoli di questo tipo, le *formule di Maclaurin*.
Colin Maclaurin o Mac Laurin, 1698-1746, fu un matematico scozzese. Eccole, queste fantastiche formule:

- $sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
- $cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
- $tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$

Il "punto esclamativo" indica il cosiddetto "**fattoriale**" di un intero: ad esempio,
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (*si legge*: "3 *fattoriale*"); $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Queste "**somme di infiniti addendi**" (= "**serie**") a secondo membro approssimano il valore esatto con una precisione che cresce al crescere del numero di addendi presi in considerazione.

- Inversa del seno (dal seno *y* fa tornare all'angolo *x* espresso in radianti, e compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$):

$$x = sin^{-1}(y) = arc\,sen\,y = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^7}{7} + \ldots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$

  Si legge "arco seno di *y*" (significa, essenzialmente: "il più semplice fra gli archi aventi per seno *y* ")

- Inversa del coseno:

$$x = cos^{-1}(y) = arc\,cos\,y = \frac{\pi}{2} - arc\,sen\,y = \frac{\pi}{2} - y - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^7}{7} - \ldots \qquad (0 \le x \le \pi)$$

- Inversa della tangente: $x = tg^{-1}(y) = arc\,tg\,y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

Per testare la correttezza di queste formule, prova tu stesso a prendere, ad esempio, la formula per $sen\,x$ e ad applicarla nel caso dell'angolo di 30°.

Prima di tutto dovrai passare ai radianti ottenendo, per l'angolo in gioco, 0.5236 *rad* (valore arrotondato). Poi porrai $x = 0.5236$ e considererai, ad esempio, i primi 3 termini, eseguendo il calcolo.

Otterrai un valore che in piccola parte dipenderà anche dagli arrotondamenti eseguiti nei vari passaggi dallo strumento di calcolo di cui ti sei servito, ma che comunque dovrebbe essere vicino a 0.500003193, numero che differisce di pochissimo da quello che è il VERO seno di 30° ossia, come è noto, esattamente $1/2 = 0.5$.

Prendendo un numero maggiore di termini (e partendo da una misura in radianti affetta da un errore di arrotondamento più piccolo) il valore ottenuto sarebbe ancora più preciso.

Bene! Certe calcolatrici del passato, quando si digitava la misura di un angolo per poi pigiare il tasto della funzione *sin* , facevano proprio questo lavoro, di trasformare eventualmente i gradi in radianti ed eseguire la rispettiva formula di Maclaurin, con un numero di termini adeguato alla precisione che lo strumento poteva raggiungere. In realtà, dopo aver introdotto il discorso in questo modo per dare un'idea del *modus operandi* di una calcolatrice, dobbiamo dire che gli algoritmi più utilizzati per il calcolo automatico delle funzioni goniometriche sono *altri*, soprattutto il **metodo CORDIC**, di cui non ci possiamo qui occupare.

LE VARIANTI DELLA SIMBOLOGIA (SUI LIBRI, SUI COMPUTER, SULLE CALCOLATRICI)

a) Accade che, su certi libri di testo o sui tasti delle calcolatrici, si incontrino leggére variazioni dei simboli da noi scelti:
ad esempio, al posto di **sen *x*** puoi trovare **sin *x***, al posto di **tg *x*** puoi trovare **tan *x***.
A volte, poi, viene usata una parentesi dove noi non l'abbiamo invece messa: **sen (*x*), cos (*x*)** ecc.

Analogamente per le funzioni goniometriche inverse:
- al posto di **arc sen** puoi trovare **arc sin** o anche **sen^{-1}** o **sin^{-1}**
- al posto di **arc cos** puoi trovar scritto **cos^{-1}**
- al posto di **arc tg** puoi trovar scritto **arc tan** o anche **tan^{-1}**

Il "-1" fa da PSEUDO-esponente: non significa qui "fare il reciproco", bensì "applicare la funzione inversa"

b) Occhio quando usi la **calcolatrice tascabile**, alla questione dei *radianti* e dei *gradi*!
Se vuoi calcolare, ad esempio, il seno dell'angolo di 2°,
devi controllare che la macchinetta sia impostata sui "gradi" e non sui "radianti".
C'è comunque **sempre un tasto, o una successione di tasti, che consente il passaggio dall'impostazione "in gradi" a quella "in radianti" e viceversa**.

♥ E in ogni caso, tramite la proporzione $\boxed{x_{rad} : \pi = x^\circ : 180^\circ}$

è ben facile transitare fra la misura di un arco in gradi e la misura dello stesso arco in radianti:

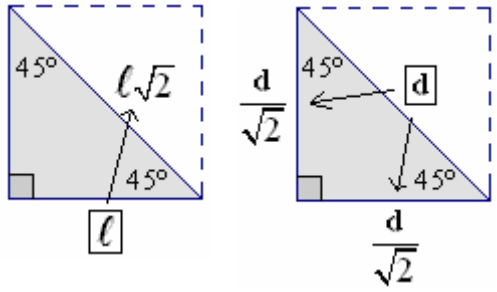
dai gradi ai radianti $\boxed{x_{rad} =} \frac{\pi \cdot x^\circ}{180^\circ} = \boxed{\frac{x^\circ}{180^\circ} \cdot \pi}$; **dai radianti ai gradi** $\boxed{x^\circ =} \frac{x_{rad} \cdot 180^\circ}{\pi} = \boxed{\frac{x_{rad}}{\pi} \cdot 180^\circ}$

9. ALCUNE FORMULE UTILI

I valori delle funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente) degli angoli multipli di 30° o di 45° si possono trovare utilizzando le formule qui sotto riportate (facilmente ottenibili con semplici considerazioni di geometria elementare e utilizzando il T. di Pitagora). Esse permettono, nei cosiddetti "triangoli rettangoli particolari"(=quelli con gli angoli acuti di 30° e 60°, o di 45°), di ricavare tutti i lati conoscendo uno solo di essi.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 45°
(che può essere visto come la metà di un quadrato):

- **L'IPOTENUSA E' UGUALE AL CATETO MOLTIPLICATO $\sqrt{2}$**
- **IL CATETO E' UGUALE ALL'IPOTENUSA DIVISO $\sqrt{2}$**



Ricordiamo che
$\sqrt{2} = 1.414213... \approx 1.4$

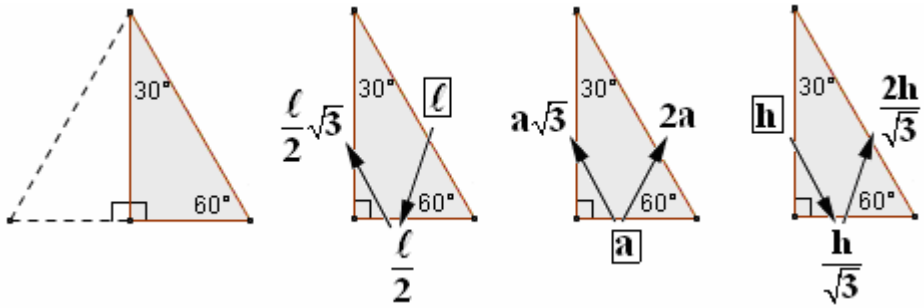
L'espressione $\frac{d}{\sqrt{2}}$ *viene di norma "razionalizzata":*

$$\boxed{\frac{d}{\sqrt{2}}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{d\sqrt{2}}{2}}$$

Scrivendo $\frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$
noi *non abbiamo alterato il valore* dell'espressione di partenza $d/\sqrt{2}$, perché l'abbiamo moltiplicata per 1 ! L'abbiamo invece "razionalizzata", cioè *ci siamo liberati della radice a denominatore*, ritenuta per varie ragioni fastidiosa.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 30° e 60°
(che può essere visto come la metà di un triangolo equilatero):

- **IL CATETO MINORE E' META' DELL'IPOTENUSA**
  e quindi l'ipotenusa è il doppio del cateto minore
- **IL CATETO MAGGIORE E' UGUALE AL MINORE MOLTIPLICATO $\sqrt{3}$** e quindi:
  il cateto maggiore è uguale a metà ipotenusa moltiplicato $\sqrt{3}$
  mentre il cateto minore è uguale al cateto maggiore diviso $\sqrt{3}$)



Ricordiamo che
$\sqrt{3} = 1.73205... \approx 1.7$

$$\boxed{\frac{h}{\sqrt{3}}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{h\sqrt{3}}{3}}$$

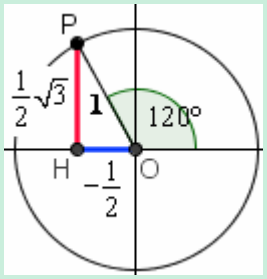
- **Quanto valgono sen 120° e cos 120°?**

  Facciamo un disegnino e ricordiamo che il raggio della circonf. goniometrica vale 1.

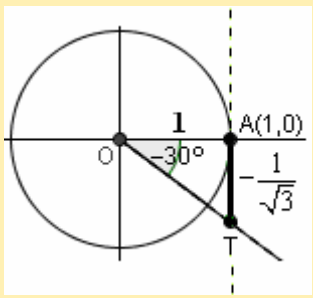
  I lati del triangolo rett. particolare OPH ($P\hat{O}H = 180° - 120° = 60°$) valgono dunque:

  1 (l'ipotenusa OP); $\frac{1}{2}$ (il cateto minore OH); $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (il cateto maggiore HP).

  Allora avremo, tenendo conto dei segni: $\text{sen } 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$



- **Quanto vale $\text{tg}(-30°)$?**

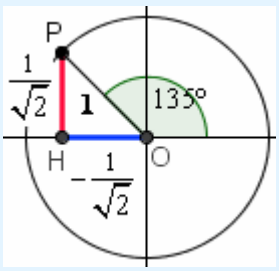


Questa volta il segmento noto è OA = raggio = 1.

Si trae subito, tenendo conto che T ha ordinata negativa,
$\text{tg}(-30°) =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- **Quanto valgono seno e coseno di 135° ?**

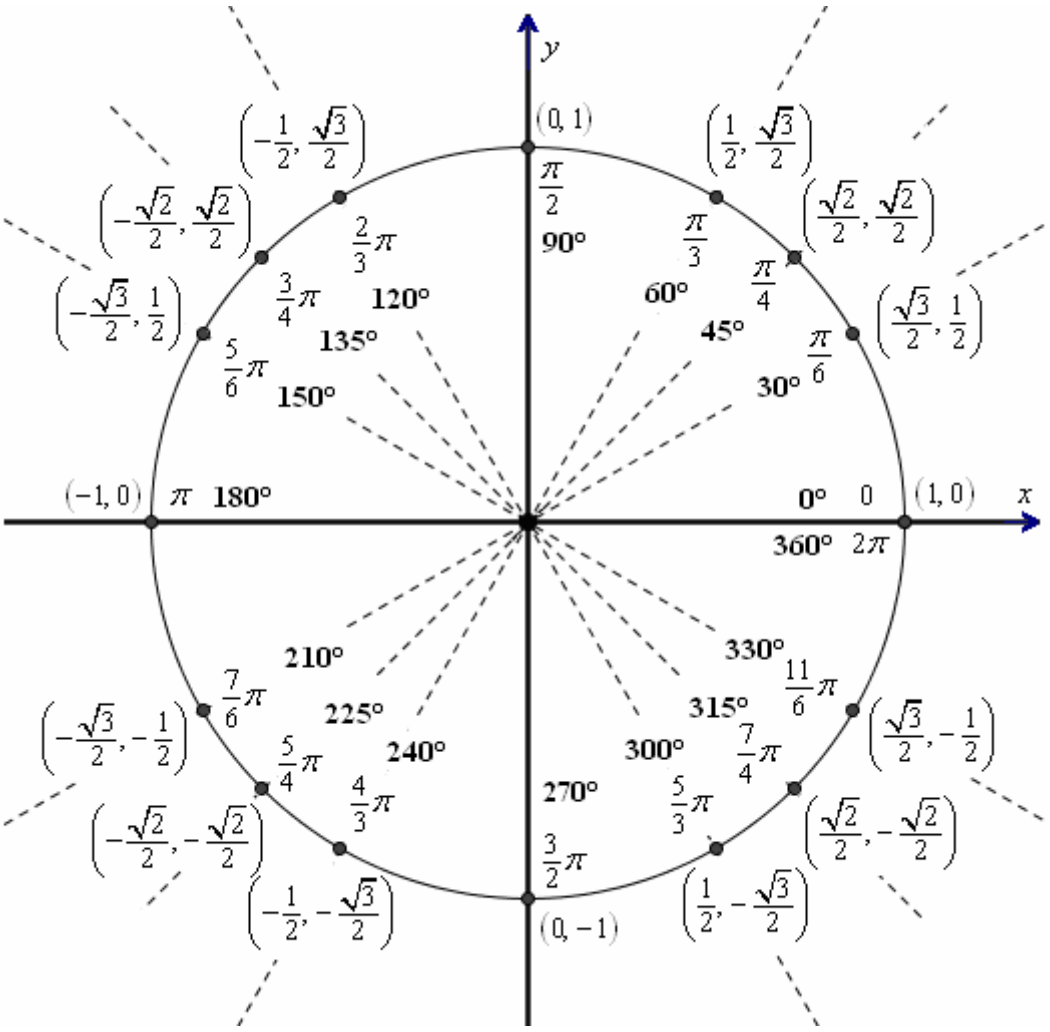


Il segmento noto è qui OP = raggio = 1.
Il triangolo rett. POH ha gli angoli acuti di 45°.
P ha ascissa negativa e ordinata positiva …

$$\text{sen } 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La seguente figura mostra i
VALORI DEL SENO E DEL COSENO DI ALCUNI ANGOLI "PARTICOLARI".



Il **coseno** è la 1ª coordinata, ossia l'**ascissa** del punto; il **seno** è la 2ª coordinata, ossia l'**ordinata**.

Tanto per fare un esempio: l'angolo di 120° ha come misura in radianti $\frac{2}{3}\pi$, e, dato che il punto associato è $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, risulta

$\cos 120° = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\text{sen } 120° = \text{sen } \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ESERCIZI (risposte a pag. 450)

Tenendo coperta la figura qui sopra ☺, determina i valori seguenti:

1) $\text{sen } 30°$	2) $\cos 30°$	3) $\text{tg } 30°$	4) $\text{sen } 60°$	5) $\cos 60°$	6) $\text{tg } 60°$
7) $\text{sen } 45°$	8) $\cos 45°$	9) $\text{tg } 45°$	10) $\text{sen } 120°$	11) $\cos 120°$	12) $\text{tg } 120°$
13) $\text{sen } 150°$	14) $\cos 150°$	15) $\text{tg } 150°$	16) $\text{sen } 135°$	17) $\cos 135°$	18) $\text{tg } 135°$
19) $\text{sen } 0°$	20) $\cos 0°$	21) $\text{sen } 90°$	22) $\cos 90°$	23) $\text{sen } 180°$	24) $\cos 180°$
25) $\text{sen } 225°$	26) $\cos 225°$	27) $\text{tg } 225°$	28) $\text{sen } 210°$	29) $\cos 210°$	30) $\text{tg } 210°$
31) $\text{sen } 240°$	32) $\cos 240°$	33) $\text{tg } 240°$	34) $\text{sen } 270°$	35) $\cos 270°$	36) $\text{tg } 270°$
37) $\cos 270°$	38) $\text{sen } 315°$	39) $\cos 315°$	40) $\text{sen } (-60°)$	41) $\cos 300°$	42) $\text{tg } 330°$
43) $\text{tg } \pi$	44) $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	45) $\text{sen } \frac{\pi}{6}$	46) $\cos \frac{2}{3}\pi$	47) $\text{tg } \frac{5\pi}{2}$	48) $\text{sen } \frac{5}{4}\pi$
49) $\cos \frac{9}{4}\pi$	50) $\text{tg } 780°$	51) $\text{sen } 630°$	52) $\text{tg } \frac{11}{6}\pi$	53) $\text{sen } \frac{7}{6}\pi$	54) $\cos \frac{5}{3}\pi$

Stabilisci quali sono, nell'ambito del **primo giro ($0° \le x \le 360°$)**,
le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche (scrivi le soluzioni in **gradi**).

55) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$	56) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$	57) $\cos x = \frac{1}{2}$	58) $\cos x = -\frac{1}{2}$
59) $\text{tg } x = -1$	60) $\text{sen } x = 0$	61) $\cos x = 0$	62) $\text{tg } x = 0$
63) $\text{sen } x = \cos x$	64) $\text{tg } x = -\sqrt{3}$	65) $\cos x = \sqrt{2}/2$	66) $\text{sen } x + \cos x = 0$

RISPOSTE agli esercizi di pag. 449

1) $\frac{1}{2}$	2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	3) $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	5) $\frac{1}{2}$	6) $\sqrt{3}$
7) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	8) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	9) 1	10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	11) $-\frac{1}{2}$	12) $-\sqrt{3}$
13) $\frac{1}{2}$	14) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	15) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	16) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	17) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	18) -1
19) 0	20) 1	21) 1	22) 0	23) 0	24) -1
25) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	26) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	27) 1	28) $-\frac{1}{2}$	29) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	30) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
31) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	32) $-\frac{1}{2}$	33) $\sqrt{3}$	34) -1	35) 0	36) non esiste
37) 0	38) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	39) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	40) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	41) $\frac{1}{2}$	42) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
43) 0	44) -1	45) $\frac{1}{2}$	46) $-\frac{1}{2}$	47) non esiste	48) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
49) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	50) $\sqrt{3}$	51) -1	52) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	53) $-\frac{1}{2}$	54) $\frac{1}{2}$

55) $x=30°,\ x=150°$
56) $x=210°,\ x=330°$
57) $x=60°,\ x=300°$
58) $x=120°,\ x=240°$
59) $x=135°,\ x=315°$
60) $x=0°,\ x=180°,\ x=360°$
61) $x=90°,\ x=270°$
62) $x=0°,\ x=180°,\ x=360°$
63) $x=45°,\ x=225°$
64) $x=120°,\ x=300°$
65) $x=45°,\ x=315°$
66) $x=135°,\ x=315°$

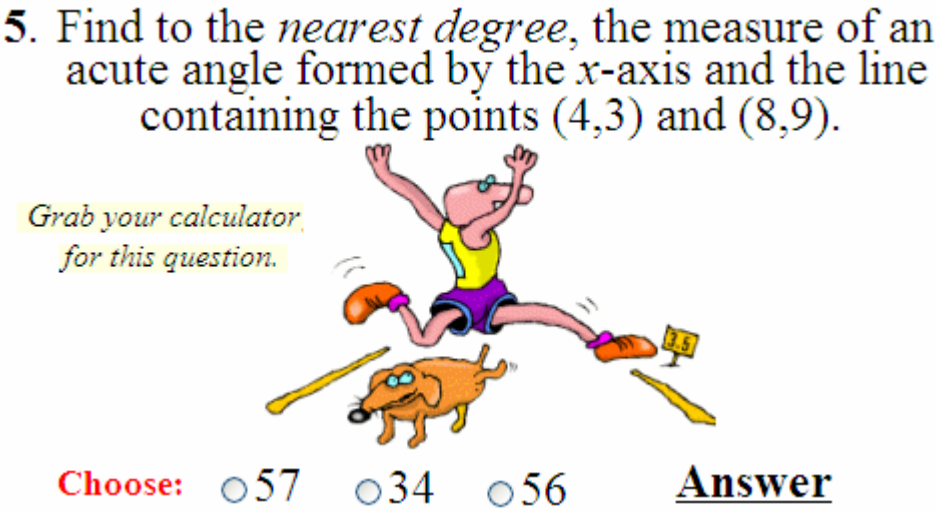


Immagine a fianco:
da www.regentsprep.org/

RISPOSTE agli esercizi di pag. 445

1) $DE=\frac{24}{5}\text{ cm}=4.8\text{ cm},\ DF=6\text{ cm},\ DG=5\text{ cm}$ 2) a) $WI=4,\ HI=7.5$ b) per $\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1.5625$

3) Sono simili:

- A e C , perché hanno gli angoli rispettivamente uguali! 1° Criterio di similitudine.
  Infatti in A un angolo misura 50° e gli altri due, essendo uguali fra loro in quanto A è isoscele perché ha due lati entrambi di 2 cm, misureranno $(180°-50°)/2=65°$;
  e gli angoli di C misurano 65°, 65°, $180°-65°-65°=50°$
- B e D , in quanto hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali perché entrambi di 90°: 2° Criterio di similitudine.
- E e F, perché hanno i lati in proporzione: 3° Criterio.
  Ciascun lato di F è infatti il doppio del lato che gli corrisponde in E.

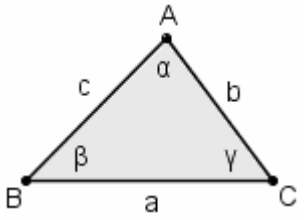
4) Il perimetro di A'B'C' è i 4/3 di quello di ABC; l'area di A'B'C' è i 16/9 dell'area di ABC.

10. TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Questi teoremi mostrano che le definizioni di seno, coseno e tangente date all'inizio del capitolo, coi triangoli rettangoli, vanno d'accordo con le definizioni successive, quelle basate sulla circonferenza goniometrica.

Adotteremo di preferenza, quando possibile, la **SIMBOLOGIA STANDARD** illustrata dalla figura qui a fianco:

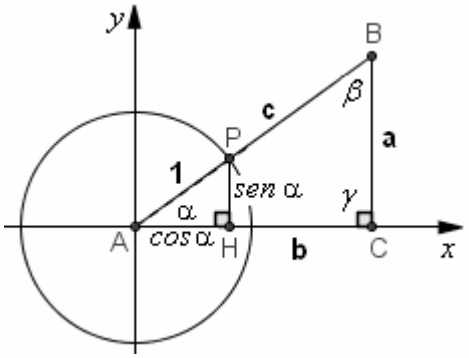
- triangolo ABC,
- lati a, b, c (a opposto al vertice A, ecc.)
- angoli α, β, γ ($\alpha = \hat{A}$ ecc.)



TEOREMA

In un triangolo rettangolo, il SENO di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opposto}{ipotenusa} = \frac{a}{c}$$



Dimostrazione

Nel piano su cui giace il triangolo rettangolo ABC, disegniamo un riferimento cartesiano di origine A, il cui semiasse delle ascisse positive coincida con la semiretta AC.

Su questo riferimento, disegniamo poi la circonferenza goniometrica, di raggio 1.

I due triangoli rettangoli ABC, APH sono simili, quindi possiamo scrivere la proporzione

$$HP : AP = CB : AB \quad \text{da cui} \quad sen\alpha : 1 = a : c \qquad \frac{sen\,\alpha}{1} = \frac{a}{c} \qquad sen\,\alpha = \frac{a}{c},\ c.v.d$$

CONSEGUENZA IMMEDIATA: $a = c \cdot sen\,\alpha$ cioè *cateto = ipotenusa · seno dell'angolo opposto*

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, il COSENO di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto adiacente e l'ipotenusa

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa} = \frac{b}{c}$$

La dimostrazione è analoga alla precedente: poiché i due triangoli rettangoli ABC, APH sono simili avremo

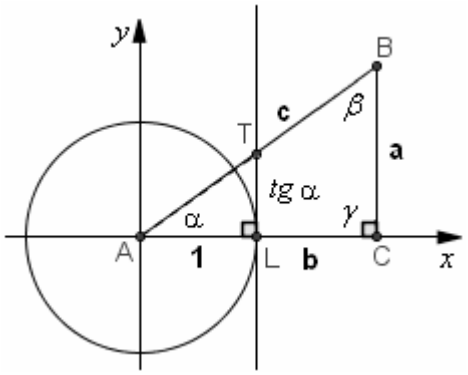
$$AH : AP = AC : AB \quad \text{da cui} \quad \cos\alpha : 1 = b : c \qquad \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{b}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},\ c.v.d.$$

CONSEGUENZA IMMEDIATA: $b = c \cdot \cos\alpha$ cioè *cateto = ipotenusa · coseno dell'angolo adiacente*

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, la TANGENTE di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e il cateto adiacente

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente} = \frac{a}{b}$$



Dimostrazione

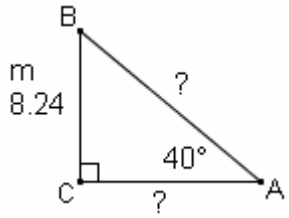
Questa volta sfruttiamo la similitudine fra ABC e ATL.

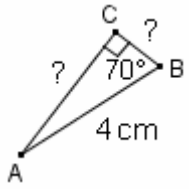
$$LT : AL = CB : AC \quad \text{quindi}$$

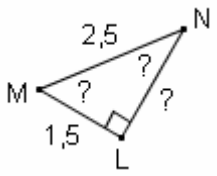
$$tg\,\alpha : 1 = a : b \qquad \frac{tg\,\alpha}{1} = \frac{a}{b} \qquad tg\,\alpha = \frac{a}{b},\quad c.v.d.$$

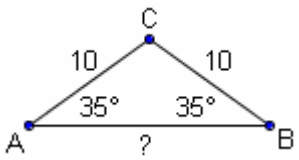
CONSEGUENZA IMMEDIATA: $a = b \cdot tg\,\alpha$; *cateto = altro cateto · tangente dell'angolo opposto al primo*

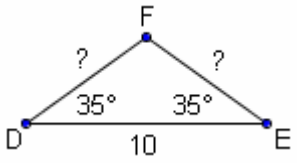
ESERCIZI

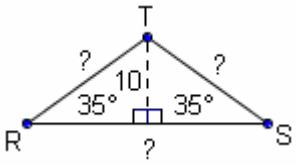
1) a) 

b) 

c) 

2) a) 

b) 

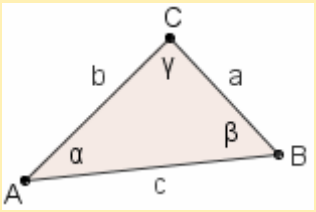
c) 

11. TEOREMI SUI TRIANGOLI QUALSIASI

Si potrebbero dimostrare gli interessanti teoremi che seguono, validi per triangoli qualsiasi.

- Il **TEOREMA DEI SENI**:
  "**in un triangolo, è costante il rapporto fra ciascun lato e il seno dell'angolo opposto**"

$$\frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{b}{sen\,\beta}=\frac{c}{sen\,\gamma}$$



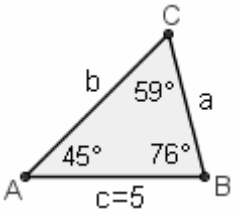
- e il **TEOREMA DEL COSENO**:
  in ogni triangolo, valgono le relazioni scritte nel riquadro qui a destra →

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

ESERCIZI

3) Mediante il Teorema dei Seni, determina gli elementi incogniti del triangolo qui a fianco raffigurato.

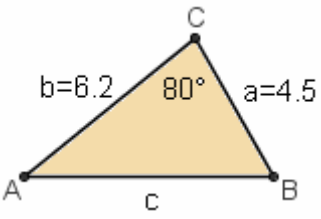
INDICAZIONE: Per ricavare b, si prenderà la formula $\frac{b}{sen\,\beta}=\frac{c}{sen\,\gamma}$ che coinvolge b e il lato noto c, per risolverla rispetto a b: $b=\frac{c}{sen\,\gamma}\cdot sen\,\beta$



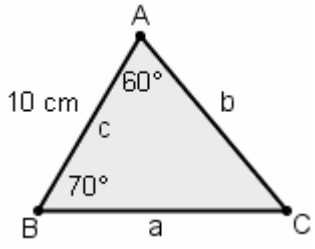
4) Serviti del Teorema del Coseno per trovare il 3° lato del triangolo in figura. Successivamente, col T. dei Seni, determina le misure dei seni degli angoli e infine risali al valore, approssimato ai gradi, degli angoli stessi.

INDICAZIONE: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\ldots$ dopodiché:

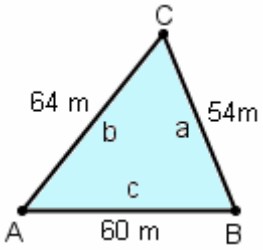
$\frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{c}{sen\,\gamma}$; $\frac{sen\,\alpha}{a}=\frac{sen\,\gamma}{c}$; $sen\,\alpha=\ldots$, da cui il valore di α.



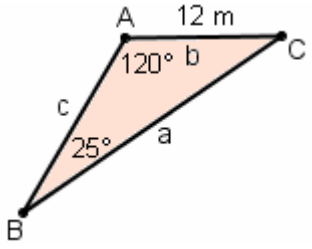
5) Applicando in modo opportuno i teoremi dei seni e del coseno, "risolvi" i triangoli in figura, ossia, a partire dai 3 elementi noti, determinane i tre elementi rimanenti.



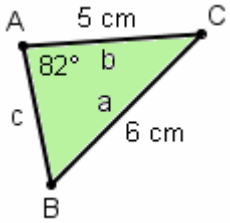
a)



b)



c)



d)

RISPOSTE

1) a) $CA\approx 9.82$ m, $AB\approx 12.82$ m b) $CA\approx 3.76$ m, $CB\approx 1.37$ m c) $LN=\sqrt{2.5^2-1.5^2}=2$; $\widehat{M}\approx 53°8'$, $\widehat{N}\approx 36°52'$

2) a) $AB\approx 16.38$ b) $DF=FE\approx 6.10$ c) $RT=TS\approx 17.43$; $RS\approx 28.56$

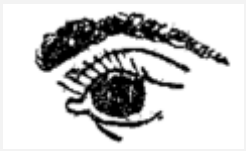
3) $a\approx 4.1$, $b\approx 5.7$ 4) $c\approx 7$, $\alpha\approx 39°$, $\beta\approx 61°$

5) a) 50°, ≈11.3, ≈12.3 b) ≈52°, ≈68°, ≈60° c) 35°, ≈24.6, ≈16.3 d) ≈56°, ≈42°, ≈4.1

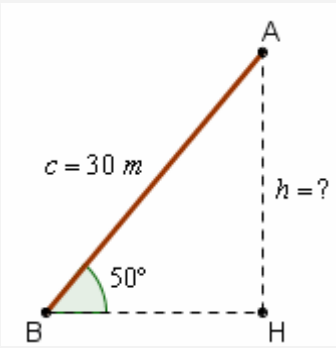
12. ESERCIZI

ESEMPI SVOLTI

**1) Un bambino sta facendo volare un aquilone,
in una giornata di primavera in cui il vento è molto forte.
La corda è tesa, viene utilizzata per intero,
e forma col suolo un angolo di 50°.
La lunghezza della corda è di 30 metri.
Quanto si è sollevato dal suolo l'aquilone?**



FAI SEMPRE UN DISEGNO SCHEMATICO
DELLA SITUAZIONE!
E SUL DISEGNO,
RIPORTA CON CURA I VARI DATI!



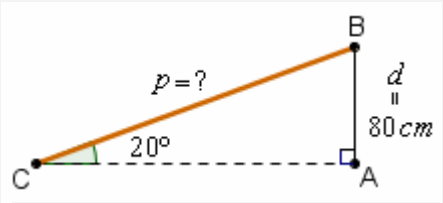
cateto = ipotenusa · seno dell'angolo opposto $\qquad h = c \cdot sen\,\hat{B} = 30 \cdot sen\,50° \approx 30 \cdot 0.77 \approx 23\ m$

NOTA - Data la manifesta approssimazione da cui sono affette le informazioni,
non sarebbe stato per niente logico scrivere il risultato con una precisione maggiore!
Anzi, alla fine andrebbe aggiunto ancora 1 metro circa … l'altezza da terra della mano che regge la corda!

**2) Una passerella, che permette di superare un dislivello di 80 cm,
forma un angolo di 20° col suolo. Quanto è lunga la passerella?**

$$d = p \cdot sen\ 20° \ \rightarrow\ p = \frac{d}{sen\ 20°} \approx \frac{80}{0.342} \approx 234\ cm$$

Abbiamo approssimato al risultato del calcolo alle unità
perché *una precisione maggiore non avrebbe avuto molto senso*:
i dati sono evidentemente affetti da incertezza,
e nella pratica la passerella, quando viene sistemata,
dovrà andare leggermente più in alto degli 80 cm …

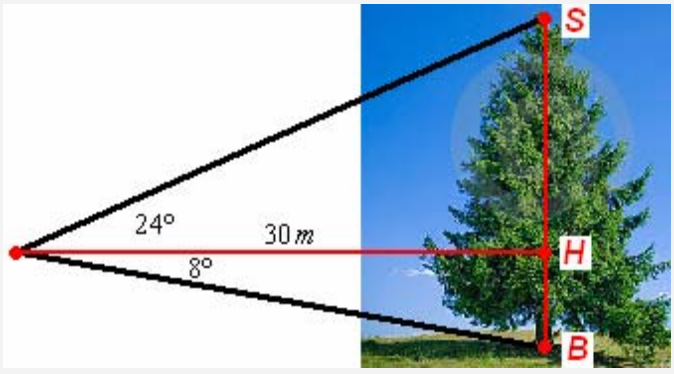


**3) Si valuta l'altezza di un bell'abete stando
alla finestra di una villa distante 30 metri.
Se l'osservatore ne vede la base e la sommità
rispettivamente secondo**

- **un angolo di depressione di 8°**
- **e un angolo di elevazione di 24°,**

quant'è alto l'abete?

$$HB = 30 \cdot tg\,8° \approx 30 \cdot 0.14 = 4.2\ m$$
$$HS = 30 \cdot tg\,24° \approx 30 \cdot 0.45 = 13.5\ m$$
Totale: circa $4.2 + 13.5 \approx 18$ *metri*

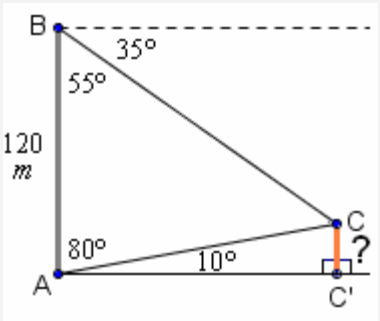


PIU' COMPLICATO: SI APPLICA IL "TEOREMA DEI SENI"

**4) Un grattacielo di 120 metri si affaccia su di una grande piazza
al centro della quale sopravvive un'antica chiesetta romanica.
Se la sommità del campanile è vista:**

- **dalla *cima* del grattacielo,
secondo un angolo di depressione di 35°**
- **e dalla *base* del grattacielo,
secondo un angolo di elevazione di 10°**

quanto è alto il campanile?



Consideriamo il triangolo ABC in figura, del quale conosciamo
$AB = m\,120$, $A\hat{B}C = 55°$, $B\hat{A}C = 80°$,
per determinare, col Teorema dei Seni, la lunghezza di AC.

$$\frac{AC}{sen\,A\hat{B}C} = \frac{AB}{sen\,B\hat{C}A} \ \rightarrow\ AC = \frac{AB \cdot sen\,A\hat{B}C}{sen\,B\hat{C}A} = \frac{120 \cdot sen\,55°}{sen\,45°} \approx 139\ m$$

Dopodichè: $C'C = AC \cdot sen10° \approx 139 \cdot 0.174 \approx 24\ m$

SENO, COSENO, TANGENTE (E RISPETTIVE INVERSE): TRIANGOLI RETTANGOLI

5) Un asse lungo 3 metri è appoggiato a una parete, e forma col pavimento un angolo di 53°.
Determina l'altezza a cui arriva l'asse sulla parete.

6) Per misurare l'altezza di uno scoglio una persona vi sale in cima,
fissa alla roccia il capo di una fune e lancia l'altro capo a un amico sulla spiaggia.
La fune viene tesa e risulta misurare metri 11.8; l'angolo che la fune forma con la spiaggia è di 65°.
Quanto è alto dunque lo scoglio?

7) Se una scala lunga m 2.4, appoggiata al muro, forma col pavimento un angolo di 75°,
quanto dista dalla parete la linea d'appoggio della scala sul pavimento?

8) Se una lunga scala, appoggiata alla facciata di una casa, forma col selciato un angolo di 77°,
e la sua linea d'appoggio dista dalla parete 60 cm, quanto misura la scala?
E a che altezza arriva sulla parete?

9) Il monumentale antico castagno di Melle, in Val Varaita (provincia di Cuneo),
a distanza di 180 metri ha un "angolo di elevazione" è di 10°.
Quanto è alto il castagno?

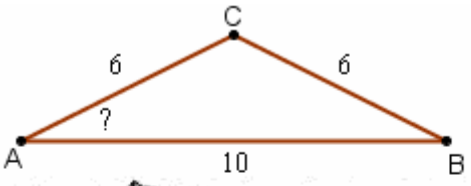


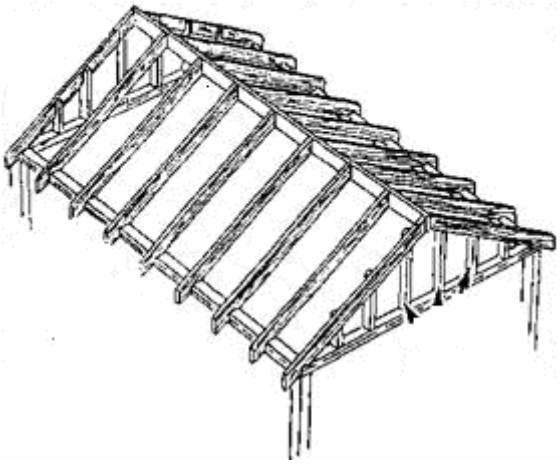
10) Da un punto delle bianche scogliere di Dover,
alto 100 metri sul mare,
si vede una boa con angolo di depressione di 18°.
Quanto dista la boa dalle scogliere?

11) Dalla cima di una collina sto intravedendo col binocolo un amico, seduto sul cucuzzolo
di un'altra collina 250 metri più alta, sotto un angolo di elevazione di 12°.
Qual è la distanza in linea d'aria fra me e l'amico?

12) Se l'asta di una bandiera, alta metri 8.40, ha un'ombra lunga metri 3.50,
che angolo formano i raggi solari col terreno?

13) La figura mostra schematicamente la sezione di un tetto.
Le travi sono lunghe 6 metri
e la larghezza AB della struttura è di m 10.
Si domanda qual è l'inclinazione in gradi
di ogni trave rispetto all'orizzontalità.

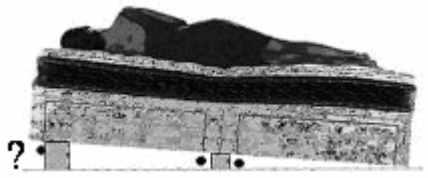




14) Una scala a pioli è appoggiata sul muro esterno
di una casa; la scala è lunga metri 3.25,
e l'altezza che raggiunge sul muro è di metri 3.
Che inclinazione ha la scala?
Qual è la distanza fra la linea d'appoggio
della scala sul selciato e la parete?

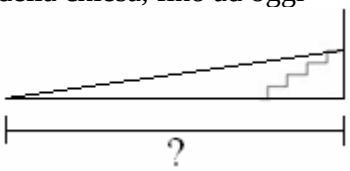
15) Un'asta lunga un metro, appoggiata verticalmente
sul terreno piano, vi proietta un'ombra di m 0.6.
Nello stesso istante un palo della luce
proietta un'ombra di 3.3 m.
Quanto è alto il palo della luce?
Che inclinazione ha, in gradi, la luce solare?

16) La IBT, Inclined Bed Therapy,
sostiene che dormire su di un letto inclinato di 5°
(rialzato dalla parte della testa)
porta notevoli benefici alla salute,
specie per gli ammalati di determinate patologie.
Se l'asse del letto è lungo 2 m, di quanto
andrà sollevata la base per applicare la terapia?



17) In un piccolo paese due signore anziane, che abitano in appartamentini situati uno di fronte all'altro,
da parti opposte di una strada larga 4 metri, si fanno consegnare le compere a turno, e si passano poi
le buste con la roba attraverso un cestello fatto scorrere lungo una fune che collega le due finestre.
Sapendo che la finestra più bassa è a 3.5 metri dal livello della strada, e quella più alta a 4.2 metri,
trovare approssimativamente l'angolo di inclinazione della fune rispetto all'orizzontalità.

18) Il parroco di una chiesa decide di far realizzare una rampa in modo che le carrozzine dei fedeli disabili possano affrontare il dislivello di 1 metro e 20 cm, fra la piazza e la porta della chiesa, fino ad oggi superabile solo attraverso i gradini di una scalinata.
La normativa richiede che la pendenza della rampa non superi gli 8°.
Un muratore del paese si offre di svolgere il lavoro gratuitamente, ma … che lunghezza dovrebbe avere, al minimo, la base d'appoggio sul selciato di questa rampa?



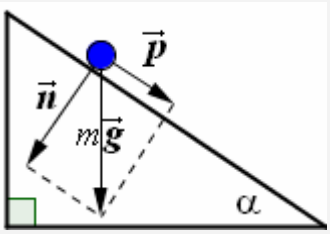
19) Un aeroplano è diretto dagli Stati Uniti verso una località nell'Italia del Nord.
Se sta volando sull'oceano a un'altezza di 9500 metri dal suolo, e vede la linea costiera del Portogallo sotto un angolo di depressione di 15°, quanti km deve ancora viaggiare prima di sorvolare il litorale?

20) Mentre scattavo una foto a Parigi, la cima della Tour Eiffel, che è alta 324 metri, mi appariva secondo un angolo di elevazione di 60°. A che distanza ero dalla torre?
a) Fra i 150 e i 160 metri? b) Fra i 160 e i 170? c) Fra i 170 e i 180? d) Più di 180 metri?

21) Dalla terrazza (alta 30 metri) alla sommità di un condominio, si osserva una bicicletta avvicinarsi. Se l'angolo di depressione passa da 10° a 60°, che distanza ha percorso nel frattempo il ciclista?

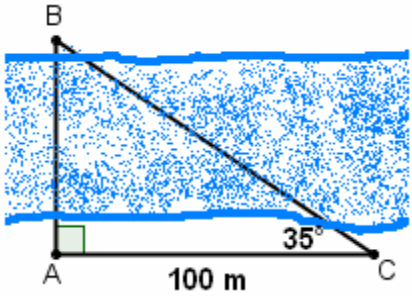
22) Sulla parete di un grattacielo c'è una vetrata davvero molto alta.
Un geometra in pensione, incuriosito, si posiziona di fronte all'edificio, a una distanza di 50 metri dalla facciata, e constata che la base della vetrata e la sua sommità vengono viste, da lì, secondo angoli di elevazione di 23° e di 52° rispettivamente. Quanto misura la vetrata?

23) Quando un corpo si trova su di un piano inclinato, su di esso agisce, verticalmente, la forza di gravità il cui modulo è dato da $F = mg$, dove m è la massa del corpo, $g \approx 9.8\ m/s^2$ è l'accelerazione di gravità.
Ora, la forza verticale ha una componente $\vec{n}$ normale (=perpendicolare) al piano inclinato, e un'altra componente $\vec{p}$ parallela alla sua superficie.
$\vec{n}$ viene neutralizzata dalla resistenza del piano stesso alla deformazione ("reazione vincolare");
$\vec{p}$ è responsabile del movimento del corpo, che scivolerà, o rotolerà, lungo il piano inclinato, restando invece in equilibrio qualora gli venga applicata una forza uguale e contraria al vettore $\vec{p}$. Ma quanto misura il modulo di $\vec{p}$?

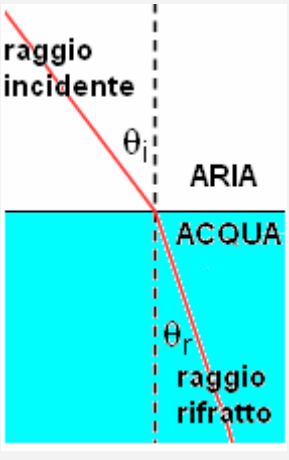


a) $mg\,sen\,\alpha$ b) $mg\cos\alpha$ c) $mg\ tg\,\alpha$ d) $\dfrac{mg}{sen\,\alpha}$ e) $mg\,sen(90° - \alpha)$

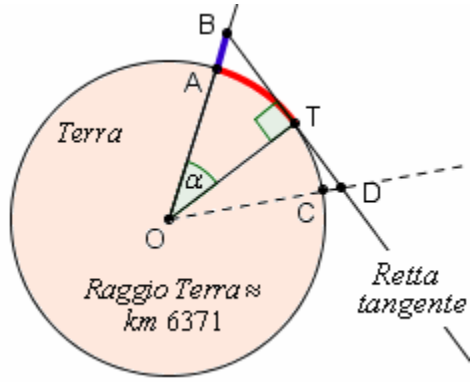
24) Supponiamo di voler misurare la larghezza di un fiume, senza poterlo attraversare.
Ci porremo sulla riva, in A, proponendoci di determinare la distanza AB, essendo B un punto sulla riva opposta, tale che la retta AB sia perpendicolare alla direzione del fiume.
Spostiamoci lateralmente di una certa distanza AC; sia ad esempio AC = 100 metri. L'angolo in A è di 90°.
Ora misuriamo, con gli strumenti del geometra, l'angolo che la congiungente CB forma con AC.
Supponiamo, per fissare le idee, che si abbia $A\hat{C}B = 35°$.
Allora AB misurerà … dillo tu!

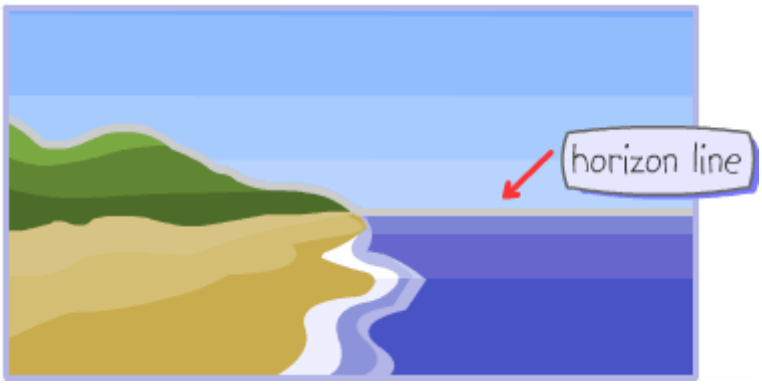


25) Osserva la figura qui a destra. Essa si riferisce a ciò che accade quando un raggio di luce penetra nell'acqua provenendo dall'aria.
Il raggio di luce viene deviato, avvicinandosi alla normale, cioè alla retta che è perpendicolare alla superficie di separazione aria-acqua.
Una legge, chiamata legge di Snell, regola la relazione fra i due angoli θ_i e θ_r cosiddetti "di incidenza" e "di rifrazione", ossia degli angoli formati con la normale dal raggio incidente e, rispettivamente, rifratto.
Tale legge però non chiama in causa direttamente gli angoli, bensì i loro *seni*.
Si ha, precisamente, $\dfrac{sen\,\theta_i}{sen\,\theta_r} = costante = n_{AB}$ dove n_{AB} è detto "indice di rifrazione del mezzo B (in cui la luce entra) relativo al mezzo A (da cui la luce proviene)".
Nel caso aria-acqua è $n_{AB} \approx 1.333$. Sapresti ora determinare l'angolo di rifrazione aria-acqua supposto che l'angolo di incidenza sia di 50°?



ORIZZONTE





www.schoolsliaison.org.uk

La distanza, dall'osservatore AB, della linea dell'orizzonte, è l'arco $\overset{\frown}{AT}$.

E' fondamentale tener presente, in queste questioni, che

- **UNA RETTA TANGENTE A UNA CIRCONFERENZA È SEMPRE PERPENDICOLARE AL RAGGIO CHE VA AL PUNTO DI CONTATTO** ($O\hat{T}B = 90°$)
- **la Terra ha forma "quasi" sferica, con raggio lungo circa 6371 km**.

Si dice che α è l' "angolo al centro" che "sottende" l'arco $\overset{\frown}{AT}$.
La semiretta OD potrebbe interessare in relazione al problema di stabilire quanto dev'essere alto un oggetto sulla superficie terrestre, per poter essere visto da un osservatore posto in T, o posto in B.

26) Una scogliera è alta 100 metri sul mare. Quanto dista, in linea d'aria, per un osservatore seduto sul prato in cima alla scogliera, la linea dell'orizzonte?
Sulla distanza dell'orizzonte: ⇨

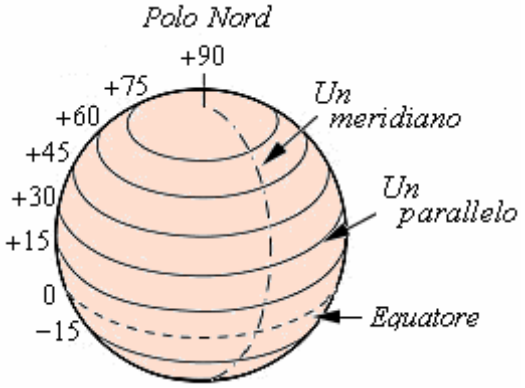
27) Un faro su di un'isoletta rocciosa dista dalla costa 45 km.
Quanto è alta sul mare, al minimo, la sua lampada, se la può vedere una persona sdraiata sulla spiaggia?

TERRA E LUNA

28) La Terra non ha forma esattamente sferica;
ma supponendola invece una sfera perfetta,
e assumendo come lunghezza del raggio 6371 km,
qual è il cambio di latitudine
in un viaggio di 1000 km verso Sud?

29) Se ci si sposta da Sud verso Nord
di un primo (= sessantesimo di grado) di latitudine,
supponendo che la Terra sia una sfera perfetta
di raggio uguale a 6371 km, che distanza si percorre?

30) La Luna ha un diametro di circa 3476 km, ed è vista
dalla Terra, a seconda delle fasi della sua orbita,
secondo un angolo che può variare,
ma che si mantiene vicino a 31'.
Se uno studente ha a disposizione questi dati,
che valutazione può dare della distanza Terra-Luna?



Latitudini: Nord = positive; Sud = negative

L'equatore ha latitudine 0,
il polo Nord +90° , il polo Sud –90°

31) Due punti A e B sono sullo stesso meridiano terrestre, uno a Nord e l'altro a Sud dell'equatore, alle latitudini +1° e –3° rispettivamente. Quanto distano i due punti lungo la superficie terrestre, supposto di approssimare la Terra ad una sfera perfetta di raggio 6371 km ?

32) La bella Anja risiede presso il circolo polare artico, alla latitudine Nord di 66° (+66°).
L'atletico Zwanga è africano: sta sullo stesso meridiano di Anja, ma alla latitudine Sud di 23° (–23°).
Comunicano tramite Internet!
Una sera, Anja racconta di vedere la luna esattamente all'orizzonte;
Zwanga invece riferisce di osservarla proprio sopra la propria testa.
E' noto che il raggio della Terra è di circa 6371 km.
Si può dare, con questi dati, una valutazione della distanza Terra-Luna?

PENDENZA DI UNA STRADA

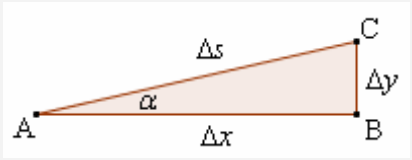
La **"PENDENZA" di un tratto rettilineo di strada**

è definita come il quoziente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AB}$

e quindi, in definitiva,

equivale alla tangente goniometrica di un angolo:

$$\boxed{pendenza = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha}$$



Se si moltiplica per 100 il numero $pendenza = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha$, si ottiene la cosiddetta "**pendenza percentuale**".

QUALCHE ESEMPIO

(qui consideriamo il **caso rettilineo**, ma il succo del discorso si può poi estendere al caso generale, come specifica la NOTA a fianco della tabella):

Angolo	**Pendenza**	**Pendenza %**
45°	1	100°
60°	1.73	173%
80°	5.67	567%
30°	0.58	58%
20°	0.36	36%
10°	0.18	18%
90°	infinita	infinita

NOTA

E se la strada non è rettilinea?

Beh, allora ha senso parlare piuttosto di "**pendenza media**".

Questa è definita come rapporto tra

il dislivello Δy tra il punto di partenza e quello di arrivo

e la distanza orizzontale Δx.

Quest'ultima NON è però la distanza effettivamente percorsa,

bensì è lunghezza della curva che si otterrebbe

proiettando il percorso vero e proprio

su di un piano perfettamente orizzontale.

La definizione è identica a quella che si dà in Geometria Analitica

(pendenza, *slope*, di una retta = coefficiente angolare).

Ma dal punto di vista pratico, per una data strada, come si procederà?

Beh, Δy si determina con uno strumento denominato "altimetro", dopodiché si può scegliere se

- rilevare Δx con l'ausilio di una mappa
- oppure rilevare Δs con un contachilometri poi calcolare Δx col Teorema di Pitagora.

Tuttavia, c'è anche chi, dopo aver utilizzato il contachilometri per trovare Δs,

non si "scomoda" a fare il pur semplice calcolo, e assume come valore per la pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta s}$ anziché $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

In effetti, se, come avviene per la grandissima maggioranza delle strade,

la pendenza non supera il 20% (circa 11.3°), l'errore che si commette in questo modo è inferiore al 5%;

addirittura, nel caso di pendenze $\leq 10\%$, l'errore che si commette

prendendo $\Delta y / \Delta s$ al posto del più corretto $\Delta y / \Delta x$ non va oltre lo 0.5%.

Diciamo quindi che nel concreto è come se qualcuno applicasse la definizione

$$pendenza = \Delta y / \Delta s$$

anziché

$$pendenza = \Delta y / \Delta x,$$

ma per pendenze piccole la differenza fra le due alternative è, ai fini pratici, irrilevante.

33) Determina la pendenza percentuale di un tratto rettilineo di strada che si elevi di un angolo $\alpha = 14°$

34) Una pendenza è del 7% se calcolata mediante la formula $\Delta y / \Delta x$.
E se invece per il calcolo si utilizzasse la $\Delta y / \Delta s$?

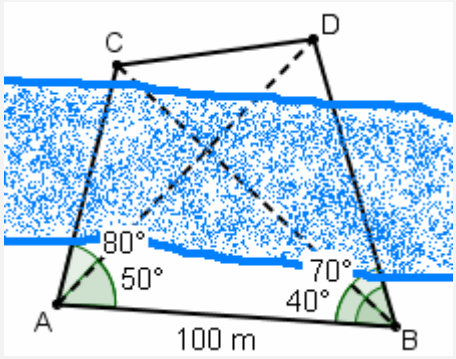
35) Una pendenza è del 100% se calcolata mediante la formula $\Delta y / \Delta x$.
E se invece per il calcolo si utilizzasse la $\Delta y / \Delta s$?



36) Un segnale di discesa pericolosa.
Se il contachilometri mi dice che ho percorso 800 metri,
di quanti metri sono sceso in verticale?

TRIANGOLI QUALSIASI (TEOREMA DEI SENI, TEOREMA DEL COSENO)

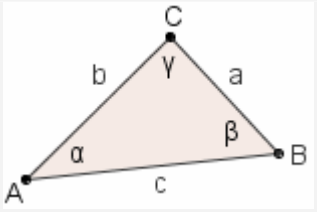
37) Vogliamo misurare la distanza fra due punti C e D
che si trovano entrambi al di là di un fiume;
fiume che una impetuosa corrente ci impedisce di attraversare.
Siano A, B due punti sulla nostra riva,
situati ad una certa distanza AB
che per fissare le idee supponiamo essere di 100 metri.
Ora andiamo a misurare i 4 angoli $C\hat{A}B$, $D\hat{A}B$, $D\hat{B}A$, $C\hat{B}A$.
Supponiamo ad esempio che sia
$C\hat{A}B = 80°$, $D\hat{A}B = 50°$, $D\hat{B}A = 70°$, $C\hat{B}A = 40°$.



Applichiamo ORA, al triangolo ABD,
il **TEOREMA DEI SENI**, introdotto a pag. 452:

in un triangolo, è costante il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto

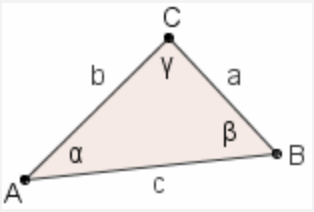
$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$



$$\frac{AD}{sen\ 70°} = \frac{AB}{sen\ ...} \quad \text{quindi} \quad \frac{AD}{sen\ 70°} \approx \frac{100\,m}{0.87}$$

da cui potremo ricavare la misura di AD. Si troverà AD = …
Sei in grado ora di ricavare, allo stesso modo, la misura di AC?
Su quale triangolo occorrerà operare? Procedi: troverai AC = …
Andiamo ora a considerare il triangolo CAD.
Di esso conosciamo due lati e l'angolo fra essi compreso,
quindi potremo determinare il lato rimanente con il **TEOREMA DEL COSENO** (sempre a pag. 452):

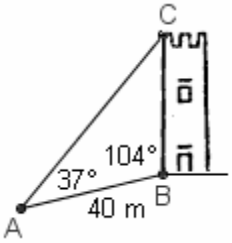
in ogni triangolo, è
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\,\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\,\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\,\gamma \end{cases}$$



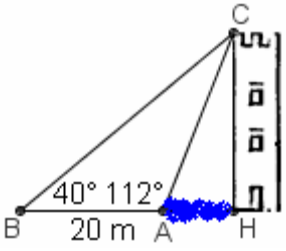
Allora avremo $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos(80° - 50°)}$.

Fai il calcolo poi vai a vedere a pag. 462 se la misura trovata è corretta.

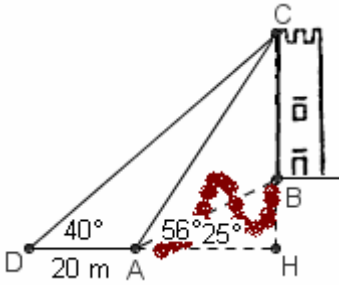
38) Supponi di voler misurare l'altezza di una torre,
che si trovi sulla cima di un'altura, e che ti separi dalla torre
un tratto ad inclinazione costante (vedi figura a fianco).
Come fare?
Determina l'altezza della torre quando i dati sono quelli in figura.



39) Questa volta la torre si trova sul piano orizzontale,
ma è inaccessibile per via di un fossato.
Noi d'altra parte desidereremmo determinare sia la sua altezza,
sia la sua distanza HA dall'osservatore posto in A.
Mettiti al lavoro, coi dati della figura.



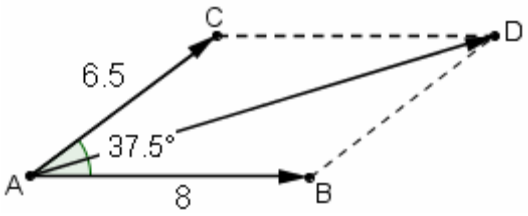
40) L'osservatore della torre da misurare
si trova su di un piano orizzontale,
mentre la torre è sopraelevata e inaccessibile.
Determina la sua altezza, coi dati della figura
$\left(B\hat{A}H = 25°,\ C\hat{A}H = 56°,\ C\hat{D}A = 40°\right)$



41) Supponiamo che due forze abbiano modulo 8 e 6.5 rispettivamente, e formino un angolo di $37°\,30'$.

Come determinare il modulo della forza risultante?

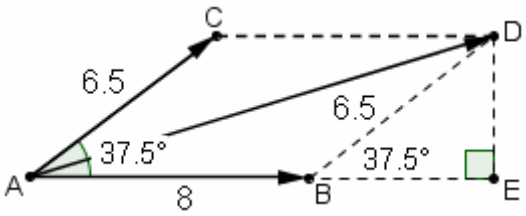
Beh, è noto che la risultante di due forze si ottiene applicando (figura) la "regola del parallelogrammo", e allora potremmo considerare ad es. il triangolo ABD, il cui angolo di vertice B misura evidentemente … , per applicargli il "teorema del Coseno":



$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot cos(180° - 37°30')}$$

IN ALTERNATIVA
(ma il procedimento è un po' più lungo)
si può proiettare il punto D sulla retta AB in E,
e pensare che l'angolo $E\hat{B}D$ è anch'esso di $37°30'$
in quanto …
per cui si avrà

$$ED = BD \cdot sen\,37°30' = ...$$
$$BE = BD \cdot cos\,37°30' = ...$$

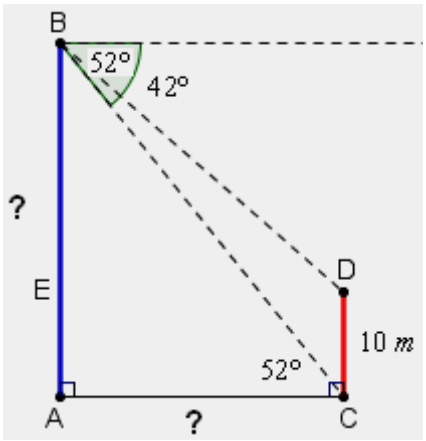


Basterà poi applicare il T. di Pitagora al triangolo AED.

Effettua i calcoli, e constata che si ottiene lo stesso risultato determinato con l'altro metodo.

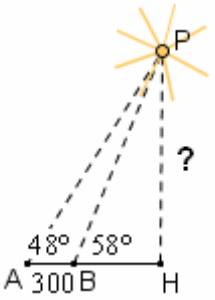
42) Dalla sommità di un edificio molto elevato la casa di fronte, che è alta 10 metri, viene vista in modo tale che l'angolo di depressione del suo tetto è di 42° mentre l'angolo di depressione della sua base è di 52°.

Quanto sono distanti i due fabbricati?
E quanto è alto il primo?



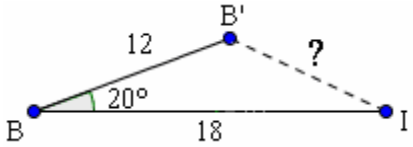
43) Un oggetto non identificato nel cielo è fisso in una posizione P, e due osservatori A e B sul terreno, a distanza AB = m 300, lo vedono guardando dalla stessa parte, sotto le inclinazioni $\hat{A} = 48°$ e $\hat{B} = 58°$. Il triangolo PAB sta su di un piano che è perpendicolare al terreno.

Quanto dista da terra l'oggetto?



44) Un marinaio deve raggiungere una piccolissima isoletta distante 18 miglia; ma si addormenta, e intanto la barca procede per 12 miglia lungo una direzione sfasata di 20° rispetto a quella giusta.

Quanto dista ora la barca dall'isola?



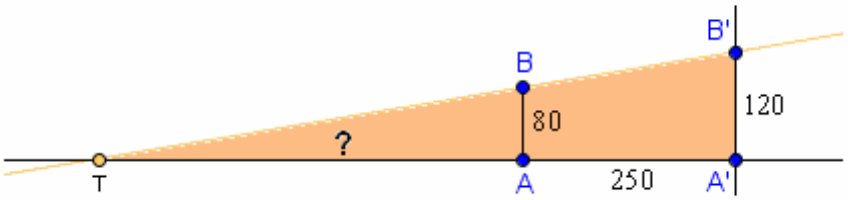
45) Un giocatore di golf colpisce con decisione la pallina, posta nel punto P, distante 90 metri dalla posizione B della buca; ma esagera, e il lancio è addirittura di 120 metri … oltre tutto, la direzione è sbagliata: 15° più a sinistra rispetto alla linea PB.

Quanto dista dopo il lancio la pallina dalla buca?



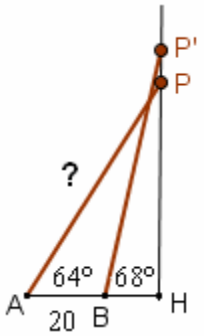
DUE PROBLEMI CHE RICHIEDONO DI IMPOSTARE UN'EQUAZIONE

46) Una torcia elettrica è appoggiata a terra orizzontalmente, ed accesa. Un bambino alto 80 cm proietta sulla parete, che dista da lui 2 metri e ½, un'ombra alta 1 m e 20 cm. Qual è la distanza della torcia dai piedi del bambino?



47) Una scala viene appoggiata ad un muro esterno, in modo da formare col marciapiede un angolo di 64°. Poi la linea di appoggio sul marciapiede viene avvicinata di 20 cm al muro, e allora l'inclinazione della scala aumenta di 4°. Quanto è lunga la scala?

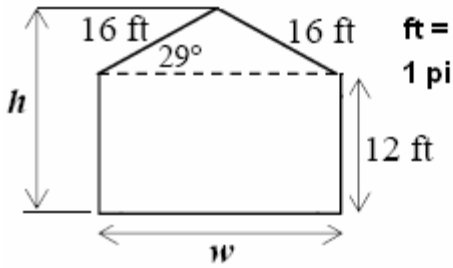
[Indicazione: Posto $AP = BP' = x$ e $BH = y$, x potrà essere espressa in due modi diversi, da cui …]



ESERCIZI DA SITI IN LINGUA INGLESE

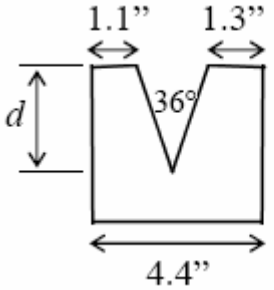
Da www.swtc.edu:

48) The diagram shows the end view of a house. Calculate the overall height and width of this house.



ft = feet, piedi
1 piede = 30.48 cm

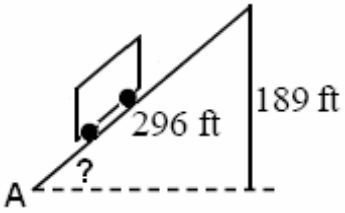
49) Determine the depth of the machined groove in this steel block.



" = inches
= pollici

1 pollice =
= 2.54 cm

50) The Fenelon Place Elevator in Dubuque, IA → runs on a set of tracks that is 296 ft long and rises 189 ft from its starting place to the top of the hill. What is the angle of the tracks?



Da www.funtrivia.com: TRIGONOMETRY QUIZ

51) In trigonometry, angles are formed by the rotation of a ray about its endpoint from an initial position to a terminal position. The measure of an angle can be negative or positive, depending on the direction of its rotation.

Which direction of rotation returns negative angles: counter-clockwise or clockwise?

Answer: _____ *(Answer ccw or cw only)*

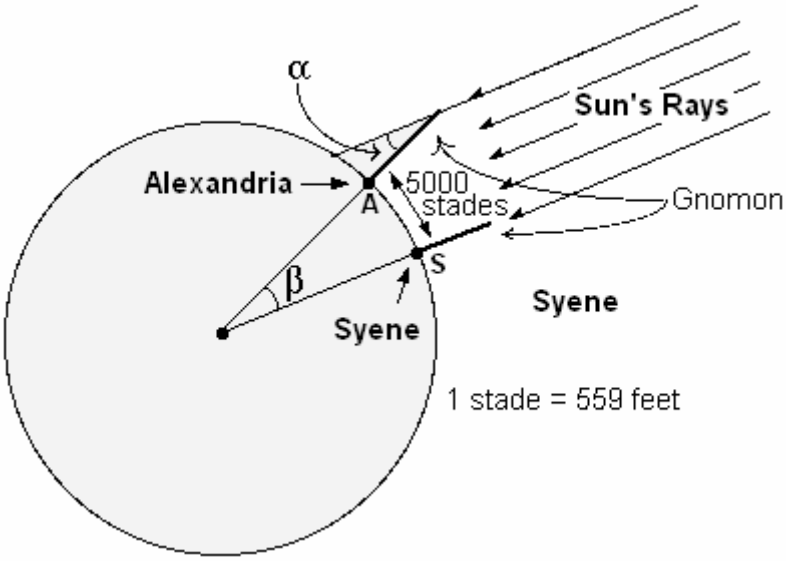
52) The two main trigonometric functions, sine (sin) and cosine (cos) differ by the addition of the prefix "co" to "cosine". From where does the "co" derive?

a) Coefficient b) Constant c) Constraint d) Complementary

ERATOSTENE E IL RAGGIO DELLA TERRA

Dal sito web http://share2.esd105.wednet.edu
a cura del progetto didattico SHARE (Washington, USA),
prendiamo a prestito, con qualche piccolissimo ritocco e aiuto alla traduzione,
la descrizione del modo in cui Eratostene
(Cirene, odierna Libia, 276 a.C. - Alessandria d'Egitto, 194 a.C.)
riuscì a determinare un'approssimazione della misura del raggio terrestre.
Evidentemente Eratostene partiva dall'ipotesi che la forma della Terra fosse sferica,
idea che non costituiva una novità in quanto già Aristotele (384-322 a.C.) l'aveva sostenuta,
per via dell'osservazione che durante le eclissi di luna sulla superficie lunare appare un'ombra circolare,
e che alcune stelle risultano visibili dall'Egitto ma non lo sono più se ci si sposta più a Nord.

(…) The Earth is a small point
in relation to the heavenly bodies.
From this Eratosthenes reasoned
the Sun's rays strike the Earth
parallel over its entire surface.
Working in Syene
(*Siene, l'odierna Assuan*)
and Alexandria,
which Eratosthenes assumed
were on the same meridian,
he estimated the distance
between the cities
to be about 5,000 stades (*stadi*);
a stade is believed to be
about 559 feet -
approximately one-tenth of a mile.
At summer solstice, at noon,
the Sun cast no shadow in Syene,
but in Alexandria a shadow was visible.
Using a gnomon (a vertical stick),
Eratosthenes measured
the shadow's angle to be
about 1/50 of a circle.
In the diagram, $\alpha = \beta$
(alternate interior angles),
and since angle α is 1/50 of a circle
so is angle β.
Since angle β is 1/50 of a circle
and AS = 5000 stades,
the entire circumference is
$50 \cdot 5000 = 250000$ stades.



Using this result,
$2\pi r = 250000$

$$r = \frac{250000}{2\pi} \approx 39789 \text{ stades} \approx 6779 \text{ km}$$

[il reale *raggio medio* della Terra è di circa 6371 km]

Va detto comunque che il discorso sulla precisione delle misure di Eratostene è assai problematico …

RISORSE SU INTERNET

Puoi cliccare QUI

⇨

dal sito www.chihapauradellamatematica.org

per una raccolta di utili e gradevoli link su argomenti di Trigonometria.

RISPOSTE

5) $h = 3 \cdot sen\,53° \approx 3 \cdot 0.80 = 2.4$ m 6) $h = 11.8 \cdot sen\,65° \approx 10.7$ m ≈ 11 m

7) $2.4 \cdot cos\,75° \approx$ m $0.62 \approx$ cm 62 8) Circa 267 cm; circa 260 cm 9) $180 \cdot tg\,10° \approx 32$ m

10) Il calcolo porta a un valore vicino a 308 metri; diciamo, realisticamente, 300 metri circa

11) Circa 1200 m

12) Intorno a 67° (il calcolo dà circa 67° 23') 13) Intorno a 34° 14) $\approx 67°$; $\approx$ m 1.25

15) $\approx$ m 5.5; $\approx 59°$ 16) Circa 17.4 cm 17) Intorno a 10° 18) ≈ 8.54 metri 19) Circa 35 km e ½

20) d) 21) Circa 153 m 22) ≈ 43 metri (42.77… prendendo i dati alla lettera; ma non ha molto senso)

23) a) 24) circa 70 metri 25) L'angolo di rifrazione è $\approx 35°$

26) Quasi 36 km (il calcolo porta a un numero vicinissimo a 35.7) 27) ≈ 159 metri

28) Circa 9° 29) Circa 1 km e 853 m

30) Qui si fanno i calcoli come se il diametro della Luna fosse "un pezzetto di arco",
in una circonferenza il cui raggio è la distanza fra l'osservatore e la Luna.
Ci sono inoltre varie approssimazioni nei dati.
Si ottiene in questo modo, come distanza fra l'osservatore e la Luna, un valore vicino a 385500 km.
La reale distanza media tra il centro della Terra e il centro della Luna è stimata in 384400 kilometri.

31) Circa 445 km

32) Il calcolo porta a circa 365000 km (pensando di partire dal centro della Terra).
La differenza rispetto al valore vero (distanza media = 384400 km circa)
si deve alle varie approssimazioni (dei dati e delle osservazioni) che evidentemente sono in gioco.

33) Vicina al 25% 34) 6.98… % (differenza fra i valori davvero trascurabile! L'angolo è piccolo)

35) 70.7… % (qui la differenza fra i valori è notevole: l'angolo è grande)

36) Risposta immediata: di circa 80 m.
La pendenza è comunque "piccola", e il contesto ci fa capire che quel "10%" è già un'approssimazione:
sarebbe dunque un esercizio puramente teorico stare a calcolare che, se il 10% si intende ricavato con
la formula $\Delta y / \Delta x$, il vero calo di altitudine sarebbe di metri 79.6

37) AD $\approx$ m 108; AC $\approx$ m 74; CD $\approx$ m 57 38) $\approx$ m 38

39) HC = circa 25 m; HA = circa 10 m 40) BC ha una misura di circa 26-27 metri (il calcolo dà ≈ 26.5)

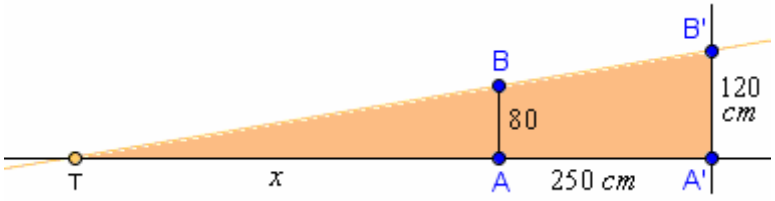
41) Si trova un valore di circa 13.7 per il modulo della risultante

42) ≈ 26 m; ≈ 34 m

43) L'oggetto si trova a un'altezza di circa 1089 metri … diciamo 1100 metri

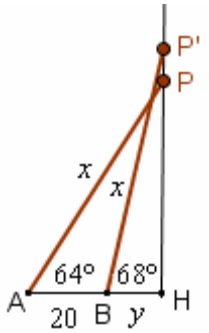
44) Circa 7.9 miglia … diciamo 8 miglia 45) La distanza è di circa 40 metri

46)



$TA = x$
$x : 80 = (x + 250) : 120$
$80(x + 250) = 120x$
$80x + 20000 = 120x$
$-40x = -20000$; $40x = 20000$
$x = 500 \rightarrow$ TA $= 5$ m

47)



$x = \dfrac{20 + y}{cos\ 64°}$; $x = \dfrac{y}{cos\ 68°}$ da cui

$\dfrac{20 + y}{cos\ 64°} = \dfrac{y}{cos\ 68°}$

$20\ cos\ 68° + y\ cos\ 68° = y\ cos\ 64°$; $y\ cos\ 64° - y\ cos\ 68° = 20\ cos\ 68°$

$y\,(cos\ 64° - cos\ 68°) = 20\ cos\ 68°$

$y = \dfrac{20\ cos\ 68°}{cos\ 64° - cos\ 68°} \approx \dfrac{20 \cdot 0.3746}{0.4384 - 0.3746} = \dfrac{7.492}{0.0638} \approx 117\ cm$

$x = \dfrac{y}{cos\ 68°} \approx \dfrac{117}{0.3746} \approx 312\ cm$

48) $h \approx 20\ ft,\ w \approx 28\ ft$ 49) $\approx 3.1\ inches$ 50) $\approx 40°$ 51) cw 52) d

CALCOLO COMBINATORIO

1 - STRATEGIE DI PENSIERO

1.1 - Premessa

Per "calcolo combinatorio" (C.C.) si intende una branca della matematica che studia i modi di raggruppare ed ordinare oggetti presi da un insieme assegnato, con l'obiettivo finale di contare il numero dei possibili raggruppamenti od ordinamenti.

Il C.C. ha fama, presso gli studenti, di essere piuttosto antipatico e "indigesto".

Perché mai?

A mio avviso, il motivo sta nel fatto che di norma i libri di testo, nel presentarlo, passano con *fretta eccessiva* alla trattazione astratta, alla terminologia specifica, alle formule!

Qui si tenterà invece di dare un'introduzione AMICHEVOLE e per quanto possibile rassicurante del C.C.

Faremo *pochissima teoria* e *molti esercizi*.
Utilizzando solamente

- un metodo grafico
  (il "*grafo ad albero*", detto anche "diagramma ad albero" o semplicemente "albero")
- e tre "*principi generali*",

saremo in grado,
senza pensare a formule precostituite e senza aver adottato una terminologia particolare,
di *risolvere problemi* apparentemente complicati - ma, in genere, curiosi e divertenti.

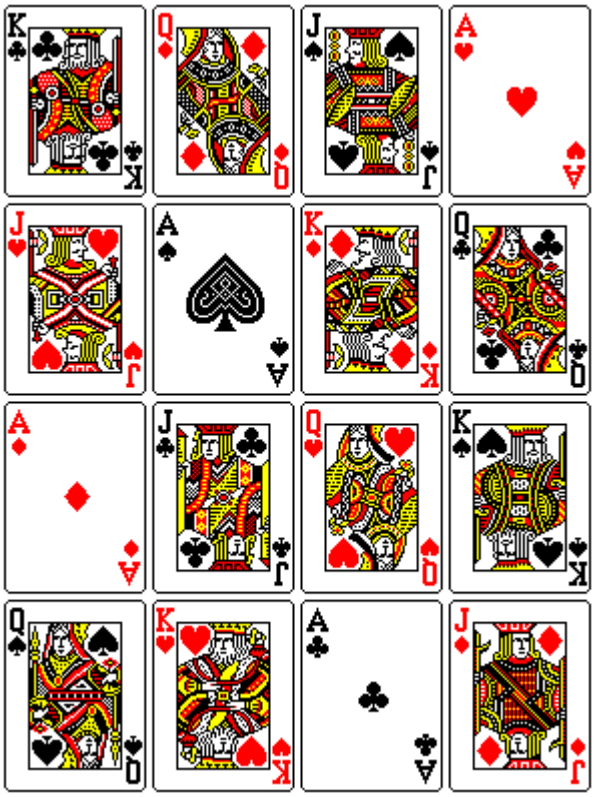


Immagine dal sito www.numericana.com

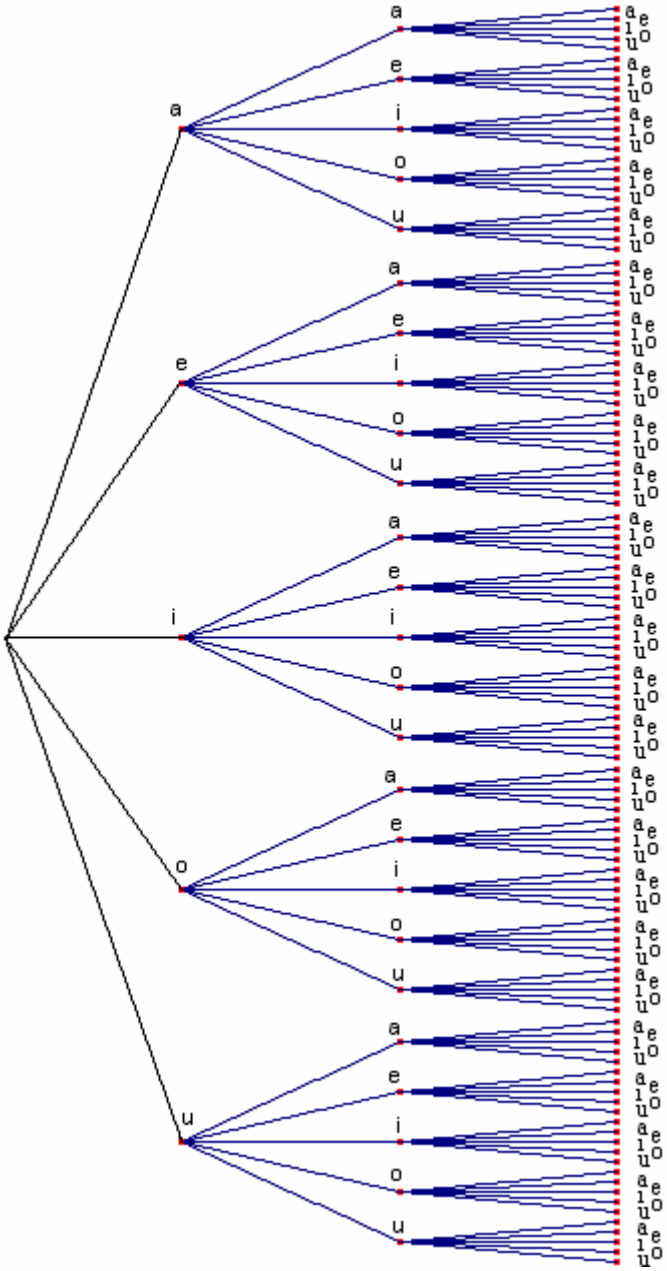


Immagine dal sito http://faculties.sbu.ac.ir

1.2 - Il “primo principio” del C.C.

- **Problema 1**
  Quante parole (anche prive di senso: insomma, quante “sequenze”, quante “stringhe”) di 3 lettere possono essere composte utilizzando solo le cinque vocali? (es.: aoe, iii, uaa ...)

Per rispondere a questa domanda, e soprattutto per acquisire un metodo di ragionamento che ci servirà in tanti altri problemi di questo tipo, immaginiamo di SCRIVERE effettivamente tutte queste stringhe di tre lettere. Scriviamole, poi le conteremo.
Evidentemente, per evitare confusione, omissioni o ripetizioni, dovremo seguire un certo ordine, un certo schema nel "mettere giù" tutte queste stringhe. Per esempio, potremmo stilare un "grafo ad albero" come il seguente:



“**Stringa**” significa:
“**sequenza di caratteri**”

Nel tracciare il grafo, si deve considerare innanzitutto il ventaglio di opzioni che si apre per la prima lettera.
Per la prima lettera si hanno 5 possibilità che sono quelle elencate in prima colonna (a, e, i, o, u).

Poi, ad ognuna di queste 5 possibilità,
si possono abbinare 5 possibilità per la seconda lettera della parola.
In totale, per le prime due lettere, abbiamo $5 \cdot 5 = 25$ possibilità (aa, ae, ai, ao, au; ea, …)

E per ognuna di queste $5 \cdot 5$ possibilità per le prime due lettere,
si aprirà un ventaglio di 5 possibilità per la terza lettera,
per cui in definitiva avremo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ possibilità (aaa, aae, aai, …)

Risposta: le stringhe di 3 *lettere costruibili utilizzando solo le vocali sono* 125.

- **Problema 2**
  Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano?

Pensiamo ancora ad un "albero" come il precedente.
Ovviamente, non staremo a completarlo!
Vogliamo solo fissare bene in mente le modalità con cui il diagramma potrebbe,
avendo tempo e pazienza, essere compilato.

[**grafo ad albero** (**non è qui, ma è nella tua mente…**)]

Risposta:

le stringhe di 7 *lettere che si possono costruire con le* 21 *lettere dell'alfabeto italiano sono* 21^7
(se calcoli questo numero con la macchinetta, troverai che supera 1 *miliardo e* 800 *milioni).*

- **Problema 3**
  Quante stringhe di 3 lettere possono essere scritte utilizzando solo le cinque vocali,
  ma senza ripetizione?
  (es.: aoe, uao, aei, … MA NON iii, uaa, eie, …)

E' chiaro che l'albero relativo al problema 1) si modificherà perdendo qualche ramo;
immagina di tracciare il nuovo albero, o, meglio, traccialo realmente, sul tuo quaderno!

Risposta: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Ricapitoliamo il ragionamento:
abbiamo 5 possibilità per la prima lettera della stringa;
a ciascuna di queste 5 possibilità sono abbinate 4 possibilità per la seconda lettera
(quindi, per le prime due lettere abbiamo $5 \cdot 4$ possibilità);
e per ciascuna di queste $5 \cdot 4$ possibilità si apre un ventaglio di 3 possibilità per la terza lettera.
In definitiva, abbiamo $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibili stringhe.

- **Problema 4**
  Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano,
  ma "senza ripetizione",
  cioè col vincolo di non utilizzare una lettera più di una volta nella stessa stringa?

Risposta: $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$

- **Problema 4'**
  Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano,
  ma "senza consecutività"?
  (Quindi, "abbcdef" sarebbe vietata, ma andrebbe invece bene "abababa")

Risposta: $21 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20$

La risoluzione "col metodo del diagramma ad albero" dei problemi 1) ... 4') mostra che vale il seguente

PRIMO PRINCIPIO GENERALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Se una scelta può essere fatta in r modi diversi,
per ognuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in s modi diversi
e, per ciascuno dei modi in cui si sono compiute le prime due scelte,
una terza scelta può essere effettuata in t modi diversi
ecc.,
allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in
r · s · t · ...
modi diversi

(traduzione dal testo americano "Introduction to Finite Maths" di Kemeny-Snell-Thompson)

1.3 - Esercizi sul “primo principio” (risposte alla fine)

5) In una compagnia di quattro amici (Mario, Paolo, Roberto, Walter) bisogna scegliere un capo e un vice.
In quanti modi può essere effettuata la scelta?
Obbligatorio tracciare il diagramma ad albero (per brevità, usare solo le iniziali dei nomi!)

6) Per andare da una città A ad una città B ci sono quattro strade diverse.
In quanti modi è possibile "fare un giro" da A fino a B e ritorno?
E se al ritorno non si vuole ripercorrere la stessa strada dell'andata?
Obbligatorio un diagramma, per ciascuno dei due casi.

7) In un'urna ci sono quattro palline, contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4.
Se si effettuano tre estrazioni, quanti sono gli esiti possibili, tenendo conto dell’ordine con cui vengono estratte le palline? (nel senso che, ad es., l’esito 1-2-3 sarà considerato distinto dall’esito 2-1-3)

Considerare separatamente i due casi:

a) dopo aver estratto una pallina, la si reintroduce (si dice: "la si reimbussola") nell'urna prima di effettuare l'estrazione successiva
b) le estrazioni avvengono una dopo l'altra, ma senza reimbussolamento.

Obbligatorio il diagramma ad albero, sia per il caso a) che per il caso b).

8) In un plotone di 25 militari bisogna scegliere:
a) un addetto alle pulizie b) un addetto alle cucine c) un soldato che monti di sentinella.
In quanti modi è possibile effettuare la scelta?

9) Un ladro è venuto a sapere che la combinazione di una cassaforte
- è formata da 5 cifre
- non contiene né la cifra 9 né la cifra 8
- non inizia con 0.

Quanti tentativi dovrebbe fare al massimo per esser certo di riuscire ad aprire la cassaforte?

10) Per giocare al “Totocalcio” bisogna scegliere un pronostico (che può essere 1, X o 2) per ciascuna delle 14 partite sulla schedina. Quante schedine diverse è possibile, teoricamente, compilare?

11) La moglie di un carcerato, per poter parlare col marito anche al di fuori delle ore di colloquio coi parenti, ha concordato con lui un codice basato sull'uso di quattro bandierine:
una Italiana, una Francese, una Americana e una del WWF.
Un messaggio può consistere nell'esposizione di una singola bandierina,
oppure di due, o tre, o tutte e quattro le bandierine.
Nel caso il messaggio sia costituito da più bandierine, conta anche l'ordine in cui queste si susseguono da sinistra a destra. Si domanda: quanti messaggi è possibile trasmettere con queste modalità?

12) Sappiamo che in ogni computer la memoria è costituita da tanti "bit",
essendo un "bit" un dispositivo fisico che può assumere due stati differenti.
Indicati convenzionalmente con "0" e "1" tali due stati fisici, diremo, in sostanza,
che un bit è un "qualcosa" che può assumere, di volta in volta, o il valore "0" o il valore "1".
Una sequenza di 8 bit forma il cosiddetto "byte". Ad esempio, 01110110 è un "byte".

a) Quante diverse "informazioni" può contenere un byte?
b) E quante informazioni diverse si potranno memorizzare in una sequenza di 10 byte?
Tenendo conto che $2^{10} = 1024 \approx 1000$, dai un'approssimazione per difetto del numero trovato.

RISPOSTE AGLI ESERCIZI

5) $4 \cdot 3 = 12$ modi
6) $4 \cdot 4 = 16$ modi;
se però al ritorno non si vuole fare la stessa strada dell’andata, i modi possibili si riducono a $4 \cdot 3 = 12$

7a) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ 7b) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ 8) $25 \cdot 24 \cdot 23$ 9) $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 28672$ 10) $3^{14} = 4782969$

11) 4 messaggi con una sola bandierina;
$4 \cdot 3 = 12$ messaggi con 2 bandierine;
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ messaggi con 3 bandierine;
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ messaggi con 4 bandierine.
Totale 4+12+24+24 = 64 possibili messaggi.

12) a) $2^8 = 256$ b) $2^{80} = (2^{10})^8 = 1024^8 > 1000^8 = (10^3)^8 = 10^{24} = 1$ milione di miliardi di miliardi

1.4 - Il “secondo principio” del C.C.

Consideriamo ora il seguente

- **Problema 13**

  Se 6 persone si vogliono mettere in fila da sinistra a destra (rispetto al fotografo) per una foto di gruppo, in quanti modi diversi possono farlo?

  Formulazione equivalente:

  se 6 persone arrivano contemporaneamente ad uno sportello, in quanti modi diversi possono mettersi in coda?

Facile:
per scegliere il primo elemento della fila (o della coda), abbiamo 6 possibilità;
in corrispondenza di ciascuna di queste 6 possibilità, abbiamo 5 possibilità per il 2° elemento;
abbinate a queste $6 \cdot 5$ possibilità abbiamo 4 possibilità per il terzo elemento;
per ciascuna di queste $6 \cdot 5 \cdot 4$ possibilità abbiamo 3 possibilità per il quarto elemento ecc ...

Risposta:
In totale, le 6 persone possono mettersi in fila (o in coda) in
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ (leggi: "6 fattoriale") modi diversi.

SECONDO PRINCIPIO GENERALE DEL C.C.
(CONSEGUENZA DEL PRIMO)

Dati n oggetti, essi si possono “mettere in fila”
(o “mettere in coda”, o “mettere in colonna”)
in
n! (leggi: “n fattoriale”)
modi diversi,
dove il simbolo n!
indica il numero
$\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ **.**

Infatti,
per la scelta del primo oggetto della fila abbiamo n possibilità;
a ciascuna di queste n possibilità sono abbinate
(n–1) possibilità di scelta per il secondo oggetto della fila;
ad ognuna delle $\mathbf{n \cdot (n-1)}$ **possibilità per i primi due oggetti**
corrispondono (n–2) possibilità di scelta per il terzo oggetto della fila;
... ;
in totale, quindi, n oggetti possono essere ordinati
(= messi in fila, o in coda, o in colonna)
in
$\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$
modi diversi.

- **Problema 14**
  Quanti sono i possibili anagrammi della parola "mora"
  (contando anche quelli che non hanno significato nella lingua italiana)?
  Obbligatorio il grafo ad albero.

Risposta:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

1.5 - n-uple ordinate e n-uple non ordinate

In tutti i problemi precedentemente considerati si trattava, in sostanza,
di "pescare" da un insieme per "costruire" delle "sequenze di n elementi"
(in una parola: "n-uple")
con l'obiettivo finale di contare il numero di tali n-uple.

Le n-uple andavano pensate "ordinate",
nel senso che occorreva tenere conto dell'ordine con cui gli elementi di una data n-upla si succedevano,
in quanto due n-uple costituite dagli stessi elementi, ma posti in ordine diverso, andavano considerate distinte.

Abbiamo dunque avuto a che fare con coppie ORDINATE, con terne ORDINATE, quaterne ORDINATE, ecc.

Ad esempio:
nel problema 1) andavano considerate distinte le due stringhe aio e oai, ossia le due terne (a, i, o) e (o, a, i);
nell'esercizio 11) andavano considerati distinti i due messaggi AF ed FA, ossia le due coppie (A, F) ed (F, A).

Una sequenza di n elementi si dice, genericamente, n-upla *(leggi: "ennupla")*
(per n=2 si parlerà di "coppia", per n=3 di "terna", per n=4 di "quaterna",
per n=5 di "cinquina", per n=6 di "sestina", per n>6 di "sequenza di 7, 8, 9, ... elementi").
**Quando in un'n-upla consideriamo "importante" l'ordine in cui gli elementi si susseguono,
parleremo di n-upla "ordinata", e la indicheremo con parentesi tonde:**

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Quando consideriamo irrilevante l'ordine, parleremo di n-upla "non ordinata" e useremo le graffe:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Per evitare equivoci, ribadiamo:

- **Due n-uple ordinate vengono considerate distinte anche se hanno gli stessi elementi,
  qualora l'ordine di tali elementi cambi dall'una all'altra: (a, o, i) ≠ (a, i, o)
  E per indicare che un'n-upla va pensata ORDINATA, si utilizzano le parentesi TONDE.**
- **Invece se due n-uple NON ORDINATE contengono gli stessi elementi,
  vengono considerate come un'unica n-upla,
  indipendentemente dall'ordine nel quale sono stati scritti gli elementi stessi,
  in quanto quest'ordine viene pensato come irrilevante: {a, o, i} = {a, i, o}**
  **E per indicare che un'n-upla va pensata NON ORDINATA,
  si utilizzano le parentesi GRAFFE**, ovvero l'ordinario simbolo per indicare un insieme:
  si sa che in un insieme non conta l'ordine nel quale si sceglie di elencare gli elementi.

1.6 - Il "terzo principio" del C.C.

- **Problema 15**
  **Una compagnia di 5 ragazzi, Aldo (A), Bruno (B), Carlo (C), Dario (D) ed Ernesto (E),
  deve passare una notte in una stanza in cui ci sono solo 2 letti.
  In quanti modi è possibile scegliere i due ragazzi che dormiranno nei letti?
  (gli altri tre si accontenteranno del sacco a pelo ...)**

E' chiaro che in questo caso si tratta di contare il numero di coppie NON ordinate
che è possibile costruire "pescando" dall'insieme {A, B, C, D, E}.

Coppie NON ordinate, perché evidentemente
la scelta {C, E} e la scelta {E, C} andranno considerate "equivalenti", "non distinte",
andranno "contate come una scelta sola"
(supponiamo che i due letti siano identici e non siano uno più comodo dell'altro).

Per risolvere questo facile problema, e, soprattutto, per iniziare a familiarizzare con una "strategia di pensiero"
che ci servirà ogniqualvolta avremo a che fare con "n-uple non ordinate", procediamo nel modo che segue.

Facciamo (o immaginiamo di fare) un grafo che porti a costruire tutte le possibili coppie ORDINATE di ragazzi;
poi, prese due coppie ordinate "equivalenti"
(perché contenenti gli stessi due ragazzi, ma in ordine scambiato),
"le inglobiamo in una sola", "le consideriamo come se fossero una sola".

E' chiaro che il numero di scelte possibili sarà dato da $(5 \cdot 4)/2 = 10$.
Il "fratto 2" si deve al fatto che "di due coppie equivalenti ne facciamo una sola".

Consideriamo ora quest'altro problema:

- **Problema 16**
  Supponendo che i ragazzi del problema precedente siano 7 (A, B, C, D, E, F, G) e i letti 3, in quanti modi può essere effettuata la scelta?

Evidentemente, basterà pensare a tutte le terne ORDINATE di ragazzi,
poi raggruppare le terne equivalenti (=contenenti gli stessi elementi),
perché se più terne contengono gli stessi elementi, noi ne vogliamo "fare una sola".

Ma, presa una terna ordinata, ad esempio: la terna (A, D, E), QUANTE SONO le terne equivalenti ad essa?
Sono tante quanti sono i modi di mettere in fila 3 oggetti fissati, ossia sono 6
(comprendendo anche la terna di partenza): (A, D, E); (A, E, D); (D, A, E); (D, E, A); (E, A, D); (E, D, A).
Pertanto la risposta al problema è il numero $(7 \cdot 6 \cdot 5)/6 = 35$.

(ABC) (ABD) (ABE) (ABF) (ABG) (ACB) (ACD) (ACE) (ACF) (ACG) (ADB) (ADC) (ADE) (ADF) (ADG)
(AEB) (AEC) (AED) (AEF) (AEG) (AFB) (AFC) (AFD) (AFE) (AFG) (AGB) (AGC) (AGD) (AGE) (AGF)
(BAC) (BAD) (BAE) (BAF) (BAG) (BCA) (BCD) (BCE) (BCF) (BCG) (BDA) (BDC) (BDE) (BDF) (BDG)
(BEA) (BEC) (BED) (BEF) (BEG) (BFA) (BFC) (BFD) (BFE) (BFG) (BGA) (BGC) (BGD) (BGE) (BGF)
(CAB) (CAD) (CAE) (CAF) (CAG) (CBA) (CBD) (CBE) (CBF) (CBG) (CDA) (CDB) (CDE) (CDF) (CDG)
(CEA) (CEB) (CED) (CEF) (CEG) (CFA) (CFB) (CFD) (CFE) (CFG) (CGA) (CGB) (CGD) (CGE) (CGF)
(DAB) (DAC) (DAE) (DAF) (DAG) (DBA) (DBC) (DBE) (DBF) (DBG) (DCA) (DCB) (DCE) (DCF) (DCG)
(DEA) (DEB) (DEC) (DEF) (DEG) (DFA) (DFB) (DFC) (DFE) (DFG) (DGA) (DGB) (DGC) (DGE) (DGF)
(EAB) (EAC) (EAD) (EAF) (EAG) (EBA) (EBC) (EBD) (EBF) (EBG) (ECA) (ECB) (ECD) (ECF) (ECG)
(EDA) (EDB) (EDC) (EDF) (EDG) (EFA) (EFB) (EFC) (EFD) (EFG) (EGA) (EGB) (EGC) (EGD) (EGF)
(FAB) (FAC) (FAD) (FAE) (FAG) (FBA) (FBC) (FBD) (FBE) (FBG) (FCA) (FCB) (FCD) (FCE) (FCG)
(FDA) (FDB) (FDC) (FDE) (FDG) (FEA) (FEB) (FEC) (FED) (FEG) (FGA) (FGB) (FGC) (FGD) (FGE)
(GAB) (GAC) (GAD) (GAE) (GAF) (GBA) (GBC) (GBD) (GBE) (GBF) (GCA) (GCB) (GCD) (GCE) (GCF)
(GDA) (GDB) (GDC) (GDE) (GDF) (GEA) (GEB) (GEC) (GED) (GEF) (GFA) (GFB) (GFC) (GFD) (GFE)

Ricapitoliamo il ragionamento. Qui sopra sono elencate tutte le possibili terne ordinate.
Presa una terna ordinata, essa fa parte di una famiglia di 6 terne ordinate "equivalenti" fra loro
(perché contengono gli stessi elementi, se pure in ordine diverso).
Le terne ordinate equivalenti vengono "contate come una terna sola".
Il totale di $7 \cdot 6 \cdot 5$ terne ordinate viene così diviso per 6. Quindi, se ci sono 7 ragazzi,
la scelta di quei 3 che dormiranno nei letti potrà essere effettuata in $(7 \cdot 6 \cdot 5)/6 = 35$ modi.

- **Problema 17**
  In una fabbrica con 25 operai, se ne devono sorteggiare 6 per la pulizia dello stabilimento. Quanti sono i possibili esiti del sorteggio?

Ragioniamo dapprima sulle sestuple ordinate. Queste sono $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$.
Te le immagini, queste sestuple ordinate, tutte scritte una dopo l'altra? Sono veramente tantissime!

Bene. **Noi però vogliamo "raggruppare" tutte le sestuple "equivalenti"
(cioè, contenenti gli stessi operai, se pure in ordine diverso) per "farne una sola",
per "farne un gruppo che verrà contato come un'unica sestupla".**

**MA DATA UNA SESTUPLA, QUANTE SONO LE SESTUPLE ORDINATE
AD ESSA EQUIVALENTI (COMPRESA QUELLA DI PARTENZA)?
EVIDENTEMENTE, SONO TANTE QUANTI I MODI CON CUI, DATI 6 OGGETTI,
QUESTI POSSONO ESSERE ORDINATI (=MESSI IN FILA, O IN CODA).**

E il Secondo Principio del Calcolo Combinatorio ci dice che ciò può avvenire in
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ (leggi: "6 fattoriale") modi diversi.

Pertanto, fissata una sestupla ordinata, essa fa parte di un gruppo di 6! sestuple equivalenti.

Il lungo elenco delle $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$ sestuple ordinate di operai può essere così suddiviso in gruppi ciascuno dei quali contiene 6! sestuple. Ogni gruppo verrà contato come una sola sestupla non ordinata,
per cui il numero delle sestuple non ordinate di operai sarà $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{6!}$

TERZO PRINCIPIO GENERALE DEL C.C. (CONSEGUENZA DEL PRIMO E DEL SECONDO)
**Se in un certo problema noi abbiamo considerato inizialmente tutte le n-uple ordinate,
ma in realtà ci interessano le n-uple NON ordinate,
dobbiamo pensare il nostro elenco di n-uple ordinate ripartito in tanti gruppi,
avendo noi posto in ciascun gruppo tutte le n-uple "equivalenti" ad un'n-upla data
(cioè, contenenti gli stessi elementi, se pure in ordine diverso).
Abbiamo così tanti gruppi, ciascuno formato da n! n-uple, e ciascun gruppo va contato
"come se si trattasse di una sola n-upla".
E' chiaro allora che il numero totale delle n-uple ordinate andrà diviso per n!**

1.7 - Esercizi (risposte alle pagine successive)

18) Una cartoleria ha in vendita 32 biglietti d'auguri tutti differenti, e io devo comprarne 5.
In quanti modi diversi posso effettuare la scelta?

19) In una compagnia di 20 bambini, per carnevale 18 indosseranno costumi da animaletti.
In quanti modi è possibile scegliere quei 18? (*pssst*: … *ragiona da "furbo"*!)

20) Quanti sottoinsiemi di 5 elementi contiene un insieme di 10 elementi?

21) Con 9 numeri fissati, possiamo costruire molte "quaterne" e molte "cinquine" .
Pensiamo sia le une che le altre "non ordinate".
   a) Sono più numerose le quaterne o le cinquine?
   b) E se si pensasse a quaterne e cinquine *ordinate*?
   In questo caso, sarebbero più numerose le quaterne o le cinquine?

22) I) 30 secondi di tempo per dire quante cinquine *non ordinate* è possibile formare con 6 numeri.
II) Altri 30 secondi per dire quante cinquine *ordinate*.

23) Dal mio guardaroba di 10 magliette e 8 paia di pantaloni voglio scegliere
3 magliette e altrettante paia di pantaloni per andare in ferie.
In quanti modi diversi posso effettuare la scelta?

24) In una classe di 28 allieve, tutte belle, intelligenti e sportive, bisogna scegliere:
   - due rappresentanti di classe;
   - una "miss";
   - 7 ragazze per la squadra di calcetto femminile.

   Stabilire in quanti modi diversi si può effettuare questa scelta
   a) se gli incarichi sono incompatibili
   b) se gli incarichi sono compatibili

25) Riprendiamo la situazione considerata nel problema 7).
In un'urna ci sono quattro palline, contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4.
Supponiamo di estrarne 3, ma questa volta CONTEMPORANEAMENTE,
sicché non teniamo più conto dell'ordine di estrazione, ma soltanto di quali palline sono state estratte.
Quanti sono gli esiti possibili di questa estrazione?

26) In un mazzo da scopa ci sono 40 carte. Si mischia.
In quanti possibili ordini diversi possono comparire le carte dopo la mischiata?

27) Se si effettuano 4 lanci di una moneta, quanti sono gli esiti possibili della sequenza di lanci,
tenendo conto anche dell'ordine di uscita delle Teste e delle Croci?
E' richiesto di tracciare il diagramma ad albero.

28) Devo distribuire a 10 bambini 5 mele, 2 banane e 3 pesche, ovviamente un frutto per ciascuno.
In quanti modi diversi posso effettuare la distribuzione?

29) Una ragazza possiede tre astucci di smalto per le unghie, di tre colori differenti.
In quanti modi può tingersi le unghie delle mani,
se vuole fare in modo che ciascun' unghia sia colorata in tinta unita
e non ci siano più di due colori diversi su ciascuna mano?

   [E' una libera traduzione da "Introduction to Finite Maths". Testo originale:
   "A young lady has three shades of nail polish to paint her fingernails.
   In how many ways can she do this – each nail being one solid color –
   if there are no more than two different shades on each hand?"]

30) Dimostra che a Perugia risiedono sicuramente almeno due persone con le stesse iniziali.

31) Ecco un esercizio che richiede tipicamente un *diagramma ad albero*.

   7 persone (3 uomini e 4 donne) desiderano entrare a far parte di un "club" molto esclusivo. La direzione del "club" acconsente, a patto però di iscrivere soltanto una persona al mese, e soprattutto in modo tale che, fra i "nuovi acquisti" da quel momento in poi, si contino in totale sempre più donne che uomini.
   In quanti modi diversi può avvenire la successione dei sessi nelle iscrizioni?

32) In una piccola sala d'aspetto c'è una fila di 5 poltrone.
Se il ragionier Bianchi, la signorina Rossi e il dottor Verdi vogliono sedersi,
in quanti modi diversi si possono disporre?

33) Stabilire in quanti modi possono disporsi, su di una fila di 4 sedie:
I) 1 persona II) 2 persone III) 3 persone IV) 4 persone
V) 5 persone (s'intende, una resterà in piedi) VI) 6 persone (due forzatamente resteranno in piedi)

OSSERVAZIONE: s'intende di considerare distinte fra loro anche due situazioni nelle quali,
pur essendo le persone che si siedono e le sedie occupate le medesime,
la collocazione delle persone sulle sedie sia differente.

INDICAZIONE: qualora le persone siano più nelle sedie, uno dei modi per ragionare
(non l'unico: provaci anche diversamente!)
è di immaginare che siano ... le sedie a scegliere le persone.
Così, nel caso V), indicate con 1, 2, 3 e 4 le sedie e con A, B, C, D, E le persone,
diciamo che la sedia 1 ha 5 possibilità di scelta;
in corrispondenza di ciascuna di queste 5 possibilità
ci sono 4 possibilità di scelta per la sedia 2 ecc.

33') Stabilire in quanti modi possono disporsi, su di una fila di k sedie, n persone, distinguendo i casi:
I) $n < k$
II) $n = k$
III) $n > k$

34) Quante sono le possibili schedine di totocalcio (14 partite) ⇨ con esattamente
5 pronostici "1", 8 pronostici "X" e 1 pronostico "2"?

35)
I) 9 persone vogliono mettersi in fila per una foto di gruppo. In quanti modi diversi si possono disporre?
II) Se vogliono invece fare due file (5 persone accovacciate davanti, le altre 4 in piedi in seconda fila)
il numero delle possibili disposizioni cambia?
III) Se si tratta di 5 maschi e 4 femmine,
coi maschi accovacciati in prima fila e le femmine in piedi in seconda fila,
quante sono le possibili disposizioni? Aumentano o diminuiscono rispetto al caso I) ?

36) Un Liceo prevede per ciascuno studente l'obbligo di iscriversi
ad un minimo di 1 e un massimo di 2 fra 7 gruppi sportivi
(Pallavolo, Calcetto, Atletica, Ginnastica, Nuoto, Ballo, Tiro con l'arco).
I) Se tu sei uno studente di quel Liceo, quante scelte hai teoricamente a disposizione?
II) Se Nuoto e Tiro con l'Arco si svolgono contemporaneamente,
così da non poter essere scelte entrambe dallo stesso studente,
quante risultano le tue possibilità di scelta?

37)
I) Con 5 tessere rettangolari, recanti rispettivamente le 5 lettere A, B, C, D, E,
quante sequenze diverse si possono costruire?
II) E se le 5 tessere recano le lettere A, A, C, D, E, quante sequenze diverse si possono costruire con esse?
III) Rispondere al medesimo quesito nel caso le tessere rechino le lettere A, A, C, C, C
IV) Rispondere al medesimo quesito nel caso le tessere rechino le lettere A, A, C, C, E

38) Le pareti della mia cucina sono ricoperte da 800 piastrelle.
Volendo dipingere esattamente 50 piastrelle in giallo, 100 in rosso e 200 in blu,
lasciando bianche le rimanenti, in quanti modi sarebbe possibile effettuare il lavoro?

39) Nella mia libreria ho: 10 libri di Storia, 6 libri sugli Animali e 7 libri di Matematica. Voglio allinearli
su di uno scaffale, in modo però che i libri di una medesima materia siano tutti vicini fra loro.
In quanti modi diversi posso ordinare i miei 23 libri?

RISPOSTE AGLI ESERCIZI

18) $(32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28)/5! = 201376$

19) In tanti modi, quanti sono i modi con cui è possibile escluderne 2. Quindi: $(20\cdot 19)/2 = 190$

20) $(10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/5! = 252$

21a) Sono *tante* le quaterne non ordinate, *quante* le cinquine non ordinate.
Infatti, ad ogni quaterna possiamo associare biunivocamente una cinquina (quella dei 5 numeri rimanenti).
Verifica algebrica: n° quaterne non ordinate = $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/4! = 126$
n° cinquine non ordinate = $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5)/5! = 126$

21b) Sono di più le cinquine ordinate delle quaterne ordinate.
n° quaterne ordinate = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$
n° cinquine ordinate = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 15120$

22) I) 6 cinquine non ordinate
(tante quanti sono i modi in cui si può escludere 1 numero dall'insieme dei 6 numeri dati)
II) $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 720$ cinquine ordinate

23) $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}$

24) a) Se gli incarichi sono incompatibili: $\frac{28\cdot 27}{2}\cdot 26\cdot\frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{7!}$

b) Se gli incarichi sono compatibili: $\frac{28\cdot 27}{2}\cdot 28\cdot\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{7!}$

25) Immediatamente: 4 (tanti quanti i modi di escludere una pallina dall'estrazione). Oppure: $(4\cdot 3\cdot 2)/3! = 4$

26) 40! (quaranta fattoriale). Davvero il gioco della scopa può essere molto vario … pur tenendo conto che due carte con lo stesso "ruolo", ad esempio: due "Re" che non siano di "denari", ossia di quadri (il seme "quadri" ha una funzione un po' speciale), sono, dal punto di vista del gioco, del tutto "intercambiabili".

27) $2^4 = 16$

28) Si tratta di scegliere i 5 bambini cui andranno le mele,
poi i 2 (fra i 5 bambini rimanenti) cui andranno le banane;
a questo punto, agli ultimi 3 bambini rimasti daremo le pesche.
La risposta è: $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!}\cdot\frac{5\cdot 4}{2}$

29) Questo problema è piuttosto complesso.
Pensiamo alla sola mano sinistra;
il numero k di possibilità che troveremo dovrà poi essere moltiplicato
per il numero di possibilità relative alla mano destra;
poiché questo secondo numero sarà evidentemente identico al precedente (e cioè k),
in definitiva il numero di possibilità richiesto dal problema sarà k^2
(evidentemente, va pensato come rilevante il fatto che una mano sia "la sinistra" e l'altra "la destra",
quindi questo risultato NON andrà diviso poi per 2).

1) Posso scegliere di colorare tutte e 5 le dita con lo stesso colore. Ho 3 possibilità.

2) Posso scegliere di colorare 1 dito con un colore e le altre 4 dita con un altro colore.
Per la scelta del singolo dito ho 5 possibilità.
Dopodiché, mi si apre un ventaglio di $3\cdot 2 = 6$ possibilità per la coppia di colori da usare.
Ho quindi $5\cdot 3\cdot 2 = 30$ possibilità.

3) Posso scegliere di colorare 2 dita con un colore e le altre 3 dita con un altro colore.
Per la scelta della coppia di dita ho $(5\cdot 4)/2 = 10$ possibilità.
Dopodiché, mi si apre un ventaglio di $3\cdot 2 = 6$ possibilità per la coppia di colori da usare.
Ho quindi $10\cdot 6 = 60$ possibilità.

1), 2), 3) esauriscono tutta la casistica.
Ho in totale k=3+30+60=93 possibilità per la mano sinistra.
Le possibilità per la coppia di mani sono dunque $k^2 = 93^2 = 8649$.

30) Le lettere dell'alfabeto sono 26
(mettendoci anche le varie J, K, X … che ben raramente compaiono nei cognomi italiani).
Dunque il numero di possibilità per le coppie ordinate di iniziali è $26 \cdot 26 = 676$,
di gran lunga inferiore al numero di abitanti di una città di media grandezza come Perugia.
E' vero che ci sono persone con il doppio cognome o con il doppio nome di battesimo;
ma si tratta di casi "rari".
Anche supponendo, per eccesso, che tali casi anomali costituiscano la metà della popolazione di Perugia,
rimarrebbe pur sempre l'altra metà, ben superiore ai 676 cittadini.
La coppia ordinata di iniziali è quindi costretta a ripetersi.

31) Il diagramma ad albero mostra che, rispettando i vincoli specificati, ci sono solo 5 possibilità.

32) La prima persona sceglie la sua poltrona: 5 possibilità.
A questo punto, la seconda persona sceglie la sua poltrona: 4 possibilità.
Si siede la terza persona: 3 possibilità.
$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilità.

Evidentemente, ragioniamo così in quanto consideriamo rilevante l'individualità delle persone,
ossia non guardiamo solo quali sedie vengono occupate, ma "quali" e "da chi".
D'altronde, almeno dal punto di vista delle persone,
per il ragionier Bianchi avere accanto la signorina Rossi è diverso dall'avere accanto il dottor Verdi.

Se invece la nostra attenzione cadesse esclusivamente sulle sedie occupate, avremmo $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ possibilità.

33) I) 4 modi II) $4 \cdot 3 = 12$ modi III) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modi IV) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modi
V) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ modi (anche: la persona che sta in piedi può essere scelta in 5 modi; dopodiché,
le 4 persone che vanno a sedersi potranno farlo in $4!$ modi: quindi, i modi possibili sono $5 \cdot 4! = 120$)

VI) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ modi (anche: le 2 persone che staranno in piedi possono essere scelte in $\frac{6 \cdot 5}{2}$ modi;
le 4 persone che vanno a sedersi potranno farlo in $4!$ modi: quindi, i modi possibili sono $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4! = 360$)

33') I) $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot (k-n+1)$ Ordino le persone in un modo qualunque; la prima persona sceglie
la sua sedia, e lo può fare in k modi … poi la seconda persona, ecc.
II) $k! = n!$ III) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$

34) Scelgo le 5 partite a cui associare il pronostico "1", poi le 8 a cui associare "X", e alla restante assocerò "2".
Risposta: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8!}$

Allo stesso numero approderei se pensassi alle 5 da marcare con "1" e poi a quella da marcare con "2".
Le rimanenti verrebbero marcate con "X". L'espressione sarebbe più semplice: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot 9$
anche se a dire il vero pure quella ottenuta precedentemente $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8!}$
si può immediatamente semplificare: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot \cancel{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{8!}}$

35) I) $9!$ II) No III) $5! \cdot 4!$; diminuiscono, rispetto al caso I)

36) I) $7 + (7 \cdot 6)/2 = 28$ possibilità.
II) In quel caso ho una possibilità in meno: 27 possibilità.

37) I) $5! = 120$ II) $\frac{5!}{2} = 60$ III) $\frac{5!}{2 \cdot 3!} = 10$ IV) $\frac{5!}{2 \cdot 2} = 30$

38) Gasp! $\frac{800 \cdot 799 \cdot \ ... \ \cdot 751}{50!} \cdot \frac{750 \cdot 749 \cdot \ ... \ \cdot 651}{100!} \cdot \frac{650 \cdot 649 \cdot \ ... \ \cdot 451}{200!}$ … Buon calcolo, io devo andare, ciao!

39) I 10 libri di Storia possono essere ordinati in 10! modi;
i 6 libri sugli Animali in 6! modi e i 7 libri di Matematica in 7! modi.
Poi però devo decidere come ordinare i "gruppi":
da sinistra a destra Storia-Animali-Matematica oppure Animali-Storia-Matematica oppure…
L'ordinamento dei gruppi può avvenire in 3! = 6 modi.
In totale, posso disporre i miei libri in $10! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 3!$ modi.

PROBABILITA’

1 - IL CONCETTO DI PROBABILITA’ TI E’ GIA’ NOTO! LA “LEGGE EMPIRICA DEL CASO”

1.1 - Casi possibili e casi favorevoli; definizione provvisoria di probabilità

A. Qui davanti a me ho un’urna contenente 2 palline bianche e 98 nere.
Mi metto una benda sugli occhi, scuoto per bene e ripetutamente l’urna, ed estraggo una pallina.
   I. E' più probabile che venga fuori una bianca o una nera?
   II. E se nell’urna ci fossero 40 bianche e 60 nere?

B. In un'urna voglio introdurre 100 palline.
Quante bianche e quante nere dovrò mettere nell'urna se desidero
che sia uguale la probabilità di estrarre una bianca o una nera?

C. Sono in piedi davanti al bancone del bar.
A un certo punto entra un signore e vedendolo il barista mi fa:
"Non ne sono certo, ma è molto probabile che ordini una spremuta".
   I. Secondo te, cosa ha indotto il barista a parlare in questo modo?
   II. Che differenza c'è fra questo esempio e i precedenti?

Vai ora pure a controllare in fondo alla pagina se le risposte che hai dato sono esatte! …

… Bravo! … Dunque ai quesiti proposti sei stato in grado di rispondere facilmente e senza esitazioni!!!
Eppure la definizione di “probabilità” … noi *non l’abbiamo ancora data*!!!

Ma tu già avevi nella tua mente ben chiara l’idea che

valutare la “probabilità” di un evento legato al “caso”

significa

valutare la maggiore, o minore, “facilità” che l’evento in questione si verifichi.

Questo dimostra allora che **il concetto di probabilità TI E’ GIA’ NOTO,**
è un concetto che ogni persona dotata di ragione spontaneamente possiede
(indipendentemente dal fatto che l'abbia o non l’abbia già incontrato nel suo percorso scolastico)
e, quindi, che non ci stiamo occupando di INTRODURRE tale concetto, ma solo di PRECISARLO.

Con riferimento al quesito A, hai saputo dire con sicurezza quale, fra due possibili eventi, era "il più probabile";
il problema B ti ha proposto una situazione in cui i due eventi in gioco dovevano avere "la stessa probabilità".

Ora però ci proponiamo di essere più precisi,
ossia ci proponiamo di QUANTIFICARE, di MISURARE, attraverso un valore NUMERICO,
la probabilità che accada un determinato evento.

Lo svizzero Jakob Bernoulli, nella sua "Ars Conjectandi" (uscita postuma nel 1713)
scrive che

" Probabilitas enim est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pars a toto "

"**La probabilità infatti è il grado della certezza,**
e da questa (= dalla certezza) differisce come la parte differisce dal tutto".

RISPOSTE AI QUESITI A, B, C

A. I. Evidentemente, è molto più probabile (non è certo, ma è probabilissimo) che esca una nera
II. E’ anche questa volta più probabile che esca una nera.
Rispetto alla situazione precedente, però, la probabilità di uscita di una nera è nettamente diminuita.

B. 50 bianche e 50 nere

C. I. Il barista è indotto a parlare in questo modo perché, dall’esperienza passata, ha potuto constatare che, almeno negli ultimi tempi, quando quel signore entrava nel bar ordinava quasi sempre, o almeno la grande maggioranza delle volte, una spremuta.

II. La differenza fra l’ultimo esempio e i precedenti consiste in questo:
mentre negli esempi di prima la valutazione di probabilità si poteva fare “a priori”,
cioè senza bisogno di effettuare nessuna estrazione preliminare,
invece qui è soltanto DOPO aver osservato il comportamento del cliente
per un numero abbastanza elevato di giorni che il barista ha potuto formulare la previsione.

Altri spunti di riflessione

A. Se ho in un'urna 2 B e 98 N sono "quasi certo" che dall'estrazione uscirà una N;
la probabilità di estrazione di una N è "altissima" – il "grado di certezza" è "altissimo".
Se ho 40 B e 60 N, la probabilità di estrazione di una N è più bassa;
possiamo dire che il "grado di certezza" è diminuito.
E' evidente che, **di fronte ad un'urna con 100 palline in totale – alcune Bianche, altre Nere – la probabilità di estrarre una Nera è *proporzionale* al numero di palline Nere presenti nell'urna.**

B. **Supponiamo** ora **che fra i 20 alunni di una classe venga estratto, a sorte, un premio.**
Nessuno dei 20 alunni è certo di vincere: ciascuno, però, possiede "un pezzettino" di certezza ...
quanto misura, quanto vale questo "pezzettino"?
Beh, **è ragionevole dire che ciascun alunno possiede 1/20 della "torta" della certezza.**
Supponiamo poi che le 7 femmine della classe dicano:
"Se verrà estratta una qualsiasi di noi 7, regaleremo il premio alla bidella". A questo punto, la bidella si "impadronisce" di 7 "pezzettini" di certezza da 1/20, quindi "possiede i 7/20 dell'intera certezza".

C. Immaginiamo che una comitiva di amici un po' pazzi abbia promesso a Chiara un regalo per il suo compleanno, ma solo a condizione che da un'urna, contenente 100 palline di cui 90 verdi, venga estratta una pallina verde.
E' ovvio che Chiara, in questo modo, non è certa di ricevere il regalo; però ne è "quasi" certa, perché il numero 90 (casi favorevoli) è prossimo al numero 100 (casi possibili).
Chiara non possiede interamente la certezza di ricevere il regalo, ma ...
possiede 90 pezzettini da 1/100 di certezza: possiede i 90/100 della certezza.
Ed è altrettanto ovvio che se si dimezzasse sia il numero delle palline verdi (portandolo a 45) che il numero totale delle palline (portandolo a 50), la probabilità di ricevere il regalo non cambierebbe: d'altronde, in questo modo Chiara si troverebbe a possedere i 45/50 della certezza, cioè una "fetta" della "torta della certezza", esattamente uguale a 90/100.
Sarebbe in fondo la stessa cosa prendere semplicemente 10 palline, di cui 9 verdi: $90/100 = 45/50 = 9/10$.

A questo punto, è ora di trarre le conclusioni.
Evidentemente nella QUANTIFICAZIONE, nella MISURAZIONE della probabilità, c'entra sia il numero dei casi favorevoli che il numero dei casi possibili;

- dimezzando, o raddoppiando, sia il n° dei casi favorevoli che il n° dei possibili, la probabilità resta invariata;
- a parità di casi possibili, la probabilità è direttamente proporzionale al numero dei casi favorevoli.

La certezza si può pensare come una "torta" divisa in tante fettine uguali quanti sono i casi possibili; la probabilità di un evento corrisponde a tante "fettine" di certezza quanti sono i casi favorevoli all'evento stesso.

Queste considerazioni portano a concludere che il modo più spontaneo, più naturale, di "misurare" la probabilità di un evento, è quello di calcolare il rapporto $\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$.

DEFINIZIONE (attenzione: PROVVISORIA, perché andrà poi perfezionata)

Dicesi "probabilità" di un evento, il rapporto $p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$

La probabilità di un dato evento è dunque sempre compresa fra 0 e 1 (il numero dei casi favorevoli non può ovviamente superare il numero dei casi possibili); precisamente, la probabilità è uguale a 0 se e solo se l'evento è impossibile, è uguale a 1 se e solo se l'evento è certo.

ESERCIZI

1) **Se si lancia un dado, la probabilità di ottenere "5" è …..**
2) **Se si estrae una carta da un mazzo da scopa (NOTA), la probabilità che sia una figura è …..**
NOTA - In un mazzo da scopa abbiamo 40 carte:
4 assi, 4 re, 4 donne, 4 fanti, 4 "sette", 4 "sei", 4 "cinque", 4 "quattro", 4 "tre", 4 "due".
Ogni gruppo di 4 è formato da carte di diverso "seme":
una di cuori, una di quadri, una di fiori, una di picche.
La pagina successiva riporta uno schema del mazzo da scopa.
3) **Un'urna contiene 327 palline, contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, ... , 327.**
Pescando a occhi chiusi, qual è la probabilità di estrarre un numero pari? E un numero dispari?

RISPOSTE: 1) 1/6 2) $12/40 = 3/10$ 3) 163/327; 164/327

IL MAZZO DA SCOPA (40 carte: K = King, Re; Q = Queen, Donna; J = Jack, Fante)

	A	K	Q	J	7	6	5	4	3	2
Cuori	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥
Quadri	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
Fiori	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣
Picche	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠

4 Assi: Come Quando Fuori Piove

- **1 Asso di Cuori, Rosso**
- **1 Asso di Quadri, Rosso**
- **1 Asso di Fiori, Nero**
- **1 Asso di Picche, Nero**

4 K: K di Cuori, K di Quadri, K di Fiori, K di Picche
4 Q: …
…
NOTA: i Quadri sono anche detti "Ori", o "Denari"



Paul Cézanne, Les Joueurs de Cartes, dipinto fra il 1890 e il 1895

1.2 - La legge empirica del caso

La definizione cui siamo pervenuti ha un interessantissimo riscontro "sperimentale" (a tutti noto!).
Consideriamo un'urna contenente 10 palline, di cui 3 rosse.
La probabilità di estrarre dall'urna una pallina rossa è 3/10.
Bene: supponiamo di effettuare moltissime estrazioni, diciamo 10000 estrazioni
(sempre rimettendo la pallina nell'urna, dopo ogni estrazione, cioè, come si dice, "reimbussolando" la pallina).
Teniamo conto del numero di palline rosse estratte.
Vedremo che il rapporto

$$\frac{\text{numero di palline rosse estratte}}{\text{numero di estrazioni}}$$

si avvicinerà molto al valore 3/10 = 0,3.
In generale:

Si constata che, QUANDO SI RIPETE PER "MOLTE" VOLTE una prova,
la **FREQUENZA RELATIVA** di un esito, cioè il rapporto

$$\frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}}$$

si avvicina "molto" alla **PROBABILITÀ A PRIORI** di quell'esito,
calcolata tramite il rapporto

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

A questa "legge", la cui validità è rilevabile sperimentalmente, si è attribuito il nome di
"**LEGGE EMPIRICA DEL CASO**".

OSSERVAZIONE TERMINOLOGICA

**Si trova scritto in alcuni testi che la "legge empirica del caso"
è anche nota col nome di "legge dei grandi numeri".
Questa affermazione NON è corretta,
perché in realtà si tratta di due enunciati concettualmente molto diversi:**

- **la "*legge dei grandi numeri*", detta anche "Teorema di Bernoulli", è, appunto, un teorema (cioè un'affermazione dimostrabile):
per comprendere l'enunciato di questo Teorema occorrono
nozioni più avanzate di Calcolo delle Probabilità.
[A dire il vero, sono state formulate DIVERSE "leggi dei grandi numeri",
che si collocano a diversi gradi di "generalità"].**
- **La "*legge empirica del caso*" è, invece, tutt'altro che un teorema:
diciamo che è una "verità rilevabile sperimentalmente",
ma su questo si potrebbe in realtà discutere per giornate intere.**

1.3 - Proposte di riflessione per la piena comprensione della "legge empirica del caso"

A. Se lanci 1000 volte una moneta, quante volte ti aspetti che esca "testa" e quante volte "croce"?

B. Se lanci 1000 volte una moneta ed esce 400 volte "testa", ne deduci che la moneta è truccata?

C. Supponiamo di avere un mazzo di carte da scopa
(40 carte, di cui 10 di cuori, 10 di quadri, 10 di fiori, 10 di picche),
e di pescare per 1000 volte una carta, ogni volta reinserendola nel mazzo e mischiando
prima di andare a ripescare.
Supponiamo che al termine delle 1000 estrazioni sia uscita per 261 volte una carta di cuori.
"Cuori" è quindi uscito con frequenza relativa 261/1000,
vicina alla "probabilità a priori" che vale 10/40, ossia 1/4, ossia 250/1000.
Se ora effettuiamo altre 9000 estrazioni, portando il totale a 10000, ti domando:
è possibile che la frequenza relativa SI ALLONTANI dalla "probabilità a priori"?
E' possibile, per esempio, che in queste 10000 estrazioni il seme "cuori" esca 2630 volte?
(la frequenza relativa sarebbe 2630/10000 = 263/1000, che rispetto a 261/1000 è *più lontana* da 250/1000)

D. Si sa che in una scatola ci sono 10 palline, alcune bianche e altre nere.
Non si sa però quante sono le bianche e quante le nere.
Le palline sono tutte indistinguibili fra loro al tatto, in quanto differiscono esclusivamente per il colore.
Se una persona può estrarre dalla scatola una sola pallina per volta, guardarne il colore,
poi rimetterla nella scatola e (dopo aver scosso la scatola per mischiare le palline)
effettuare un'altra estrazione, e così via,
potrà quella persona stabilire quante fra le dieci palline sono bianche e quante nere?

E. Ripensiamo alla precedente situazione D).
Supponiamo che NON si sappia quante sono in totale le palline nella scatola.
Vale a dire: sappiamo che sono alcune bianche e alcune nere, ma non sappiamo
quante sono le bianche, quante sono le nere, e nemmeno, questa volta, quante sono le palline in totale.
Con tante estrazioni successive di un'unica pallina, con successivo "re-imbussolamento",
COSA si può venire a sapere riguardo alle palline?

RISPOSTE

A. *Circa* 500 volte Testa e *circa* 500 volte Croce.
Mi aspetto che il numero di Teste e il numero di Croci non si discostino di molto da 500.
Infatti, 1000 lanci sono già “tanti” e quindi, per la legge empirica del caso,
la frequenza relativa dovrebbe avvicinarsi alla probabilità a priori che è ½ per T e ½ per C.

B. Lo sospetterei fortissimamente. Mi pare che il numero di lanci (1000) sia già così elevato da “forzare”,
per una questione di “simmetria del caso”, il numero di Teste a non discostarsi COSI’ TANTO da 500.
Ritengo estremamente improbabile, anche se non impossibile teoricamente, che il numero di Teste sia così basso.
O la moneta è truccata, o è si è verificata una circostanza estremamente rara, eccezionale.

C. Sì, è possibile, anche se “raro”, eccezionale”, “molto improbabile”.
La “legge empirica del caso” non afferma che il “tendere” della frequenza relativa alla probabilità “a priori”,
quando il numero di prove si fa molto elevato, sia privo di “oscillazioni”.
La circostanza prospettata appare tuttavia estremamente poco probabile,
perché 10000 è un numero di estrazioni molto grande, e molto maggiore del già “grande” valore 1000.

D. Sì. Basta che questa persona effettui un gran numero di estrazioni con reimmissione (= reimbussolamento),
rilevando la frequenza, per esempio, delle bianche.
Per la legge empirica del caso, la frequenza relativa tenderà ad approssimare la probabilità a priori,
che a sua volta sarà uguale a n° bianche/n° totale = n° bianche/10.
Ad esempio, effettuando 1000 prove aleatorie, la frequenza assoluta delle bianche sarà quasi certamente
molto vicina a uno dei valori 100, 200, 300, 400, … , 900 (a seconda che le Bianche siano 1, 2, 3, 4, … , 9).
A partire dalla frequenza, sarà quindi possibile inferire il numero delle Bianche, con rischio di errore quasi nullo.
Infatti, da una parte, è estremamente improbabile che la frequenza assoluta si discosti molto
da una delle “frequenze attese” 100, 200, …
(ad es., con 1000 prove, sarebbe un evento quasi incredibile che la frequenza risultasse uguale, poniamo, a 149);
dall’altra, sarebbe ancora più inverosimile, raro, eccezionale, che, rilevata ad es. una frequenza di Bianche
uguale a 412, prossima cioè a 400, il numero delle bianche non fosse 4 ma 5, o 3, o ancora diverso.

E. Si potranno conoscere, approssimativamente, i tre rapporti
n° bianche /n° totale, n° nere /n° totale, n° bianche/n° nere.

2 - INADEGUATEZZA DELLA DEFINIZIONE DATA; LA DEFINIZIONE DI LAPLACE

2.1 - La definizione che abbiamo appena scritto è da buttare?

Accanto alla definizione di probabilità come rapporto *n° casi favorevoli/n° casi possibili*,
ho scritto un aggettivo limitativo: **provvisoria**.
Per qual motivo la definizione data va considerata solo *provvisoria*?
Cerchiamo di comprenderlo considerando i due esempi seguenti.

A. Al posto di lanciare la classica moneta, lanciamo invece un tronco di cono, considerando che esca "testa" quando il solido si ferma con la base più larga verso l'alto, "croce" nel caso contrario (e annullando il lancio se per caso il tronco dovesse rimanere in equilibrio sulla superficie laterale). Su quale esito ci converrebbe scommettere?

Immaginiamo che la posta in palio sia alta: rifletteremmo a dovere prima di scegliere, vero?
Certamente la forma particolare di questa "moneta" atipica farà sì che sia
"più facile", "più probabile", uno dei due esiti rispetto all'altro.
D'altra parte, la "definizione provvisoria" porterebbe alla seguente analisi:

- casi favorevoli all'uscita di "testa" = 1;
- casi favorevoli all'uscita di "croce" = 1;
- casi possibili = 2

DA CUI
probabilità dell'evento "esce testa" = 1/2; probabilità dell'evento "esce croce" = 1/2.
… Uguale probabilità, dunque … !?!
Eh no, proprio NON CI SIAMO: qui la "definizione provvisoria" senza dubbio fallisce.

B. Lancio una moneta; se esce Testa, mi viene consegnata un'urna U1 in cui ci sono una pallina Nera e una Rossa: da quest'urna estraggo una pallina; se invece esce Croce, mi viene consegnata una diversa urna U2 in cui vi sono 3 palline Verdi e 1 Gialla; da quest'urna estraggo una pallina. E' più probabile che la pallina estratta sia Gialla o sia Rossa?

Applicando la "definizione provvisoria" si troverebbe uguale probabilità
(si può, per esempio, pensare che i casi possibili siano TN, TR, CV_1, CV_2, CV_3, CG);
invece, basta riflettere un attimo per concludere che
la pallina Rossa ha probabilità *maggiore* di essere estratta, rispetto a quella Gialla.
(Non sei convinto? Prova a pensare ad un'urna U2 contenente 99 palline Verdi e 1 Gialla!
… L'evento "esce una Gialla" sarebbe evidentemente "eccezionale",
mentre l'evento "esce una Rossa" sarebbe piuttosto "ordinario", ti pare?)

***PER QUAL MOTIVO* la "definizione provvisoria" non è risultata valida ai fini di una valutazione corretta della probabilità nei due esempi di cui sopra?**

2.2 - La definizione "perfezionata" (di Laplace)

Queste riflessioni ci portano evidentemente a sostituire la definizione inizialmente posta
con quest'altra, data da Pierre Simon de **Laplace** nel suo **"Théorie Analytique des Probabilités" del 1812:**

"... la probabilité d'un évenement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, LORSQUE RIEN NE PORTE A CROIRE QUE L'UN DE CES CAS DOIT ARRIVER PLUTOT QUE LES AUTRES"

ovvero:

"... la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli all'evento stesso ed il numero dei casi possibili, QUALORA NULLA PORTI A RITENERE CHE UN CASO TENDA A VERIFICARSI PIU' FACILMENTE DEGLI ALTRI" (purché, cioè, i casi possibili siano "*UGUALMENTE* POSSIBILI").

DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA' (dovuta a Laplace, 1812)

Dicesi probabilità di un evento il rapporto $\dfrac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$

QUALORA TUTTI I CASI POSSANO ESSERE CONSIDERATI ♥ "EQUIPOSSIBILI";
cioè, qualora non ci siano casi che tendano a verificarsi "più facilmente" di altri.

LA DEFINIZIONE PERFEZIONATA



2.3 - Nemmeno la definizione "perfezionata" è, a ben guardare, impeccabile ☹

Siamo tuttavia costretti ad ammettere che il nostro sforzo di giungere ad una definizione completa e rigorosa di "probabilità" NON si è concluso in modo veramente soddisfacente.

La "definizione" cui siamo alla fine pervenuti … è, ahimè, grossolanamente deficitaria, perché mancante di una *regola*, di un criterio, che permetta di stabilire QUANDO si possa parlare di casi "ugualmente facili (o probabili)" e quando invece no.

E poiché non si riesce ad enunciare una regola siffatta in termini che evitino "circoli viziosi" e che siano a) sufficientemente generali, da una parte; b) e sufficientemente dettagliati, dall'altra, la decisione se due casi siano da considerare o meno equipossibili è, alla fin dei conti, lasciata alla nostra valutazione soggettiva.

Laplace stesso ammette, a questo proposito, che

"la juste appréciation des divers cas est un des points les plus délicats de l'analyse des hazards"

cioè che

"la corretta valutazione dei diversi casi
- in sostanza, la valutazione se siano o meno "equipossibili" -
è uno dei punti più delicati dell'analisi degli eventi casuali".

Tuttavia, si constata che,

pur essendo la valutazione di equipossibilità lasciata alla discrezionalità individuale,
considerazioni di simmetria condotte e discusse con attenzione
portano a valutazioni unanimemente condivise.

Una buona guida a proposito è (nonostante si tratti di un'indicazione piuttosto vaga)
il "PRINCIPIO DI RAGIONE INSUFFICIENTE" o "PRINCIPIO DI INDIFFERENZA":
"due esiti sono equipossibili se non c'è nessuna ragione perché si debba ritenere il contrario"

2.4 - Il problema dell'equipossibilità

Due esempi per sottolineare l'importanza di analizzare con cura se i casi considerati siano equipossibili.

Ragiona con la tua testa, coprendo inizialmente la parte inferiore della pagina, su cui si trovano le risposte.

A. Un tale mi dice:

"Lanciando due monete, la probabilità che esca "testa" su entrambe è 1/3.
Infatti, i casi possibili sono: 1) due "teste" 2) due "croci" 3) una "testa" e una "croce".
Di questi tre casi possibili, uno solo è favorevole, quindi, appunto, *p*(2 Teste) = 1/3"

E' corretta questa affermazione?

B. Ho qui 3 cartoncini rettangolari;

- **uno ha entrambe le facce rosse,**
- **un altro ha entrambe le facce bianche,**
- **il terzo ha una faccia bianca e la faccia opposta rossa.**

Metto i cartoncini in un cassetto, ti chiamo …
… e tu, senza guardare, estrai un cartoncino dal cassetto e lo posi sul tavolo.
Supponiamo a questo punto che la faccia in evidenza sia rossa.
Qual è la probabilità che la faccia coperta sia bianca?

RISPOSTE

A. Un'analisi attenta mostra che i tre casi prospettati *non* sono equipossibili.
L'insieme dei casi equipossibili è (T, T) (T, C) (C, T) (C, C)
(per facilitare il ragionamento giova pensare a un qualcosa che psicologicamente ci porti a non dimenticare l'individualità di ciascuna moneta:
ad esempio, possiamo pensare che una moneta sia da 2 euro e l'altra da 1 euro).
Quindi l'affermazione non è corretta, e la risposta esatta è invece *p*(2 Teste) = 1/4

B. Verrebbe forse spontaneo rispondere 1/2, ma la risposta giusta è invece 1/3. Infatti …
primo cartoncino: R1, R2 (una faccia rossa, l'altra ancora rossa).
secondo cartoncino: B1, B2
terzo cartoncino: B3, R3
La faccia rossa che io vedo potrebbe essere, con ugual facilità, R1, o R2, o R3.
E di questi 3 casi EQUIPOSSIBILI uno solo (R3) è favorevole all'evento: "la faccia nascosta è bianca".

3 - DIVERSI APPROCCI ALLA PROBABILITA'

In Matematica ci sono 4 modi alternativi di porre la definizione di probabilità:

a) definizione **CLASSICA**
b) definizione **FREQUENTISTA**
c) definizione **ASSIOMATICA**
d) definizione **SOGGETTIVISTA**

a) Def. **CLASSICA**:

$$\textbf{probabilità} = \frac{\textbf{n° casi favorevoli}}{\textbf{n° casi possibili}}$$

sotto l'ipotesi che i casi possibili siano valutati tutti "EQUIpossibili", o "equiprobabili".

Quest'ultima valutazione è individuale e legata sostanzialmente a considerazioni di "simmetria" non inquadrabili, purtroppo, in un criterio che si riesca a definire in termini rigorosi e generali.

Tuttavia, dopo un'attenta analisi e discussione, la "equipossibilità" o la "non equipossibilità" dei casi in esame dovrebbe sempre emergere in modo chiaro, ed essere unanimemente condivisa, sulla base del cosiddetto "PRINCIPIO DI RAGIONE INSUFFICIENTE", o "Principio di Indifferenza": "due casi sono equipossibili se non c'è nessuna ragione perché si debba ritenere il contrario".

b) Def. **FREQUENTISTA** (o "statistica"):

$$\textbf{probabilità = frequenza relativa} = \frac{\textbf{n° prove favorevoli all'evento}}{\textbf{n° totale di prove effettuate}},$$

calcolata, s'intende, dopo aver effettuato un numero "sufficientemente elevato" di prove.

Questo tipo di valutazione di probabilità è in genere destinato, per sua natura, a contenere un (se pur piccolo) errore di approssimazione. Il numero n di prove è da giudicarsi "sufficientemente elevato" se la frequenza relativa, allorquando ci si avvicina a n prove, tende a rimanere pressoché stabile, in quanto si osserva che le sue variazioni si fanno molto ma molto piccole.

c) Def. **ASSIOMATICA** (Kolmogorov, 1933):
non si preoccupa di stabilire "cos'è" la probabilità,
ma solo di definirla implicitamente tramite una famiglia di assiomi.

d) Def. **SOGGETTIVISTA** (De Finetti e altri, 1931):

- INTERPRETAZIONE 1)
  La probabilità "soggettiva" di un evento è a/b se un soggetto "coerente" G è disposto a pagare subito la somma a per ricevere in futuro la somma b (con un guadagno netto, quindi, uguale a $b - a$) nel caso l'evento si verifichi.
  "Coerente" significa che lo stesso soggetto G deve essere disposto in qualsiasi momento a scambiarsi di ruolo con l'altro giocatore G' …
  Ma cosa fa l'altro giocatore? Riceve tanto per cominciare la somma a, ed è disposto a pagare b se l'evento si verifica: quindi anche G, per essere coerente, deve essere disposto a incassare subito la somma a per pagare in un futuro la somma b (con una perdita uguale in valore assoluto a $b - a$) se l'evento si verifica.
- INTERPRETAZIONE 2)
  Anche, in modo del tutto equivalente: la probabilità di un evento E è uguale a s/S se per me è del tutto indifferente l'offerta, da parte di un benefattore,
  - ♪ **di una somma s certa, che mi viene pagata in ogni caso**
  - ♫ **oppure in alternativa di una somma S, che però mi verrà data solo se l'evento E si verificherà.**

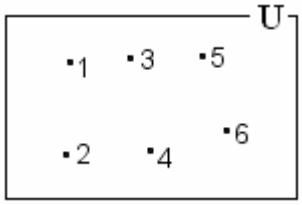
- **Il taglio di queste lezioni è classico-frequentistico al medesimo tempo**.
  Infatti abbiamo posto la definizione di tipo "classico", e accettato l'asserto "sperimentale" chiamato "**LEGGE EMPIRICA DEL CASO**", di cui ci serviremo per passare, quando opportuno, da una "visione classica" a una "visione frequentista":
  "**Quando si ripete per 'molte' volte una prova, la frequenza relativa di un esito, cioè il rapporto (n° di prove che hanno avuto quell'esito)/(n° totale di prove) si avvicina 'molto' alla probabilità a priori di quell'esito, calcolata tramite il rapporto (n° casi favorevoli)/(n° casi possibili)**"
- Nella risoluzione dei problemi sulla probabilità, è assai proficuo, a parere di chi scrive, utilizzare per certi problemi una visione *classica*, per altri una visione *frequentista*, per altri *entrambe*.
- L'approccio matematico "puro" alla teoria della probabilità sarebbe quello *assiomatico*, che con ogni evidenza è didatticamente improponibile ai fini di una prima presentazione dell'argomento.

4 - TERMINOLOGIA, SIMBOLOGIA; INDICAZIONI METODOLOGICHE; ESEMPI

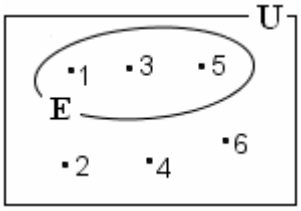
4.1 - Terminologia specifica

- **L' "insieme dei casi possibili" viene anche chiamato "insieme universo", o "spazio degli eventi", o talvolta "spazio campionario".**
- **Un sottoinsieme dell'insieme universo viene chiamato "evento".**
- **Un "evento" unitario (costituito cioè da un solo caso) viene detto "evento elementare".**

Facciamo un esempio.
Se la "prova" cui ci riferiamo è il "lancio di un dado", l' "insieme dei casi possibili" è $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Un "evento" potrebbe essere il seguente: E = "esce un numero dispari".
Tale "evento" coincide, sostanzialmente, con l'insieme $\{1, 3, 5\}$ (figura a destra)



Ecco un altro "evento": "esce un numero primo". Tale evento si identifica con l'insieme $\{2, 3, 5\}$.

Altro evento ancora: "esce il 6". Si tratta di un "evento elementare", che coincide con l'insieme unitario $\{6\}$.

Poiché il numero dei casi favorevoli può andare da 0
ad un valore che comunque non può superare il numero dei casi possibili,

la probabilità $p(A) = \dfrac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$

(se c'è "equipossibilità" fra i casi)
di un evento A, è sempre compresa fra 0 e 1:

$$\boxed{0 \le p(A) \le 1}\ ;$$

$p(A) = 0$ se e solo se l'evento A è IMPOSSIBILE, $p(A) = 1$ se e solo se l'evento A è CERTO.

Osserviamo per inciso che questa limitazione del valore della probabilità
fra il confine inferiore 0 (= impossibilità) e il confine superiore 1 (= certezza)
vale qualunque sia l'approccio scelto (classico, frequentista, assiomatico, soggettivista).

4.2 - Indicazioni metodologiche

L'indimenticabile professor Pascal Dupont dell'Università di Torino, nella sua opera
"Primo incontro con la Probabilità" (SEI, 1985), suggerisce che di fronte ad un problema di CdP
la prima cosa da fare è di concentrarsi bene sull'insieme dei casi possibili (spazio degli eventi). Precisamente:

a. Letto il testo del problema, concepiamo in cosa consiste la "prova", analizzando bene tutte le modalità della medesima

b. Pensiamo ora di eseguire la prova e sforziamoci di immaginare uno qualsiasi dei risultati che possono verificarsi eseguendo la prova

c. Concepiamo, "costruiamo" quindi, l' "insieme universo" di tutti i possibili risultati, l' "insieme dei casi possibili", lo "spazio degli eventi"

d. Analizziamo con cura se gli eventi considerati si realizzano "pari facilitate".

4.3 - Anticipazione: l'evento contrario

La somma della probabilità di un evento A con quella dell'evento contrario $\overline{A}$
è sempre uguale a 1:

$$\boxed{p(A) + p(\overline{A}) = 1} \quad \textbf{e quindi} \quad \boxed{p(A) = 1 - p(\overline{A})}, \quad \boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$$

Ciò può essere rigorosamente dimostrato e
si deve sostanzialmente al fatto che un evento e il suo contrario, complessivamente,
riempiono tutta la "torta" della certezza, che vale 1.

4.4 - Esempi svolti (sulla definizione di Laplace)

C'è la risoluzione commentata di ciascun problema appena sotto il testo,
♪ *ma se tu la coprissi …*
♫ *… e ci provassi innanzitutto per conto tuo …*
… COME SAREBBE UTILE!!!

❑ **Esempio 1**
Che probabilità c'è, estraendo una carta da un mazzo da scopa ⇨, che si tratti
a) del "settebello" (= il 7 di quadri)?
b) di un "7"?
c) di una carta di "denari" (= di quadri)?
d) di una figura rossa?
e) di una carta dal "2" al "6"?

Risoluzione
Casi possibili = 40; sono evidentemente tutti "equipossibili".
a) 1 solo caso favorevole; $p = 1/40$ b) 4 casi favorevoli; $p = 4/40 = 1/10$ c) 10 casi fav.; $p = 10/40 = 1/4$
d) 6 casi favorevoli; $p = 6/40 = 0{,}15 = 15\%$ e) 20 casi favorevoli; $p = 20/40 = 1/2 = 0{,}5 = 50\%$

❑ **Esempio 2**
Si sceglie a caso una pagina di un libro.
Che probabilità c'è che la prima vocale che si incontra leggendo sia la "e"?

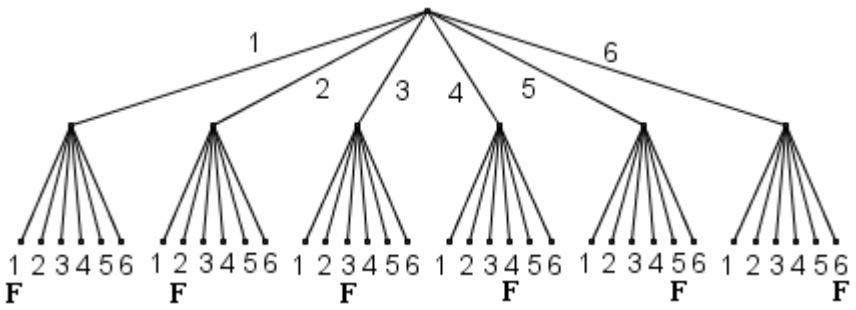
Risoluzione
Sarebbe ingenuo, ed errato, rispondere "1/5". I casi "a", "e", "i", "o", "u" NON sono infatti equipossibili, data la diversa frequenza con cui le varie vocali compaiono nel linguaggio.
La domanda resta senza risposta, a meno di effettuare una ricerca statistica che ci porterebbe sul terreno della "probabilità a posteriori".

❑ **Esempio 3**
Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi?

Risoluzione
Posto $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
l'**insieme dei casi possibili** sarà il prodotto cartesiano $D \times D$
(= l'insieme delle coppie ordinate aventi come primo elemento un elemento preso da D e come secondo elemento ancora un elemento preso da D)
e avrà perciò 36 elementi;
i **casi favorevoli** sono 6 e cioè (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6).
Quindi: $p(\text{stesso numero sui due dadi}) = 6/36 = 1/6$.

	1	2	3	4	5	6
1	F	●	●	●	●	●
2	●	F	●	●	●	●
3	●	●	F	●	●	●
4	●	●	●	F	●	●
5	●	●	●	●	F	●
6	●	●	●	●	●	F

Osserviamo che l'insieme universo si può rappresentare molto bene, in questo problema, con una tabella a doppia entrata (qui a destra) oppure con un grafo (qui sotto):



❑ **Esempio 4**
Che probabilità c'è, avendo a disposizione due mazzi da scopa,
se si estrae una carta da ciascuno di essi, di pescare due figure?

Risoluzione
Casi possibili = $40 \cdot 40 = 1600$ (esempio: il K di Cuori dal 1° mazzo e il 5 di Fiori dal 2° …);
casi favorevoli $12 \cdot 12 = 144$. $p = 144/1600 = 9/100 = 0{,}09$.
Nozioni appena un po' più avanzate di CdP permetterebbero di procedere ancora più semplicemente.

❑ **Esempio 5**
Prima di lanciare una coppia di dadi, dei bambini scommettono sulla somma dei punteggi che si otterranno. Fermo restando che i piccoli dovrebbero avere altri giochi, altrimenti si ritroveranno a vent'anni stanchi di vivere e pieni di debiti, qual è il risultato più probabile di una prova aleatoria come questa?

Risoluzione

La somma minima che si può ottenere è 2:
essa si ottiene in 1 solo caso, quando esce 1 sia sul dado "blu" che sul dado "rosso".
Invece, ad esempio, la somma 3 si può ottenere in 2 modi: (1, 2) e (2, 1).
L'uso delle parentesi tonde nel prospetto sottostante **indica che pensiamo la coppia come *ordinata***:
il primo numero esprime l'esito sul dado "blu", il secondo sul dado "rosso". Complessivamente:

2	(1,1)	$p(2)=1/36$
3	(1,2) (2,1)	$p(3)=2/36$
4	(1,3) (3,1) (2,2)	$p(4)=3/36$
5	(1,4) (4,1) (2,3) (3,2)	$p(5)=4/36$
6	(1,5) (5,1) (2,4) (4,2) (3,3)	$p(6)=5/36$
7	**(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)**	$\boldsymbol{p(7)=6/36}$
8	(2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4)	$p(8)=5/36$
9	(3,6) (6,3) (4,5) (5,4)	$p(9)=4/36$
10	(4,6) (6,4) (5,5)	$p(10)=3/36$
11	(5,6) (6,5)	$p(11)=2/36$
12	(6,6)	$p(12)=1/36$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La somma che si può ottenere in più modi è 7 (6 modi). La sua probabilità è $p(7)=6/36=1/6$

❑ **Esempio 6**
Lanciando successivamente per 10 volte una moneta, stabilire che probabilità c'è di ottenere:
a) tutte Teste b) Testa le prime 4 volte, Croce le rimanenti

Risoluzione

Per entrambi i quesiti, i casi possibili sono tanti quante le sequenze di 10 simboli,
ciascuno dei quali può valere T o C; ad esempio, un caso possibile è TTTCCTCTTC.
Perciò abbiamo $2^{10}=1024$ casi possibili.
Pensando ad un diagramma ad albero si capisce bene per qual motivo il numero di casi possibili è 1024.

Avendo a disposizione 10 caselle con la possibilità di riempire ciascuna casella o con "T" o con "C", quante sequenze fra loro distinte è possibile scrivere? Ecco qui davanti a me la sequenza delle 10 caselle da riempire:

Per la prima casella, ho evidentemente due possibilità: **T** o **C**.

Comunque io abbia scelto di riempire la 1^a casella,
per la 2^a mi si apre un ventaglio di 2 possibilità: **T** o **C**.

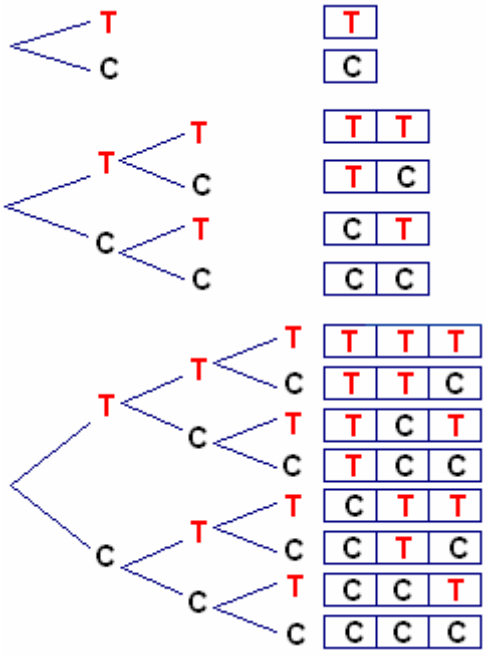
Le possibilità, per quanto riguarda le **prime 2 caselle**,
sono espresse dal diagramma ad albero qui a destra:
$4 = 2^2$ possibilità (TT, TC, CT, CC)

Comunque io abbia scelto il contenuto delle prime 2 caselle,
per riempire la 3^a mi si apre ancora un ventaglio di 2 possibilità.

Le possibilità, per quanto riguarda le **prime 3 caselle**,
sono espresse dal diagramma ad albero qui a destra:
$8 = 2^3$ possibilità
(TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC)

Ogni volta che penso a una casella in più, il numero di modi
in cui è possibile riempire la sequenza di caselle considerate
raddoppia per via del ventaglio di 2 possibilità che si apre !!!

A questo punto, è evidente che: **10 caselle $\rightarrow$ 2^{10} = 1024 possibilità**.



a) Il caso favorevole è 1 solo: TTTTTTTTTT. La probabilità richiesta è p(tutte T) = 1/1024 = 0,0009765
b) Il caso favorevole è 1 solo: TTTTCCCCCC. La probabilità richiesta è p(TTTTCCCCCC) = 1/1024.

❑ **Esempio 7**

Avevo in tasca 5 monete, 2 da 1 euro e 3 da 2 euro. Pesco dalla tasca, prendendo le prime 2 che mi capitano fra le dita. Calcola la probabilità che queste formino un totale di

a) 4 euro b) 2 euro c) 1 euro

Risoluzione

Possiamo schematizzare così:

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
1 *euro*	1	2	2	2

Per tutti e tre i quesiti l'insieme dei casi possibili è
(**notare l'uso delle parentesi graffe e non tonde intorno a ogni coppia, per indicare che la coppia viene qui pensata senza che abbia importanza l'ordine dei due elementi**):

$$\{\ \{M_1, M_2\};\ \{M_1, M_3\};\ \{M_1, M_4\};\ \{M_1, M_5\};$$
$$\{M_2, M_3\};\ \{M_2, M_4\};\ \{M_2, M_5\};$$
$$\{M_3, M_4\};\ \{M_3, M_5\};$$
$$\{M_4, M_5\}\ \}$$

Possiamo valutare tutti e 10 questi casi come *equi*possibili: non c'è ragione per l'ipotesi contraria.
Ora, considerando le somme dei valori delle coppie di monete, avremo

$\{M_1, M_2\}$ 2 *euro*
$\{M_1, M_3\}$ 3 *euro*
$\{M_1, M_4\}$ 3 *euro*
$\{M_1, M_5\}$ 3 *euro*
$\{M_2, M_3\}$ 3 *euro*
$\{M_2, M_4\}$ 3 *euro*
$\{M_2, M_5\}$ 3 *euro*
$\{M_3, M_4\}$ 4 *euro*
$\{M_3, M_5\}$ 4 *euro*
$\{M_4, M_5\}$ 4 *euro*

Avremo dunque: *a*) $p = \frac{3}{10}$ *b*) $p = \frac{1}{10}$ *c*) $p = 0$ (*evento impossibile*)

❑ **Esempio 8**

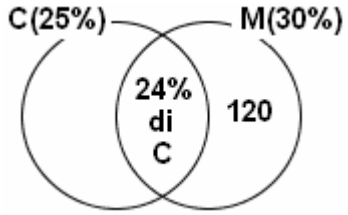
In una scuola, il 25% degli studenti segue un corso di Computer e il 30% un corso di Musica. Il 24% dei partecipanti a Computer fa anche Musica; in 120 fanno Musica, ma non Computer.

a) Preso a caso uno studente, che probabilità c'è che faccia Computer ma non Musica?

b) Preso a caso uno studente che faccia Musica, che probabilità c'è che frequenti anche Computer?

Risoluzione

Converrà innanzitutto rappresentare la situazione con un diagramma di Venn:

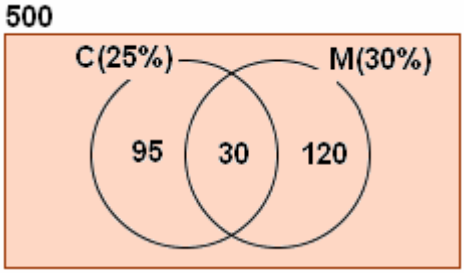


$$C \cap M: \quad \frac{24}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{6}{100}$$

quindi coloro che fanno sia Computer che Musica sono il 6% del totale e dunque sono la 5^a parte di quelli che fanno Musica (30% del totale). Perciò quei 120 in $M - C$ saranno i 4/5 degli elementi di M: da cui

$$\frac{4}{5} M = 120 \ \rightarrow\ M = 150$$

(osserviamo che, in modo disinvolto ma efficace dal punto di vista "pratico", stiamo usando una stessa lettera per indicare tanto un *insieme* quanto il *numero dei suoi elementi*)



Allora possiamo con semplici passaggi determinare il numero di studenti che stanno nei vari insiemi, compreso il numero totale di studenti della scuola, che risulta essere di 500.

Per dar risposta ai due quesiti basta osservare il diagramma:

a) $p = \frac{95}{500} = \frac{19}{100} = 19\%$ b) $p = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

4.5 - ESERCIZI (risposte alla fine della rassegna)

COSA DOBBIAMO DOMANDARCI SEMPRE:

- **Qual è l'insieme dei casi possibili?**
- **C'è "equipossibilità"?**
- **Quanti sono, questi casi (equi)possibili?**
- **E quanti sono invece i casi favorevoli?**



DUNQUE probabilità = $\dfrac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi (equi)possibili}}$

1) Lanciando un dado, che probabilità c'è che esca
   a) un multiplo di 3?
   b) un numero diverso da 6?
   c) un numero primo?

2) In una classe vi sono 18 ragazzi e 9 ragazze. Se viene estratto coi bigliettini un cognome a caso per la prima interrogazione di Storia, che probabilità c'è che si tratti di un maschio?

3) Un amico ha acquistato 100 biglietti di una lotteria nazionale. Ha poi saputo che i biglietti stampati sono 20 milioni, e sono stati venduti tutti. Che probabilità ha di vincere il 1° premio?

4) Si gioca alla tombola (numeri interi da 1 a 90). Che probabilità c'è che il primo estratto sia
   a) un multiplo di 13?
   b) un quadrato perfetto?
   c) uno dei numeri che sono divisibili per 10 o per 12?
   d) un numero minore di 91?
   e) un numero divisibile per 91?

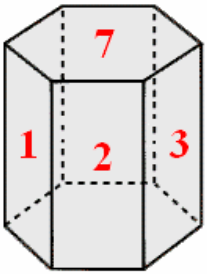
5) Se il nome di una ragazza inizia con una vocale, che probabilità c'è che questa sia "A"?

6) Se si "pesca" a caso un intero da 1 a 20, stabilisci che probabilità c'è che sia divisibile:
   a) sia per 2 che per 3 b) per 2 e/o per 3.

7) Da un mazzo da scopa (40 carte) ⇨ se ne pesca 1. Se mi dicono che NON è il "settebello" (7 di denari), che probabilità c'è che la carta sia comunque di denari? ["Denari" = "Ori" = "Quadri"]

8) Si estrae a sorte un numero di 2 cifre, poi si lancia una moneta e se esce "Testa" se ne prende la prima cifra, altrimenti la seconda. Che probabilità c'è di ottenere in questo modo
   a) un "9"?
   b) uno "0"?

9) Lancio un dado a 8 facce, numerate da 1 a 8, della forma illustrata in figura. → Che probabilità c'è che si presenti sulla faccia in alto un multiplo di 3?



10) Riempi i puntini:
   Se un evento è certo, detta p la sua probabilità, è $p = \ldots$
   Se un evento è impossibile, detta p la sua probabilità, è $p = \ldots$
   La probabilità di un evento è sempre compresa fra un minimo di … e un massimo di …
   e il primo di questi valori si ha soltanto nel caso in cui l'evento sia …
   mentre il secondo valore si ha soltanto nel caso in cui l'evento sia …

11) La probabilità dell'evento "lanciando un dado, esce un numero minore di 7" è … perché l'evento è … ; sempre lanciando un dado, la probabilità dell'evento "esce un numero maggiore di 7" è … perché questo evento è …

12) In un cassetto ci sono 4 fazzoletti bianchi e 3 scozzesi.
   a) Qual è la probabilità che estraendone uno a caso, esso sia bianco?
   b) Qual è la probabilità che, estraendo 4 fazzoletti a caso, almeno 1 di essi sia bianco?

13) In un'urna ci sono 2 palline Bianche, 2 Rosse e 2 Nere.
   a) Qual è la probabilità che, estraendo 1 pallina, essa sia Nera?
   b) Se si estrae una pallina e questa risulta Nera, estraendone poi una seconda, senza aver rimesso la prima nell'urna, che probabilità c'è che sia Nera anch'essa?

14) Sul bancone di un bar, sono rimaste 10 brioches esternamente identiche, ma 2 di esse hanno il cioccolato dentro, l'unico ripieno che non mi piace. Presa una brioche a caso, che probabilità c'è che sia di mio gradimento?

15) Qual è la probabilità che il 1° estratto nella prossima estrazione alla ruota di Napoli sia un numero primo?

16) E' corretto dire che, se si lancia un dado, i casi possibili sono 2:
"numero pari" o "numero dispari", quindi, ad esempio, $p(pari)=1/2$?

17) Una piccola pesca di beneficenza ha 240 biglietti, numerati da 1 a 240; io sono in possesso del numero 120.
Viene estratto il numero cui spetta il 1° premio.
Io domando se quel numero è di 3 cifre, e mi rispondono "sì".
Domando se queste cifre sono tutte minori di 3, e mi rispondono "sì".
Chiedo infine se le cifre sono tutte minori di 2 e mi rispondono "no".
Con queste informazioni, che probabilità ho di aver vinto il 1° premio?

18) I 10 articoli di una vetrina hanno tutti prezzi diversi.
Che probabilità ho, scegliendone 1 a caso, che sia il più a buon mercato?
Che probabilità ho, scegliendone 2 a caso, che uno sia più caro dell'altro?

19) Ho giocato il 49 sulla ruota del Lotto ⇨ di Napoli.
Che probabilità c'è che esca come primo numero estratto?
… Mi dicono ora che il primo estratto sulla ruota di Napoli è stato un multiplo di 7, ma non è stato il 7.
Che probabilità c'è che si tratti proprio del 49?

20) Mettiti d'accordo con un gruppetto di amici. Suddividetevi in coppie (almeno 5 coppie).
In ciascuna coppia, uno dei due mischia le carte di un mazzo da scopa, e l'altro estrae a caso una carta;
questo, lo si fa per 200 volte complessivamente, sempre reinserendo la carta nel mazzo dopo l'estrazione.
Si tratta di annotare quante volte complessivamente esce "cuori"
per verificare, alla fine, se la "legge empirica del caso" appare rispettata.

21) Come per l'esercizio/attività precedente, soltanto che invece di estrarre una carta si lanciano due dadi
e si fa la somma dei punteggi ottenuti (per le probabilità *a priori* dei vari esiti vedi l'Esempio 5 di pag. 483)



22) L'insieme universo dei casi equipossibili quando si valuta la probabilità
che "lanciando due monete, escano due croci", è:
a) {T, C, T, C} b) {T, C} c) {TT, TC, CT, CC} d) nessuno dei precedenti

23) Quanti sono i casi possibili quando si lancia una moneta
a) 3 volte di seguito? b) 4 volte di seguito? c) 8 volte di seguito?

24) Si lanciano in aria due monete. Che probabilità c'è che esca "Testa" su entrambe?

25) a) Calcola la probabilità che lanciando simultaneamente 2 monete gli esiti siano uguali.
b) E se le monete fossero 3, quale sarebbe la probabilità che gli esiti siano tutti uguali? c) E se fossero 4?

26) Si lancia per due volte una moneta. Che probabilità c'è di ottenere "Testa" almeno una volta?

27) Si lanciano 3 monete. Un caso possibile è, ad esempio, TTC.
Che probabilità c'è di non ottenere mai "Testa"? a) 1/4 b) 1/6 c) 1/8 d) 1/9

28) Se si lanciano 3 monete, che probabilità c'è che esca una volta "Testa" e le rimanenti "Croce"?

29) Si lanciano 3 monete. Che probabilità c'è di ottenere almeno una "Testa"? a) 8/9 b) 7/8 c) 3/4 d) 2/3

30) Si lanciano 3 monete. Che probabilità c'è di ottenere almeno due "Teste"? a) 3/4 b) 2/3 c) 1/2 d) 1/3

31) Si lancia una moneta per 4 volte consecutive. Che probabilità c'è che
a) non si abbiano mai 2 esiti successivi uguali? b) si abbiano almeno 2 esiti successivi uguali?

32) Se si lancia una puntina da disegno, essa potrà fermarsi sul tavolo (o sul pavimento)
con la punta in su o con la punta in giù. Qual è la probabilità di ciascuno dei due eventi?

33) Il numero 58, sulla ruota del Lotto di Napoli, non è mai uscito nelle precedenti 150 estrazioni. Invece il 59
è uscito nell'estrazione più recente. Conviene di più giocare il 58 o il 59 nell'estrazione di questa sera?

34) Nel gioco del Superenalotto ⇨, c'è qualche sestina che è più conveniente giocare?

35) Se so che un'amica è nata a Giugno, e anch'io sono nato a Giugno,
che probabilità c'è che il nostro compleanno cada nello stesso giorno?

36) Una classe di 20 studenti ha i banchi doppi: ogni banco, insomma, è condiviso da due studenti.
I posti a sedere vengono sorteggiati.
Giuseppe e Luca si detestano. Che probabilità c'è che l'estrazione li condanni a esser compagni di banco?

37) La probabilità di essersi ammalati di scarlattina prima di iniziare le scuole elementari
è valutata, in Italia, intorno al 35%. All'inizio dell'anno scolastico, in una Prima elementare
con 240 alunni, quanti saranno coloro che hanno già fatto la scarlattina?

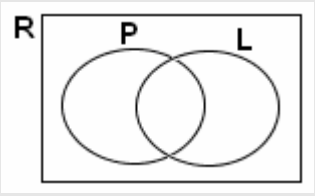


38) Lanciando due dadi, l'insieme dei casi possibili può essere rappresentato tramite lo schema riportato qui a fianco.
Tre casi possibili sono, ad esempio: (4, 6); (3, 3); (6, 4).
Ora, nello schema, indica con una crocetta l'insieme dei casi favorevoli all'evento "la somma dei due punteggi usciti è 4".
Che probabilità ha l'evento in questione?
a) 1/6 b) 1/12 c) 3 d) 1/9

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

39) a) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, l'esito del lancio sia un "doppio 1"
b) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, su uno di questi esca "1" e sull'altro "6"
c) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, su uno di essi esca un numero pari e sull'altro un dispari
d) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la faccia "1" si presenti una e una sola volta
e) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la faccia "1" si presenti almeno una volta

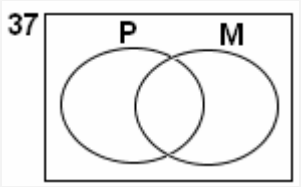
40) Lanciando 1000 volte una coppia di dadi, quante volte ci aspettiamo che esca lo stesso numero su entrambi?



41) Il 20% dei residenti in un comune è pensionato, e il 10% è laureato.
Però soltanto il 5% dei pensionati, in quel comune, è laureato.
Se si estrae a caso il nome di un abitante, che probabilità c'è che sia:
I) pensionato e laureato II) né pensionato, né laureato
III) pensionato, ma non laureato IV) laureato, ma non pensionato
V) pensionato o in alternativa laureato

42) Il 70% degli iscritti ad un club sono maschi; delle femmine, quest'anno il 20% ha lasciato al club una donazione, mentre solo il 10% dei maschi lo ha fatto.
a) Preso un iscritto a caso, determinare la probabilità che abbia lasciato una donazione al club.
b) Preso a caso un membro che abbia lasciato una donazione, determinare la probabilità che sia maschio.

43) Alla Roulette Francese possono uscire i numeri 0, 1, 2, 3, ... , 36
e giocare "Pair" significa puntare su tutti i numeri >0 pari,
mentre giocare "Manque" equivale a puntare sui numeri da 1 fino a 18.
Nello schema a fianco, scrivi all'interno di ciascuno dei 4 territori quanti sono gli elementi dell'insieme corrispondente.
Se metto un gettone su *Pair* e un altro su *Manque*, che probabilità ho di
I) vincere su entrambe le giocate? II) vincere su almeno una giocata?
III) perdere su entrambe le giocate? IV) vincere su esattamente 1 giocata?



Lo "0" in matematica fa parte dei numeri pari, alla roulette invece è convenzionalmente considerato "neutro".

44) Il 30% delle famiglie di un paese ha un cane; di queste il 40% ha pure un gatto.
Fra tutte le famiglie che possiedono un gatto, il 24% possiede anche un cane.
Estratta a sorte una famiglia in quel paese, determinare la probabilità che possegga almeno un animale domestico fra cane e gatto.

45) In una fabbrica ci sono due macchine:
A, che produce pezzi di cui il 5% è difettoso, e B, i cui pezzi sono addirittura difettosi al 10%.
Se ho qui davanti a me un certo numero di pezzi, e so che i 2/5 di essi provengono dalla macchina A mentre i rimanenti dalla macchina B, potrò determinare la probabilità che uno di essi, scelto a caso, sia buono?
E la probabilità che un pezzo preso a caso, qualora risulti buono, provenga dalla macchina A?

46) Consideriamo un insieme di 1200 famiglie in ognuna delle quali ci siano esattamente 2 figli.
Supponiamo altresì che la probabilità di nascer maschio sia esattamente uguale a quella di nascer femmina (anche se nella realtà c'è un piccolissima differenza).
I) in quante, pressappoco, fra queste famiglie, ci sarà almeno una figlia femmina? a) 600 b) 800 c) 900
II) in quante, pressappoco, fra queste famiglie, il secondogenito è una femmina? a) 400 b) 600 c) 800

47) Quattro fratelli - Anna, Bruno, Carlo e Dario - hanno preso questa mattina i voti seguenti: 4, 5, 7, 9.
Determina la probabilità che la mamma, convocando due di essi a caso, trovi la media dei loro due voti insufficiente (<6).

48) Ci sono 4 carte, una con entrambe le facce Blu, una con entrambe le facce Rosse, le due rimanenti ciascuna con una faccia Blu e l'altra Rossa.
Un mio amico le mette in un cassetto.
Io estraggo con gli occhi bendati una carta, poi mi viene tolta la benda e io vedo il colore di una faccia.
Che probabilità c'è che anche l'altra abbia lo stesso colore?

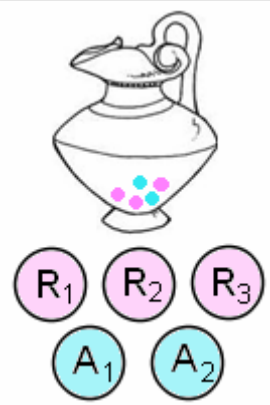
49) Sul ripiano della reception dell'hotel ci sono tre chiavi, fra cui quelle delle stanze di Aldo e di Bruno.
Se Aldo e Bruno scegliessero a caso, senza guardare, che probabilità ci sarebbe che
a) becchino entrambi la chiave giusta?
b) almeno uno dei due becchi la chiave giusta?
c) nessuno dei due becchi la chiave giusta?

50) Un'urna contiene un certo numero x di palline bianche e il numero doppio $2x$ di palline nere.
Se si aggiungessero altre 3 palline bianche, la probabilità di estrarre una "bianca" raddoppierebbe.
Quanto vale x?

51) Un'urna contiene 120 palline; se ne estrae una, se ne osserva il colore,
poi la si reimmette nell'urna e se ne estrae un'altra.
Ripetendo la prova per 400 volte, per 52 volte la pallina risulta blu.
Quante palline blu contiene l'urna?

52) Una moneta è regolare, un'altra è scandalosamente truccata perché porta due "Teste".
Vengono poste in un sacchetto, poi ne si pesca una a caso, la si lancia ed … esce "Testa".
Che probabilità c'è che la moneta pescata sia quella truccata?

53) Se tre persone sono in attesa a uno sportello, che probabilità c'è che il loro ordine nella coda
coincida con l'ordine alfabetico dei cognomi?
a) 1/27 b) 1/9 c) 1/8 d) 1/6



54) Un'urna contiene 3 palline Rosa e 2 Azzurre.
Se se ne estrae una e poi, SENZA aver "reimbussolato"
(= reintrodotto nell'urna) la pallina estratta, se ne estrae una seconda.
Si vuole valutare la probabilità che le due palline estratte siano di colore diverso.

I) Perché non è giusto dire che i casi equipossibili sono RR, RA, AR, AA?

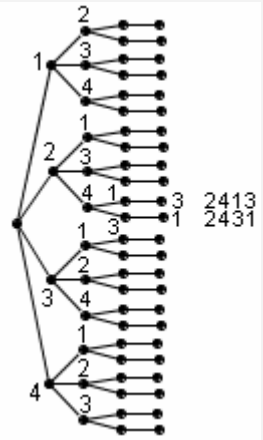
II) Dette R_1, R_2, R_3, A_1, A_2 le palline, uno dei casi equipossibili
è ad esempio A_2R_1, che considereremo distinto da R_1A_2.
Quanti sono in totale i casi equipossibili?

III) Quanti sono in totale i casi favorevoli all'evento "colore diverso"?

IV) Se si fanno 500 prove, quante volte ci aspettiamo pressappoco
che si verifichi l'evento "colore diverso"?

55) Un'urna contiene
quattro biglie numerate:
1, 2, 3, 4.
Le si estrae dall'urna
una dopo l'altra.
Che probabilità c'è che in questo modo
le palline vengano estratte nello
stesso ordine del numero che portano?
a) 1/64 b) 1/27 c) 1/24 d) 1/16

Per contare il numero dei casi possibili
(un caso possibile è, ad esempio,
2-4-3-1)
puoi ricorrere, se lo conosci,
al "Calcolo Combinatorio",
oppure pensare a un
"diagramma ad albero".
Per il 1° numero uscito
c'è un ventaglio di 4 possibilità;
per ognuna di queste 4 possibilità,
si apre un ventaglio di 3 possibilità
per il 2° numero; ecc.

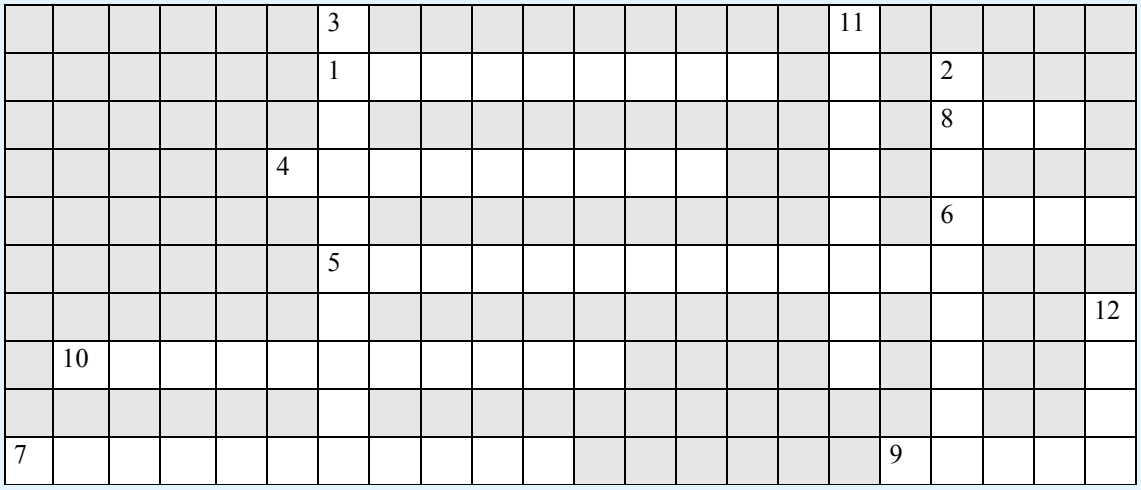


56) In un'urna, ci sono 3 palline Bianche e 2 Nere. Viene estratta una pallina, che viene messa da parte
(NON viene, cioè, "reimbussolata" che significherebbe "rimessa nell'urna"); poi dall'urna con una
pallina in meno viene estratta una seconda pallina. Valutare la probabilità che le due palline estratte siano
a) entrambe bianche b) entrambe nere c) di colore diverso

57) In un'urna, ci sono 3 palline Bianche e 2 Nere. Viene estratta una pallina, che viene poi
rimessa nell'urna (= "reimbussolata"); viene quindi fatta un'altra estrazione.
Valutare la probabilità che le due palline estratte siano
a) entrambe bianche b) entrambe nere c) di colore diverso

58) Un'urna contiene 5 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5. Se ne pesca una e la si mette da parte, poi si sommano
i numeri letti sulle altre. Che probabilità c'è, così facendo, di ottenere un numero
a) pari? b) dispari? c) maggiore di 10? d) maggiore di 14?

59) La “probabilità” di un evento è un numero che misura la facilità che quell’evento ha di verificarsi, in una prova “(1)” ossia “il cui esito sia casuale”.
Essa è data dal rapporto, cioè dal (2), fra il numero dei casi (3) a quell’evento, e il numero dei casi (4), purché però i casi in questione tendano a verificarsi con la stessa “facilità”, cioè siano fra loro “(5)”.
La probabilità può dunque andare da un minimo di (6), quando l’evento è (7), a un massimo di (8) quando invece l’evento è (9).
L’insieme dei casi possibili si dice “insieme universo”, o “spazio degli eventi”, o “spazio (10)”.
Una legge sperimentale afferma che, quando si fa un numero elevato di prove in ciascuna delle quali potrebbe verificarsi, con probabilità *p*, un dato evento, allora il rapporto fra il n° di prove in cui quell’evento si è verificato, e il n° totale delle prove effettuate, tende ad avvicinarsi a *p*: questo enunciato prende il nome di “legge (11) del (12).



RISPOSTE

1) a) 1/3 b) 5/6 c) 1/2 2) $p(\text{maschio}) = 18/(18+9) = 18/27 = 2/3$
3) $100/20\,000\,000 = 1/200\,000 = 0{,}000005$ 4) a) 1/15 b) 1/10 c) 1/6 d) 1 e) 0
5) I 5 casi sono tutt’altro che equipossibili. Non si può rispondere, se non eventualmente dopo aver effettuato una indagine statistica accurata sulla popolazione femminile locale.
6) a) $p(\text{sia per 2 che per 3}) = 3/20$ b) $p(\text{per 2 e/o per 3}) = 13/20$ 7) $9/39 = 3/13$
8) I numeri di 2 cifre sono 90: si hanno 90 “prime cifre” e 90 “seconde cifre”, per un totale di 180 cifre. Ora, le modalità della prova aleatoria assicurano che ognuna di queste 180 cifre può essere ottenuta con la stessa facilità (è proprio così … pensaci bene!).
Ma delle 180 cifre in questione, 19 sono “9” e 9 sono “0”. Perciò $p(9) = 19/180$; $p(0) = 9/180 = 1/20$
9) Non si può rispondere se non attraverso una visione “statistica”, lanciando per moltissime volte quel dado per determinare il rapporto fra il numero di lanci nei quali è uscito un multiplo di 3, e il n° totale di lanci. Infatti il dado non presenta una simmetria tale che si possano ritenere *equi*possibili tutti e 8 gli esiti.
10) $p = 1$; $p = 0$; fra un minimo di 0 e un massimo di 1; impossibile; certo 11) 1; certo; 0; impossibile
12) a) 4/7 b) E’ uguale a 1, perché l’evento è certo 13) a) 2/6 = 1/3 b) 1/5 14) 8/10 = 4/5 15) 24/90 = 4/15
16) E’ corretto, perché una semplicissima analisi porta a stabilire che i due casi (ciascuno dei quali, volendo, è composto di 3 sottocasi …) sono *equi*possibili. Non altrettanto si potrebbe invece dire, ad esempio, per il lancio di una puntina da disegno: anche qui avremmo due casi, ma *non* equipossibili.
17) 1/14 18) 1/10; 1 19) 1/90; 1/11 22) c
23) a) TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC quindi $8 = 2^3$ b) $16 = 2^4$ c) $2^8 = 256$
24) I casi possibili sono 4: TT, TC, CT, CC, e sono tutti *equipossibili*. Il caso favorevole è 1 solo.
$p = 1/4 = 0{,}25 = 25\%$
25) a) 1/2 b) 1/4 c) 1/8
26) Casi possibili: TT, TC, CT, CC. Casi favorevoli a “almeno 1 Testa”: TT, TC, CT. p = 3/4
27) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a “mai Testa”: 1 solo (CCC). p = 1/8 .
28) Casi possibili: 8 (TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC).
Casi favorevoli: 3 (TCC, CTC, CCT). p = 3/8 .
29) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a “almeno 1 Testa”: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT. p = 7/8 .
30) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a “almeno 2 Teste”: TTT, TTC, TCT, CTT. p = 4/8 = 1/2 .

31) a) I casi possibili sono 16 (tutti fra loro *equipossibili*):
TTTT, TTTC, TTCT, TTCC, TCTT, TCTC, TCCT, TCCC, CTTT, CTTC, CTCT, CTCC, CCTT, CCTC, CCCT, CCCC.
I casi favorevoli sono 2: TCTC e CTCT. La probabilità richiesta è 2/16 = 1/8 = 0,125 = 12,5%.
b) I casi favorevoli sono 14 (16 meno i 2 di cui al punto a)). La probabilità richiesta è 14/16 = 7/8.

32) I due casi "punta in su" e "punta in giù" *non* sono, evidentemente, equipossibili.
Le probabilità richieste potranno essere valutate solamente *a posteriori*, dopo aver effettuato un numero elevato di lanci: si porrà $p = numero\ lanci\ che\ hanno\ avuto\ quell'esito / numero\ totale\ lanci$

33) E' del tutto indifferente. L'urna "non ha memoria", la "facilità" di uscita di un dato numero in un'estrazione non è in alcun modo condizionata dagli esiti delle estrazioni precedenti.
La probabilità di uscita del 58 o del 59 sarà identica, nell'estrazione di questa sera.
Certo, PRIMA della lunghissima sequenza di non-uscite del 58, si sarebbe potuto affermare:
"è estremamente poco probabile che il 58 non esca mai nelle prossime 150 o 151 estrazioni".
Ma DOPO che l'evento "raro" della non-uscita per 150 volte di fila si è verificato, "si ricomincia da capo":
la probabilità di uscita del 58 alla prossima estrazione è uguale a quella che il 58 ha avuto, o avrà,
di essere estratto, in una qualsivoglia determinata estrazione nel passato o nel futuro.

34) Ogni sestina fissata ha la stessa probabilità, bassissima, di uscire.
Però, in caso di vincita, il montepremi viene suddiviso in parti uguali fra tutti coloro che hanno indovinato.
Quindi, forse, le sestine più "regolari", come ad esempio la 1 2 3 4 5 6 o la 10 20 30 40 50 60 oppure la 11 22 33 44 55 66, POTREBBERO essere più convenienti, in quanto si può ipotizzare che tendano a essere giocate più raramente. Infatti la mente umana in genere è portata erroneamente a ritenerle meno probabili di quelle più "disordinate", soltanto per il fatto (irrilevante per il comportamento dell'urna) che la loro "individualità" salta agli occhi in modo più marcato, mentre ciò non accade, ad esempio, per una sestina come 22 35 47 59 81 86 .
D'altra parte, occorrerebbe anche valutare l'eventualità che il medesimo ragionamento
venga effettuato da più persone … nella misura in cui ciò dovesse avvenire, giocare tali sestine "regolari"
finirebbe per perdere la convenienza di cui si parlava, e anzi risultare controproducente.
Consiglio: non giocare al Superenalotto, o al limite giocare solo 1 euro (possibilmente con un "socio" ☺).

35) 1/30

36) Dal punto di vista probabilistico, evidentemente nulla cambia se si suppone che Giuseppe e Luca siano rispettivamente il primo e il secondo a cui viene attribuito, per estrazione, il posto.
Ad ogni posto si assegna dunque un numero (da 1 a 20), e si preparano i bigliettini.
Si siede per primo Giuseppe, al posto per lui sorteggiato.
Rimangono 19 sedie libere, fra le quali 1 sola è quella accanto a Giuseppe.
La probabilità che Luca si sieda accanto a Giuseppe è dunque uguale a 1/19
(ossia alla probabilità che, sui 19 biglietti rimanenti dopo la prima estrazione,
venga estratto proprio quello che corrisponde alla sedia accanto a quella dove sta Giuseppe).

37) Intorno al 35% di 240, che è poi 84; chiaramente, la stima è approssimativa!

38) p = 3/36 = 1/12. La somma dei punteggi è 4 nei casi indicati in figura: →

	1	2	3	4	5	6
1			X			
2		X				
3	X					
4						
5						
6						

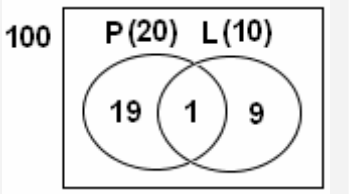
39) a) 1/36 b) 1/18 c) 1/2 d) 5/18 e) 11/36

40) La probabilità dell'evento "esce lo stesso numero su entrambi i dadi" è 1/6.
- I casi possibili sono infatti 36 (1 sul dado "rosso" e 1 sul "blu", 1 sul "rosso" e 2 sul "blu", ecc. ecc.) e quelli favorevoli 6, ma $6/36 = 1/6$;
- oppure: il primo dado che atterra, potrà mostrare un punto qualsiasi, dopodiché c'è una possibilità su 6 che anche il secondo dado mostri proprio quel punto.

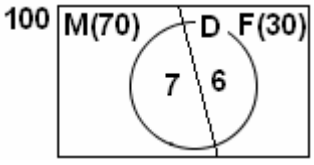
Se una coppia di dadi viene lanciata 1000 volte (1000 è già un numero piuttosto elevato, quindi dovrebbero essere evidenti le implicazioni della "legge empirica del caso"),
la frequenza di uscita di una coppia di esiti uguali si aggirerà intorno a $1/6 \cdot 1000 = 166,66...$ per cui ci aspettiamo di osservare questo evento un numero di volte che non si discosti troppo da tale valore.

41) I) 1/100
II) 71/100
III) 19/100
IV) 9/100
V) 29/100

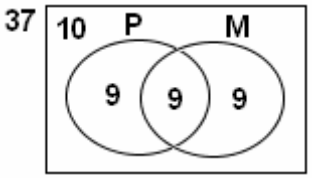
Nel diagramma qui a fianco abbiamo "finto" che gli abitanti della città siano esattamente 100.



42)
a) 13%
b) $7/13 \approx 54\%$

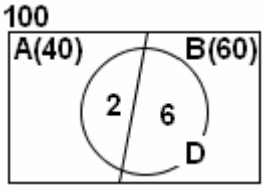


43) I) 9/37
II) 27/37
III) 10/37
IV) 18/37



44) 68%

45) Sì, approssimativamente.
Si può fare un diagramma di Venn,
pensando per fissare le idee a 100 pezzi (figura qui a destra) …
Si trova $p(buono) = 92/100 = 92\%$.



Anche: detto n il numero totale di pezzi che ho davanti a me,
il numero di pezzi prodotti da A
sarà $\frac{2}{5}n$ e il numero di quelli prodotti da B sarà $\frac{3}{5}n$. I pezzi difettosi saranno in totale
$\frac{2}{5}n\cdot\frac{5}{100}+\frac{3}{5}n\cdot\frac{10}{100}=\frac{1}{50}n+\frac{3}{50}n=\frac{4}{50}n=\frac{2}{25}n$ (all'incirca) e quelli buoni saranno quindi $n-\frac{2}{25}n=\frac{23}{25}n$.
La probabilità, pescando a caso un pezzo, di trovarlo buono, si aggirerà intorno a $\frac{\frac{23}{25}n}{n}=\frac{23}{25}=0,92=92\%$
La risposta alla seconda domanda è $38/92 = 19/46 \approx 41\%$.

46) I) p(almeno una figlia femmina) = ¾. Quindi, per la Legge Empirica del Caso,
$$\frac{n°\ famiglie\ con\ almeno\ 1\ figlia\ femmina}{n°\ totale\ famiglie}\approx\frac{3}{4}\ \rightarrow\ \frac{x}{1200}\approx\frac{3}{4}\ \rightarrow\ x\approx 900$$
II) p(secondogenito femmina) = ½. Quindi, per la Legge Empirica del Caso,
$$\frac{n°\ famiglie\ con\ figlio\ secondogenito\ femmina}{n°\ totale\ famiglie}\approx\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \frac{x}{1200}\approx\frac{1}{2}\ \rightarrow\ x\approx 600$$

47) 1/3 48) 1/2

49) a) Indichiamo le 3 chiavi con A, B, C, dove A è la chiave di Aldo e B quella di Bruno.
Sceglie Aldo, sceglie Bruno, la chiave non scelta resta dov'era.
I casi possibili (equipossibili) sono: ABC (unico caso favorevole); ACB; BAC; BCA; CAB; CBA
e la probabilità richiesta è 1/6.
b) 1/2 c) 1/2

50) $\frac{x+3}{x+2x+3}=2\cdot\frac{x}{x+2x}$ $\frac{x+3}{3x+3}=2\cdot\frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}}$ $\frac{x+3}{3(x+1)}=\frac{2}{3}$ $\frac{x+3}{\cancel{3(x+1)}}=\frac{2(x+1)}{\cancel{3(x+1)}}$ $x+3=2x+2\ \rightarrow\ x=1$

51) $52/400 = 0,13$ e $0,13\cdot 120 = 15,6$. Il numero delle palline blu nell'urna sarà di 15 o 16
o comunque non eccessivamente distante da questi valori.

52) 2/3. Se non ne sei del tutto convinto, pensa: su 1000 lanci, pressappoco 250 volte uscirebbe l'unica croce C, circa 250 la testa T1 sul retro della croce, circa 250 volte la testa T2 della moneta con due teste, e circa 250 volte l'altra faccia T3 della stessa moneta. Per 750 volte all'incirca, comparirebbe una testa, e per circa 500 di queste 750 volte essa proverrebbe dalla moneta contraffatta.

53) 1/6

54) I) Perché non sono equipossibili! Essendoci 3 palline Rosa e 2 sole Azzurre, il caso AA, per esempio,
si verifica meno facilmente del caso RR II) 20 III) 12 IV) pressappoco 300

55) 1/24

56) I casi possibili (equipossibili!) sono in numero di $5\cdot 4 = 20$:

B1+B2	B1+B3	B1+N1	B1+N2	B2+B1	B2+B3	B2+N1	B2+N2
B3+B1	B3+B2	B3+N1	B3+N2	N1+B1	N1+B2	N1+B3	N1+N2
N2+B1	N2+B2	N2+B3	N2+N1				

a) i casi favorevoli sono $3\cdot 2 = 6$. La probabilità è $p(2\ Bianche) = 6/20 = 3/10 = 0,3$
b) i casi favorevoli sono $2\cdot 1 = 2$. La probabilità è $p(2\ Nere) = 2/20 = 1/10 = 0,1$
c) i casi favorevoli sono $3\cdot 2 + 2\cdot 3 = 12$. La probabilità è $p(\text{colori diversi}) = 12/20 = 6/10 = 0,6$

57) I casi possibili (equipossibili!) sono in numero di $5\cdot 5 = 25$:

B1+B1	B1+B2	B1+B3	B1+N1	B1+N2	B2+B1	B2+B2	B2+B3	B2+N1	B2+N2
B3+B1	B3+B2	B3+B3	B3+N1	B3+N2	N1+B1	N1+B2	N1+B3	N1+N1	N1+N2
N2+B1	N2+B2	N2+B3	N2+N1	N2+N2					

a) i casi favorevoli sono $3\cdot 3 = 9$. La probabilità è $p(2\ Bianche) = 9/25 = 0,36$
b) i casi favorevoli sono $2\cdot 2 = 4$. La probabilità è $p(2\ Nere) = 4/25 = 0,16$
c) i casi favorevoli sono $3\cdot 2 + 2\cdot 3 = 12$. La probabilità è $p(\text{colori diversi}) = 12/25 = 0,48$.

58) Casi equipossibili: $2+3+4+5=14$, $1+3+4+5=13$, $1+2+4+5=12$, $1+2+3+5=11$, $1+2+3+4=10$
$p(\text{somma pari} = 3/5)$; $p(\text{somma dispari}) = 2/5$ $p(\text{somma maggiore di } 10) = 4/5$; $p(\text{somma maggiore di } 14) = 0$

59) (1) aleatoria (2) quoziente (3) favorevoli (4) possibili (5) equipossibili (6) zero
(7) impossibile (8) uno (9) certo (10) campionario (11) empirica (12) caso

4.6 - Esercizi su probabilità e frequenza relativa

1) Se si lancia un pezzo di legno intagliato a forma di tronco di cono, quanti sono i casi possibili quando il tronco cade a terra e si ferma? Come si potrebbe valutare la probabilità di ciascun esito?

2) Lanciando 1000 volte una moneta truccata, il rapporto teste/croci è risultato uguale a 0,7762 circa.
Quante "teste" e quante "croci" sono uscite?
Che probabilità c'è di ottenere, con un ulteriore lancio, "testa"?

3) I "Giochi di Archimede" sono competizioni matematiche nelle quali lo studente è chiamato a rispondere a un set di 20 quesiti (pensando alla gara *junior*, quella per i più giovani).
Per ciascun quesito sono elencate 5 possibili risposte A, B, C, D, E delle quali una e una sola è corretta.
E' previsto di assegnare 5 punti a ogni risposta giusta, 0 a ogni risposta sbagliata, e 1 a ogni risposta non data.
Un pelandrone che non si degnasse neppure di leggere il testo delle domande, tenderebbe a fare più punti non rispondendo mai oppure crociando a casaccio una risposta per ogni domanda?

4) Un tale mi propone il seguente gioco: "Lanciamo un dado, per un numero di volte che deciderò io.
Se uscirà 1 o 2 più volte di quante volte sarà uscito 3, 4, 5 o 6, ti darò 100 euro, altrimenti mi darai tu 5 euro".
Mi conviene accettare?

5) Si sa che un sacco contiene 120 palline, in parte azzurre, in parte gialle, in parte rosa;
si estraggono una dopo l'altra, con reimbussolamento, 3 palline, e risultano tutte e 3 di colori diversi.
a) Cosa si può ipotizzare sul numero totale di palline dei tre colori?
b) E se si facessero 400 estrazioni ottenendo 90 azzurre, 196 gialle, e 114 rosa?

6) Se si lancia 1000 volte una coppia di monete, quante volte ci si aspetta pressappoco che mostrino 2 "Teste"?

7) Utilizza il foglio elettronico per simulare 300 lanci di una coppia di dadi.
Per ogni singolo lancio simulato, il foglio elettronico dovrà calcolare la somma dei due punteggi.
E per ogni somma ottenibile (da 2 fino a 12), dovrà determinare la frequenza assoluta e la frequenza relativa.
Tu confronterai infine quest'ultima con la probabilità *a priori*.

Tieni comunque presente che i numeri "casuali" generati dal computer non sono veramente casuali, ma sono piuttosto *pseudo*casuali, ossia hanno l'*apparenza* della casualità.

Per motivi di impaginazione, una scheda sui numeri pseudocasuali nel foglio elettronico è riportata a pag. 496.

8) Si può dare per scontato che sia uguale la probabilità di nascer maschio e di nascer femmina?

9) In Inglese si parla, ad esempio, di "3:5 (three to five) *odds in favor*", in relazione a un evento, per affermare che quell'evento si verifica mediamente 3 volte per ogni 5 volte che non si verifica.
Analogamente, dire che le "*odds against*" per un evento sono 4:1 significa sostenere che in media l'evento NON si presenta 4 volte per ogni volta che si presenta.
Ciò premesso, nel lancio di un dado, quante sono le "*odds in favor*" per l'uscita della faccia 3?
Se un evento è tale che ha $x:y$ "*odds against*", qual è la sua probabilità?

RISPOSTE

1) 3: faccia circolare maggiore in alto, faccia circolare minore in alto, tronco appoggiato sulla superficie laterale.
La probabilità di ciascuno dei tre esiti si può valutare soltanto lanciando il tronco tantissime volte e annotando la frequenza relativa di ognuno dei tre esiti.
2) 437 teste, 563 croci; valutabile in $43{,}7\%$ circa
3) E' indifferente. Rispondendo a caso, la probabilità di azzeccare la risposta giusta a una domanda fissata è 1/5 per cui, sulle 20 domande, possiamo aspettarci intorno a 4 risposte esatte per un totale di circa $4 \cdot 5 = 20$ punti; non rispondendo, si totalizzano $20 \cdot 1 = 20$ punti.
4) No, perché certamente l'avversario deciderà che il dado vada lanciato *tantissime* volte …
e con tantissimi lanci, è praticamente certo che la circostanza a me favorevole non si verificherà.
5) a) Praticamente non si può ipotizzare nulla: 3 estrazioni sono decisamente troppo poche.
Sembrerebbero suggerire un certo "equilibrio" fra il numero delle azzurre, delle gialle e delle rosa, ma fino a un certo punto: davvero, 3 estrazioni sono pochine.
b) 400 è già un buon numero. Le frequenze relative sono
$a = 90/400 = 0{,}225$; $g = 196/400 = 0{,}49$; $r = 114/400 = 0{,}285$
e portano a presupporre che il numero complessivo delle azzurre, delle gialle e delle rosa sia in proporzione; quindi la composizione dell'urna potrebbe essere di 27 azzurre, 59 gialle e 34 rosa … o pressappoco.
6) Un numero di volte non molto distante da 250. Infatti la probabilità dell'evento è 1/4.
7) Somme possibili: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12. Probab.: 1/36 2/36 3/36 4/36 5/36 6/36 5/36 4/36 3/36 2/36 1/36
8) No. Non è detto che i due casi siano equipossibili. In effetti, si osserva, in tutte le parti del globo, una leggera prevalenza delle nascite maschili rispetto a quelle femminili.
9) 1:5; $p = y/(x+y)$

4.7 - Speranza matematica

Per il discorso che vogliamo iniziare è essenziale tener presente cosa afferma la "legge empirica del caso":

quando si ripete per "molte" volte una prova *aleatoria* (= legata al caso),
la **frequenza relativa** di un esito, cioè il rapporto

$$f_r = \frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}},$$

si avvicina "molto" alla **probabilità a priori** di quell'esito, calcolata tramite il rapporto

$$p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

Insomma, è $\boxed{f_r = \frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}} \approx p}$

da cui $\boxed{\textbf{numero di prove che hanno avuto quell'esito} \approx p \cdot \textbf{numero totale di prove}}$

Supponiamo ad esempio di estrarre una carta da un mazzo da scopa.

La probabilità che sia di "cuori", calcolata come $p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$, è $p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

Ma allora, se ripetiamo l'estrazione per molte volte, diciamo ad esempio per 2000 volte,
sempre reinserendo la carta estratta nel mazzo e mischiando prima di effettuare un'altra estrazione,
il numero di volte in cui uscirà "cuori" *si aggirerà intorno a*, *non differirà troppo da*

$$p \cdot \text{numero totale di prove} = \frac{1}{4} \cdot 2000 = 500.$$

E andiamo ora a parlare di "*speranza matematica*".

Ci conviene partire immaginando dapprima un gioco che nella realtà è davvero molto raro:
un gioco nel quale si possa soltanto vincere e non si possa mai perdere.

Armandoci di fantasia, supponiamo ad esempio che ci sia una famiglia con 4 figlioli, molto, ma molto povera.
Soldi ce ne sono davvero pochissimi!
Tuttavia, la mamma vuole dare qualche vizietto ai suoi piccoli, e anche scherzare un poco con loro.
Si decide, ogni sera dopo cena, di estrarre una pallina da una scatola contenente 10 palline numerate da 1 a 10.
Se uscirà una delle palline dalla 1 alla 4, il figlio corrispondente (ordinandoli dal più grande al più giovane)
vincerà 2 euro, che potrà ad esempio investire in un succulento gelato … altrimenti, nessuno avrà niente.

Cosa ci aspettiamo che accada protraendo il gioco per molto tempo, diciamo per 300 giorni?
Ad ogni estrazione, per ciascun ragazzo, la probabilità di aggiudicarsi i 2 euro sarà di 1/10 (le palline sono 10).
Allora, per quanto ricordato all'inizio riguardo alla legge empirica del caso,

ognuno dei 4 ragazzi vincerà i suoi 2 euro per un numero di volte pressappoco uguale a $\frac{1}{10} \cdot 300 = 30$.

E quindi, in quei 300 giorni, più o meno, ciascuno si aspetta di incassare $\overbrace{30}^{\frac{1}{10}\cdot 300} \cdot 2 = 60$ euro.

In media, qual è l'aspettativa giornaliera di ognuno dei figli?

L'aspettativa giornaliera è di vincere euro $\frac{\overbrace{30}^{\frac{1}{10}\cdot 300} \cdot 2}{300} = \frac{1}{10} \cdot 2 = 0,20$

Questo esempio ci fa capire che **se moltiplichiamo la probabilità** (nel nostro caso, 1/10) **di una vittoria in una singola "prova aleatoria" per la cifra** (2 euro, per i nostri ragazzi) **che si spera di vincere nella prova**, **otteniamo quella somma di danaro che in media si vincerebbe ad ogni prova, qualora si facesse un numero molto alto di prove**.

Bene! **Definiamo "speranza matematica" o "valore atteso"**
(in Inglese: mathematical expectation, expected value) di una certa vincita S,
il prodotto della vincita stessa per la probabilità che essa ha di realizzarsi in una singola prova:

$$\boxed{E = \textit{speranza matematica}} = \boxed{pS}$$

La "speranza matematica" è la vincita che mediamente si avrebbe in una singola prova,
se si effettuasse un numero elevato di prove.

Nella realtà concreta, ben raramente ci viene offerto di poter vincere qualcosa senza la possibilità di perdere.
Le situazioni più frequenti sono quelle in cui si hanno due contendenti … ma aiutiamoci con un altro esempio.

Supponiamo che una *macchinetta mangiasoldi* sia programmata per comportarsi nel modo seguente.

Ad ogni giocata, si può *vincere* (e ciò avviene con probabilità $1/10$: ossia, si vince mediamente una volta ogni 10 giocate; insomma, su di un gran numero di giocate, il numero di vincite non si discosta molto dal numero delle giocate, diviso per 10); oppure si può *perdere*, con probabilità che sarà uguale a $1-1/10=9/10$ (sappiamo che la somma della probabilità di un evento con la probabilità dell'evento contrario è sempre 1).

Ogni giocata costa 1 euro, ossia, quando si perde, si perde la puntata di 1 euro. Quando si vince, il guadagno netto è di 5 euro (il giocatore incassa 6 euro, quindi gli viene restituito l'euro della puntata, più 5 euro di vincita netta).

Domanda: se faccio 1000 giocate, cosa posso aspettarmi all'incirca, da un gioco di questo tipo?

Ragioniamo:

poiché ad ogni giocata la prob. di vincere è 1/10, con le 1000 giocate vincerò pressappoco $\frac{1}{10}\cdot 1000=100$ volte.

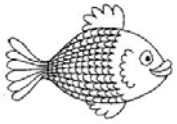
E poiché in caso di vincita il guadagno netto è di 5 euro, la vincita sarà in totale, all'incirca, di $100\cdot 5=500$ euro.

Nel frattempo, però, avrò perso per circa $\frac{9}{10}\cdot 1000=900$ volte;

per una perdita complessiva che si aggirerà intorno a $900\cdot 1=900$ euro.

In totale, il mio bilancio finale dovrebbe collocarsi intorno ai $\underbrace{\frac{1}{10}\cdot 1000\cdot 5}_{500}\ \underbrace{\frac{9}{10}\cdot 1000\cdot(-1)}_{-900}=-400$ euro.

E ciò significa che in media, ogni giocata mi avrà portato euro $\frac{-400}{1000}=-0{,}40$:



ossia mi avrà generato una perdita di 40 centesimi (bel pesciolino che sono!).

Proviamo a generalizzare.

Se in una singola prova si può verificare uno e uno solo fra più eventi incompatibili $E_1, E_2, \dots, E_k$ di rispettive probabilità $p_1, p_2, \dots, p_k$, e tali eventi mi apportano rispettivamente una somma di denaro, positiva o negativa, $S_1, S_2, \dots, S_k$, allora, in n prove, se n è grande, E_1 si verificherà all'incirca $n\cdot p_1$ volte, E_2 circa $n\cdot p_2$ volte, ecc., per cui la somma di denaro che me ne verrà si aggirerà intorno a

$$n\cdot p_1\cdot S_1+n\cdot p_2\cdot S_2+\dots+n\cdot p_k\cdot S_k=n\cdot(p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+\dots+p_k\cdot S_k).$$

In media, in ogni singola prova avrò vinto o perso la somma

$$\frac{\cancel{n}\cdot(p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+\dots+p_k\cdot S_k)}{\cancel{n}}=p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+\dots+p_k\cdot S_k.$$

Bene: la quantità $\boxed{E=p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+\dots+p_k\cdot S_k}$ viene detta

la mia SPERANZA MATEMATICA (mathematical expectation) in quel gioco, ed esprime, dunque, quello che posso aspettarmi mediamente ad ogni prova, se ripeto per molte volte una prova di questo tipo.

ESEMPIO

Mi viene proposto il gioco seguente: si prende un mazzo di carte da scopa, e se ne estrae una a caso.
Se è una figura vinco 70 centesimi, se non è una figura ma è una carta di fiori o di picche ne vinco 50, soltanto se è il "settebello" (7 di quadri) perdo 16 euro. Qual è la speranza matematica del gioco?
Giocando molte volte, a lungo andare finirei per vincere o per rimetterci?

$$p(\textit{figura})=\frac{12}{40}=\frac{3}{10};\quad p(\textit{non figura, di fiori o picche})=\frac{14}{40}=\frac{7}{20};\quad p(\textit{settebello})=\frac{1}{40}$$

$$p(\textit{una delle altre carte})=1-\frac{3}{10}-\frac{7}{20}-\frac{1}{40}=\frac{13}{40}\quad(\textit{comunque è inutile calcolarla, perché tanto poi verrà moltiplicata per } 0)$$

$$\textit{speranza matematica}=\frac{3}{10}\cdot 0{,}70+\frac{7}{20}\cdot 0{,}50+\frac{1}{40}\cdot(-16)+\frac{13}{40}\cdot 0=0{,}21+0{,}175-0{,}4+0=-0{,}015$$

La speranza matematica, che mi dice quanto devo mediamente aspettarmi, pressappoco, da una singola prova, se effettuo un numero elevato di prove, è negativa, seppure di poco.
Devo attendermi, se mi ostino a giocare moltissime partite, di finire in perdita. Ad esempio, in 10000 partite, dovrei ritrovarmi pressappoco a quota $-0{,}015\cdot 10000=-150$ *euro*. …Pressappoco, s'intende!

Un GIOCO si dice "EQUO" se la speranza matematica di ogni giocatore è 0.

Ad esempio, se A e B prendono un mazzo di carte da scopa ed estraggono una carta, con l'accordo che A: vince 6 euro se esce "cuori", vince 3 euro se esce "quadri", ne perde 5 se esce "fiori" e ne perde 4 con "picche", la speranza matematica di A sarà

$$\textit{speranza matematica del giocatore } A = \frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{4}\cdot(-4) = 0$$

mentre ovviamente quella di B avrà il valore opposto e quindi sarà anch'essa nulla. Questo gioco è *equo*: A e B, se effettuassero un numero molto elevato di partite, non si ritroverebbero molto lontani dalla parità.

Nei "**giochi organizzati**" (**Lotto, Casinò, lotterie** …) chi vuole concorrere paga una somma iniziale S_0 (la puntata al Lotto o al Casinò, il costo del biglietto della lotteria …) sperando in una vincita S, che sarà allora una vincita "lorda", in quanto il "netto" si otterrà sottraendole la somma S_0 inizialmente investita.

Vediamo come si può riscrivere la formula per la speranza matematica in questa situazione "classica".
Sia p la probabilità di vittoria. La probabilità di perdere varrà allora (evento contrario) $1-p$. E avremo:

$$\boxed{\textit{speranza matematica}} = p\cdot(S - S_0) + (1-p)\cdot(-S_0) = pS \cancel{- pS_0} - S_0 \cancel{+ pS_0} =$$

$$= \boxed{pS - S_0} \quad S = \textit{vincita lorda};\ S_0 = \textit{somma che si paga per giocare}$$

ATTENZIONE! In questa formula specifica per i giochi organizzati compare la vincita LORDA, mentre nella formula generale $\boxed{p_1\cdot S_1 + p_2\cdot S_2 + \ldots + p_k\cdot S_k}$ le somme indicate vanno intese come vincite, o perdite, NETTE.

ESEMPIO
Alla roulette, ci sono 37 numeri su cui puntare (da 0 a 36).
Se si punta su di un numero singolo, in caso di vincita viene consegnato al giocatore un premio uguale alla somma giocata, moltiplicata per 36 (quindi, la vincita netta è uguale a 35 volte la posta giocata).
Quanto vale la speranza matematica (supponendo di puntare 1 euro)?

$$\textit{speranza matematica} = pS - S_0 = \frac{1}{37}\cdot 36 - 1 = \frac{36}{37} - 1 = -\frac{1}{37} \approx -0{,}027$$

La speranza matematica è quindi negativa. Il gioco NON è equo. Sarebbe equo se in caso di vincita venisse consegnato al giocatore un premio lordo uguale a 37 volte la puntata, anziché solo 36.

Però il gioco non è nemmeno troppo "disonesto": se la speranza matematica, per la puntata di 1 euro, è uguale a circa $-0{,}027$, vuol dire che di quell'euro mediamente a ogni puntata è come se il giocatore ne recuperasse $1-0{,}027 = 0{,}973$ quindi il $97{,}3\%$; il guadagno del "banco" si limita mediamente al $2{,}7\%$ di ogni puntata.

Il Lotto, ad esempio, è molto più rapace nei confronti del giocatore.
Supponiamo si punti sul "numero secco" o "ambata".
La probabilità di vincere è $p = 1/18$; in caso di vincita, lo Stato paga però soltanto 11,232 volte la puntata (e da questa vincita "lorda" occorre poi sottrarre la puntata stessa per ottenere la vincita netta).

Allora la speranza matematica è $pS - S_0 = \frac{1}{18}\cdot 11{,}232\,S_0 - S_0 = -0{,}376\,S_0$.

Per le altre combinazioni del Lotto il discorso cambia poco (nel caso dell'ambo) o peggiora di molto (terno, ecc.).

Il Casinò comunque è più pericoloso, perché il poter effettuare immediatamente nuove puntate, circondati da altri giocatori assatanati, in un ambiente dal fascino perverso, e il ricevere immediatamente l'eventuale premio, tutto ciò fa sì che il giocatore si senta spinto a continuare a rischiare, anche in caso di vincita, fino a quando, per gli alti e bassi della sorte, si ritrova a perdere tutto quello che ha in tasca.



La *persona intelligente* si tiene BEN LONTANA dal
gioco d'azzardo! ☹

Ancora qualche osservazione sui "giochi organizzati", quelli nei quali è

$$\boxed{\textit{speranza matematica}} = \boxed{pS - S_0},\quad \textit{con } S = \textit{vincita lorda};\ S_0 = \textit{somma che si paga per giocare}$$

In questi casi, il gioco è equo se è $pS - S_0 = 0$, ossia se
la posta S_0 da pagare per partecipare è uguale alla speranza matematica pS della vincita lorda: $S_0 = pS$.

L'uguaglianza precedente si potrebbe pure riscrivere come $S = \frac{S_0}{p}$: questo rapporto $\frac{S_0}{p} = S_0\cdot\frac{1}{p}$
è dunque il valore che dovrebbe avere la vincita lorda in un gioco equo nel quale la probabilità di vincere sia p.
Ad esempio, se, come nella puntata sul "numero secco" al Casinò, si avesse una probabilità di 1/37 di vincere, affinché il gioco sia equo la vincita lorda dovrebbe essere 37 volte la posta.

Nella stragrande maggioranza dei casi è invece $pS - S_0 < 0$, ossia $S_0 > pS$,

e per valutare quanto il gioco sia sfavorevole al concorrente potremo calcolare il rapporto $\frac{pS}{S_0} < 1$

fra speranza matematica della vincita lorda e posta in gioco:
quanto più tale rapporto è *basso*, tanto più il gioco sarà *disonesto nei riguardi del concorrente*;
quanto più tale rapporto sarà invece alto, ossia vicino (per difetto) a 1, tanto più il gioco sarà clemente.

Avevamo osservato che la puntata sul numero singolo al Casinò non è, in sé, troppo rovinosa per il giocatore;

e in effetti, se andiamo a calcolare $\frac{pS}{S_0}$, troviamo qui $\frac{\frac{1}{37} \cdot 36 S_0}{S_0} = \frac{36}{37} \approx 0{,}973$ che è un valore assai prossimo a 1.

Tale valore ci dice "quale parte della sua puntata recupera, mediamente, il giocatore, a ogni giocata".
Tradotta il percentuale, è più espressiva: $0{,}973 = 97{,}3\%$ per cui il giocatore di Casinò, quando punta sul numero singolo, mediamente a ogni puntata riesce a trattenere per sé il $97{,}3\%$ della somma investita.
Il rimanente $2{,}7\%$ lo incamera senza pietà il Casinò. Il quale, tramite questa e le altre tipologie di puntata alla roulette, e tramite gli altri svariati suoi giochi, alle spese dei merli fa sontuosi guadagni.

Il rapporto $\frac{pS}{S_0} = \frac{\textit{speranza matematica della vincita lorda}}{\textit{somma puntata}}$ è chiamato da alcuni "**indice di equità**".

A seconda che sia <1, =1, o >1 il gioco è da ritenersi svantaggioso, equo oppure vantaggioso.

Evidentemente, l'ultimo caso nei "giochi organizzati" non si verifica mai, o meglio: si verifica solo se ci mettiamo *dal punto di vista dello Stato* nel Lotto e similari, *o del Casinò* nella roulette e similari: insomma, se il giocatore al quale pensiamo è l'organizzatore del gioco: lui sì, che ne trae un lauto vantaggio!

I NUMERI CASUALI (O MEGLIO: PSEUDOCASUALI) E IL FOGLIO ELETTRONICO

E' possibile ordinare a un foglio elettronico di generare numeri *casuali*, o meglio "PSEUDOcasuali": essi infatti hanno l'*apparenza* della casualità, ma in realtà non sono realmente casuali in quanto sono costruiti tramite un algoritmo a partire da un valore iniziale, detto "seme", quello *sì* - ma *solo quello* - da ritenersi casuale (si tratta, di norma, del numero di secondi trascorsi da una certa data del passato).

Digitando in una cella
= CASUALE() [notare la coppia di parentesi senza niente all'interno!]
si genera, in quella cella, un numero casuale con la virgola *x* che può andare da 0 (incluso) a 1 (escluso):
$0 \le x < 1$

Questo numero cambierà ogniqualvolta nel foglio elettronico un dato verrà inserito, o cancellato (o anche semplicemente se si preme, posizionati in una cella vuota, il tasto CANC; oppure ancora, premendo il tasto-funzione F9 in alto sulla tastiera); come pure, ad ogni riapertura del file.

E volendo un numero casuale fra 0 (compreso) e 6 (escluso)?
Beh, basterebbe scrivere
= CASUALE()*6

E fra 1 (compreso) e 15 (escluso)?
= CASUALE()*14+1

E se volessimo simulare il lancio di un dado, quindi ci servisse un numero INTERO casuale fra 1 e 6?
In questo caso potremmo ricorrere a una combinazione fra la funzione CASUALE e la funzione INT.
INT tronca un numero all'intero più vicino per difetto, quindi, ad esempio, INT(3,8) = 3
Allora la formula
= INT(CASUALE()*6+1)
ci fornirà per l'appunto un intero che potrà valere, con ugual probabilità, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Infatti, = CASUALE()*6 genera un numero con la virgola che può andare da 0 (compreso) a 6 (escluso); aggiungendo 1 si ottiene un numero con la virgola che può andare da 1 (compreso) a 7 (escluso); dopodiché la funzione INT, troncando il numero ottenuto, lo fa diventare un intero compreso fra 1 e 6.

Analogamente, il lancio di una moneta potrà essere simulato da
= INT(CASUALE()*2)
Il risultato dell'applicazione della formula potrà essere il numero 0, oppure il numero 1:
bene, "0" potrà essere interpretato come "Testa" e "1" come "Croce", o viceversa.

Anche i vari linguaggi di programmazione permettono di generare numeri pseudocasuali.

ESERCIZI sulla speranza matematica

1) Alla "roulette francese" ci sono 37 numeri (0, 1, 2, … , 36). Quelli da 1 a 36 sono colorati metà in rosso, metà in nero. Lo 0, invece, non è considerato né "rosso" né "nero". Se si punta sul rosso, o sul nero, insomma sul "colore", e si indovina, si viene compensati con una vincita netta uguale alla somma puntata; se, avendo giocato il "colore", esce "zero", la regola è piuttosto complicata e può variare da Casinò a Casinò. Certe case da gioco consentono in questo caso al giocatore di riavere indietro metà della somma puntata. Calcolare, se così stanno le cose, la speranza matematica di una giocata di 1 euro sul "rosso" o sul "nero".

2) Per ringraziarmi dell'aiuto prestato nei compiti di matematica, i compagni di classe mi offrono un premio in euro uguale al quadrato del numero che otterrò dal lancio di un dado.
Se preferissi commutare questa offerta in una cifra certa, quanti euro potrei domandare loro?

3) Se si gioca un "terno" al Lotto, in caso di vincita lo Stato versa al giocatore la somma giocata, moltiplicata per 4500. D'altra parte, si può dimostrare che la probabilità di indovinare, se si gioca un terno, è 1/11748. Calcolare la speranza matematica del gioco, se si puntano 10 euro.

4) Mi viene proposto il seguente gioco: si lanciano due monete, e se esce: Testa su entrambe, vinco 20 euro; Croce su entrambe, vinco 10 euro; esiti differenti, perdo 15 euro. Mi conviene accettare?

5) Completa la tabella seguente:

Giocata	Vincita lorda (coefficiente)	Probabilità p	Sper. mat. (%)	Indice di eq. (%)
Estratto semplice	11,232	1/18		
Ambo	250	1/400,5		
Terno	4500	1/11748		
Quaterna	120000	1/511038		
Cinquina	6000000	1/43949268		

6) I) Calcola la speranza matematica:
   a) dell'esito del lancio di un dado
   b) del punteggio ottenuto lanciando 2 dadi e sommando
   c) del punteggio ottenuto lanciando due dadi e moltiplicando

   II) Se lancio una coppia di dadi per 1000 volte, e ogni volta annoto il prodotto dei due numeri ottenuti, quanto varrà all'incirca la somma di questi prodotti?

7) Un amico mi sfida al gioco seguente:
si estrae una carta da un mazzo da scopa, e se è 1 asso gli do io 10 euro, altrimenti mi dà 1 euro lui.
Calcolare la mia speranza matematica in questo gioco.
Se accettassi ed effettuassi 1000 partite, quanto mi aspetto di guadagnare o perdere?

8) Se un benefattore mi offre in regalo 30 euro certi, o, in alternativa, 180 euro ma solo se lanciando un dado uscirà "6", verifica che in entrambi i casi la mia speranza matematica sarebbe la medesima.

RISPOSTE

1) $1\cdot\frac{18}{37}+(-1)\cdot\frac{18}{37}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{37}=-\frac{1}{74}\approx-0,0135$ 2) $\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot4+\frac{1}{6}\cdot9+\frac{1}{6}\cdot16+\frac{1}{6}\cdot25+\frac{1}{6}\cdot36=\frac{1}{6}\cdot91\approx15\ euro$

3) Con la formula semplificata: $sper.mat.=\frac{1}{11748}\cdot45000-10=-6,16956...$

4) $p(\mathrm{TT})=\frac{1}{4};\ p(\mathrm{CC})=\frac{1}{4};\ p(\mathrm{TC}\vee\mathrm{CT})=\frac{1}{2}$ $sper.mat.=\frac{1}{4}\cdot20+\frac{1}{4}\cdot10+\frac{1}{2}\cdot(-15)=0$
Il gioco è equo: alla lunga, si può perdere o si può vincere,
ma comunque con sbalzi limitati rispetto alla situazione finanziaria iniziale.

5) Speranze matematiche (arrotondate ai centesimi): −37,60% −37,58% −61,70% −76,52% −86,35%
Indici di equità: 62,40% 62,42% 38,30% 23,48% 13,65%

6) I) a) 3,5 b) 7 c) 12,25 II) Non dovrebbe discostarsi molto da $12,25\cdot1000=12250$

7) $p(asso)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10};\quad p(non\ asso)=\frac{9}{10}$. La mia speranza matematica nel gioco è $\frac{1}{10}\cdot(-10)+\frac{9}{10}\cdot1=-\frac{1}{10}$
e, se giocassi 1000 partite, mi aspetto di perdere una cifra intorno ai 100 euro.

8) $\overbrace{\underbrace{1}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{30}_{\text{vincita}}}^{\text{scelta a)}}=\overbrace{\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{180}_{\text{vincita}}}^{\text{scelta b)}}$

4.8 - Probabilità soggettiva

Nella vita di tutti i giorni chiunque, più o meno consapevolmente, effettua valutazioni di probabilità *senza* ricorrere NÉ al calcolo del rapporto *n° casi favorevoli/n° casi possibili*, NÉ all'osservazione di una *frequenza*.

Pensiamo ad esempio a una partita di calcio fra due squadre improvvisate all'oratorio:
non ha alcun senso pensare ad un insieme di casi equipossibili, ma non ha neppure senso una visione statistica,
visto che quelle due particolari squadrette non si sono mai incontrate in precedenza!
Però bene o male conosciamo l'abilità dei singoli giocatori, per cui *un'idea* della probabilità *ce la potremo fare*.
Che probabilità c'è che le azioni di una data ditta non diminuiscano di valore nei prossimi 6 mesi?
Quanto è probabile che la cuginetta Anna si separi dal fidanzato entro la fine di quest'anno?

Nel passare in rassegna, al paragrafo 3, i vari tipi di "probabilità",
avevamo presentato brevemente la probabilità "soggettiva" nel modo che riportiamo qui di seguito.

INTERPRETAZIONE 1)
La probabilità "soggettiva" di un evento è a/b se un soggetto "coerente" G è disposto a pagare subito la somma a per ricevere in futuro la somma b (con un guadagno netto, quindi, uguale a $b-a$) nel caso che l'evento si verifichi.
"Coerente" significa che lo stesso soggetto G deve essere disposto in qualsiasi momento a scambiarsi di ruolo con l'altro giocatore G' … Ma cosa fa l'altro giocatore? Riceve tanto per cominciare la somma a, ed è disposto a pagare b se l'evento si verifica: quindi anche G, per essere coerente, deve essere disposto a incassare subito la somma a per pagare in un futuro la somma b (con una perdita uguale in valore assoluto a $b-a$) se l'evento si verifica.

INTERPRETAZIONE 2)
Anche, in modo del tutto equivalente:
la probabilità di un evento E è uguale a s/S se per me è del tutto indifferente l'offerta, da parte di un benefattore,

- ♪ di una somma s certa, che mi viene pagata in ogni caso
- ♫ oppure in alternativa di una somma S, che però mi verrà data solo se l'evento E si verificherà.

Cerchiamo di chiarire meglio il discorso facendo degli esempi.
Dunque **io valuto soggettivamente uguale a 1/4 la probabilità di un evento se sono disposto a pagare 1 euro, per incassare 4 euro nel caso l'evento si verifichi (in questo caso mi verrebbe restituito il mio euro, e me ne verrebbero pagati altri 3 di vincita netta); però sarei anche disposto a mutare la mia scommessa nella seguente: incasso 1 euro, ma lo restituirò e in più pagherò 3 euro (in totale: sborserò 4 euro) se l'evento si verificherà.**

Ma allora **valutare soggettivamente in 1/4 la probabilità di un evento vuol dire, in fondo, ritenere che la facilità di verificarsi di quell'evento sia paragonabile alla facilità che si avrebbe di estrarre una pallina Rossa da un'urna contenente 1 Rossa e 3 Nere, per un totale di 4 palline**:
anche di fronte a quest'urna, infatti, sarebbe equo offrirsi di pagare subito la somma di 1 euro nella prospettiva di incassare 4 euro (con un guadagno netto di 3) qualora, estraendo una pallina, esca una Rossa
(infatti, su 1000 estrazioni con reimbussolamento, è previsto di pescare una Rossa all'incirca 250 volte, vincendo dunque 750 euro netti, e una Nera 750 volte circa, perdendo circa 750 euro: si resterà pressappoco alla pari).

Posso anche vederla in questo modo: valutare uguale a 1/4 la probabilità dell'evento significa che se un (improbabile! ☺) benefattore mi offre di regalarmi 4 euro nel caso l'evento si verifichi, io posso dirgli: guarda, pagami 1 euro comunque vadano le cose, e siamo a posto.

Immagina, anche in questa ottica, di effettuare 1000 prove:
vedrai che la tua situazione finanziaria non varierebbe di molto se tu facessi una scelta piuttosto che l'altra.
Su 1000 prove, se fai la scelta a) (il benefattore ti dà 4 euro ogni volta che l'evento si verifica),
vincerai pressappoco 250 volte con un guadagno netto di $250\cdot 4=1000$ euro.
E se fai la scelta b) (1 euro per ogni prova, qualunque sia l'esito) il tuo guadagno netto sarà di $1000\cdot 1=1000$ euro.
Nulla cambia.

Osserva anche questo: la scelta a) e la scelta b) hanno la stessa "speranza matematica"! (vedi paragrafo precedente).

Infatti $\overbrace{\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{4}_{\substack{\text{vincita}\\\text{netta}}}}^{\text{scelta a)}}=\overbrace{\underbrace{1}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{1}_{\substack{\text{vincita}\\\text{netta}}}}^{\text{scelta b)}}$.

Verifica tu stesso che nell'interpretazione 1), in cui non compare il fantomatico e leggendario benefattore ma ci sono due contendenti, i giocatori G e G', la speranza matematica di ciascun giocatore è 0.

Qualcuno potrebbe obiettare: "Ma che senso ha chiamare in causa la speranza matematica, quando l'evento di cui ci si sta occupando non è un evento ripetibile?"… Giusto; tuttavia, se consideriamo il fatto che assegnare, per esempio, probabilità soggettiva 1/4 ad un evento, significa assegnargli lo stesso grado di "facilità" che avrebbe l'estrazione di una pallina Rossa da un'urna con 1 sola Rossa e 4 palline in totale, ecco che **il concetto di "speranza matematica"** torna ad avere un senso; e in effetti, **può aiutarci a decidere** rapidamente **sull'equivalenza o meno di due situazioni.**

IL MONDO INFIDO E TRISTE DELLE SCOMMESSE



… Come sono furbo!
Quest'anno ho perso solo 10000 euro!
Un altro ne avrebbe persi minimo 20000!

Cosa vuol dire, in una scommessa sulle corse di cavalli, che Fulmine è dato 5 contro 3?
Vuol dire che la probabilità di Fulmine vincente è valutata, soggettivamente, uguale alla probabilità che si avrebbe di estrarre una pallina Rossa da un'urna con 5 palline Rosse e 3 Nere, per un totale di 8 palline.
Quindi

parlare di "vittoria di Fulmine data 5 CONTRO 3"
equivale ad attribuire a Fulmine una probabilità di vincere di
$\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}=62,5\%$
come se ci fosse 1 urna con 5 palline Rosse e 3 nere (8 in totale)
e si ritenesse la probabilità di vittoria di Fulmine uguale
alla probabilità di estrarre una pallina Rossa da quest'urna.



In casi come quello dell'es. precedente si suole anche dire che la "quotazione" di Fulmine è 5/3 (5 su 3, 5 contro 3).
Attenzione, però!
"Quotazione" r non vuol dire "probabilità" p: per passare dalla "quotazione" (5/3 nell'esempio dato) alla "probabilità", si deve applicare la formula $p=r/(r+1)$ (dimostralo!). La "quotazione" è una specie di … "probabilità relativa".

L'avverbio "contro", nelle scommesse, è utilizzato anche quando si specifica quanto si incasserebbe, a fronte di una data puntata (solitamente si prende la puntata unitaria: 1 euro), nel caso l'evento pronosticato si verifichi.
Ad esempio, **nei paesi europei ad esclusione della Gran Bretagna, si parla di pagare "4 contro 1" un evento per indicare che "il banco", ossia l'organizzazione che gestisce le scommesse, se lo scommettitore punta 1 euro su di un evento, promette di pagargli una somma LORDA di 4 euro nel caso l'evento si verifichi**
(somma lorda: quindi il giocatore incasserebbe 4 euro ma al netto vincerebbe $4-1=3$ euro).

il "Partito della Pagnotta" vincente alle elezioni
è pagato 200 CONTRO 1 se chi punta 1 sulla vittoria di quel partito
ne incassa 200 (guadagno netto 200 – 1=199) se l'evento si realizza

Le QUOTAZIONI ALLE SCOMMESSE (= le quote che vengono pagate dal *banco* per ogni euro pagato dallo *scommettitore*) **sono espresse in modo differente nelle varie zone geografiche.**

- Nell'**EUROPA CONTINENTALE**, ad es., **la consuetudine è di indicare la quota sotto forma di numero, intero o decimale, che esprime la vincita LORDA di chi ha puntato 1 sull'evento.**
  Cosicché, se la quota è 1,5 e Tizio ha puntato 1 euro, la somma che il banco verserà a Tizio nel caso indovini è 1,5 e il guadagno netto di Tizio è 0,5.
  Naturalmente, se Tizio avesse puntato 100 euro, ne incasserebbe $1,5\cdot 100=150$ con un guadagno netto di 50, ecc.
- In **GRAN BRETAGNA**, si usa una **frazione che porta a numeratore il guadagno NETTO e a denominatore la puntata,** cosicché, ad esempio, il Partito della Pagnotta dell'esempio precedente verrebbe quotato 199/1, e una quota 1/5 significherebbe che se lo scommettitore punta 5 euro, in caso di vincita guadagnerà 1 euro netto (= gli verranno restituiti i 5 euro sborsati, e in più gli verrà dato 1 euro, per un totale lordo di 6 euro).
- Negli **STATI UNITI** l'abitudine è di utilizzare numeri negativi o positivi:
  un numero negativo indica la puntata necessaria per conseguire un guadagno NETTO di 100,
  un numero positivo indica il guadagno NETTO che corrisponde a una puntata uguale a 100.
- **Naturalmente il "banco", se ritiene, in base alle sue documentatissime informazioni e sofisticate valutazioni, che un evento abbia, ad esempio, 1 probabilità su 5 di verificarsi, non si dichiarerà mai disponibile a pagare quella che sarebbe la quota "equa", ossia un premio lordo di 5 quando il giocatore punta 1: prometterà invece di versare un lordo di 4, o di 3,5 ad esempio, in modo che, sul gran numero di scommesse e tenuto conto anche delle puntate sull'evento contrario, gli scommettitori globalmente ci rimettano e il banco stesso invece prosperi, alla faccia dei pesciolini e pescioloni.**
- Il comportamento di una persona intelligente è identico tanto nell'Europa continentale, quanto nel Regno Unito o negli USA o altrove: egli, semplicemente, non scommette nulla: euro 0,00.

Un giocatore perde sempre. Perde denaro, dignità e tempo.
E se vince, tesse intorno a sé una tela di ragno.
Mosè Maimonide, Sha' are ha-Musar

I tratti essenziali di ogni gioco: la simmetria, le leggi arbitrarie, il tedio.
Jorge Luis Borges, Esame dell'opera di Herbert Quain

ESERCIZI sulla probabilità "soggettiva"

1) Una giovane attrice con delle gambe stupende decide di assicurarle, e la compagnia le chiede di pagare un premio di 30000 euro, garantendole un rimborso di 2000000 di euro nel caso le gambe vengano rovinate - entro i prossimi 5 anni - da un incidente o altro (ferimento, malattia …)
Tenendo conto del fatto che la compagnia di assicurazioni vuole anche guadagnarci, se ne può dedurre che ha valutato la probabilità di un danno alle gambe come inferiore a … ???

2) Un amico mi offre di scommettere sulla vittoria di una squadra di calcio locale: se la squadra vincerà, lui mi pagherà 50 euro, mentre richiede che io gli paghi 20 euro in caso di pareggio o sconfitta.
Tenendo conto del fatto che l'amico mi vuole fregare, che valore si deve ritenere che abbia soggettivamente attribuito alla probabilità di vittoria per quella squadra?

3) Un tappo di plastica non è perfettamente simmetrico: può darsi dunque che tenda, se lanciato, a fermarsi più facilmente con la parte cava verso l'alto … o con la parte convessa verso l'alto, chissà!
Come faccio a stabilire qual è l'esito più probabile del lancio del tappo?
Se ritengo equa una scommessa nella quale si tratta di lanciare un tappo e pagare 35 centesimi nel caso il tappo si fermi con la parte cava verso l'alto, per vincerne 65 in caso contrario, che probabilità sto assegnando all'evento "parte cava verso l'alto"?

4) Ho lanciato per 500 volte una puntina da disegno, poi mi sono stufato … ma ho osservato che per 190 volte questa si è fermata con la punta verso l'alto. Ora, dovendo organizzare una scommessa equa sul lancio della puntina da disegno, se chi parteggia per l'esito più probabile vuole vincere 5 euro netti, quanto gli imporrò di pagare qualora si verifichi invece l'esito più difficile?

5) Di fronte ad una competizione fra i tre cavalli Dinamite, Tornado e Orazio, ritengo, soggettivamente, che Dinamite abbia il doppio delle probabilità di vincere rispetto a Tornado, e 2 volte e mezza le probabilità di Orazio.
Sai dirmi, quindi, che probabilità sto assegnando alla vittoria di ciascuno?

6) a) Sono un esperto e smaliziato giocatore di flipper, e quello installato al bar Sport non ha segreti per me. Ritengo sia equo sfidare gli amici a una scommessa sotto queste condizioni:
se faccio almeno 100000 punti in una partita, vinco 5 euro, altrimenti ne pago 20
(equo nel senso che, ripetendo la sfida molte volte, non mi aspetto né di perdere né di vincere molto).
In questo modo, quale probabilità implicitamente attribuisco al mio fare 100000 punti in una partita?

b) In generale, se ritengo equo, qualora si verifichi un evento E, di vincere una somma x, accettando di perdere una somma y qualora E non si verifichi, qual è la mia valutazione della probabilità dell'evento E?

7) Trasforma l'espressione della quota di una scommessa a seconda delle usanze dei vari paesi:

Italiana	Inglese	Americana
3,5		
	5/8	
		−75 opp. + …

Italiana	Inglese	Americana
10 contro 1		
… contro …	7/3	
… contro …		− … opp. +100

8) Se la quota (italiana) di una scommessa è 1,80 quanto devo puntare per vincere 20 euro netti se mi va bene?
In generale, se la quota (italiana) di una scommessa è q, quale dev'essere la mia puntata x se voglio una vincita netta y in caso di successo? E se punto z, quanto vincerò al netto?

RISPOSTE

1) inferiore a 1,5% 2) <2/7 3) Lanciando tantissime volte e calcolando la freq. rel. di ciascun esito. 0,65 = 65%

4) $190 : 500 = 0{,}38$ per cui posso attribuire all'evento "punta verso l'alto" una probabilità del 38% circa.
Ora, il gioco è equo se questo esito "punta verso l'alto", che è il più difficile, viene pagato 8,16 euro circa.

5) Detta p la probabilità che attribuisco a Dinamite, si avrà

$$p + \frac{p}{2} + \frac{p}{2{,}5} = 1 \text{ da cui } p = \frac{10}{19};\ \text{perciò}\ p_D = \frac{10}{19},\ p_T = \frac{5}{19},\ p_O = \frac{4}{19}$$

6) a) $\frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%$ b) $\frac{y}{x+y}$

7)

Italiana	Inglese	Americana
3,5	5/2	−40 oppure +250
1,625	5/8	−160 oppure +62,5
2,333	4/3	−75 opp. +133,333

Italiana	Inglese	Americana
10 contro 1	9/1	−11,111 oppure +900
10 contro 3	7/3	−42,857 oppure +233,333
2 contro 1	1/1	−100 opp. +100

8) per vincere un netto di 20, devo puntare 25; per vincere y netti, punto $x = \frac{y}{q-1}$; se punto z, vinco $z(q-1)$ netti

ALGORITMI

1 - COS'E' UN "ALGORITMO"

a) Compra una confezione di filtri da camomilla
b) riempi d'acqua una pentola
c) metti la pentola sul fornello
d) accendi il fornello
e) attendi finché l'acqua bolle
f) spegni il fornello
g) metti un filtro in una tazza
h) riempi la tazza con l'acqua della pentola
i) schiaccia leggermente col cucchiaio il filtro e mescola finché l'acqua ha assunto un colore giallo uniforme
j) togli il filtro dalla tazza
k) aggiungi un cucchiaino di zucchero e assaggia finché il liquido è dolce al punto giusto
l) hai terminato



Quello che abbiamo scritto è un **algoritmo**:
una *sequenza di istruzioni*, finalizzata a risolvere il *problema* della *preparazione di una camomilla*.

a) Leggi il valore di un numero naturale n
b) se n<2 allora
[scrivi: "Il numero deve essere maggiore o uguale a 2: ridammelo";
[leggi il valore di n
c) poni k=1
d) ripeti:
[se n è divisibile per k allora poni massimodivisoretrovato=k;
[incrementa di un'unità il valore di k
finché k=n
e) se massimodivisoretrovato=1 allora scrivi "Il numero dato è primo"
altrimenti scrivi "Il numero dato non è primo"
f) hai terminato

Quello che abbiamo scritto è un altro **algoritmo**:
una *sequenza di istruzioni*, finalizzata a risolvere il *problema* di *stabilire se un dato intero è primo*.

COS'È, DUNQUE, IN GENERALE, UN ALGORITMO?

E' UNA SEQUENZA DI ISTRUZIONI, DI "PASSI",
IL CUI SCOPO È LA RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA.

Le ISTRUZIONI di un algoritmo devono essere

- **PRIVE DI AMBIGUITÀ nel loro CONTENUTO:**
  ogni istruzione deve essere interpretabile dall'esecutore in modo univoco;
- **PRIVE DI AMBIGUITÀ nel loro ORDINE:**
  per ciascuna istruzione, deve essere chiaro qual è l'istruzione da eseguire dopo;
- **CONCRETAMENTE ESEGUIBILI;**
- **COMPRENSIBILI DA PARTE DELL'ESECUTORE,**
  sia questo un essere umano o una macchina:
  se un'istruzione non possedesse questo requisito,
  occorrerebbe spezzarla in un gruppo di istruzioni più semplici;
- **IN NUMERO FINITO, ed ESEGUIBILI IN UN TEMPO FINITO.**

E il problema risolto deve essere di carattere GENERALE:
ad esempio, non sarebbe un algoritmo una sequenza di istruzioni che fosse capace esclusivamente di stabilire se è o non è primo un numero particolare, che so … il 41.

Il termine "*algoritmo*" viene dal nome di un matematico, astronomo, astrologo e geografo persiano del IX secolo: Al-Khwārizmī. Questi fu l'autore del trattato Kitāb al-djabr wa 'l-muqābala ("sulla ricomposizione e riduzione"), dal quale trae origine un'altra parola, ancora più fondamentale per la matematica: la parola "*algebra*".
E' pur vero che si ritrovano principi algoritmici anche in più antiche fonti babilonesi, cinesi ed indiane.

2 - ALGORITMI E PROGRAMMI

Abbiamo detto che le istruzioni di un algoritmo devono essere concretamente eseguibili e comprensibili da parte dell'esecutore. Ora, ai giorni nostri, l'esecutore per eccellenza di algoritmi, anche molto complessi, è il *computer*, che è precisissimo e rapidissimo nell'eseguire, senza stancarsi e senza protestare, sequenze di istruzioni che gli vengono assegnate nell'ordine corretto da un "programmatore" umano, il quale tenga conto delle limitate capacità che il computer possiede.
Esso non è in grado di pensare, o di prendere autonomamente qualsivoglia decisione: dipende in tutto e per tutto dall'uomo che, attraverso un "programma", gli ordina, istante per istante, COSA fare.

Essenzialmente, un computer sa soltanto:

- **ASSOCIARE**
  A UNA LOCAZIONE DI MEMORIA
  UN NOME
  che la identifichi, come potrebbe essere *n*, o *num*, o *massimodivisoretrovato*, ecc.

Ad esempio:

Nella parte preliminare di un programma scritto nel linguaggio di programmazione **PASCAL**, *dichiarazioni* come
VAR num: integer oppure VAR cognome: string[25]
ordinano al computer di riservare locazioni, nella RAM, destinate a contenere un numero intero o, rispettivamente, una "stringa" (sequenza di caratteri) con non più di 25 caratteri, associando a queste "scatolette" i nomi *num*; *cognome*

- **LEGGERE** un'informazione
  che venga battuta sulla tastiera
  (= ricevere un *input* dalla *tastiera*),
  memorizzando questo input
  in una locazione nella RAM
  (oppure, interpretare opportunamente
  come comandi i movimenti
  e i "clic" o "doppio clic" fatti col *mouse*)

Nel linguaggio di programmazione PASCAL,
l'istruzione **READ**(num)
ordina al computer,
quando l'utente avrà
digitato sulla tastiera un numero e premuto il tasto *Invio*,
di memorizzare quel numero nella locazione
della memoria centrale (RAM),
alla quale è stato associato il nome *num*

- **SCRIVERE** SUL MONITOR,
  o MANDARE IN STAMPA,
  o SALVARE su di una memoria di massa,
  un'informazione
  o un'insieme di informazioni

In linguaggio PASCAL, l'istruzione **WRITE**(num)
ordina al computer di scrivere sul monitor
il valore che in quel momento ha la variabile *num*,
ossia il contenuto che c'è in quel momento
nella locazione di memoria, nella "scatoletta",
alla quale è stato associato il nome *num*

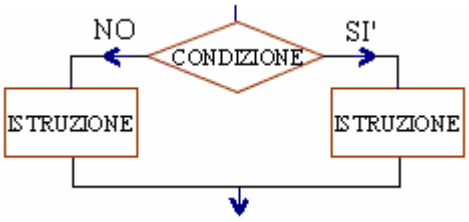
- **ESEGUIRE CALCOLI**
  E CONFRONTI FRA NUMERI

In linguaggio PASCAL,
la **moltiplicazione** viene indicata con un asterisco *,
la **divisione** con /,
la **divisione intera** con DIV e il suo **resto** con MOD,
"**maggiore o uguale**", "**minore o uguale**" si scrivono <=, >=,
"**diverso da**" si scrive <>

- **MODIFICARE IL CONTENUTO**
  DI UNA LOCAZIONE DI MEMORIA

In linguaggio PASCAL, l'istruzione di "**ASSEGNAZIONE**"
c **:=** a+b (occhio: il simbolo grafico non è =, è **:=**)
ordina al computer di eseguire la somma dei contenuti
delle locazioni di memoria associate ai nomi *a*, *b*
e di depositare il risultato nella locazione di memoria *c*
(assegnare il valore ottenuto alla variabile *c*)

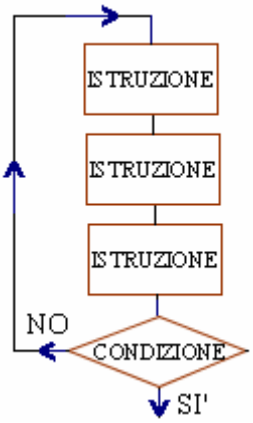
- controllare
  SE è verificata una certa condizione;
  IN CASO AFFERMATIVO
  eseguire una data istruzione
  o blocco di istruzioni,
  ALTRIMENTI
  eseguire un'altra istruzione o blocco



In linguaggio PASCAL, l'istruzione
(o meglio, l' "istruzione complessa" o "struttura")
IF a<b **THEN** max := b **ELSE** max := a
ordina al computer di controllare se a<b
(cioè, se il contenuto della casella *a* nella RAM
ha un valore numerico minore del contenuto della casella *b*);
in caso affermativo,
il computer dovrà eseguire l'istruzione max := b
(cioè, dovrà assegnare alla variabile *max* il valore *b*
ossia dovrà porre nella "scatoletta" *max* in RAM
lo stesso valore che c'è nella "scatoletta" *b*),
in caso negativo dovrà eseguire l'istruzione max := a

- **RIPETERE**
  un'istruzione,
  o un gruppo
  di istruzioni,
  FINCHÉ
  sarà verificata
  una certa condizione

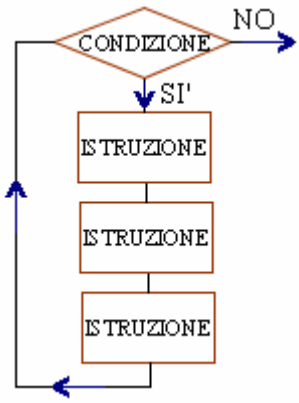
  (CICLO A
  CONTROLLO FINALE)



oppure

FINTANTOCHE'
è verificata
una certa condizione,
RIPETERE
un'istruzione, o un
gruppo di istruzioni

(CICLO A
CONTROLLO INIZIALE)



In linguaggio PASCAL, un "pezzo" di programma potrebbe essere il seguente:

```
readln(a);
k:=0;
REPEAT
        k:=k+1;
        mult:=a*k;
        writeln(mult);
UNTIL k = 5
```

Questo programma prevede innanzitutto la *lettura* del numero intero *a*
(readln è una *variante* di read, e ordina al computer di *andare a capo*,
sul monitor, dopo che l'utente ha inserito il valore di *a*)
e l' "*inizializzazione*" della variabile *k* al valore 0.
Dopodiché, l'istruzione (o meglio, l' "istruzione complessa" o "struttura")
REPEAT … UNTIL …
ordina al computer di
RIPETERE il blocco delle tre istruzioni

I) poni nella scatoletta *k* il valore che c'era prima, aumentato di 1
(incrementa di 1 il valore della variabile *k*:
" **:=** " non indica uguaglianza, indica **assegnazione**!)

II) poni nella scatoletta *mult* il valore a*k (l'asterisco sta per *moltiplicazione*)

III) scrivi sul monitor il contenuto che ha, in quel momento, la scatoletta *mult*
(writeln è una variante di write, e ordina al computer
di andare a capo dopo che ha scritto sul monitor)

FINCHE' sarà verificata la condizione k = 5;
quando questa condizione si verificherà, il computer dovrà
uscire dal ciclo ed eseguire le istruzioni successive del programma.

L'esito sarà quello di mandare in output, sul monitor, i primi 5 multipli di *a*.

Ad esempio, se il valore della variabile *a* è 9,
il contenuto delle tre "scatolette" *a*, *k* e *mult*, nella RAM,
si evolverà, per effetto del programma, nel modo seguente:

	k:=0	k:=k+1 mult:=a*k	k:=k+1 mult:=a*k	k:=k+1 mult:=a*k	k:=k+1 mult:=a*k	k:=k+1 mult:=a*k
a	9	9	9	9	9	9
k	0	1	2	3	4	5
mult		9	18	27	36	45

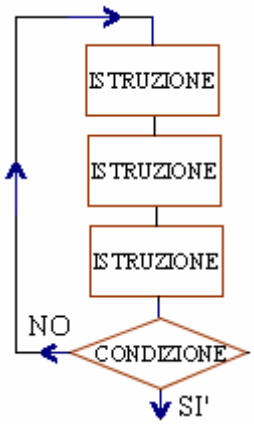
Sempre in linguaggio PASCAL,
la ripetizione ("iterazione") di un'istruzione o di un blocco di istruzioni
può anche essere comandata da una WHILE … DO …,
come nel pezzo di programma che segue (dove *n* è un intero):

```
readln(n);
WHILE n>=0 DO
      begin
          writeln(n);
          n:=n – 1;
      end;
```

Dopo la lettura, da tastiera, del valore di *n*,
l'istruzione (o meglio, l' "istruzione complessa" o "struttura")
WHILE … DO …
ordina al computer di:
scrivere sul monitor il valore di *n* (e andare a capo);
diminuire di 1 il valore della variabile *n*;
e CONTINUARE A ESEGUIRE (DO) questa coppia di istruzioni
FINTANTOCHE' (WHILE) *n* si mantiene ≥ 0 (>= in PASCAL sta per $\geq$);
quando questa condizione non sarà più verificata, uscire dal ciclo.

L'effetto sarà quello di mandare in output,
sul monitor, un "conto alla rovescia" da *n* fino a 0.

3 - DIAGRAMMI DI FLUSSO; PROGRAMMAZIONE STRUTTURATA



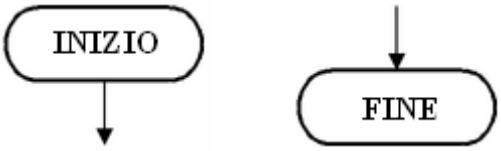
Lo schema qui a sinistra,
che abbiamo utilizzato per descrivere il "funzionamento"
di una REPEAT … UNTIL … del linguaggio Pascal,
è un esempio di
DIAGRAMMA DI FLUSSO.

Per "diagramma di flusso"
(o "diagramma a blocchi"; in lingua Inglese: "flow chart")
si intende dunque
la raffigurazione di un algoritmo
attraverso blocchi, collegati da linee orientate.

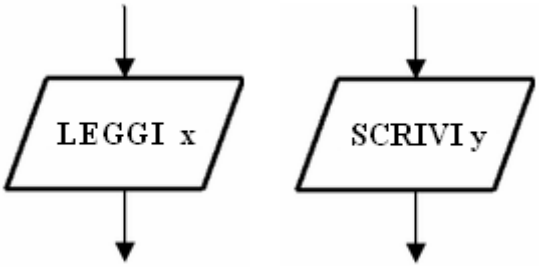
Ciascun blocco contiene una istruzione, oppure una condizione.

Per la **forma dei "blocchi"** si sono affermate certe **convenzioni**.
Precisamente:

blocco **iniziale** e **finale:**
ovale



blocco di **I/O**
(**Input/Output,**
Lettura/Scrittura):
parallelogrammo



blocco di **elaborazione:**
rettangolo



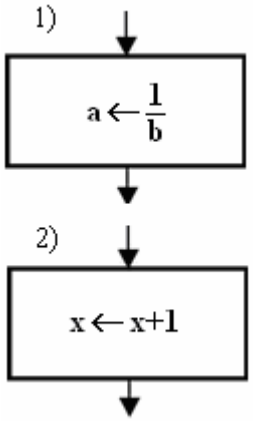
Molto importante
la cosiddetta **assegnazione**:
noi indicheremo
l'assegnazione
col simbolo ←
(vedi NOTA qui a destra)

Esempi:

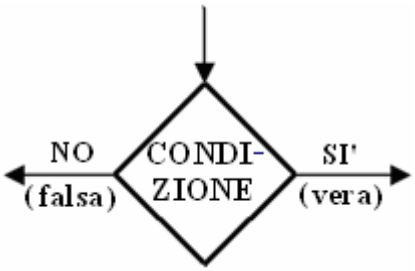
1) assegna alla variabile *a*
il valore uguale al reciproco
del valore della variabile *b*
(poni nella "scatoletta" *a*
il reciproco del contenuto
della "scatoletta" *b*)

2) assegna alla variabile *x*
quello che era
il suo valore precedente,
aumentato di 1
(incrementa di 1
il valore della variabile *x*)

NOTA - Poi, nei vari
linguaggi di programmazione,
quella freccia ←
diventerà un simbolo
specifico per *quel* linguaggio:
ad esempio, in PASCAL è :=

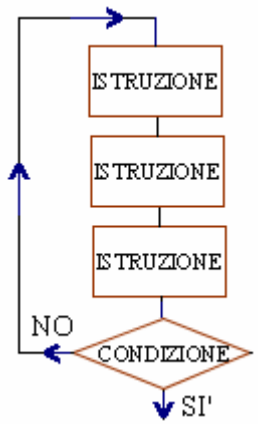


blocco di **controllo**
o di **selezione:**
rombo



E' opportuno organizzare il diagramma di flusso per la risoluzione di un dato problema in modo che, se c'è una "freccia che ritorna indietro", ossia: se c'è una *ripetizione*, una ITERAZIONE di istruzioni, questa iterazione sia governata da una delle due strutture seguenti:

CICLO A **CONTROLLO FINALE**



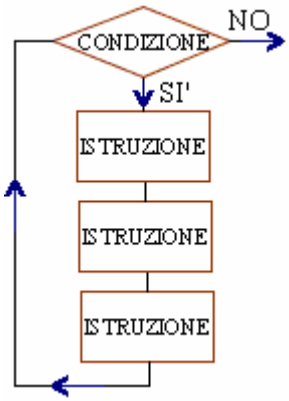
Per evitare cicli infiniti,
fra le "istruzioni"
ce ne dev'essere anche una
che modifica una variabile
presente nella "condizione".

Questa struttura
non va bene
in quei casi nei quali
il blocco di istruzioni
potrebbe
non dover essere eseguito
nemmeno una volta.

In linguaggio PASCAL: REPEAT … UNTIL …
(e si ESCE dal ciclo quando la condizione è VERA).

In linguaggio C: DO … WHILE …
(occhio, però:
qui si ESCE dal ciclo quando la condizione è FALSA)

CICLO A **CONTROLLO INIZIALE**



Per evitare cicli infiniti,
fra le "istruzioni"
ce ne dev'essere anche una
che modifica una variabile
presente nella "condizione".

Questa struttura
si adatta anche
a quei casi nei quali
il blocco di istruzioni
potrebbe
non dover essere eseguito
nemmeno una volta.

In linguaggio PASCAL: WHILE … DO …
(e si ESCE dal ciclo quando la condizione è FALSA).

In linguaggio C: WHILE …
(e si ESCE dal ciclo quando la condizione è FALSA)

Conviene invece evitare l'inserimento nel diagramma di flusso di frecce che facciano "salti incondizionati" da un punto all'altro (istruzioni del tipo "go to").

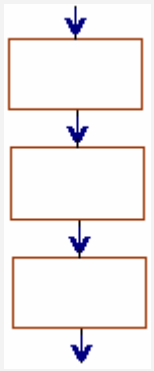
Tale uso disordinato di "salti" (chiamato "**spaghetti programming**") è infatti considerato *controproducente*,

- sia ai fini del controllo della correttezza dell'algoritmo,
- sia per una eventuale successiva traduzione del diagramma in un programma per computer.

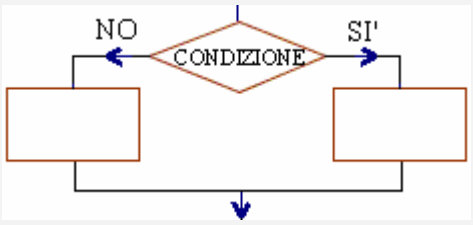
D'altra parte un famoso enunciato, il **teorema di Bohm-Jacopini** (1966), afferma che

qualunque algoritmo si può realizzare con le sole tre strutture di

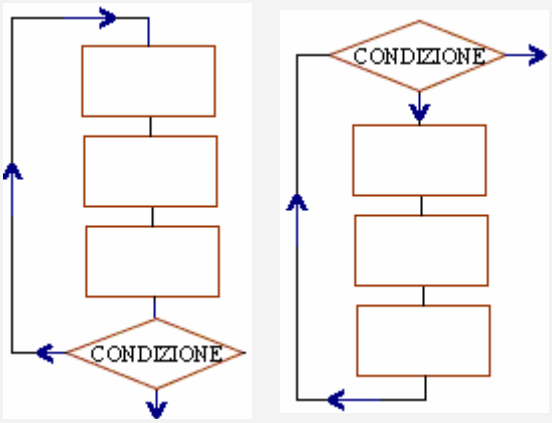
a) SEQUENZA



b) SELEZIONE



c) ITERAZIONE



(nei rettangoli possiamo trovare singole istruzioni oppure altre strutture degli stessi 3 tipi)

E una "buona" programmazione,
che eviti i "salti incondizionati"
e sia invece basata sul teorema di Bohm-Jacopini
ovvero sulle tre strutture
di *sequenza*, *selezione* e *iterazione*
(ciascuna con una sola uscita,
con possibilità di "nidificarle" una dentro l'altra
ma NON di disporle in modo che si "accavallino"),
è chiamata "**programmazione STRUTTURATA**".

La programmazione strutturata
rende più ordinata
la stesura di un programma,
e ne rende più semplici
la lettura e il controllo di correttezza,
nonché
l'eventuale completamento
o utilizzo col ruolo di "sottoprogramma"
(metodi di lavoro *top-down* o *bottom-up*).

4 - ESEMPI; LO PSEUDOCODICE (O "LINGUAGGIO DI PROGETTO")

Qui di seguito daremo alcuni esempi di algoritmi costruiti secondo i principi della "programmazione strutturata".

Accanto a ciascun diagramma di flusso scriveremo anche la corrispondente versione in
pseudocodice (o **pseudolinguaggio**, o **linguaggio di progetto**):
si tratta di una specie di **"linguaggio di programmazione semplificato", non standard**
(noi ne diamo infatti una *nostra* versione, non necessariamente coincidente con altre)
a partire dal quale è poi facile tradurre l'algoritmo in un vero e proprio linguaggio comprensibile dal computer, come ad esempio il linguaggio PASCAL o il linguaggio C o un qualsiasi altro.

… Anche se poi, traducendo lo *pseudocodice* in vero e proprio linguaggio, occorre tenere conto

- delle rigide regole sintattiche di quel linguaggio
- delle risorse proprie del linguaggio adottato (tanto per fare un esempio,
  la RIPETI … FINCHE' … , con la quale si ha uscita dal ciclo quando la condizione è verificata,
  va realizzata, in linguaggio C, attraverso le parole chiave DO … WHILE …
  ma tenendo conto che questa struttura del linguaggio C prevede si esca dal ciclo
  quando la condizione diventa FALSA, e *non* quando diventa *vera*!
  (… Ovviamente, basterà sostituire alla condizione in gioco la sua contraria per sistemare le cose …)
- dell'eventuale presenza, in quel linguaggio, di comode varianti. Tanto per fare due esempi:
  a) nel linguaggio PASCAL accanto alle due strutture iterative con controllo finale e con controllo iniziale, abbiamo pure una struttura iterativa "enumerativa" FOR … DO … che ordina al computer di ripetere l'istruzione, o il blocco di istruzioni, per un numero prefissato di volte
  b) sempre in PASCAL, abbiamo anche una struttura di "selezione multipla" (la CASE … OF …)

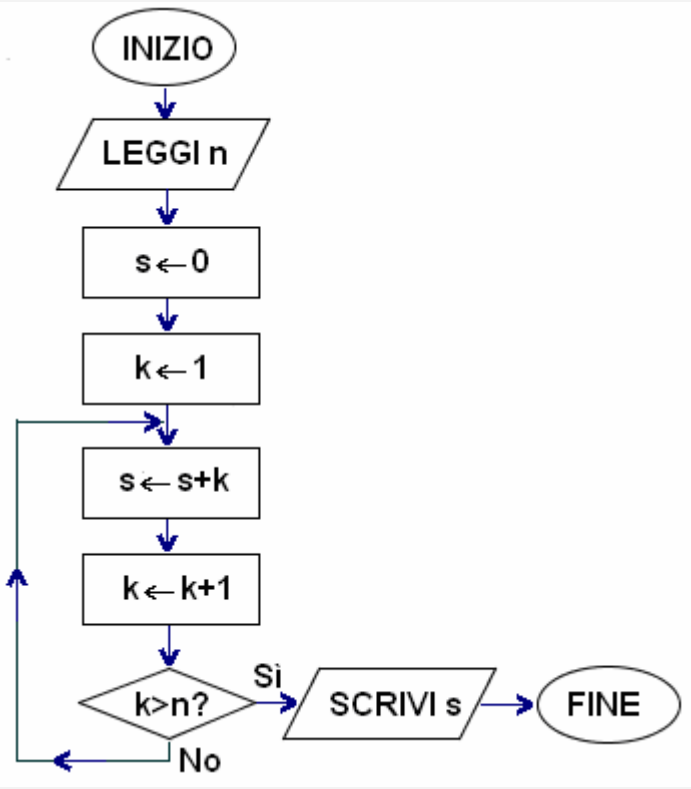
- ESEMPIO 1

  Il seguente algoritmo serve per
  sommare i primi n interi positivi, ossia eseguire la somma $1+2+3+...+n$, con n letto in ingresso (facciamo finta di non sapere che per questo calcolo c'è l'apposita "formula di Gauss").

  Abbiamo utilizzato la "**freccia a sinistra**" $\leftarrow$ per indicare l'**istruzione di assegnazione**:
  ad esempio, $\mathbf{s \leftarrow 0}$ significa "assegna alla variabile s il valore 0" (metti nella "scatoletta" s il valore 0);
  $\mathbf{k \leftarrow k+1}$ significa "assegna alla variabile k il valore che essa aveva precedentemente, aumentato di 1" (incrementa di 1 il valore della variabile k).
  In linguaggio Pascal, l'assegnazione viene indicata con **:=** *e in linguaggio C con* **=** *senza i "puntini"*

  Osserviamo che la variabile s fa da "**accumulatore**": essa ha il ruolo di "somma parziale",
  e via via, a forza di "accumulare" contributi, si porta a diventare la somma di tutti quanti gli addendi.

DIAGRAMMA DI FLUSSO



LINGUAGGIO DI PROGETTO

INIZIO

LEGGI n

s ← 0

k ← 1

RIPETI
{ s ← s+k

k ← k + 1 }

FINCHE' k>n
SCRIVI s
FINE

La **coppia di GRAFFE** ci serve per evidenziare che quelle istruzioni "fanno blocco", "vanno insieme".

Anche nel linguaggio C le graffe vengono utilizzate con questa funzione.

Invece in linguaggio PASCAL al posto delle graffe si impiegano (se necessario) due indicatori di "inizio blocco" e "fine blocco": BEGIN e END.

- ESEMPIO 2

L'algoritmo che segue legge un intero >2 in ingresso e stabilisce se è o non è un numero primo.

Ricordiamo che
l'operatore MOD dà il resto della divisione intera (mentre DIV ne dà il quoziente intero);
ad esempio, 47 MOD 5 = 2 perché il resto della divisione intera 47:5 è 2 (mentre 47 DIV 5 = 9).
Se a, b sono due interi, a è divisibile per b se e solo se a MOD b = 0.

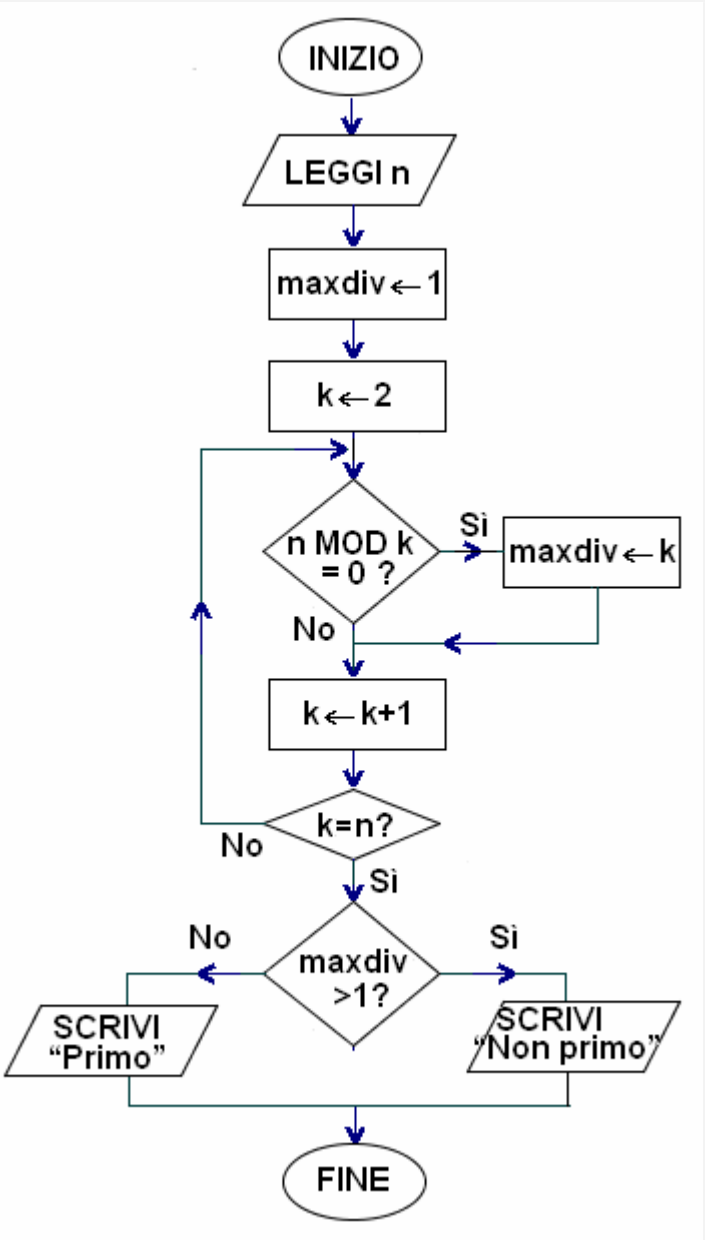
La variabile maxdiv immagazzina il "massimo fra i divisori trovati fino a quel momento"
e diventerà alla fine il massimo fra i divisori di n, inferiori ad n.
Se, al termine dell'elaborazione, nella "scatoletta" maxdiv ci sarà un numero >1,
vorrà dire che è stato trovato un divisore diverso sia dall'unità che dal numero n stesso,
per cui se ne concluderà che n non è primo.

Il diagramma di flusso contiene due strutture di selezione:

- la prima offre una sola alternativa (SE … ALLORA … senza "altrimenti"),
- la seconda ne offre classicamente due (SE … ALLORA … ALTRIMENTI …)

Controlla tu stesso che con questo algoritmo,
se il numero n dato in ingresso *non* fosse >2,
si rimarrebbe intrappolati in un *ciclo senza fine*.

DIAGRAMMA DI FLUSSO



LINGUAGGIO DI PROGETTO

INIZIO

LEGGI n

maxdiv ← 1

k ← 2

RIPETI

{ SE n MOD k = 0 ALLORA maxdiv ← k

k ← k+1 }

FINCHE' k = n

SE maxdiv > 1 ALLORA
SCRIVI "Non primo"
ALTRIMENTI
SCRIVI "Primo"

FINE

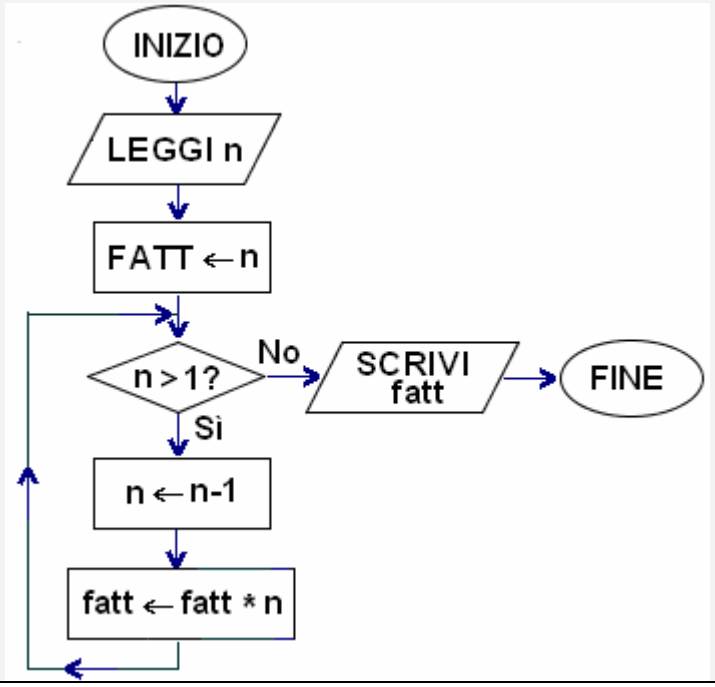
❑ ESEMPIO 3

Il seguente algoritmo calcola il **fattoriale** $\mathbf{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}$ di un intero $n \geq 1$ letto in ingresso.

n, se è maggiore di 1, viene fatto decrescere sempre di un'unità a partire dal valore iniziale,
e una variabile fatt, inizializzata ad n, viene moltiplicata per ogni nuovo valore di n
generando così, via via, il fattoriale desiderato.

Affinché il procedimento funzionasse anche con n = 1,
valore per il quale il decremento di n NON va effettuato nemmeno una volta,
in questo algoritmo abbiamo utilizzato la STRUTTURA ITERATIVA A CONTROLLO INIZIALE,
che in linguaggio di progetto abbiamo tradotto con FINTANTOCHE' … ESEGUI …

DIAGRAMMA DI FLUSSO



LINGUAGGIO DI PROGETTO

INIZIO

LEGGI n

fatt ← n

FINTANTOCHE' n > 1 ESEGUI

{ n ← n – 1

fatt ← fatt * n }

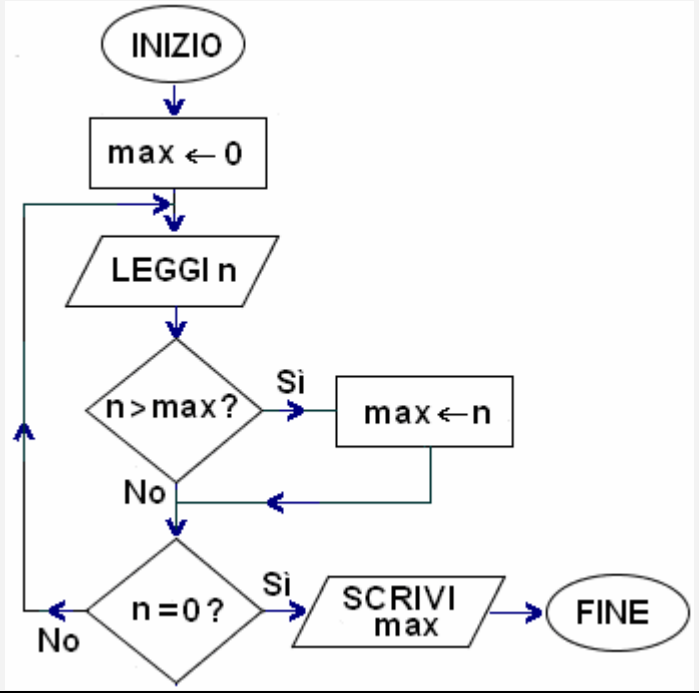
SCRIVI fatt
FINE

Nel nostro linguaggio di progetto la moltiplicazione è indicata con l'asterisco *, come nei linguaggi Pascal e C.

❑ ESEMPIO 4

Si leggono in input più numeri positivi, anche eventualmente tantissimi, e se ne stabilisce il massimo.
La fine della sequenza numerica in ingresso viene segnalata comunicando un "**numero sentinella**": lo 0.

DIAGRAMMA DI FLUSSO



LINGUAGGIO DI PROGETTO

INIZIO

max ← 0

RIPETI

{ LEGGI n

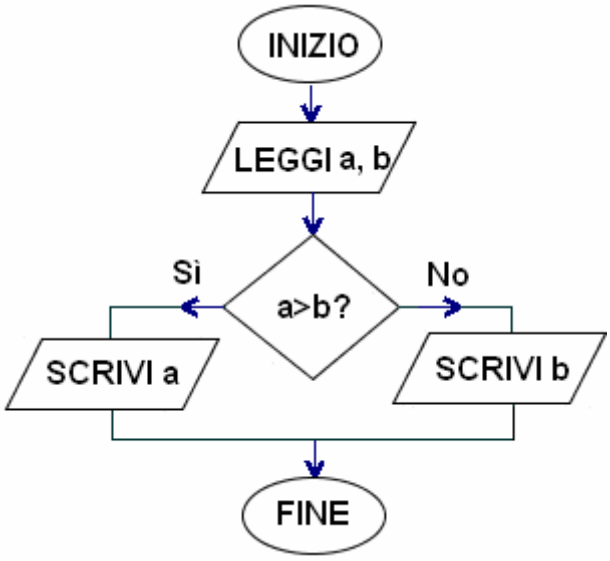
SE n > max ALLORA max ← n }

FINCHE' n=0
SCRIVI max
FINE

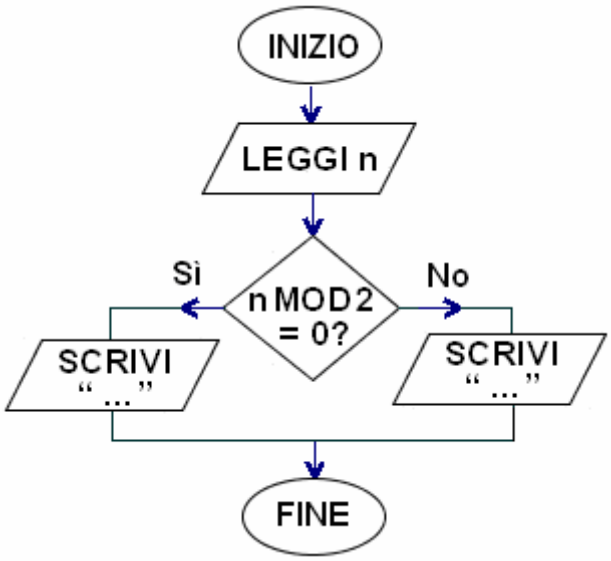
5 - ESERCIZI (le risposte sono alle pagg. 514 e 515)

Nei seguenti esercizi ti converrà preparare su di un foglio di carta tante caselle quante sono le variabili in gioco, per segnare, istruzione dopo istruzione, come cambia (ammesso che cambi) il contenuto di ciascuna casella.
In tal modo, avrai fatto la cosiddetta "TRACCIA" (inglese: trace) del procedimento.

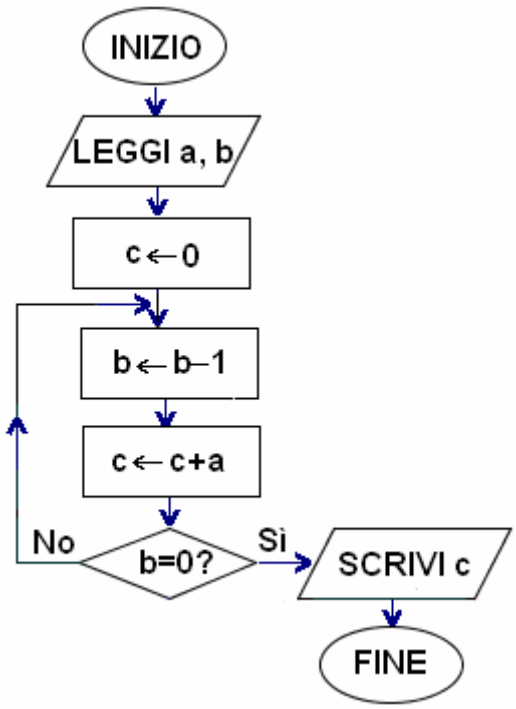
1) Cosa fa il seguente algoritmo?
(a, b sono due numeri qualsiasi)



2) Cosa metteresti fra virgolette?
(n è un numero naturale)



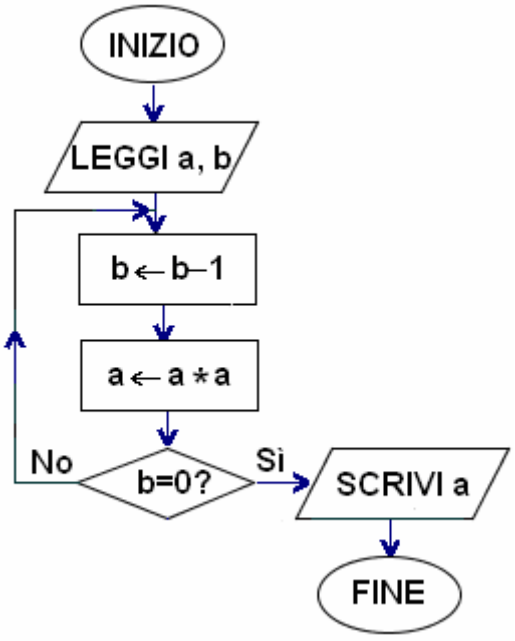
3) Cosa fa il seguente algoritmo?
(a è un numero naturale, b un numero naturale >0)



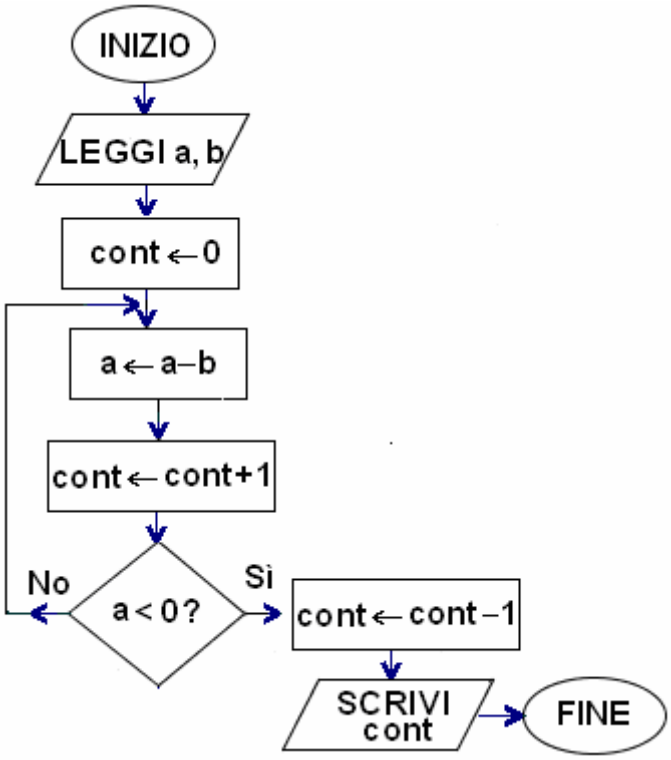
4) L'algoritmo che segue
(dove a, b sono due interi positivi)
è un po' strambo.

Cosa produrrebbe in output,
se l'input fosse a = 10, b = 3?

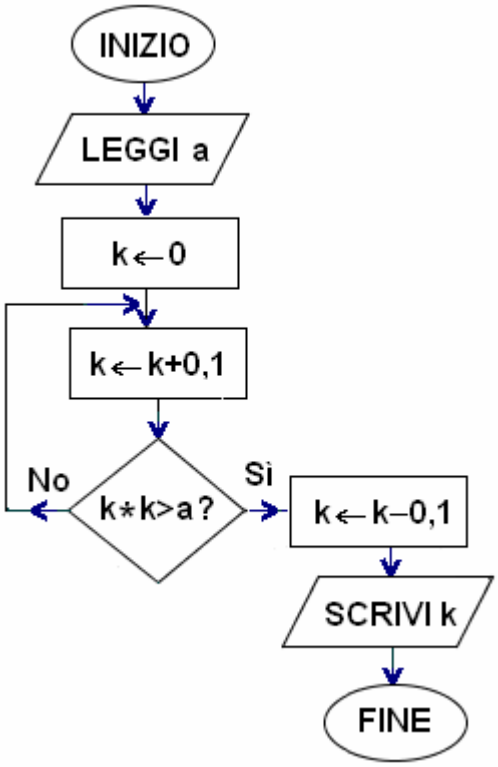
E in generale,
qual è l'espressione algebrica
contenente a, b (un po' strana ...)
che corrisponde all'output?



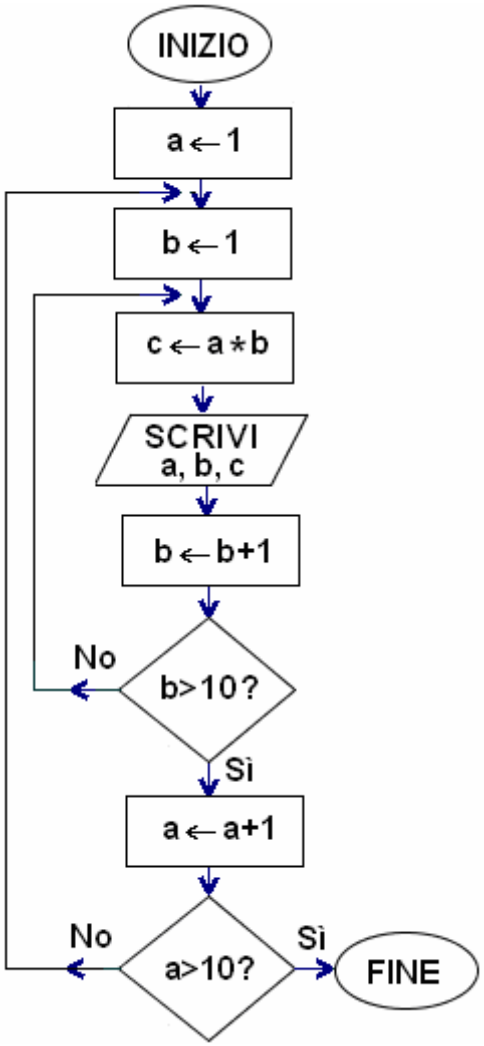
5) Cosa fa il seguente algoritmo? (a, b interi positivi)



6) Cosa fa il seguente algoritmo?
(a è un numero reale positivo)



7) Cosa produce in output l'algoritmo che segue?

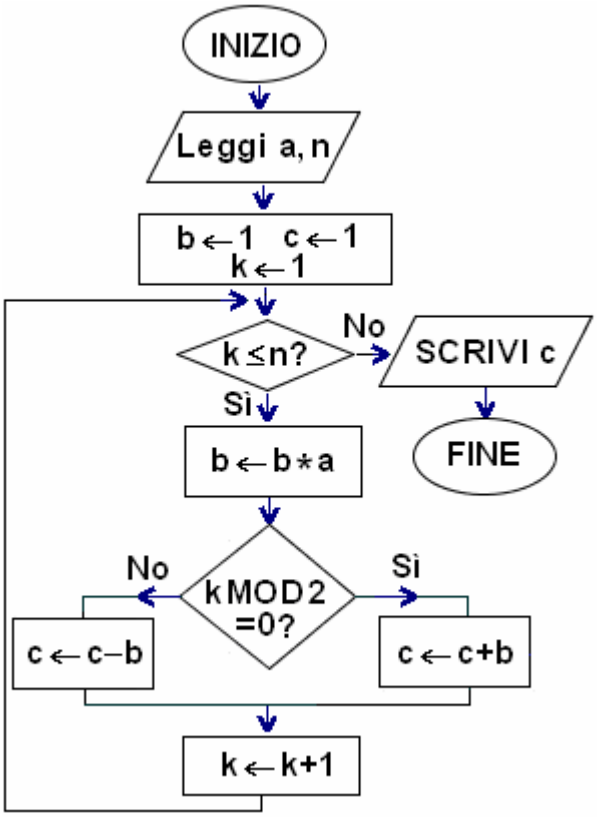


8) L'algoritmo seguente genera in output il numero

$$c = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \ldots + (-1)^n a^n$$

(a è un reale positivo, n un intero positivo).

Potrebbe essere simpatico mettersi d'accordo con due compagni/e: scelta una coppia a, n, ad esempio: $a = 5$, $n = 4$, uno farà la parte di b, un altro la parte di c, il terzo quella di k.
Buon divertimento.



9) *Nel seguente algoritmo*
m, n sono due interi positivi.

```
LEGGI m, n
x ← 0
k ← 0
FINTANTOCHE' k<n ESEGUI:
  { k ← k+1
    x ← x+m }
SCRIVI x
```

Qui a fianco, a titolo di esempio,
è riprodotta la "traccia" nel caso m = 7, n = 3

"Traccia" (nel caso m = 7, n = 3)	
m 7	n 3
x ~~0~~ ~~7~~ ~~14~~ 21	k ~~0~~ ~~1~~ ~~2~~ 3

Determina la "traccia" e l'output quando l'input è m = 5, n = 4 .
Quale operazione aritmetica realizza questo algoritmo?

10) L'algoritmo seguente sarebbe finalizzato a scambiare i valori delle due variabili a, b,
cioè a scambiare i contenuti delle due "scatolette" a, b; sennonché … è sbagliato. Non funziona!
Perché?

```
LEGGI a, b
a ← b
b ← a
SCRIVI a, b
```

"Traccia" (nel caso a = 4, b = 5)	
a	b

11) *Nell'algoritmo che segue*
a, b sono due numeri qualsiasi.

```
LEGGI a, b
x ← a
a ← b
b ← x
SCRIVI a, b
```

Qual è l'output per a = 4, b = 5 ?

12) *Nel quesito seguente,*
a, b sono due interi >0.

```
LEGGI a, b
k ← 0
FINTANTOCHE' a ≥ b ESEGUI
  {a ← a–b
   k ← k+1}
SCRIVI k
```

Output per: a = 16, b = 3? a = 12, b = 2?
Quale operazione esegue, in pratica, questo algoritmo?

13) *Nel seguente quesito,*
a è un numero qualsiasi, n è un intero >0

```
LEGGI a, n
b ← 1
k ← 0
RIPETI
  { k ← k+1
    b ← b*a }
FINCHE' k = n
SCRIVI b
```

Qual è l'output di questo algoritmo
nel caso a = 5, n =3 ?
E nel caso a = 2, n = 10 ?
Riusciresti a modificare l'algoritmo
in modo che funzioni anche nel caso n = 0 ?

14) *a, b, c sono 3 numeri qualsiasi*

```
LEGGI a, b, c
SE b>a ALLORA
   {x ← a   a ← b   b ← x }
SE c>b ALLORA
       { SE c>a ALLORA
                {x ← a  y ← b  a ← c  b ← x  c ← y}
              ALTRIMENTI {x ← b  b ← c  c ← x}  }
SCRIVI a, b, c
```

Cosa fa questo algoritmo?

(MOLTO istruttivo fare con attenzione la "traccia"
scegliendo la terna a, b, c in più modi differenti!)

15) *n intero positivo*

```
LEGGI n
k ← 0
RIPETI
     { k ← k+1
       SCRIVI " * "}
FINCHE' k = n
```

Qual è l'effetto di questo algoritmo?

16) *a, b, c sono 3 numeri qualsiasi*

```
LEGGI a, b, c
SE a<=b ALLORA
   { SE a<=c  ALLORA x ← a  ALTRIMENTI x ← c }
ALTRIMENTI
   { SE b<=c  ALLORA x ← b  ALTRIMENTI x ← c }
SCRIVI x
```

Qual è l'effetto di questo algoritmo?

17) *Nel seguente quesito, n è un intero >1.*

```
LEGGI n
cont ← 0
RIPETI
    { cont ← cont+1
      SE n MOD 2 = 0  ALLORA  n ← n DIV 2
                      ALTRIMENTI  n ← 3n+1 }
FINCHE' n = 1
SCRIVI cont
```

Output per n = 5? E per n = 6? E per n = 7?

Verifica che per n = 27 il valore finale di cont è 111.

Fra gli interi n da 2 a 20, esiste un valore di n per cui l'esecuzione del procedimento non ha mai termine?

18) *Nel seguente quesito, n è un intero positivo.*

```
LEGGI a
RIPETI
    { b ← a MOD 10
      a ← a DIV 10
      SCRIVI b }
FINCHE' a = 0
```

Prova ad eseguire l'algoritmo con a = 2345.
In generale, che relazione hanno in numeri scritti in output, col numero letto in input?

19) *Nel seguente quesito, n è un intero positivo.*

```
LEGGI n
s ← 0
k ← 0
RIPETI
    { k ← k+1
      s ← s+2k–1 }
FINCHE' k = n
SCRIVI s
```

Stabilisci cosa scrive questo algoritmo quando il numero n in ingresso è 5. E quando n = 8?

20) *Nel seguente quesito, a è un intero positivo.*

```
LEGGI a
cont ← 0
FINTANTOCHE' a<>1 ESEGUI
    { a ← a DIV 2
      cont ← cont+1 }
SCRIVI cont
```

Stabilisci cosa scrive questo algoritmo quando il numero a in ingresso è 33.
E quando a è inizialmente uguale a: 1? 1024?
Se si desse in ingresso a = 0, che succederebbe?

a) Scrivi un diagramma di flusso per un algoritmo che risolva i seguenti problemi;
b) traduci anche il diagramma in linguaggio di progetto

21) Leggere in ingresso un numero non prefissato di addendi, e scrivere la somma di tutti questi addendi.
Si intende che la sequenza di addendi sia terminata quando in input viene fornito il "numero sentinella" 0.

22) Leggere in ingresso un intero *n*, poi una sequenza di *n* numeri; eseguire il prodotto di questi.

23) Leggere in input una sequenza di numeri positivi qualsiasi, e scriverne il minimo e il massimo.
Servirsi dello 0 come "sentinella" per indicare la fine della sequenza.
OSSERVAZIONE
Non è facile come potrebbe sembrare, scrivere correttamente questo algoritmo: occorre infatti evitare che la "sentinella" 0, la quale NON fa parte dell'insieme dei numeri, vada a comprometterne gli esiti ...

24) Si chiama "successione di Fibonacci" la sequenza di numeri 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... così costruita:
- i primi due numeri della sequenza sono 0 e 1 rispettivamente;
- a partire dal 3°, ciascun termine della sequenza è ottenuto sommando i due termini che lo precedono.

Scrivi un algoritmo che, letto in ingresso n (≥ 3), scriva i primi *n* termini della successione di Fibonacci.

25) Vengono forniti in input più numeri; la sequenza terminerà quando verrà introdotto il "numero sentinella" 0.
Si desidera fornire in uscita la media aritmetica dei numeri dati.

26) Letto in ingresso un intero *n*, scriverne i divisori e contarli
(s'intende che l'algoritmo tenga conto anche dei divisori "impropri", che sono il numero stesso e l'unità).

27) Completa l'algoritmo precedente, in modo che fornisca in uscita anche la scritta
"Il numero è primo" oppure "Il numero non è primo", a seconda dei casi.
E' chiaro che la prima circostanza si verifica quando i divisori sono soltanto 2 (l'unità e il numero).

28) Vengono forniti in input più voti (dall'1 al 10); si vogliono contare quelli sufficienti, ossia non inferiori a 6.

29) Scrivi un algoritmo che, letti in ingresso due numeri interi *a*, *b*, ne calcoli il minimo comune multiplo.
Ci sono diversi modi alternativi per impostare l'algoritmo;
ad esempio, si può calcolare la successione dei multipli di *a* (a, $2a$, $3a$, $4a$, ...), arrestandosi quando si perviene ad un numero che risulta multiplo anche di *b* (cioè, che risulta divisibile per *b*).
E i successivi multipli di *a* possono essere generati
I) per somma ($mult \leftarrow mult + a$)
II) oppure tramite moltiplicazione per un intero ($mult \leftarrow a * k$, con *k* che assume i valori 1, 2, 3, …)

30) Un intero si dice "perfetto" se è uguale alla somma dei suoi divisori, inclusa l'unità ma escluso il num. stesso: ad esempio 28 è perfetto, perché ha come divisori (a parte sé stesso) $1, 2, 4, 7, 14$, e $1+2+4+7+14=28$.
Letto in input un intero *n*, stabilire se *n* è un numero "perfetto".
NOTA - Ricordiamo che *b* è divisore di *a* se e solo se a MOD $b = 0$ (MOD dà il *resto* della *divisione intera*)

31) Letto in ingresso un intero positivo *n*, stabilire se si tratta di un numero primo. Questa volta, però, è richiesto di *ridurre* il numero di passi che l'algoritmo dovrà compiere prima di fornire la risposta.
A tale scopo, non si stanno a individuare e contare *tutti* i divisori di *n*;
si prova invece a vedere se *n* è divisibile per 2, poi per 3, ecc., fermandosi quando
a) si trova un divisore
b) oppure il numero che è "candidato" ad essere un divisore di *n* ha già superato la radice quadrata di *n* sqrt(*n*) (infatti si dimostra che, se in tal caso non sono ancora stati trovati divisori propri, *n* non potrà avere alcun divisore proprio; i divisori propri sono quelli diversi dall'unità e dal numero stesso).

NOTA - In un blocco romboidale, la *condizione* può benissimo contenere connettivi logici come E, O

32) Letti in ingresso due interi positivi *a*, *b*, si determinano il quoziente intero e il resto della divisione intera *a*:*b* sottraendo dal numero *a* il numero *b* più volte.

33) Una marionetta puntiforme M si trova inizialmente alla distanza di *x* metri da una parete.
Improvvisamente, comincia a muoversi a scatti, facendo uno scatto al secondo, e ad ogni scatto percorrendo, in direzione della parete, uno spazio uguale alla META' della distanza che ancora la separa dalla parete.
Dopo quanti secondi la distanza diventerà minore di 1 milionesimo di millimetro?
Scrivi un algoritmo che risponda a questa domanda.

34) Scrivi un algoritmo che, letti in ingresso due numeri interi non nulli *a*, *b*, ne calcoli il massimo comun divisore con l'efficiente e ingegnoso "algoritmo di Euclide".

L'Algoritmo di Euclide per il calcolo del Massimo Comun Divisore di due interi



Siano a, b i due interi di cui vogliamo determinare il M.C.D.
Calcoliamo il resto r della divisione intera $a:b$,
e a questo punto sostituiamo la coppia (a,b) con la coppia (b, r):
$a \leftarrow b,\ b \leftarrow r$.

Si può dimostrare che il M.C.D. della "nuova" coppia coincide col M.C.D. della "vecchia".
Iteriamo (= ripetiamo) il procedimento per la nuova coppia;
prima o poi, poiché in questo modo il "b", evolvendosi, diventa sempre più piccolo,
si arriverà ad ottenere $b = 0$.
Ma a quel punto, essendo M.C.D. $(a, 0) = a$, il valore che avrà a in quel momento sarà il M.C.D. cercato.

Esempio:

$a = 108,\ b = 84$
$108 : 84 = 1$ *col resto di* $24 \rightarrow r = 24$
$a = \cancel{108}\,84,\ b = \cancel{84}\,24$
$84 : 24 = 3$ *col resto di* $12 \rightarrow r = 12$
$a = \cancel{84}\,24,\ b = \cancel{24}\,12$
$24 : 12 = 2$ *con resto* $0 \rightarrow r = 0$
$a = \cancel{24}\,12,\ b = \cancel{12}\,0$
Essendo $b = 0$, *il procedimento termina*: $M.C.D. = a = 12$

Schematicamente:

$a = 108,$	$b = 84$	$r = 24$
$a = 84,$	$b = 24$	$r = 12$
$a = 24,$	$b = 12$	$r = 0$
$a = 12,$	$\boxed{b = 0}$	*STOP*

M.C.D. $= 12$

35) Viene fornita in ingresso una somma di denaro in euro, con eventualmente decimi e centesimi (es.: 8,47).
L'algoritmo dovrà calcolare il minimo numero di monete necessarie per totalizzare quella cifra,
se si ha a disposizione un numero a piacere di pezzi da: 2 euro, 1 euro; 50, 20, 10, 5, 2 e 1 centesimo.

36) L'offerta promozionale di un negozio prevede il 10% di sconto su tutti gli acquisti, e addirittura, per spese superiori ai 100 euro, il normale 10% fino a 100 euro, e il 25% di sconto sulla cifra spesa in più.
Quanto pagherà, in seguito all'offerta, una persona che ha comprato merce per *x* euro?
Scrivi un algoritmo che risponda a questa domanda.

37) Ci sono 8 palline tutte identiche all'apparenza, ma mentre 7 di esse hanno pure ugual peso, una invece ha peso minore delle altre.
Trova un algoritmo per stabilire quale sia la pallina anomala, tramite 2 pesate con una bilancia a due piatti.

38) Ci sono 9 palline tutte identiche all'apparenza, ma mentre 8 di esse hanno pure ugual peso, una invece ha peso minore delle altre.
Trova un algoritmo per stabilire quale sia la pallina anomala, tramite 2 pesate con una bilancia a due piatti.

RISPOSTE

1) Scrive il massimo fra due numeri letti in ingresso

2) "n è pari" (dalla parte del "Sì"), "n è dispari" (dalla parte del "No")

3) Moltiplica a per b col metodo delle "somme ripetute"

4) 100 000 000 (cento milioni). L'espressione è a^{2^b} (a elevato all'esponente 2^b)

5) Conta "quante volte b sta in a", ossia determina il quoziente della divisione intera a:b.
In pratica, l'algoritmo equivale all'operazione a DIV b.

6) Approssima per difetto, con 1 cifra dopo la virgola, la radice quadrata di a.

7) La tabellina del 10 (tutte le coppie di interi da 1 a 10, con accanto il risultato della moltiplicazione)

8) Con $a = 5, n = 4$, l'output è 521.

9) L'output in questo caso è 20. Esegue la moltiplicazione m*n col metodo delle somme ripetute.

10) E' sbagliato perché con l'istruzione $a \leftarrow b$ il valore originario di a *va perso*,
in quanto nella "scatoletta" che lo conteneva esso viene "sovrascritto", viene rimpiazzato dal valore di b.
Quando poi viene eseguita l'istruzione successiva $b \leftarrow a$,
nella "scatoletta" b viene messo il valore "*attuale*" di a,
ossia il valore presente nella "scatoletta" a *al momento in cui l'istruzione viene eseguita*.
E tale valore è, come abbiamo visto, quello che era il valore iniziale di b.
In definitiva, se inizialmente era $a = 4, b = 5$,
alla fine, con questo algoritmo, è $a = 5, b = 5$.

11) L'output è
5 4.
In pratica, questo algoritmo scambia i contenuti delle "scatolette" a, b;
scambia i valori delle due variabili a, b.
C'è voluta una variabile ausiliaria; altrimenti (vedi esercizio precedente) non sarebbe stato possibile.

12) 5; 6.
Calcola il quoziente intero della divisione intera a:b.
L'algoritmo equivale all'operazione a DIV b.

13) 125; 1024.
E' chiaro che l'algoritmo calcola la potenza avente base a ed esponente n.
Un modo per modificarlo affinché funzioni correttamente anche con n = 0 potrebbe consistere,
ad esempio, nel sostituire la RIPETI … FINCHE' … con una FINTANTOCHE' … ESEGUI … :

```
LEGGI a, n
b ← 1
k ← 0
FINTANTOCHE' k<n ESEGUI
  { k ← k+1
    b ← b*a }
SCRIVI b
```

14) Scrive in ordine *decrescente* i 3 numeri letti

15) L'effetto è di scrivere tanti asterischi quant'è il numero letto in ingresso

16) Scrive il minimo fra tre numeri letti in ingresso

17) 5; 8; 16
No, non esiste.
Anzi: fino ad oggi TUTTI gli interi n coi quali si è provato hanno condotto a sequenze terminanti con 1.
E sono stati testati tutti i numeri interi da 2 fino a valori enormi (dell'ordine dei miliardi di miliardi).
Si è quindi portati a credere che *per qualsiasi* intero n il procedimento abbia termine
(ossia, porti, dopo un numero più o meno elevato di passi, a ottenere 1).
Tuttavia, questa congettura (nota come Congettura di Collatz, o Congettura del 3n+1, o con altri nomi)
alla data attuale non è stata ancora dimostrata.

18) Ne rappresentano le cifre, scritte in ordine invertito

19) 25; 64. In generale, si ottiene il quadrato di n, attraverso la somma dei primi n interi dispari

20) 5; 0; 10; con a=0 si otterrebbe un ciclo infinito, l'esecuzione non avrebbe mai termine.
In generale, con a>0, si ottiene in output l'esponente della potenza di 2 più vicina, per difetto, ad a.

22) Ad esempio:

```
INIZIO
LEGGI n
p ← 1
k ← 1
RIPETI
    {LEGGI a
     p ← p*a
     k ← k+1}
FINCHE' k>n
SCRIVI p
FINE
```

23) Ad esempio:

```
INIZIO
LEGGI a
min ← a
max ← a
RIPETI
  { SE a<min ALLORA min ← a
    ALTRIMENTI
    SE a>max ALLORA max ← a
    LEGGI a }
FINCHE' a=0
SCRIVI min, max
FINE
```

oppure:

```
INIZIO
LEGGI a
min ← a
max ← a
RIPETI
  {  LEGGI a
     SE a<>0 ALLORA
      { SE a<min ALLORA min ← a
        ALTRIMENTI
        SE a>max  ALLORA max ← a }  }
FINCHE' a=0
SCRIVI min, max
FINE
```

NOTA1:
<> significa "diverso da"

NOTA 2:
l'algoritmo funzionerebbe anche se non si scrivesse ALTRIMENTI"

24) Ad esempio:

```
INIZIO
LEGGI n
a ← 0
b ← 1
SCRIVI a, b
i ← 3
RIPETI
    { c ← a+b
      SCRIVI c
      a ← b
      b ← c
      i ← i+1 }
FINCHE' i>n
FINE
```

25) Ad esempio:

```
INIZIO
somma ← 0
cont ← 0
RIPETI
    { LEGGI numero
      cont ← cont+1
      somma ← somma+numero }
FINCHE' numero=0
cont ← cont−1
media ← somma/cont
SCRIVI media
FINE
```

26) Ad esempio:

```
INIZIO
LEGGI n
contdiv ← 0
k ← 1
RIPETI
    {  SE n MOD k = 0
       ALLORA
          { SCRIVI k
            contdiv ← contdiv+1}
       k ← k+1   }
FINCHE' k>n
SCRIVI contdiv
FINE
```

33) Ad esempio:

```
INIZIO
LEGGI x
cont ← 0
FINTANTOCHE' x>=0,000000001
                    ESEGUI
                    { x ← x/2
                      cont ← cont+1 }
SE cont=0 ALLORA
    SCRIVI "la distanza è già inferiore
                a 1 milionesimo di mm"
ALTRIMENTI
    SCRIVI cont
FINE
```

34) **ALGORITMO DI EUCLIDE**

```
INIZIO
LEGGI a, b
RIPETI
    { r ← a MOD b
      a ← b
      b ← r }
FINCHE' b=0
SCRIVI a
FINE
```

37)

```
INIZIO
Pesa due gruppi di 3 palline ciascuno
SE la bilancia resta in equilibrio, ALLORA
                { pesa le due palline rimanenti;
                  prendi la più leggera }
ALTRIMENTI
   { prendi due palline dal gruppo meno pesante;
     SE la bilancia resta in equilibrio,
     ALLORA prendi la pallina rimanente
     ALTRIMENTI prendi la più leggera }
FINE
```

CHALLENGE
Un problema veramente TREMENDO è quello "delle 12 palline":

"*Ci sono 12 palline tutte identiche in apparenza;*
ma mentre 11 di esse hanno pure ugual peso,
una invece ha peso diverso dalle altre;
non si sa se questa pallina è più pesante o più leggera.
Trova un algoritmo per stabilire quale sia la pallina anomala, e se sia più pesante o più leggera delle altre, tramite 3 pesate con una bilancia a due piatti".



PROVE INVALSI - PROBLEMI VARI E "CREATIVI"



L'INVALSI
(Istituto Nazionale per la VALutazione del SIstema educativo di istruzione e di formazione)
è l'organizzazione che, in Italia, ha l'incarico di predisporre strumenti
per stimare i livelli di apprendimento raggiunti dagli studenti nei vari Istituti scolastici,
e nelle singole classi all'interno di questi, confrontando anche Istituti e classi coi dati medi complessivi.

A tale scopo, INVALSI predispone ogni anno

- delle prove disciplinari che gli allievi sono chiamati ad affrontare
- e un questionario sulle loro condizioni sia personali che familiari e sul loro atteggiamento verso lo studio.

Dopo aver ricevuto comunicazione delle risposte fornite dai ragazzi, INVALSI attribuisce punteggi
alle prove svolte ed elabora i dati dal punto di vista statistico confrontando la *performance* di ogni Scuola
con la media nazionale e regionale; i risultati di questa analisi rimangono poi a disposizione in modo che
ogni Istituto scolastico ne possa trarre elementi di riflessione utili a migliorare la sua "offerta formativa".

Nelle Medie superiori, ad esempio, un test INVALSI si effettua ogni anno nel mese di maggio
per le classi Seconde, e le materie coinvolte sono Italiano e Matematica.

♫ Se clicchi su questa freccia ⇨ dal sito www.chihapauradellamatematica.org,
potrai scaricare

- i TESTI e le CORREZIONI delle PROVE INVALSI di matematica proposte in passato per le classi Seconde delle Scuole Medie Superiori
- e prove analoghe destinate agli studenti delle classi Prime

♫ Un'utilissima raccolta di prove PISA, ispirate a situazioni "concrete",
di "matematica della Realtà", è inoltre disponibile cliccando su quest'altra freccia ⇨
(PISA è, grosso modo, una specie di equivalente internazionale di ciò che in Italia è l'INVALSI)

♫ Qui di seguito pubblichiamo soltanto una rassegna di ESEMPI diffusi dall'INVALSI
nell'anno in cui hanno preso il via i test per le Seconde di scuola Secondaria Superiore

ESEMPI DELLA PROVA DI MATEMATICA (A BENEFICIO DELLE SECONDE SUPERIORI)
Trovi le risposte a pagina 525

1) In una città il costo di un biglietto dell'autobus è passato da 1 euro a 1,20 euro,
se acquistato nelle biglietterie a terra, e 1,50 se acquistato a bordo.
Qual è, in percentuale, il sovrapprezzo per l'acquisto a bordo rispetto all'acquisto in biglietteria?

□ A. 20% □ B. 25% □ C. 30% □ D. 50%

2) In un cinema il biglietto intero costa 9 euro e il ridotto 6 euro.
Sono entrati 170 spettatori e l'incasso totale è stato di 1380 euro.
a) Quanti biglietti interi e quanti ridotti sono stati venduti? ……
b) Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta ……
……..
……..

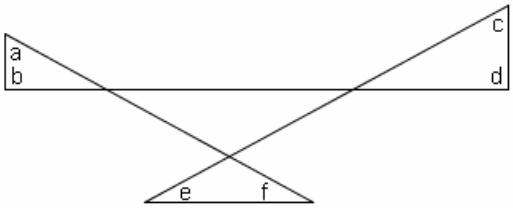
3) Elena compie gli anni in giugno.
Qui a fianco è riportato il calendario di giugno 2010,
dove sono evidenziati i giorni festivi.
Qual è la probabilità che Elena abbia festeggiato
il compleanno 2010 in un giorno festivo?

Risposta: …….

Giugno

Lu	Ma	Me	Gi	Ve	Sa	Do
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

4) Qual è la somma degli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* nella figura disegnata qui a fianco?



- □ A. Un angolo piatto, ossia 180°
- □ B. Tre angoli retti, ossia 270°
- □ C. Due angoli piatti, ossia 360°
- □ D. Cinque angoli retti, ossia 450°

5) Qual è il risultato della seguente espressione? $\dfrac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}+1$ □ A. 1 □ B. 7/4 □ C. 2 □ D 4

6) Nel risolvere l'equazione alla riga 1 è stato commesso un errore.

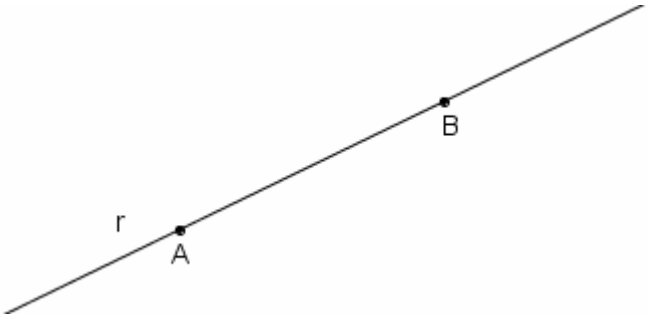
$$-10x-2+4x-4=0 \quad (1)$$
$$-10x+4x=2+4 \quad (2)$$
$$6x=6 \quad (3)$$
$$x=\frac{6}{6} \quad (4)$$
$$x=1 \quad (5)$$

In quale passaggio è stato commesso l'errore?

- □ A. Nel passaggio dalla riga 1 alla riga 2
- □ B. Nel passaggio dalla riga 2 alla riga 3
- □ C. Nel passaggio dalla riga 3 alla riga 4
- □ D. Nel passaggio dalla riga 4 alla riga 5

7) Qui accanto vedi una retta *r* sulla quale sono segnati due punti A e B.
Disegna un triangolo rettangolo ABC in modo tale che il segmento AB sia un cateto.

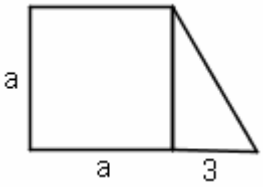
Indica con una crocetta l'angolo retto del triangolo.



8) In quale di queste sequenze i numeri sono ordinati dal più piccolo al più grande?

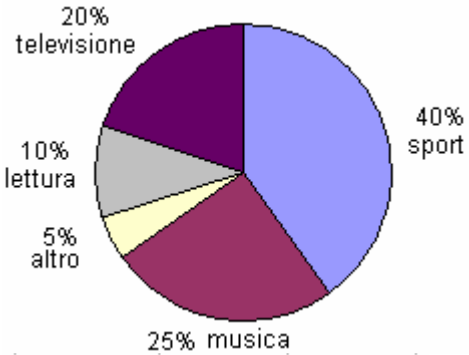
- □ A. $\frac{3}{100}$ 0,125 $\frac{1}{3}$ 0,65
- □ B. 0,125 $\frac{3}{100}$ 0,65 $\frac{1}{3}$
- □ C. 0,65 0,125 $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{100}$
- □ D. $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{100}$ 0,65 0,125

9) Scrivi la formula che esprime come varia l'area A della figura qui di fianco, al variare della lunghezza *a*.



A = _____

10) Un'indagine sull'attività preferita nel tempo libero, compiuta su un campione di 220 studenti di una scuola con 700 studenti in totale, ha dato i risultati rappresentati nel grafico.



Qual è la probabilità che estraendo a caso uno studente del campione si ottenga un alunno che dedica il tempo libero alla lettura?

- □ A. $\frac{1}{220}$ □ B. $\frac{1}{10}$ □ C. $\frac{1}{5}$ □ D $\frac{1}{70}$

11) Piero e Giorgio partono per una breve vacanza. Decidono che Piero pagherà per il cibo e Giorgio per l'alloggio. Il riepilogo delle spese che ciascuno di loro ha sostenuto è nella tabella qui a fianco.
Al ritorno fanno i conti per dividere in parti uguali le spese.

	Giorgio	Piero
Lunedì	27 euro	35 euro
Martedì	30 euro	30 euro
Mercoledì	49 euro	21 euro

a) Quanti euro deve dare Piero a Giorgio per far sì che entrambi abbiano speso la stessa somma?
Risposta: …… euro

b) Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta: …….

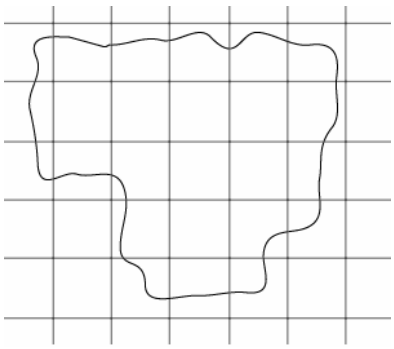
12) Nella seguente tabella sono riportati i prezzi del campeggio VACANZE FELICI.

Campeggio VACANZE FELICI - Prezzi giornalieri 2010

Periodo	dal 18/4 al 13/6 dal 9/9 al 1/11	dal 14/6 al 4/7 dal 26/8 al 8/9	dal 5/7 al 7/8	dal 8/8 al 25/8
Adulti	€ 8,00	€ 10,00	€ 13,00	€ 14,50
Bambini fino a 12 mesi	gratis	gratis	gratis	gratis
Bambini da 1 anno fino a 6	€ 4,00	€ 5,00	€ 6,50	€ 8,50
Bambini da 7 anni fino a 10	€ 6,00	€ 8,00	€ 10,00	€ 12,00

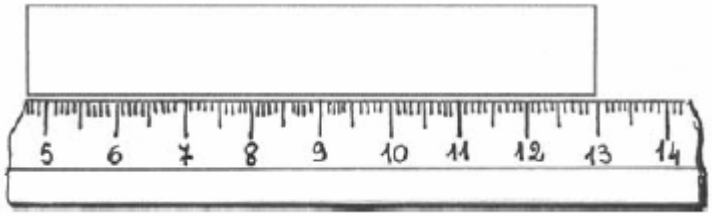
Una famiglia è formata da due adulti, un ragazzo di 9 anni e una bambina di 4 anni.
Quanto ha speso per una vacanza di cinque giorni dal 5 al 9 luglio 2010?
Risposta: …….....

13) Nella figura che vedi
ogni quadretto ha il lato di 1 cm.
Quanto misura all'incirca
l'area racchiusa
dalla linea curva?



- □ A. Meno di 8 cm^2
- □ B. Più di 8 cm^2 e meno di 13 cm^2
- □ C. Più di 13 cm^2 e meno di 25 cm^2
- □ D. Più di 25 cm^2

14) Giovanni vuole misurare il lato maggiore del rettangolo rappresentato qui sotto,
ma il suo righello è rotto. Lo posiziona nel modo che vedi.



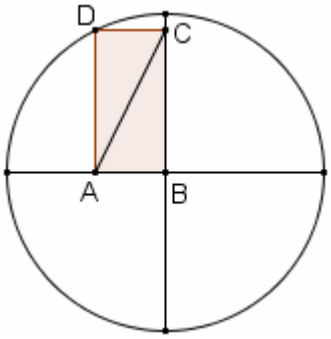
Qual è la misura del lato?

- □ A. La misura del lato è 8,3 cm
- □ B. La misura del lato è 9 cm
- □ C. La misura del lato è 13 cm
- □ D. Non si può misurare perché non c'è lo 0

15) Sandro ha 20 dm di spago per chiudere quattro pacchi che deve spedire.
Per ogni pacco gli servono 60 cm di spago. Riuscirà a chiudere i quattro pacchi?

- □ A. No, perché 60 è maggiore di 20
- □ B. Sì, perché 20 dm sono più di 6 dm
- □ C. No, perché 240 cm sono più di 20 dm
- □ D. Sì, perché i dm sono più grandi dei cm

16) La circonferenza in figura ha il raggio di 4 cm.
ABCD è un rettangolo.



a. Qual è la lunghezza (in cm) del segmento AC?
Risposta: ……

b. Giustifica la tua risposta:
……
……
……

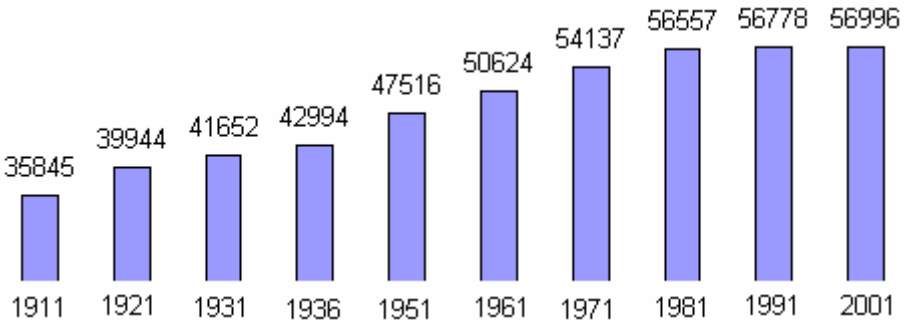
17) L'insegnante dice:
"Prendiamo un numero naturale che indichiamo con n. Cosa si può dire del risultato di $n(n-1)$?
E' sempre pari, oppure sempre dispari, oppure può essere qualche volta pari e qualche volta dispari?".
Alcuni studenti rispondono in questo modo:
Roberto: "Può essere sia pari sia dispari, perché n è un numero qualsiasi"
Angela: "E' sempre dispari, perché $n-1$ indica un numero dispari"
Ilaria: "E' sempre pari, perché $3\times(3-1)$ fa 6, che è pari"
Chiara: "E' sempre pari perché n e $n-1$ sono numeri consecutivi e quindi uno dei due dev'essere pari"
Chi ha ragione e fornisce la spiegazione corretta?

□ A. Roberto □ B. Angela □ C. Ilaria □ D. Chiara

18) Il prezzo p (in euro) di una padella dipende dal suo diametro d (in cm) secondo la formula $p = \frac{1}{15} d^2$. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		V	F
a.	Il prezzo della padella è direttamente proporzionale al suo diametro	□	□
b.	Il prezzo della padella aumenta all'aumentare del suo diametro	□	□
c.	Il rapporto fra il diametro della padella e il suo prezzo è 15	□	□

19) Il seguente grafico rappresenta la popolazione residente in Italia (espressa in migliaia) nei censimenti dal 1911 al 2001:



(dati Istat).

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- □ A. I censimenti sono stati attuati regolarmente ogni dieci anni.
- □ B. La popolazione è rimasta invariata negli ultimi tre censimenti.
- □ C. La popolazione nel decennio 1911-1921 è aumentata di circa quattro milioni di persone.
- □ D. Dal 1936 al 1951 la popolazione è aumentata di più di 5 milioni di persone.

20) Da compendio prove PISA (Program for International Students Assessment).

ANDATURA

La figura mostra le orme di un uomo che cammina.



La lunghezza P del passo è la distanza tra la parte posteriore di due orme consecutive.

Per gli uomini, la formula $\frac{n}{P} = 140$ fornisce una relazione approssimativa tra n e P dove:

n = numero di passi al minuto, e P = lunghezza del passo in metri.

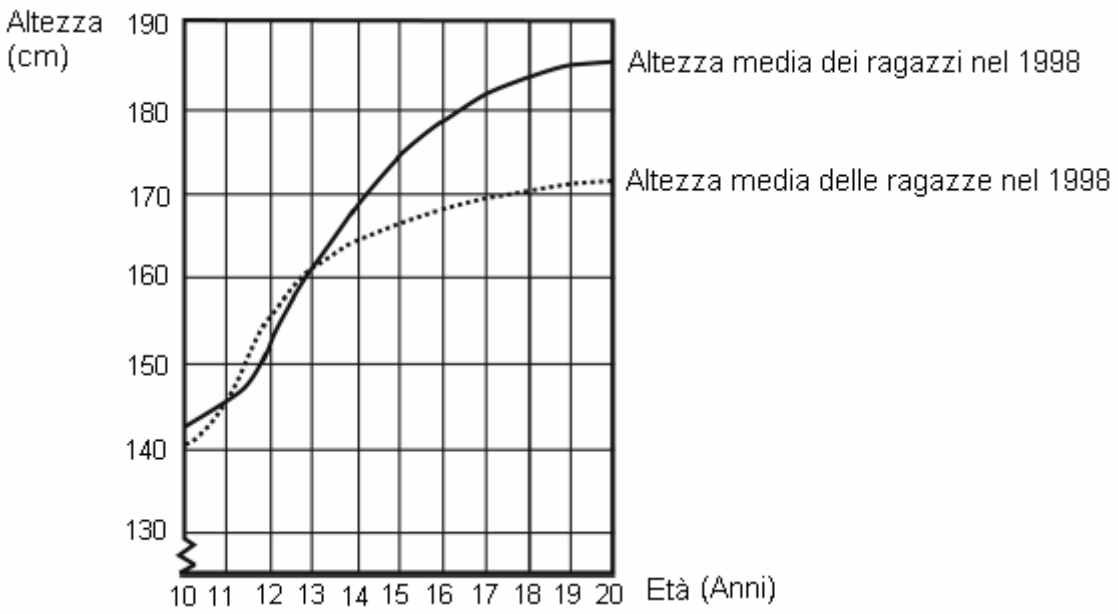
Domanda 1 - Se la formula si applica all'andatura di Enrico ed Enrico fa 70 passi al minuto, qual è la lunghezza del passo di Enrico?
Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.
.....

Domanda 2 - Bernardo sa che la lunghezza del suo passo è di 0,80 metri.
La formula viene applicata all'andatura di Bernardo.
Calcola la velocità a cui cammina Bernardo esprimendola in metri al minuto e in chilometri all'ora.
Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.
.....
.....

21) Da **compendio prove PISA**

LA CRESCITA - I giovani diventano più alti

Il grafico seguente mostra l'altezza media dei ragazzi e delle ragazze olandesi nel 1998.



Domanda 1 - A partire dal 1980 l'altezza media delle ragazze di 20 anni è aumentata di 2,3 cm arrivando a 170,6 cm. Qual era l'altezza media delle ragazze di 20 anni nel 1980?
Risposta: ..... cm

Domanda 2 - In base al grafico, in che periodo della vita le ragazze sono, in media, più alte dei maschi della stessa età?
.....

Domanda 3 - Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.
.....

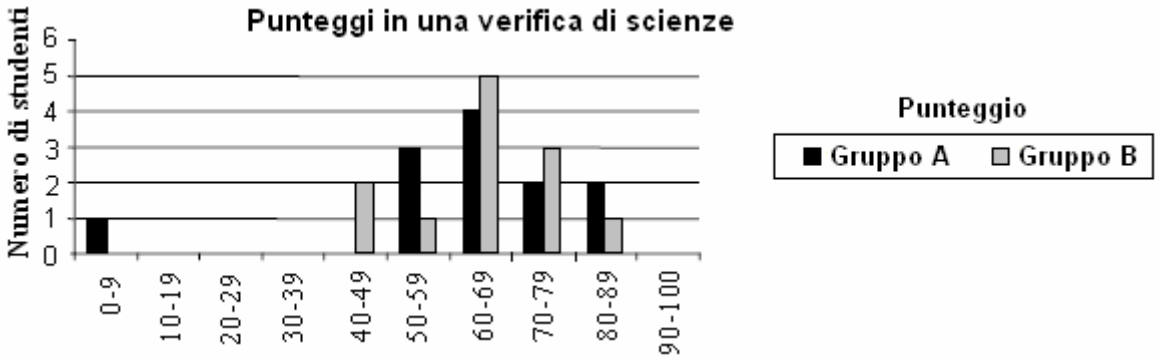
22) Da **compendio prove PISA: VERIFICA DI SCIENZE**

Nella scuola di Martina, l'insegnante di scienze fa delle verifiche nelle quali il punteggio massimo è 100.
Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche di scienze.
Alla quinta verifica, prende 80.
Qual è la media dei punteggi in scienze di Martina dopo tutte e cinque le verifiche?

Media: .....

23) Da **compendio prove PISA: RISULTATI DI UNA VERIFICA**

Il grafico seguente mostra i risultati di una verifica di scienze, ottenuti da due gruppi di studenti, indicati come Gruppo A e Gruppo B.
Il punteggio medio del Gruppo A è 62,0 e quello del Gruppo B è 64,5.
Per avere la sufficienza, gli studenti devono ottenere almeno 50 punti.



In base a questo grafico, l'insegnante sostiene che, nella verifica, il Gruppo B è andato meglio del Gruppo A. Gli studenti del Gruppo A non sono d'accordo con l'insegnante.
Essi cercano di convincere l'insegnante che il Gruppo B non è necessariamente andato meglio.
Con l'aiuto del grafico, suggerisci agli studenti del Gruppo A una spiegazione matematica che potrebbero usare.

24) Prove PISA 2003: BATTITO CARDIACO

Per motivi di salute, le persone dovrebbero limitare i loro sforzi, ad esempio durante le attività sportive, per non superare una determinata frequenza del battito cardiaco.
Per anni, la relazione tra la frequenza cardiaca massima consigliata e l'età della persona è stata descritta dalla seguente formula:
Frequenza cardiaca massima consigliata = 220 – età
Recenti ricerche hanno mostrato che questa formula dovrebbe essere leggermente modificata.
La nuova formula è la seguente:
Frequenza cardiaca massima consigliata = 208 – (0,7 × età)

Domanda 1
Un articolo di giornale afferma: "Una conseguenza dell'uso della nuova formula al posto della vecchia è che il numero massimo consigliato di battiti cardiaci al minuto diminuisce leggermente per i giovani e aumenta leggermente per gli anziani".
A partire da quale età la frequenza cardiaca massima consigliata diventa maggiore come risultato dell'introduzione della nuova formula? Scrivi i passaggi che fai per arrivare alla risposta.
…….

Domanda 2
La formula **frequenza cardiaca massima consigliata = 208 – (0,7 × età)** viene usata anche per determinare quando l'esercizio fisico ha efficacia massima.
Alcune ricerche hanno mostrato che l'esercizio fisico ha la massima efficacia quando i battiti sono all'80% della frequenza cardiaca massima consigliata.
Scrivi una formula che fornisca la frequenza cardiaca, in funzione dell'età, affinché l'esercizio fisico abbia la massima efficacia. ……

25) La formula che lega la scala della temperature in gradi Celsius C e in gradi Fahrenheit F è la seguente

$$C = \frac{5(F-32)}{9}$$

a. Un termometro registra la temperatura di 95 gradi Fahrenheit.
A quanti gradi Celsius corrispondono? Risposta …….

b. Quale formula permette di trovare la temperatura in gradi Fahrenheit conoscendo la temperatura in gradi Celsius?

□ A. $F = \frac{9C+160}{5}$ □ B. $F = \frac{C+41}{5}$ □ C. $F = \frac{C+9}{160}$ □ D. $F = \frac{32-9C}{5}$

26) Si sa che $a < b$ e $ab < 0$. Quale delle seguenti relazioni è sicuramente vera?

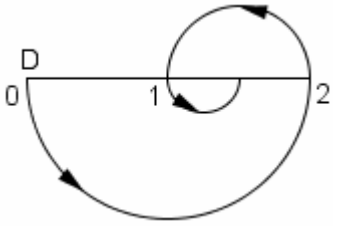
□ A. $a^2 > b^2$ □ B. $a^2 < b^2$ □ C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ □ D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

27) Da un quadrato di lato *a* viene ritagliato al suo interno un quadrato di lato *b* (*b*<*a*). Quale tra le seguenti espressioni algebriche consente di calcolare l'area della parte restante del quadrato originario?

□ A. $a-b$ □ B. $(a-b)(a+b)$ □ C. a^2+b^2 □ D. $(a-b)^2$

28) "La somma di due numeri dispari consecutivi è sempre un multiplo di 4".
Quale tra le seguenti scritture può essere considerata una dimostrazione dell'enunciato precedente?
□ A. $2d + 2d = 4d$
□ B. $3+5=8 \ e \ 5+7=12$
□ C. $(2k+1)+(2k+3)=4k+4=4(k+1)$
□ D. $2k+1+2k+1=4k+2$

29) Partendo dal punto D (vedi la figura) descriviamo una semicirconferenza. Proseguiamo poi disegnando una semicirconferenza avente per raggio la metà della precedente semicirconferenza, e così di seguito, in modo che ogni semicirconferenza disegnata, dopo la prima, abbia raggio metà di quella precedente.



Se complessivamente il percorso è formato da 4 semicirconferenze, qual è la lunghezza totale del percorso?

□ A. $\frac{15}{4}\pi$ □ B. $\frac{15}{8}\pi$ □ C. $\frac{7}{4}\pi$ □ D. $\frac{7}{2}\pi$

30) Considera l'equazione $x^5 + x^4 + x + 1 = 0$.

a. Una sua soluzione è □ A. $x = \frac{1}{4}$ □ B. $x = 1$ □ C. $x = 2$ □ D. $x = -1$

b. Ci sono altre soluzioni reali? □ Sì □ No

Giustifica la tua risposta

……

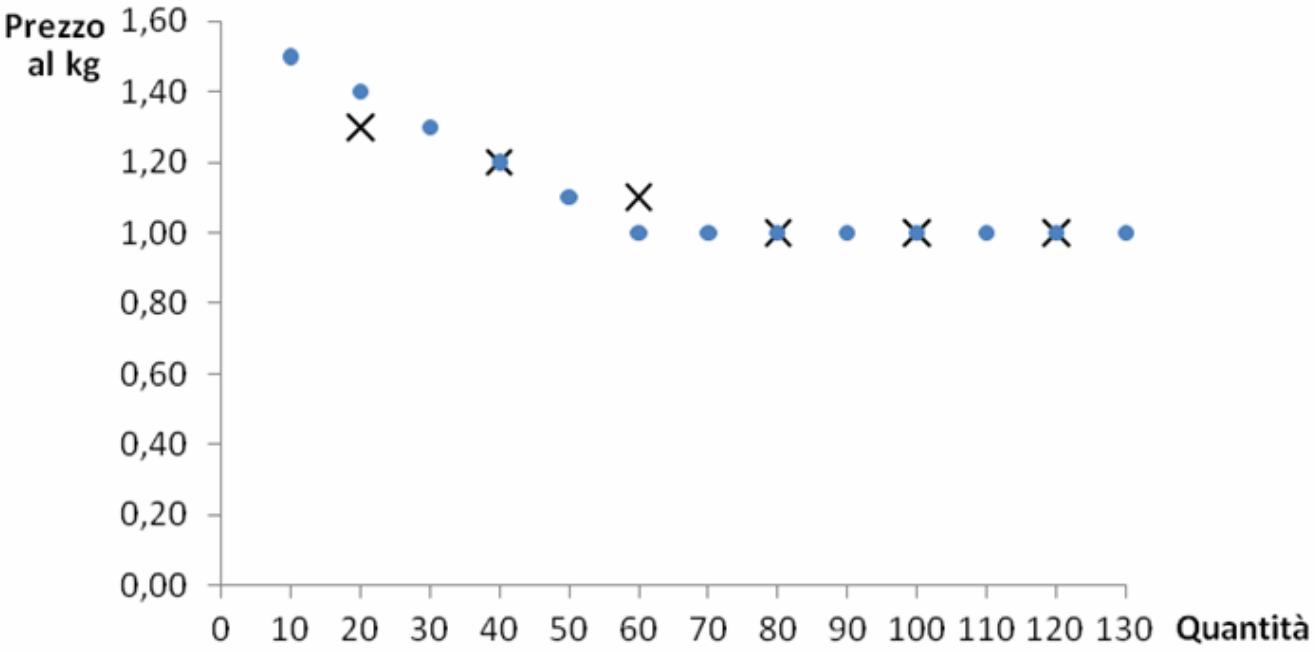
……

31) Il reddito medio annuo dei lavoratori agricoli di un certo paese ammonta a 3500 scudi e quello dei lavoratori dell'industria a 4500 scudi.
È corretto affermare che il reddito medio complessivo ammonta a 4000 scudi?

□ A. Sì, perché facendo 3500 + 4000 e dividendo per 2 si ottiene proprio 4000
□ B. No, perché manca l'informazione sul reddito medio dei lavoratori degli altri settori
□ C. Non si può dire perché non si conosce il numero dei lavoratori dei due settori
□ D. Sì, perché all'incirca i due settori occupazionali si equivalgono

32) La settimana scorsa la mamma chiese ad Aurelia di trascrivere al computer un manoscritto e Aurelia le assicurò che avrebbe battuto 20 pagine al giorno.
Per la prima metà del manoscritto andò piuttosto lentamente battendo 10 pagine al giorno e poi, per recuperare il tempo perduto, trascrisse la seconda metà a 30 pagine al giorno.
Quando ebbe finito portò a sua madre la trascrizione dicendole:
Vedi, ho fatto una media di 20 pagine al giorno, come ti avevo promesso. Infatti (10+30)/2=20.
Non è vero, replicò sua madre.
a. Chi ha ragione? …….....
b. Spiega come hai fatto per trovare la risposta ……
……

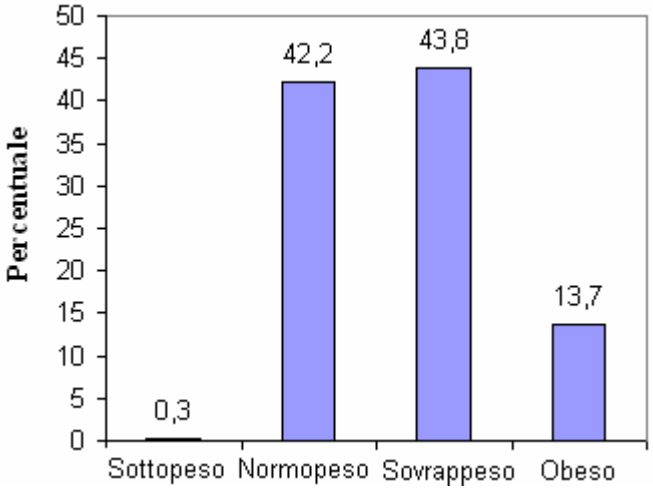
33) Voglio comprare all'ingrosso delle mele e posso scegliere fra due aziende.
L'azienda A vende a cassette da 10 chilogrammi l'una, mentre l'azienda B a cassette da 20 kg l'una.
Nel grafico seguente sono rappresentati i prezzi praticati in funzione della quantità
(● indica il prezzo praticato dalla Ditta A, × indica il prezzo praticato dalla Ditta B)



a. Se voglio comprare 20 kg di mele:
□ A. conviene acquistare dalla ditta A □ B. conviene acquistare dalla ditta B
□ C. è indifferente acquistare da A o da B □ D. non posso scegliere

b. Per quali quantità è indifferente comprare dall'azienda A o dall'azienda B?
Risposta: ……

34) In una indagine sullo stato di salute della popolazione sono state raccolte informazioni relative al peso e alla statura di 1000 intervistati.
Gli intervistati sono stati poi suddivisi in quattro gruppi, come riportato nel grafico seguente.



Quante sono le persone sovrappeso?

- □ A. Più di 500, ma meno di 600
- □ B. Più di 600
- □ C. Meno della somma delle persone sottopeso e obese
- □ D. All'incirca tante quante sono le persone normopeso

35) IL PUGILATO

I gravi incidenti avvenuti negli ultimi anni nel pugilato hanno sollevato vivaci discussioni sull'opportunità di vietare tale sport. Ecco alcuni sondaggi effettuati:

CAMPIONE N. 1: sono stati intervistati gli 808 allievi (75% dei quali maschi) di un Istituto Tecnico Industriale di Genova. Il 51,7% ha dichiarato di essere contrario al divieto del pugilato, il 48,3% di essere favorevole a tale divieto.

CAMPIONE N. 2: un giornale di Napoli ha promosso un sondaggio tra i suoi lettori, invitati a comunicare telefonicamente alla redazione il loro parere.
Hanno telefonato 1120 persone, 790 delle quali si sono dichiarate favorevoli al divieto del pugilato.

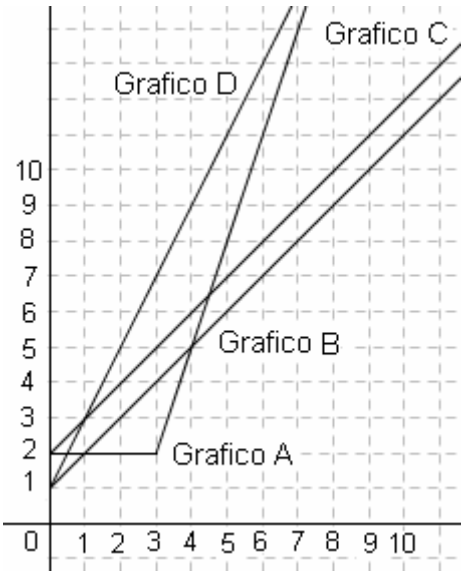
CAMPIONE N. 3: un giornalista di un noto quotidiano, durante i suoi viaggi in Italia, ha intervistato 338 persone di varie zone del Paese, metà uomini e metà donne, di diverse età ed estrazioni sociali. Ha raccolto opinioni favorevoli al divieto del pugilato da 231 persone, e contrarie da 107 persone.

a) Completa la seguente tabella inserendo sia i dati assoluti che quelli percentuali

		FAVOREVOLI		CONTRARI	
	Tot	Numero	%	Numero	%
CAMPIONE 1					
CAMPIONE 2					
CAMPIONE 3					

b) In base alle informazioni fornite, quale campione, a tuo avviso, fornisce indicazioni più attendibili circa il parere degli italiani sul divieto del pugilato? Risposta ……
Giustifica la tua risposta ……
……

36) Quattro diversi operatori telefonici propongono i seguenti piani tariffari:
Operatore 1.
1 centesimo al minuto, scatto alla risposta 2 centesimi
Operatore 2.
2 centesimi al minuto, scatto alla risposta 1 centesimo
Operatore 3.
Scatto alla risposta 2 centesimi, gratis i primi 3 minuti, poi 3 centesimi al minuto
Operatore 4.
1 centesimo al minuto, scatto alla risposta 1 centesimo
I grafici nella figura rappresentano queste informazioni.



Completa le seguenti frasi.

1. Il grafico A corrisponde al piano tariffario dell'operatore ……
2. Il grafico B corrisponde al piano tariffario dell'operatore ……
3. Il grafico C corrisponde al piano tariffario dell'operatore ……
4. Il grafico D corrisponde al piano tariffario dell'operatore ……

37) Nel corso della storia molte culture hanno cercato di approssimare il valore, che oggi indichiamo con π (pi greco), del rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
Nella tabella trovi indicati alcuni dei valori utilizzati.

Egiziani	Babilonesi	Indiani	Cinesi
$\frac{256}{81}$	$3+\frac{1}{8}$	$\sqrt{10}$	$\frac{355}{113}$

Chi utilizzava il valore più vicino a quello corretto?

□ A. Gli Egiziani □ B. I Babilonesi □ C. Gli Indiani □ D. I Cinesi

38) La frequenza cardiaca fisiologica è compresa tra i 60 e i 100 battiti al minuto.
Qual è l'ordine di grandezza del numero di volte che ha battuto il cuore di una persona di 80 anni?

A. 10^5 □ B. 10^8 C. 10^9 D. 10^{13}

39) In quale tra le seguenti sequenze i numeri sono disposti in ordine crescente?

□ A. $-10^5,\ -5\cdot10^{-5},\ 10^{-5},\ 1/10^{-5}$ □ B. $-5\cdot10^{-5},\ -10^5,\ 1/10^{-5},\ 10^{-5}$

□ C. $-10^5,\ 10^{-5},\ 1/10^{-5},\ -5\cdot10^{-5}$ □ D. $-5\cdot10^{-5},\ -10^5,\ 10^{-5},\ 1/10^{-5}$

40) Uno studente lavora con la seguente espressione algebrica:

$$(a+2)(b+5)+2(a-1)(1-b)$$

Sostituisce al posto della lettera *a* il valore 10 e al posto della lettera *b* un valore intero.

a. Trova come risultato 7. Perché il risultato è sicuramente sbagliato?

Risposta……..

b. Esegue di nuovo l'esercizio e trova uno dei risultati seguenti.
Qual è l'unico risultato corretto possibile tra di essi?

□ A. 10 □ B. 12 □ C. 14 □ D. 16

41) Su un tragitto ferroviario, il biglietto costa 8,25 euro. L'abbonamento mensile costa 67,30 euro.
Qual è il numero minimo di viaggi che occorre effettuare in un mese
perché l'abbonamento sia più conveniente?

Risposta.....

42) Una pizza standard di forma rotonda per una persona ha il diametro di 21 cm.
Quale dovrebbe essere il diametro di una pizza rotonda per due persone,
se vogliamo che ciascuno abbia la stessa quantità della pizza standard?

Risposta …….. cm

43) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (con la stessa unità di misura sui due assi), disegna i punti A(4; 5), B(10; 4) e C(12; 13).
Il triangolo è rettangolo?

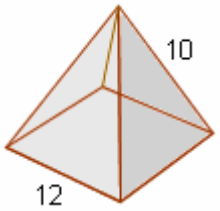
□ SI □ NO

Mostra i calcoli che hai fatto per arrivare alla risposta:

……
……
……

44) La piramide della figura ha una base quadrata
con il lato di 12 m.
Lo spigolo misura 10 m.
Qual è l'altezza della piramide nel suo massimo?

Risposta ……..



45) Un rettangolo ABCD nel piano cartesiano ha i vertici nei punti
A = (1,1), B = (3,1), C = (3,5), D = (1,5).
Il rettangolo A'B'C'D' è ottenuto da ABCD mediante
una rotazione in senso antiorario di 90°, di centro l'origine.
Le coordinate dei vertici di A'B'C'D' sono

A' =…… B' =…… C' =…… D' =……

RISPOSTE

1) B

2) a) 120 biglietti interi e 50 ridotti

b) Ad es.: I) x = numero biglietti a prezzo intero; y = num. bigl. scontati. $x + y = 170$ e $9x + 6y = 1380$ ecc.

II) x = numero biglietti a prezzo intero; $9x + 6(170 - x) = 1380$ ecc.

III) … o altre strategie equivalenti.

IV) Anche col metodo di "falsa posizione": se i biglietti fossero stati tutti a prezzo intero, l'incasso sarebbe stato di euro $170 \cdot 9 = 1530$ (= 150 euro in più).
I biglietti ridotti sono quindi $150 : (9 - 6) = 150 : 3 = 50$.

3) 1/6

4) C (somma degli angoli interni di un triangolo = 180°; due angoli opposti al vertice sono uguali …)

5) D

6) B

7) 

8) A

9) $A = \frac{(2a+3) \cdot a}{2}$ oppure $A = a^2 + \frac{3a}{2}$ o qualunque espressione algebricamente equivalente.

10) B

11) a) 10 euro b) Ad esempio: 27+30+49 =106; 35+30+21= 86; $106 - 86 = 20$; $20 : 2 = 10$

12) 212,50 euro

13) C 14) A 15) C

16) 4 cm (le diagonali di un rettangolo sono uguali; ma una diagonale coincide con un raggio)

17) D 18) F, V, F 19) C

20) Domanda 1: 0,5 m o 50 cm
Domanda 2: n = 140 x 0,80 = 112. 112 x 0,80 metri = 89,6 m/min $\approx$ 5,4 km/ora

21) Domanda 1: 168,3 cm
Domanda 2: fra gli 11 e i 13 anni
Domanda 3: per la pendenza minore della curva

22) 64

23) Più studenti del Gruppo A hanno superato la verifica rispetto a quelli del Gruppo B; se si toglie quell'unico studente del Gruppo A che ha avuto un punteggio disastroso, la media diventa superiore per il gruppo A; più studenti del Gruppo A rispetto agli studenti del Gruppo B hanno ottenuto un punteggio di 80 o superiore.

24) Domanda 1:
41.
Ad esempio: l'equazione 220 – età = 208 – 0,7 × età ha come soluzione età = 40
e dunque le persone con più di 40 anni avranno una frequenza cardiaca massima consigliata più alta con la nuova formula.
Domanda 2:
frequenza cardiaca = 80/100 × (208 – 0,7 × età) o espressioni equivalenti.

25) 35 °C; A

26) D 27) B 28) C 29) B 30a) D; 30b): NO (lo si vede fattorizzando) 31) C

32a) La mamma 32b) La vera media è di 15 pagine al giorno

33a) B 33b) per 40, 80, 100, 120 kg 34) D

35a)

		FAVOREVOLI		CONTRARI	
	Tot	Numero	%	Numero	%
CAMPIONE 1	808	390	48,3	418	51,7
CAMPIONE 2	1120	790	70,5	330	29,5
CAMPIONE 3	338	231	68,3	107	31,7

35b) Il Campione 3, perché è il più rappresentativo della popolazione

36) 3 4 1 2 37) D 38) C 39) A

40a) Il risultato, quando a=10, è sempre divisibile per 6 40b) B

41) 9

42) Si ritengono corretti, per la risposta, tutti i valori compresi fra 29 cm e 30 cm (inclusi)

43) No: la somma dei quadrati di 2 lati non è uguale al quadrato del 3°

44) $\sqrt{28}$

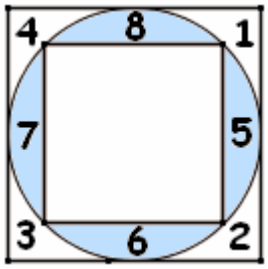
45) A'(−1,1) B'(−1,3) C'(−5,3) D'(−5, 1)

PROBLEMI TRATTI DA www.freepuzzles.com

Questo è un sito davvero molto carino "*designed and implemented by Jimmie Dean, the president of Object Link Technology. He would like to promote the Internet usage by providing valuable contents to educators and young fellows. The original purposes were educational, recreational and non-profit. The target audience are teachers, faculty and students*".

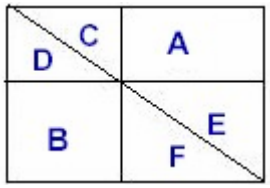
Non essendo riusciti a entrare in contatto con l'Autore, e avendo in comune con lui i "non-profit purposes", ci siamo permessi di utilizzare alcuni fra i tanti quesiti che il sito mette a disposizione, confidando che la loro bellezza e simpatia sia di stimolo a visitarlo. I problemi, le cui soluzioni vengono spedite, a richiesta, a chi gratuitamente si iscrive, sono divisi per tipologie: Geometry, Logic, Math, Misc, Weight, Moves.

□ **Geom001: Which area is larger? (Difficulty level: 1)**



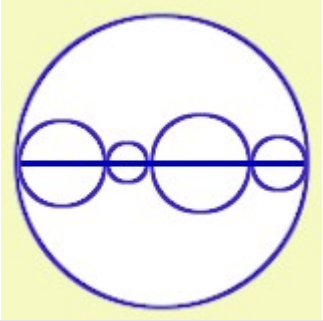
In this figure, which area is larger,
Area 1 or Area 5?
How much is the difference?

□ **Geom002: Which rectangular area is larger? (Difficulty level: 1)**



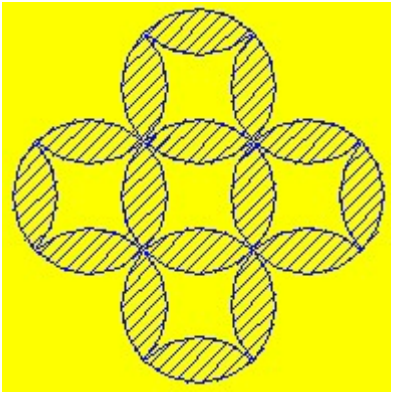
A line is drawn
from top left corner to bottom right
of the outermost rectangle.
Area A and B are two rectangles.
Which area is larger? Why?

□ **Geom007: What is the perimeter of the 5 circles? (Difficulty level: 1)**



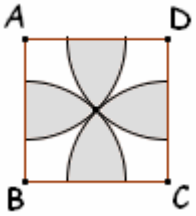
The diameter of the big circle is 40 inches.
What is the total circumferences of all 5 circles?
Assume the line segment passes
through all the centers of the circles.

□ **Geom012: How many square inches are in the shaded areas within 5 circles? (Difficulty level: 2)**



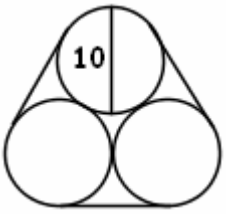
Assume the radius of one circle is 5 inches.
How many square inches are in the shaded areas?

□ **Geom014: 4 quarter circumferences tangented at the center of a square (Difficulty level: 2)**



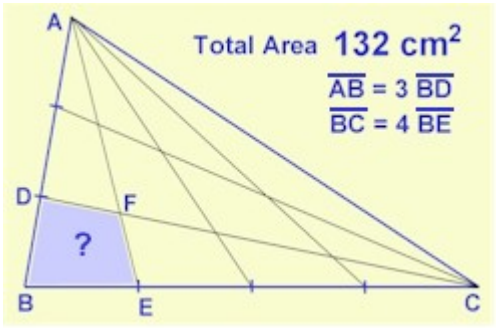
ABCD is a square with the length of 20 inches on each side.
4 quarter circumferences are tangented
at the center of the square.
How many square inches are in the total shaded area?

☐ **Geom017: How long is the rubber band? (Difficulty level: 2)**



Three circles are bound together by a rubber band
as shown in the figure.
Assume the diameter of each circle is 10 cm;
then how long is the rubber band if it is stretched as shown?

☐ **Geom025: How big is quadrilateral DBEF? (Difficulty level: 2)**



ABC is a general triangle
and its area is equal
to 132 cm square.
The opposite side of edge A is divided in 4 equal parts
and the opposite side of edge C in 3 equal parts.
Straight lines join the point A to each quarter of line BC.
Likewise, from point B to each third of line AB.
How big is the area of quadrilateral DBEF?

☐ **Math001: Send more money! (Difficulty level: 2)**

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ +\ \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

Janice Dean is a freshman in the University of North Texas.
She has spent all the money for the fall semester. She knows that
her father is a puzzle fan. So she mails her father a puzzle as shown.
She knew her father should be able to resolve this puzzle easily and mail the
MONEY to her. Do you know how much money she will be receiving from her father?

☐ **Math011: Five 5s to make it 100 (Difficulty level: 2)**

$$5\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5 = 100$$

There are five 5s. Put any mathematical operator in the equation
to make the target number of the equation equal to 100.
There are at least 3 ways to make it.
If you can make it more than 3 ways, you are a genius.

☐ **Math024: Reverse the digit sequence by multiplying 7 (Difficulty level: 3)**

$$\begin{array}{r} \text{ABCD} \\ \times\ \ 7 \\ \hline \text{EDCBA} \end{array}$$

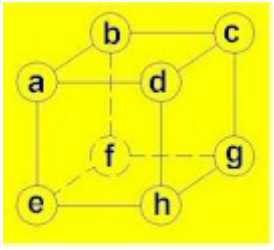
What a magic number 7 is!
It can reverse the digit sequence of a 4 digit number.
A, B, C, D and E are distinct single digit numbers.
What is the 4 digit number ABCD?

☐ **Math032: Where are the shots? (Difficulty level: 2)**



John got a score
of 100 out of 5 shots.
All the shots
were on target.
Which targets
did the shots land on?

☐ **Math037: Make the sum of each face the same (Difficulty level: 2)**



Fill in numbers
1 through 8
into the circles
to make the sum
of each face the same.

☐ **Math033: Squares magic (Difficulty level: 2)**

$$(30 + 25)^2 = 3025$$

If we break the number 3025 into 2 parts: 30 and 25,
then the square of (30 + 25) equals 3025 (as shown in the figure).
Two more numbers share the same property.
Can you find what the numbers are?

☐ **Math040: WRONG + WRONG = RIGHT (Difficulty level: 2)**

$$\begin{array}{r} \text{WRONG} \\ +\text{WRONG} \\ \hline \text{RIGHT} \end{array}$$

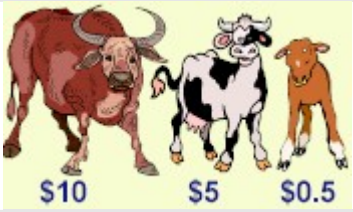
Can you believe this? Just like a double negative becomes positive,
WRONG plus WRONG becomes RIGHT!
Every letter represents a distinct digit.
What is WRONG? and what is RIGHT? (There is more than one answer)

□ Math081: Magic square of products instead of sums (Difficulty level: 2)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

The image shows the normal magic square with numbers from 1 to 9.
The sum of each row, column, and diagonal is 15.
Can you make a three by three magic square in which
the product of each row, column, and diagonal is 1000?
In each square you should have a different number.

□ Math090: Bull, cow and calf (Difficulty level: 1)

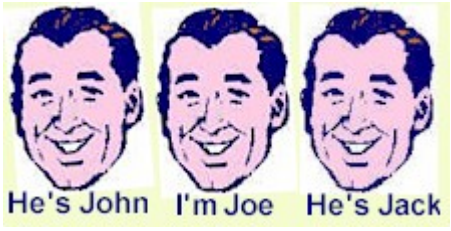


Long time ago, a rancher spent $100.00 and bought 100 animals.
There were 3 kind of animals he bought:
each Bull cost him $10.00,
each Cow cost him $5.00
and each Calf cost him $0.50.
How many he bought for each kind of animal?

□ Logic001: Gentlemen and Ties (Difficulty level: 1)

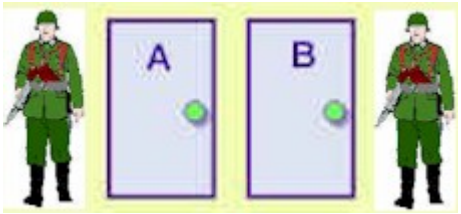
There are 3 gentlemen in a meeting: Mr. Yellow, Mr. Green and Mr. Brown.
They are wearing yellow, green and brown ties.
Mr. Yellow says: "Did you notice that the color of our ties are different from our names?"
The person who is wearing the green tie says, "Yes, you are right!"
Do you know who is wearing what color of tie?

□ Logic002: Triplet Brothers (Difficulty level: 1)



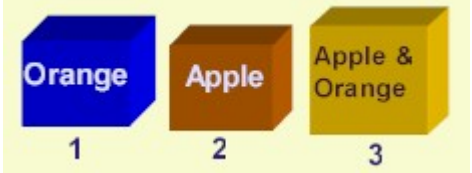
There are 3 triplet brothers. They look identical.
The oldest is John, he always tells the truth.
The second is Jack, he always tells a lie.
The third is Joe, he either tells the truth or a lie.
Jimmie Dean went to visit them one day.
He was wondering who was who.
So he asked each person a question.
He asked the one who was sitting on the left:
"Who is the guy sitting in the middle?". The answer was "He is John."
He asked the one who was sitting in the middle:
"What is your name?". The answer was "I am Joe."
He asked the one who was sitting on the right:
"What is the guy sitting in the middle?". The answer was "He is Jack."
Jimmie Dean got really confused.
Basically, he asked 3 same questions,but he got 3 different answers.
Would you find out who is who for Jimmie?

□ Logic003: Life door or Death door (Difficulty level: 3)



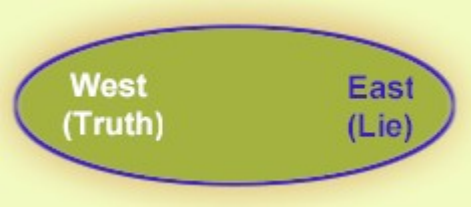
There is a prisoner who is about to be executed.
The king decides to give him one last chance to live.
There are 2 doors, the life door and the death door.
There is one guard standing by each door. Those two guards
know which door is the life door and which is the death door.
However, one of them always tells the truth
and the other always tells a lie.
There is no way you can identify which door is the life door or the death door.
There is no way you can distinguish who is the one telling the truth.
The prisoner can only ask one guard one question. Then he needs to choose a door to walk in.
If he walks in the death door, then he will be executed.
If he walks in the life door, he can have a new life.
He did choose the life door and lived. What was the question he asked?
How did he choose the door after he got the answer from one of the guards?

□ Logic004: Boxes of Apples and Oranges (Difficulty level: 2)



All 3 boxes with labels are COMPLETELY mislabeled.
You will be allowed to take only one piece of fruit
from one of the boxes to examine it.
Which box would you choose?
How do you correctly re-label all three boxes?

□ Logic005: Did he tell the truth? (Difficulty level: 1)



Jimmie Dean visited an island.
There were 2 tribes living on this island.
The east tribal people always tell a lie.
The west tribal people always tell the truth.
Jimmie Dean saw a guy passing him.
He asked the tour guide to ask that guy where he lives.
The tour guide asked the guy and came back with the answer: he lives over west.
Did the tour guide tell the truth or tell a lie?

□ Logic013: How old are they? (Difficulty level: 2)



The investigator asked Jaclyn about her children.
Jaclyn said "I have 3 daughters, Alice, Betty, and Cindy.
The product of their ages is 36.
The sum of their ages is the same as the street number of our next door neighbor."
The investigator went next door and came back and said:
"Still not enough information".
Jaclyn said:
"Oh, I forgot to tell you that my oldest daughter is now in school".
The investigator found out the ages of her daughters immediately.
Do you know their ages?

□ Logic014: Who was the thief? (Difficulty level: 1)



There was a burglary in the Silver City jewelry store last Sunday.
Three suspects: Robert, Scott, and Tommy were caught and questioned. Each person said,
"One of the other two stole it. I did not do it."
Later on the police found out that Tommy was lying and there was only one thief. Who was the thief?

□ Logic016: Who stole the jewelry? (Difficulty level: 1)

There was a burglary in the Silver City jewelry store again on Tuesday. A famous jewel was stolen.
Three suspects: Robert, Scott, and Tommy were caught and questioned.
Robert said: I am innocent. Scott said: Tommy did not steal. Tommy said: I stole it.
Later on, the police found out two of them lied. Who stole the jewel?

□ Logic020: What is the color of the hat? (Difficulty level: 2)



Mrs. Harrison has 6 lovely hats, 3 blue, 2 yellow and one pink.
Alice, Betty, Cindy and Debbie are lined up as shown in the figure.
Mrs. Harrison help them put the hats on them so they will not see what color hat they have on.
Alice can see what color of hats Betty, Cindy and Debbie are wearing.
Betty can see what color of hats Cindy and Debbie are wearing.
Cindy can see what color hat Debbie is wearing.
Debbie can not see any of the hat colors.
Mrs. Harrison ask them what color of the hat they are wearing.
Alice said she can not tell. Betty said she can not tell either. Cindy also can not tell. However, Debbie was able to tell what color she was wearing after knowing that everyone else could not tell.
How did Debbie figure out what color she was wearing?

□ Weight001: Which one is Heavier or Lighter? (Difficulty level: 2)

Among 12 identical looking golf balls there is one that is defective in weight.
It is either heavier or lighter than the standard one. You have a balance.
You can only weigh 3 times to find out which one is defective and whether it is heavier or lighter.

□ Weight003: Which egg is lighter? (Difficulty level: 1)



Eight eggs look identical except one is lighter. How can you weigh only 2 times on a balance scale to find out which one is lighter?

TESTO DEI "GIOCHI DI ARCHIMEDE" 2008 (clicca qui ⇨ per le risposte)

1) Su Giove si corre oggi la Grande Maratona, lunga 2008 chilometri, a cui partecipa l'80% degli abitanti del pianeta. Dopo due chilometri il 95% dei partecipanti si ritira; i restanti 2000 corridori arrivano al traguardo. Quanti abitanti ha Giove?

(A) 20 000 (B) 40 000 (C) 50 000 (D) 80 000 (E) 100 000

2) Un pilota vuole stabilire un nuovo record su un percorso di 50 km: percorrerlo alla velocità media di 100 km/h.
A causa di alcuni problemi tecnici impiega 40 minuti per percorrere i primi 25 km. A quale velocità deve percorrere il resto del percorso (andando a velocità costante) per riuscire nel suo intento?

(A) Nessuna velocità glielo consente (B) 50 km/h (C) 100 km/h (D) 150 km/h (E) 200 km/h

3) Alberto, Barbara e Clara giocano in un grande piazzale dove ci sono 2008 birilli.
Alberto butta giù il triplo dei birilli buttati giù da Barbara, che a sua volta butta giù il doppio dei birilli buttati giù da Clara. Quanti birilli al massimo può aver buttato giù Alberto?

(A) 1321 (B) 1338 (C) 1342 (D) 1353 (E) 1362

4) Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 Euro.
Con grande generosità, però, gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 Euro. Quanti sono gli amici di Pietro e Paolo?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 16

5) Su Marte, il Gran Ciambellano dell'Istruzione Marziana ha dichiarato che il prossimo anno scolastico ridurrà del 30% il numero dei maestri di scuola e che a coloro che rimarranno in servizio lo stipendio sarà aumentato del 35%. La spesa complessiva per gli stipendi dei maestri quindi:

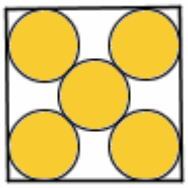
(A) si ridurrà del 5,5% (B) si ridurrà del 5% (C) aumenterà del 5%
(D) resterà invariata (E) aumenterà del 7%

6) In un triangolo rettangolo ABC i cateti BC e CA misurano 7 cm e 24 cm rispettivamente. Sia H la proiezione di C sull'ipotenusa AB. Quanto vale il perimetro del triangolo HBC?

(A) $\frac{262}{25}$cm (B) $\frac{501}{49}$cm (C) $\frac{392}{25}$cm (D) $\frac{801}{49}$cm (E) $\frac{412}{25}$cm

7) La casa e la scuola di Pietro si trovano alle due estremità di una strada rettilinea.
La mamma di Pietro esce di casa e si dirige verso la scuola nello stesso momento in cui Pietro esce da scuola e si dirige verso casa. La mamma di Pietro cammina a velocità doppia rispetto a Pietro. Quanta parte del cammino da casa a scuola avrà percorso la mamma di Pietro nel momento in cui lo incontra? (A) 1/3 (B) 2/5 (C) 1/2 (D) 2/3 (E) 3/4

8) La mamma ha una sfoglia di pasta di forma quadrata di lato 40 cm da cui ritaglia 5 biscotti rotondi, tutti uguali tra loro, secondo lo schema in figura.
Quanto misura il diametro di ciascun biscotto?



(A) $40(\sqrt{2}-1)$ cm (B) $10\sqrt{2}$ cm (C) $20(\sqrt{2}-1)$ cm
(D) 16 cm (E) $6(\sqrt{2}+1)$ cm

9) Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre in cui compare una e una sola volta la cifra 5 ed essa è la cifra più grande presente nel numero?

(A) 225 (B) 400 (C) 425 (D) 525 (E) 600

10) In un quadrato ABCD di lato 1 cm, sono dati un punto M sul lato BC e un punto N sul lato CD tali che BM = ND. Si sa inoltre che l'area del triangolo AMN è pari a $4/9$ cm^2.
Quanto vale la lunghezza del segmento ND?

(A) $\frac{1}{4}$ cm (B) $\frac{1}{3}$ cm (C) $\frac{1}{2}$ cm (D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ cm (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

11) Quante sono le terne ordinate distinte (x, y, z) formate da numeri interi positivi (strettamente maggiori di zero) tali che $x^2+2xy+y^2-z^2=9$?

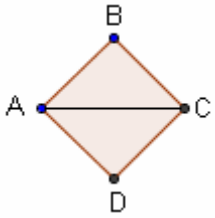
(A) Nessuna (B) due (C) tre (D) quattro (E) più di sei

12) Quanto fa $0,\overline{60}+0,\overline{70}$? (A) $1,\overline{3}$ (B) $1,\overline{30}$ (C) $1,\overline{31}$ (D) $1,\overline{4}$ (E) $1,\overline{40}$

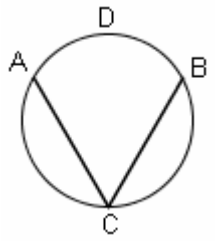
13) Quanti sono i numeri interi positivi multipli di almeno uno tra 5 e 7 e minori o uguali a 1000?
(A) 288 (B) 302 (C) 314 (D) 342 (E) 382

14) In un sacchetto ci sono 20 palline e su ciascuna è scritto un numero intero compreso tra 0 e 10 (0 e 10 inclusi). Il numero scritto su ogni pallina se non è zero è la somma dei numeri scritti su tutte le altre palline. Allora le palline su cui è scritto zero sono:
(A) non più di cinque (B) dieci (C) tredici (D) sedici (E) almeno diciotto

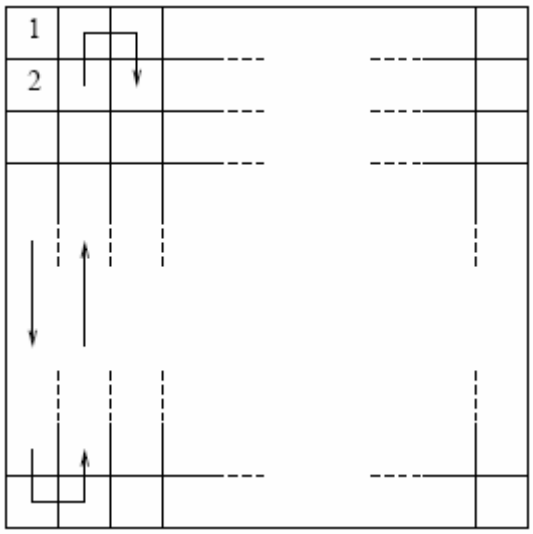
15) La figura a fianco è la pianta di un quartiere, i punti A, B, C e D sono le case e i segmenti sono le strade. Da quante delle quattro case è possibile partire per fare un percorso che passi una e una sola volta da ogni strada (passando eventualmente più di una volta per una stessa casa)?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4



16) Il raggio della circonferenza a fianco è di 5 cm; inoltre i punti A, B e C dividono la circonferenza in tre archi di uguale lunghezza. Calcolare l'area delimitata dalle corde AC e BC e dall'arco di estremi A e B contenente D.
(A) $25\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2$ (B) $25\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$ (C) $15\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2$
(D) $\frac{25\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$ (E) $\frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2$



17) Le caselle di una scacchiera quadrata sono numerate come illustrato nella figura a fianco. Nella seconda colonna si trova la casella numero 38 e la casella della terza colonna che sta sulla sua stessa riga ha il numero 43. Quante caselle ha la scacchiera?
(A) 144 (B) 160 (C) 225 (D) 400 (E) 625



18) In un rettangolo ABCD sia E un punto sul lato CD. Sapendo che l'area del triangolo ADE è un quinto dell'area del trapezio ABCE, calcolare il rapporto tra la lunghezza del segmento DC e quella del segmento DE.
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

19) Un satellite munito di telecamera inviato sul pianeta Papilla ha permesso di stabilire che è falsa la convinzione di qualcuno che: "su Papilla sono tutti grassi e sporchi". Quindi adesso sappiamo che:
(A) su Papilla almeno un abitante è magro e pulito
(B) su Papilla tutti gli abitanti sono magri e puliti
(C) almeno un abitante di Papilla è magro
(D) almeno un abitante di Papilla è pulito
(E) se su Papilla tutti gli abitanti sono sporchi, almeno uno di loro è magro

20) La Polisportiva "I tropici" ha organizzato un torneo di calcio a cui partecipano 3 squadre ciascuna composta da 15 giocatori (riserve comprese) con maglie numerate da 1 a 15. La notte prima delle partite ha nevicato e per poter giocare è necessario spalare la neve dal campo. Viene deciso allora di nominare un gruppo di 3 spalatori scegliendo un giocatore per squadra in modo che non ci siano due giocatori con lo stesso numero di maglia. In quanti modi diversi può essere formato il gruppo degli spalatori?
(A) 48 (B) 455 (C) 1125 (D) 2730 (E) 3375

TESTO DEI "GIOCHI DI ARCHIMEDE" 2009 (clicca qui ⇨ per le risposte)

1) Quale dei seguenti numeri è un divisore di $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
(A) 42 (B) 45 (C) 52 (D) 85 (E) 105

2) La ruota anteriore della bicicletta di Chiara ha il raggio di 28 cm, la ruota posteriore di 16 cm. Al termine di una gita in bicicletta la ruota anteriore ha fatto 10000 giri; quanti ne ha fatti la ruota posteriore nella stessa gita?
(A) 12000 (B) 14500 (C) 17500 (D) 19000 (E) 21000

3) La nonna ha un sacchetto di caramelle che vuol dare alle sue nipoti: Ada, Bice, Clelia e Delia. Ada prende sette caramelle e lo stesso fanno Bice e Clelia; a questo punto nel sacchetto restano alcune caramelle, che vengono prese da Delia, ma sono meno di sette.
Allora Ada, Bice e Clelia danno alcune delle loro caramelle a Delia (ciascuna lo stesso numero) in modo che tutte e quattro abbiano lo stesso numero di caramelle.
Quante caramelle riceve Delia da ciascuna delle altre tre?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4) Una pulce si trova sul numero 12 del quadrante di un orologio. Sceglie un numero naturale n compreso tra 1 e 12, estremi inclusi, e comincia a fare salti di n numeri sul quadrante, in senso orario (se ad esempio $n = 3$, dopo il primo salto è sul 3, dopo il secondo è sul 6 e così via).
Dopo 12 salti, per la prima volta si ritrova sul numero 12 del quadrante.
In quanti modi distinti può aver scelto n?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 12

5) Disegno un triangolo equilatero e un esagono regolare inscritti nella stessa circonferenza.
Qual è il rapporto tra l'area del triangolo e quella dell'esagono?
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{1}{6}$

6) Nella griglia a fianco x è un numero da determinare.
Si sa che è possibile scrivere un numero in ogni cella vuota della griglia in modo che la somma dei tre numeri che si trovano su qualunque riga, colonna o diagonale, sia sempre la stessa. Allora x vale:
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 6 (E) 9

		6
x	4	5

7) Nella città di Nonfumo gli unici negozi sono tabaccherie e latterie. L'anno scorso le tabaccherie erano i 2/3 delle latterie; quest'anno due tabaccherie sono diventate latterie cosicché ora le tabaccherie sono solo i 9/16 delle latterie (dall'anno scorso a quest'anno il numero complessivo dei negozi di Nonfumo è rimasto lo stesso). Quante latterie c'erano l'anno scorso a Nonfumo?
(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 30 (E) 60

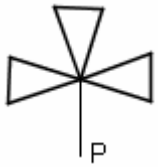
8) Ciro ha davanti a sé un foglio con disegnato un pentagono regolare ABCDE, e due pennarelli di colori diversi. Vuole colorare tutti i vertici del pentagono usando solo due pennarelli che ha, in modo che la colorazione finale non abbia nessun asse di simmetria.
In quanti modi distinti può farlo?
(A) Uno (B) due (C) quattro (D) cinque (E) nessuno

9) ABC è un triangolo isoscele con AB = AC. D è un punto del lato AB tale che CD sia la bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$. Sapendo che CB = CD, quanto misura l'angolo $A\hat{D}C$?
(A) 90° (B) 108° (C) 120° (D) 144° (E) 155°

10) Quanti quadrati perfetti dividono 1600? [Un quadrato perfetto è un numero del tipo n^2, con n numero naturale. 1, 4, 9, 16, sono esempi di quadrati perfetti.]
(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 10 (E) 12

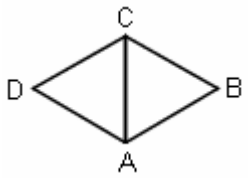
11) La piccola Rita fa questo gioco: per ogni numero intero compreso tra 10 e 99, estremi inclusi, sottrae la cifra delle unità da quella delle decine e scrive il risultato su un foglio (ad esempio per 21 scrive 1, cioè $2-1$, mentre per 37 scrive −4, cioè $3-7$).
Alla fine somma tutti i numeri che ha scritto sul foglio; quale risultato trova?
(A) 0 (B) −30 (C) 45 (D) −50 (E) 100

12) In quanti modi distinti posso disegnare la figura a fianco partendo da P, senza mai staccare la penna dal foglio e senza passare più di una volta da nessun punto eccettuato il vertice comune ai tre triangoli?



(A) $2^4 \cdot 3$ (B) $2^3 \cdot 3$ (C) 2^4 (D) $2^2 \cdot 3^3$ (E) 3^3

13) Nel rombo in figura, i triangoli ABC e ACD sono equilateri ed hanno lato di lunghezza 1 m.
Se ruotiamo il rombo di 60° rispetto al vertice A, qual è l'area della superficie coperta dal rombo nella rotazione?



(A) $\frac{\pi}{2}$ m^2 (B) 1 m^2 (C) π m^2 (D) $\frac{\pi}{3}$ m^2 (E) 2 m^2

14) Ziggy ha rotto alcune delle nove corde della sua chitarra marziana.
Le corde sono numerate da 1 a 9; la prima costa una Sterlina Marziana e ciascuna delle altre costa il doppio di quella che ha il numero precedente. Dopo un rapido conto, Ziggy calcola che dovrà spendere 158 Sterline Marziane per comprare le corde nuove. Quante sono le corde rotte?

(A) Una (B) tre (C) quattro (D) cinque (E) sette

15) La professoressa di Italiano entra in una classe di 24 studenti, tutti presenti, per un'ora di interrogazione. Decide di interrogare gli studenti a cui corrisponde sul registro un numero *n* che sia primo e tale che anche $n^3 + 3$ sia primo. Quanti studenti interroga?

(A) Uno (B) tre (C) quattro (D) sette (E) nove

16) Una moneta d'oro è circondata da quattro monete d'argento uguali tra loro.
Ogni moneta d'argento è tangente alla moneta d'oro e a due monete d'argento.
Trovare il rapporto tra il raggio della moneta d'oro e quello delle monete d'argento.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) 1

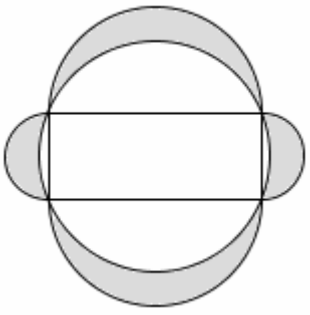
17) *a* e *b* sono due numeri maggiori o uguali a zero.
Sappiamo che: $a^3 + a < b - b^3$.
Qual è l'ordine corretto tra i tre numeri *a*, *b* e 1?

(A) $b < a < 1$ (B) $a = b = 1$ (C) $a < 1 < b$ (D) $a < b < 1$ (E) $1 < a < b$

18) Carla si è dimenticata la password di accensione del suo nuovissimo computer! Si ricorda però che è una sequenza di 4 vocali, non necessariamente distinte, di cui due sono maiuscole e due sono minuscole. Quante password diverse deve provare Carla, al massimo, per accendere il computer?

(A) $3 \cdot 5^4$ (B) 5^5 (C) $6 \cdot 5^4$ (D) 5^6 E) $3 \cdot 5^6$

19) Disegniamo un rettangolo di lati 5 cm e 12 cm, la circonferenza in cui è inscritto e le semicirconferenze che hanno per diametro i lati del rettangolo e sono esterne ad esso, come indicato nella figura a fianco.
Qual è l'area della parte ombreggiata?



(A) 45 cm^2 (B) 13π cm^2 (C) 19π cm^2
(D) 60 cm^2 (E) 20π cm^2

20) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci.
Vengono distribuite cinque carte a testa.
Anna dice: "Io ho un poker!" (quattro carte dello stesso valore).
Bea dice: "Io ho tutte e cinque le carte di cuori".
Caio dice: "Io ho cinque carte rosse".
Infine Dino dice: "Io ho tre carte di uno stesso valore
e anche le altre due hanno tra loro lo stesso valore".
Sappiamo che una e una sola delle affermazioni è falsa; chi sta mentendo?

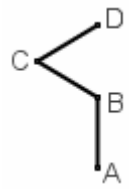
(A) Anna (B) Bea (C) Caio (D) Dino (E) non è possibile determinarlo

TESTO DEI "GIOCHI DI ARCHIMEDE" 2010 (clicca qui ⇨ per le risposte)

1) Quanti lunedì possono esserci al massimo in 45 giorni consecutivi?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

2) Emilio prende al buio dei calzini da una cesta in cui ci sono: 6 calzini neri, 14 calzini blu e 8 calzini verdi. Per essere sicuro che tra i calzini che ha preso ce ne siano due dello stesso colore, il numero minimo di calzini che deve prendere è:
(A) 3 (B) 4 (C) 9 (D) 15 (E) 21

3) La figura a fianco rappresenta il tragitto fatto da Pluto per andare dalla sua cuccia, posta in A, al bar, posto in D. I tre segmenti AB, BC e CD sono lunghi 100 metri ciascuno. Se l'angolo $A\hat{B}C$ (interno al triangolo ABC) è di 120° e l'angolo $B\hat{C}D$ (interno al triangolo BCD) è di 60°, quanto dista in linea retta il bar dalla cuccia?



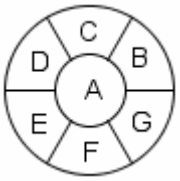
(A) 100 m (B) $100\sqrt{3}$ m (C) 200 m (D) 330 m (E) $200\sqrt{3}$ m

4) Quale fra queste serie di disuguaglianze è corretta?
(A) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$
(B) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$
(C) $2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$
(D) $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$
(E) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10} < 2\sqrt{2}$

5) Matilde vuole regalare una margherita di cartone alla sua mamma. Ritaglia un cerchio giallo e lo mette al centro. Poi ritaglia alcuni cerchi bianchi, dello stesso raggio del cerchio giallo, per fare i petali. Dispone i petali nel modo seguente: il primo tangente esternamente al cerchio giallo, il secondo tangente esternamente al cerchio giallo e al primo petalo, e così via fino a completare il giro con l'ultimo petalo che è tangente al penultimo e al primo petalo, e al cerchio giallo. Quanti petali ha la margherita?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
(E) questa disposizione è impossibile: l'ultimo petalo si sovrappone necessariamente al primo

6) *a*, *b* e *c* sono numeri reali tali che comunque se ne scelgano due la loro somma è maggiore o uguale a zero. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a \cdot b \cdot c \geq 0$
(B) almeno uno dei tre numeri è zero
(C) almeno uno dei tre numeri è strettamente minore di zero
(D) *a*, *b* e *c* sono tutti maggiori o uguali a zero
(E) $a + b + c \geq 0$

7) Concetta immagina un mondo piatto e tondo, e lo divide in sette stati, uno centrale e gli altri sei intorno a questo, come indicato nella figura a fianco. Inoltre a ciascuno stato assegna come nome una lettera (vedi figura). Vuole colorare ciascuno stato di rosso, oppure di verde, oppure di giallo, in modo che due stati confinanti non abbiano lo stesso colore. In quanti modi diversi può farlo?



(A) Nessuno (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8) Alberto cammina da A a B e poi (senza fermarsi in B) torna ad A; Barbara cammina da B ad A e poi (senza fermarsi in A) torna a B. Entrambi si muovono in linea retta, con velocità costante (ma le due velocità non sono necessariamente uguali). Partono nello stesso istante, e si incontrano una prima volta, all'andata, a 700 metri da B, e una seconda volta, mentre Alberto sta andando da B ad A e Barbara da A a B, a 400 metri da A. Quanto dista A da B?
(A) 900 metri (B) 1100 metri (C) 1700 metri (D) 2000 metri (E) non si può determinare

9) Luca scrive sulla lavagna tutti i numeri pari consecutivi da 2 e 2010 (compresi). Poi Giovanni cancella tutti i numeri che sono multipli di tre. Quanti numeri rimangono?
(A) 670 (B) 710 (C) 840 (D) 905 (E) 1005

10) Silvano, l'uomo più ricco di Nettuno, possiede un'autostrada con molte corsie.
In un momento di prosperità decide di aumentare il numero di corsie del 60 %. Successivamente, a causa di un'antica legge del pianeta, deve ridurre il numero di corsie di una certa percentuale X. Dopo averlo fatto si ritrova con lo stesso numero di corsie che aveva all'inizio. Quanto vale X?

(A) 15% (B) 21,5% (C) 28% (D) 37,5% (E) 60%

11) In un triangolo due angoli misurano rispettivamente 30° e 105° ed il lato tra essi compreso è lungo 2 cm. Qual è la misura del perimetro del triangolo?

(A) $(5+\sqrt{3})$ cm
(B) $(2+2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm
(C) $(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm
(D) $(5+\sqrt{2})$ cm
(E) $(2+3\sqrt{3})$ cm

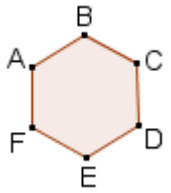
12) Quanto vale la somma: 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + . . . + 35 + 35 + 36?

(A) 990 (B) 1105 (C) 1295 (D) 1395 (E) 1505

13) Scriviamo tutti i numeri naturali da 1 a 2010 (compresi) uno di seguito all'altro in modo da formare un nuovo numero naturale; quante cifre ha questo numero?

(A) 2010 (B) 3540 (C) 5225 (D) 6933 (E) 7253

14) ABCDEF è un esagono regolare di lato 1 cm.
G è il punto di intersezione tra le diagonali AC e BE.
Quanto vale l'area del triangolo ABG?



(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ cm^2 (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ cm^2 (C) $\frac{9}{40}$ cm^2 (D) $\frac{1+\sqrt{3}}{12}$ cm^2 (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2

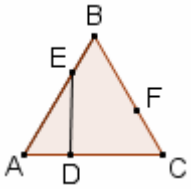
15) Quante cifre ha il numero (112233445566778899)/11?

(A) 9 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23

16) Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre, tali che la cifra delle unità sia la somma della cifra delle decine e di quella delle centinaia?

(A) 315 (B) 495 (C) 540 (D) 720 (E) 900

17) In un triangolo equilatero ABC con lato di lunghezza 3 m, prendiamo i punti D, E e F sui lati AC, AB e BC rispettivamente, in modo che i segmenti AD e FC misurino 1 m e il segmento DE sia perpendicolare a AC.
Quanto misura l'area del triangolo DEF?



(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ m^2 (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m^2 (C) $3\sqrt{3}$ m^2 (D) $\frac{3}{2}$ m^2 (E) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m^2

18) Un celebre investigatore sta cercando il colpevole di un omicidio tra cinque sospettati: Anna, Bruno, Cecilia, Dario ed Enrico.
Egli sa che il colpevole mente sempre e gli altri dicono sempre la verità.
Anna afferma: "Il colpevole è un maschio!".
Cecilia dice: "E' stata Anna oppure è stato Enrico".
Infine Enrico dice: "Se Bruno è colpevole allora Anna è innocente".
Chi ha commesso l'omicidio?

(A) Anna (B) Bruno (C) Cecilia (D) Dario (E) Enrico

19) Quante coppie (x, y), formate da numeri interi strettamente maggiori di 1, sono tali che: $x^2 + y = xy + 1$?

(A) Nessuna (B) una (C) due (D) tre (E) più di quattro

20) Ciro taglia un triangolo equilatero fatto di carta, di lato 20 cm, in alcuni pezzi che poi dispone sul suo tavolo in modo che non si sovrappongano e che formino un quadrato.
Quanto è lungo il lato del quadrato?

(A) 20 cm (B) $10\sqrt[4]{3}$ cm (C) 15 cm (D) $8\sqrt[4]{2}$ cm (E) $10\sqrt{3}$ cm

TESTO DEI "GIOCHI DI ARCHIMEDE" 2003 (clicca qui ⇨ per le risposte)

1) Quanto fa 0,032/0,8?

(A) 0,0004 (B) 0,004 (C) 0,04 (D) 0,4 (E) 400

2) Qual è il più grande degli interi positivi *n* tali che la media aritmetica dei numeri da 1 a *n* sia < 2003 ?
(*Nota*: la media aritmetica di *n* numeri è uguale alla loro somma divisa per *n*)

(A) 2002 (B) 2003 (C) 4003 (D) 4004 (E) 4005

3) Sia dato un quadrato ABCD di lato unitario e sia P un punto interno ad esso tale che l'angolo $A\hat{P}B$ misuri 75°. La somma delle aree dei triangoli ABP e CDP è:

(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) non si può determinare (E) nessuna delle precedenti è corretta

4) Si vogliono colorare le nove caselle di una scacchiera 3×3 in modo tale che ogni riga, ogni colonna e ognuna delle due diagonali non contengano più caselle dello stesso colore.
Qual è il minimo numero di colori necessario?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

5) Un gelataio prepara 20 kg di gelato e lo rivende nel corso della giornata in coni piccoli da 1,20 euro di due palline e coni grandi da 1,60 euro di tre palline. Da ogni kg di gelato ha ricavato 12 palline; alla fine della giornata, ha incassato in totale 137,60 euro. Quanti coni grandi ha venduto?

(A) 17 (B) 24 (C) 32 (D) 43 (E) 50

6) Un venditore di palloncini ha a disposizione due bombole di elio uguali e dei palloncini piccoli e grandi. Utilizza tutta la prima bombola per gonfiare 80 palloncini piccoli, tutti alla stessa pressione. Considerato che da gonfi i palloncini grandi hanno la stessa forma e la stessa pressione dei piccoli, ma una superficie 4 volte più grande, quanti palloncini grandi può riempire con la seconda bombola?

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 24 (E) 40

7) Ogni anno, al momento del pagamento delle tasse, l'utente fa una dichiarazione relativa all'anno in corso. Se la dichiarazione è vera, deve pagare le tasse; se è falsa, non le paga. Un giovane matematico, che ritiene il sistema iniquo, trova il modo di bloccarlo, con una delle seguenti dichiarazioni: quale?

(A) "I pesci vivono in acqua"
(B) "Io vivo in acqua"
(C) "I pesci non pagano le tasse"
(D) "Io non pago le tasse"
(E) "Io pago le tasse"

8) Il numero $\frac{1}{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$ è:

(A) intero
(B) razionale positivo, ma non intero
(C) razionale negativo, ma non intero
(D) irrazionale positivo
(E) irrazionale negativo

9) Un parallelogramma di lati 1 e 2 ha un angolo di 60°. Quanto misura la sua diagonale minore?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$ (E) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

10) Il più grande numero primo palindromo con un numero pari di cifre ha
(A) 2 cifre (B) 4 cifre (C) 10 cifre
(D) non esistono numeri con queste proprietà
(E) esistono numeri grandi a piacere con queste proprietà
Nota: un numero si dice palindromo se può essere letto indifferentemente da sinistra a destra o da destra a sinistra. Per esempio, 141 e 2552 sono palindromi, mentre 1231 non lo è

11) Un parallelepipedo a base quadrata è inscritto in una sfera. Se il lato di base è ¼ dell'altezza, quanto vale il rapporto tra la superficie della sfera e la superficie totale del parallelepipedo?

(A) π (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) 2π (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) dipende dal raggio della sfera

12) Quattro ragazzi vogliono telefonare tutti contemporaneamente alle rispettive ragazze.
Ogni cellulare può funzionare su quattro frequenze distinte.
Se due cellulari si attivano sulla stessa frequenza la comunicazione cade.
Se ogni ragazzo non sa che frequenza scelgono gli altri tre,
qual è la probabilità che tutti e quattro riescano a parlare con le loro ragazze?

(A) $\frac{3}{32}$ (B) $\frac{3}{64}$ (C) $\frac{1}{256}$ (D) $\frac{1}{16}$ (E) $\frac{9}{128}$

13) Giulio vuole stupire Damiano con le sue capacità divinatorie.
Per questo gli fornisce un elenco di alcuni numeri di due cifre e gli dice di sceglierne uno.
Giulio chiede a Damiano la somma delle cifre del numero, ed è così sicuro di poterlo indovinare.
Al massimo da quanti numeri era composto l'elenco iniziale?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 17 (E) 18

14)

In questo rettangolo c'è esattamente una affermazione falsa. In questo rettangolo ci sono esattamente due affermazioni false. In questo rettangolo ci sono esattamente tre affermazioni false. In questo rettangolo ci sono esattamente quattro affermazioni false.

Quante affermazioni vere ci sono nel rettangolo?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

15) Quanti sono i numeri interi positivi *n* per i quali $8n+50$ è un multiplo di $2n+1$?

(A) Nessuno (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 10.

16) Se *p*, *q*, *r* sono tre numeri reali, $p\times(q+r)=(p\times q)+(p\times r)$ è sempre vero.
In quali casi si ha anche $p+(q\times r)=(p+q)\times(p+r)$?

(A) Se e solo se $p=q=r=\frac{1}{3}$ oppure $p=0$
(B) se e solo se $p=q=r$
(C) mai
(D) se e solo se $p+q+r=1$ oppure $p=0$
(E) se e solo se $p=q=r=0$

17) Sia data una stella a cinque punte inscritta in una circonferenza.
Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?



(A) 100° (B) 150° (C) 180° (D) 200°
(E) i dati a disposizione sono insufficienti.

18) Sono dati 6 punti disposti come nella figura a fianco.
Quanti sono i possibili triangoli non degeneri che hanno i vertici in tre dei punti dati?



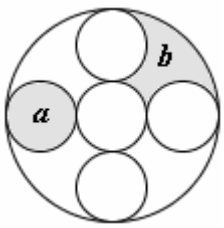
(A) 12 (B) 15 (C) 16 (D) 18 (E) 24.

19) Giovanni ha bevuto troppo e comincia a camminare in modo strano:
- fa 1 passo in avanti;
- poi si volta di 90° verso destra e fa 2 passi in avanti;
- poi si volta di 90° verso destra e fa 1 passo in avanti;
- poi si volta di 90° verso sinistra e fa 1 passo all'indietro;
- dopo di che ricomincia da capo.

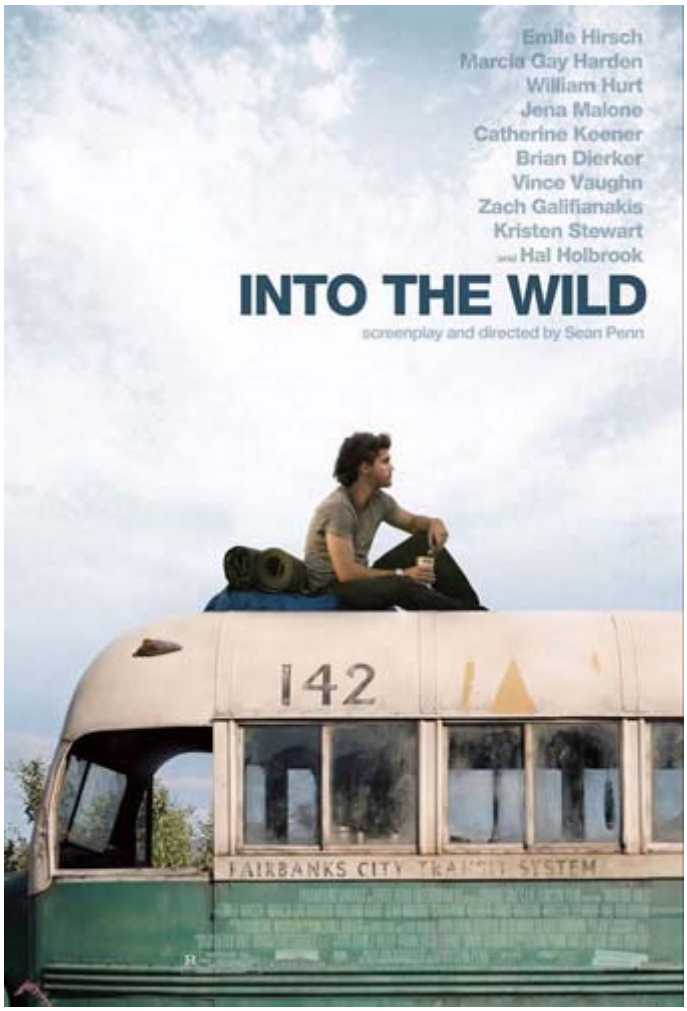
Ogni passo è di 1 metro. Dopo 186 passi cade a terra svenuto.
A quanti metri da dove era partito finisce la passeggiata di Giovanni?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\sqrt{5}$ (E) 4.

20) Dette *a* e *b* le aree delle figure in grigio, dire quale fra le seguenti relazioni è valida (tutti i cerchi piccoli hanno lo stesso raggio *r*, e i 4 tangenti a quello grande hanno i centri sui vertici di un quadrato).



(A) $a<b$, qualunque sia *r*
(B) $a=b$, qualunque sia *r*
(C) $a>b$, qualunque sia *r*
(D) $a<b$ oppure $a=b$, dipende dal valore di *r*
(E) $a>b$ oppure $a=b$, dipende dal valore di *r*



Society,
you're a crazy breed ...
I hope you're
not angry if I
disagree

Happiness
only
real
when
shared

Alaska Schools