# DISEQUAZIONI

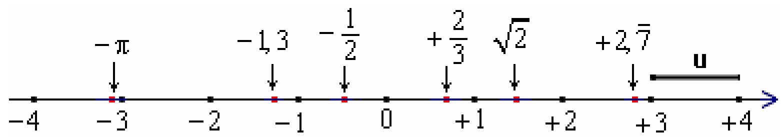
## 1. LA "NUMBER LINE"

Il termine inglese "number line" ("*linea numerica*", "*linea dei numeri*") indica una retta, dotata di
**a) orientamento** **b) origine** **c) unità di misura,** sulla quale vengono rappresentati i numeri reali.

Vi è una **corrispondenza biunivoca** fra l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (razionali+irrazionali)
e l'insieme dei punti della number *line*:
- ♪ ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto (detto "l'immagine" di quel numero);
- ♫ e ad ogni punto della *number line* corrisponde uno e un solo numero reale ("l'ascissa" di quel punto).

**In ogni intervallino, anche piccolissimo, della "number line",
troviamo sempre infiniti punti con ascissa razionale ed infiniti altri punti con ascissa irrazionale.**

In lingua italiana viene di norma denominata "**asse delle ascisse**", locuzione che però tende a richiamarci un'idea di "orizzontalità", mentre non è detto che una *number line* debba essere orizzontale: ecco perché preferiamo il termine inglese.




Un asse delle *ordinate*, in un riferimento cartesiano, altro non è che una *number line* disposta (nella maggior parte dei casi) *verticalmente* rispetto all'osservatore.

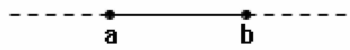
## 2. INTERVALLI

Si chiamano "**intervalli**" **particolari insiemi numerici** (vedi schema seguente).
Gli intervalli possono essere: **chiusi, aperti, semiaperti**; possono essere **limitati o illimitati**.

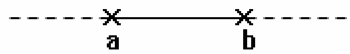
Notare **l'uso delle parentesi**:
- parentesi **QUADRA** = **estremo COMPRESO**;
- parentesi **TONDA** = **estremo ESCLUSO**

Certi testi al posto della tonda usano la "quadra voltata di schiena" e quindi, ad es., al posto di $(a,b)$ scrivono $[a,b[$

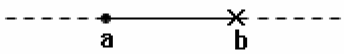
Intervallo chiuso di estremi a e b:
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ \ /\ \ a\le x\le b\}$



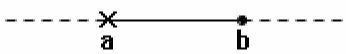

Intervallo aperto di estremi a e b:
$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ \ /\ \ a<x<b\}$



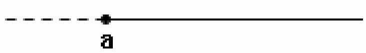

Intervallo di estremi a e b, chiuso a sinistra e aperto a destra:
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ \ /\ \ a\le x<b\}$



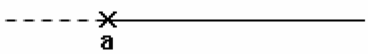

Intervallo di estremi a e b, aperto a sinistra e chiuso a destra:
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\ \ /\ \ a<x\le b\}$



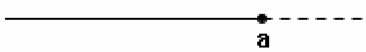

Intervallo chiuso illimitato superiormente:
$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x\ge a\}$



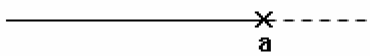

Intervallo aperto illimitato superiormente:
$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}/x>a\}$




Intervallo chiuso illimitato inferiormente:
$(-\infty,\,a]=\{x\in\mathbb{R}/x\le a\}$




Intervallo aperto illimitato inferiormente:
$(-\infty,\,a)=\{x\in\mathbb{R}/x<a\}$




Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$:
- ❑ contiene il 4;
- ❑ contiene tutti i numeri, **NON SOLO** (occhio!) quelli interi **MA ANCHE** quelli "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- ❑ NON contiene l'8.

Anche l'intero insieme $\mathbb{R}$
si può pensare come un intervallo
(illimitato
sia inferiormente che superiormente):
$\boxed{\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$

## 3. PROPRIETA' DELLE DISUGUAGLIANZE

Aggiungendo, o togliendo,
da entrambi i membri di una disuguaglianza,
uno stesso numero,
si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso:

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a<b \Leftrightarrow a+c<b+c \\ a<b \Leftrightarrow a-c<b-c \end{cases}$$

$2<6$
$2+5<6+5$
$2-5<6-5$

Sulla *number line*:
TRASLAZIONE (NOTA 1) ⇨

---

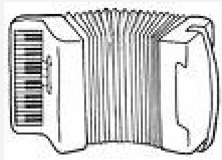
Moltiplicando, o dividendo,
entrambi i membri di una disuguaglianza,
per uno stesso numero POSITIVO,
si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso:

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall c \in (0,+\infty) \quad \begin{cases} a<b \Leftrightarrow a\cdot c<b\cdot c \\ a<b \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c} \end{cases}$$

$1<3 \quad \boxed{\cdot 2} \quad 2<6$

$-\dfrac{1}{3}<1 \quad \boxed{\cdot 3} \quad -1<3$

$-15>-20 \quad \boxed{\cdot \dfrac{1}{5}} \quad -3>-4$



Sulla *number line*:
DILATAZIONE O CONTRAZIONE,
"EFFETTO FISARMONICA" CON
L'ORIGINE CHE RIMANE FERMA (NOTA 2) ⇨

---

Se due numeri sono disuguali,
i loro opposti sono disuguali
*in senso contrario*:

$\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a<b \Leftrightarrow -a>-b$

| | | |
|---|---|---|
| $2<3$ | $-1<4$ | $-3>-5$ |
| $-2>-3$ | $1>-4$ | $3<5$ |

Sulla *number line*:
SIMMETRIZZAZIONE RISPETTO
ALL'ORIGINE (NOTA 3) ⇨

---

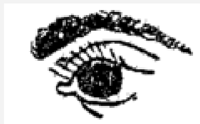
Moltiplicando, o dividendo,
entrambi i membri di una disuguaglianza,
per uno stesso numero NEGATIVO,
si ottiene una disuguaglianza
DI VERSO CONTRARIO:

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall c \in (-\infty,0) \quad \begin{cases} a<b \Leftrightarrow a\cdot c>b\cdot c \\ a<b \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c} \end{cases}$$

$1<3 \quad \boxed{\cdot(-2)} \quad -2>-6$

$-\dfrac{1}{2}<4 \quad \boxed{\cdot(-3)} \quad \dfrac{3}{2}>-12$

$-15>-20 \quad \boxed{\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)} \quad 3<4$



Sulla *number line*: ⇨
SIMMETRIZZAZIONE RISPETTO ALL'ORIGINE
poi DILATAZIONE O CONTRAZIONE

---

Due disuguaglianze dello stesso verso si possono *sommare* membro a membro, ottenendosi con ciò una disuguaglianza dello stesso verso:

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{c} a<b \\ c<d \\ \hline a+c<b+d \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 8<9 \\ 2<5 \\ \hline 10<14 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1<2 \\ -7<-5 \\ \hline -6<-3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} -3>-4 \\ 1>-1 \\ \hline -2>-5 \end{array}$$

---

Invece
NON è lecito
*sottrarre* membro a membro due disuguaglianze!

$9<11$
$6<7$
*...sottraendo...*
$3<4$ *vera*

$9<11$
$6<10$
*...sottraendo...*
$\cancel{3<1}$ *FALSA*!!!

---

Se due numeri POSITIVI sono disuguali,
i loro *reciproci* sono disuguali *in senso contrario*:

$\forall a,b \in (0,+\infty), \quad a<b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

$2<3$

$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}$

---

NOTA 1 - Se due punti sulla *number line* vengono entrambi traslati, verso destra o verso sinistra, della stessa lunghezza, quello dei due che stava più a sinistra prima continuerà a stare più a sinistra anche dopo!

NOTA 2 - Se due punti sulla *number line* vengono entrambi sottoposti a questo "effetto fisarmonica", quello dei due che stava più a sinistra prima continuerà a stare più a sinistra anche dopo!

NOTA 3 - Se due punti sulla *number line* vengono entrambi simmetrizzati rispetto all'origine, quello dei due che stava più a SINISTRA prima starà più a DESTRA dopo!

## 4. DATA UNA DISUGUAGLIANZA, SI POSSONO ELEVARE A POTENZA I DUE MEMBRI? SI POSSONO ESTRARRE LE RADICI DEI DUE MEMBRI?

Ed ecco infine due ulteriori proprietà molto rilevanti,
che occorre padroneggiare perfettamente:

Se indichiamo con 2n+1 un numero naturale DISPARI,
e con a, b due numeri reali DI SEGNO QUALSIASI:

$$a < b \leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$$

$$a < b \leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b}$$

Se indichiamo con 2n un numero naturale PARI,
e con a, b due numeri reali POSITIVI O NULLI:

$$a < b \leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$$

$$a < b \leftrightarrow \sqrt[2n]{a} < \sqrt[2n]{b}$$

Ricordiamo (importantissimo!) che, parlando di radicali:

Se l'indice è DISPARI,
- il radicando potrà essere di segno qualsiasi: positivo, negativo o nullo
- e il risultato dell'estrazione di radice conserverà sempre lo stesso segno del radicando;

Se l'indice è PARI,
- il radicando dovrà essere positivo o nullo, altrimenti l'operazione sarebbe impossibile (NOTA)
- il risultato dell'estrazione di radice è, *per convenzione*, anch'esso positivo o nullo
  (insomma, NON è $\cancel{\sqrt{9} = \pm 3}$, bensì $\sqrt{9} = 3$)

NOTA
… a meno di sconfinare in campo complesso, cosa che, salvo esplicito avviso contrario, non si fa mai.
E d'altronde, nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi
la comunità matematica NON definisce le relazioni di < e >.

Le due proprietà di cui ci stiamo occupando possono essere riassunte come segue:

**Data una disuguaglianza,**
**è SEMPRE lecito**
**(qualunque siano i segni dei due membri)**
**elevare ambo i membri ad esponente DISPARI,**
**o estrarne le radici con lo stesso indice DISPARI**

Invece,

**l'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza,**
**o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza,**
**sono leciti**
**SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI**
**DELLA DISUGUAGLIANZA DATA**
**SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.**

## 5. LE DISEQUAZIONI E LA LORO RISOLUZIONE

**Disequazione = disuguaglianza problematica:**
**una disequazione è una disuguaglianza, contenente un numero sconosciuto, "incognito"**
**(generalmente indicato con *x*), che ci chiede di determinare**
**per quali valori di *x*, ammesso che esistano, la disuguaglianza stessa è verificata.**

Le proprietà delle disuguaglianze, esposte nei due paragrafi precedenti, consentono di stabilire che
**nella risoluzione di una DISEQUAZIONE**
**(che consiste poi nel sostituire la disequazione di partenza con altre via via più semplici,**
**ma sempre equivalenti a quella data, ossia aventi le stesse soluzioni di quella data)**
**noi possiamo effettuare tutti i passaggi che siamo già abituati a svolgere su di un'*EQUAZIONE*, con**
♥ **DUE SOLE IMPORTANTI AVVERTENZE:**

**a)** **quando vogliamo cambiare tutti i segni ( = moltiplicare per –1), o comunque moltiplicare o dividere ambo i membri per uno stesso numero NEGATIVO, dobbiamo ricordarci di CAMBIARE IL VERSO della disequazione**

**b)** *mentre* l'elevamento ad esponente dispari, o l'estrazione di radice con indice dispari, è un passaggio sempre lecito in una disequazione,
*invece* **l'elevamento ad esponente pari, o l'estrazione di radice con indice pari, è un passaggio effettuabile soltanto a patto che i due membri siano entrambi positivi** ( $\geq 0$ ) per ogni valore della variabile, o comunque a patto di riferirsi esclusivamente ai valori di $x$ che rendono positivi ( $\geq 0$ ) entrambi i membri.

## 6. LA RISOLUZIONE DI UNA DISEQUAZIONE DI 1° GRADO

Esempio:

$\frac{x-4}{2}-x<\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ Faccio il denominatore comune, lo stesso da entrambe le parti

$\frac{3x-12-6x}{6}<\frac{2x+3}{6}$ Ora manderò via i due denominatori uguali.
E' come moltiplicare per 6 ambo i membri: $\cancel{6}\cdot\frac{3x-12-6x}{\cancel{6}}<\frac{2x+3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6}$

$3x-12-6x<2x+3$ Applico la "regola del trasporto":
è possibile spostare un termine da un membro all'altro, cambiandolo però di segno.
Ad esempio, trasportare $2x$ dal secondo membro al primo, mutandolo in $-2x$ ,
è lecito perché è come sottrarre $2x$ da entrambi i membri:
$3x-12-6x\ {-2x}<\cancel{2x}+3\ \cancel{-2x}$

$3x-6x-2x<3+12$ Faccio i calcoli

$\mathbf{-5x<15}$ Essendo negativo il coefficiente di $x$, **mi conviene cambiare i segni**:
**ma così facendo, devo ricordarmi di cambiare anche il verso.**
Infatti: se due numeri sono disuguali, i loro opposti saranno
disuguali IN SENSO CONTRARIO; o anche: cambiare i segni
è come moltiplicare per il numero NEGATIVO $-1$ (NOTA 1)

$\mathbf{+5x>-15}$ Divido ambo i membri per il coefficiente di $x$, che è 5.
Il verso resta inalterato, perché divido per un numero POSITIVO.
$\frac{\cancel{+5}x}{\cancel{5}}>\frac{-\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}}$

$x>-\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}}$ Ecco fatto! Le soluzioni sono dunque
tutti i numeri reali (interi, razionali, irrazionali) maggiori di $-3$ (NOTA 2).
In forma insiemistica, possiamo dire che l'insieme $S$ delle soluzioni è $S=(-3,+\infty)$

♥ NOTA 1 - Riflettiamo sul motivo per cui il passaggio ci porta
da una disequazione ad un'altra ad essa EQUIVALENTE, cioè con le medesime soluzioni:
- se, per un certo valore di $x$, si ha $-5x<15$, allora, per quello stesso valore di $x$, si avrà anche $5x>-15$;
- e viceversa, se, per un certo valore di $x$, si ha $5x>-15$, allora, per lo stesso valore, si avrà pure $-5x<15$.

♥ NOTA 2 - Prova a SOSTITUIRE nella disequazione iniziale, al posto di $x$, il valore $-2$;
poiché si tratta di un valore maggiore di $-3$, vedrai che la disuguaglianza sarà verificata.
Altrettanto, ad esempio, con $x=12$ o con $x=0$.
Invece (provaci!) con $x=-4$ o $x=-3$ la disuguaglianza risulterà falsa.

**ESERCIZI a pagina 144**

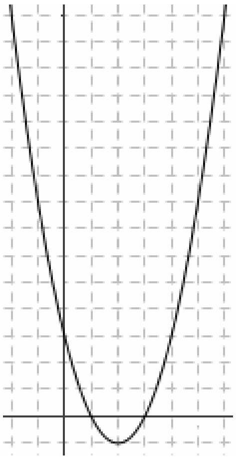
# 7. LO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO E LA RISOLUZIONE DI UNA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO

**"STUDIARE IL SEGNO" DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO**
**significa chiedersi per quali valori della variabile il trinomio**

- **assume valore positivo;**
- **si annulla;**
- **assume valore negativo**

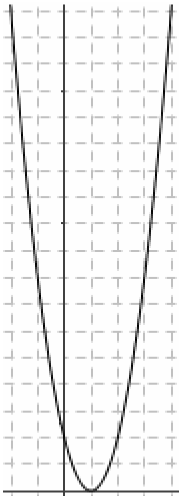
Ecco qui di seguito i grafici di alcuni trinomi di 2° grado, pensati come funzioni (*l'unità di misura è 1 quadretto*):

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -5 | 48 |
| -4 | 35 |
| -3 | 24 |
| -2 | 15 |
| -1 | 8 |
| 0 | 3 |
| 1 | 0 |
| 2 | -1 |
| 3 | 0 |
| 4 | 3 |
| 5 | 8 |



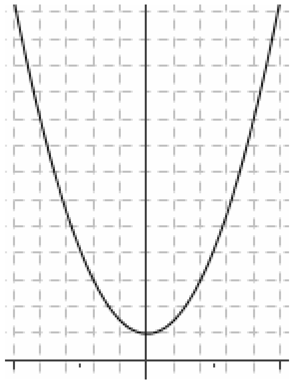
$y = x^2 - 4x + 3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -5 | 72 |
| -4 | 50 |
| -3 | 32 |
| -2 | 18 |
| -1 | 8 |
| 0 | 2 |
| 1 | 0 |
| 2 | 2 |
| 3 | 8 |
| 4 | 18 |
| 5 | 32 |



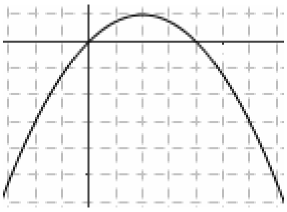
$y = 2x^2 - 4x + 2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -5 | 13,5 |
| -4 | 9 |
| -3 | 5,5 |
| -2 | 3 |
| -1 | 1,5 |
| 0 | 1 |
| 1 | 1,5 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5,5 |
| 4 | 9 |
| 5 | 13,5 |



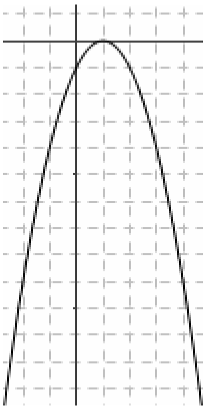
$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -5 | -11,25 |
| -4 | -8 |
| -3 | -5,25 |
| -2 | -3 |
| -1 | -1,25 |
| 0 | 0 |
| 1 | 0,75 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0,75 |
| 4 | 0 |
| 5 | -1,25 |



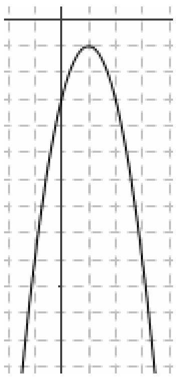
$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -5 | -36 |
| -4 | -25 |
| -3 | -16 |
| -2 | -9 |
| -1 | -4 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | -1 |
| 3 | -4 |
| 4 | -9 |
| 5 | -16 |



$y = -x^2 + 2x - 1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -5 | -73 |
| -4 | -51 |
| -3 | -33 |
| -2 | -19 |
| -1 | -9 |
| 0 | -3 |
| 1 | -1 |
| 2 | -3 |
| 3 | -9 |
| 4 | -19 |
| 5 | -33 |

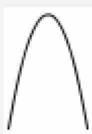


$y = -2x^2 + 4x - 3$

Come avevamo già avuto modo di evidenziare in precedenza, il grafico di un trinomio di 2° grado, pensato come una funzione, è costituito da una curva che ha un tipico andamento "scendi-poi-sali", oppure "sali-poi-scendi", chiamata "**parabola**".

Quando il **coefficiente di** $x^2$ nel trinomio è **positivo**, la parabola ha la **concavità** (la parte "cava") **rivolta verso l'alto** →

mentre se il **coefficiente di** $x^2$ è **negativo**, la parabola ha la **concavità** **rivolta verso il basso** →



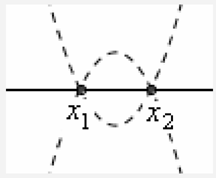
**Lo studio del segno di un trinomio di 2° grado assegnato $\mathbf{ax^2+bx+c}$**
**si effettuerà disegnando "approssimativamente" la parabola $y=\mathbf{ax^2+bx+c}$**
che rappresenta il grafico del trinomio dato, pensato come funzione,
**poi andando a vedere per quali valori di *x* la *y* corrispondente**
**(ossia, il valore assunto dal trinomio) è positiva, nulla, negativa**.

Ora, **per tracciare approssimativamente la parabola** in questione **basterà**:

♪ **stabilire se la sua concavità è rivolta verso l'alto oppure verso il basso,** semplicemente **osservando il segno del coefficiente di $x^2$** nel trinomio;

**a > 0** **a < 0**

♫ **stabilire se la parabola interseca l'asse *x*,**
**e, in caso affermativo, DOVE lo interseca**:
ma **ciò equivale a** chiedersi per quali valori di $x$ risulta $y=0$,
cioè a **risolvere l'equazione $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$**
(detta "equazione associata" al trinomio considerato).



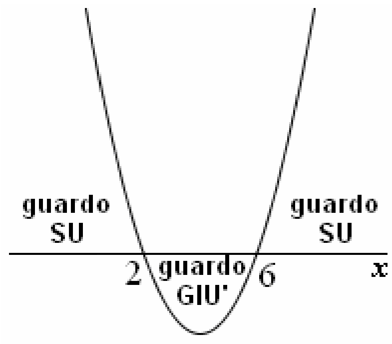

Studiamo, ad esempio, il segno del seguente trinomio di 2° grado: $\boxed{x^2-8x+12}$

Si tratta di tracciare approssimativamente il grafico della parabola $y=x^2-8x+12$.

♪ Di essa sappiamo che ha la concavità rivolta verso l'alto, perché il coefficiente di $x^2$ è $1>0$.

♫ Ora stabiliremo per quali valori di $x$ la parabola interseca l'asse orizzontale, risolvendo l'equazione $x^2-8x+12=0$.
Con la formula, o per scomposizione in fattori, si trova $x=2 \vee x=6$.

Allora il grafico sarà (ci interessa solo una "bozza"!)
il seguente:

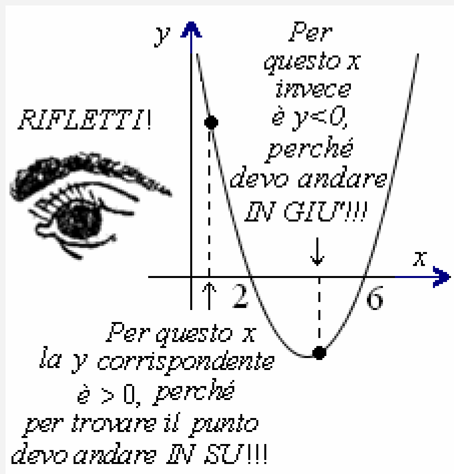



♥ Immagina di essere una FORMICHINA
che cammina sull'asse delle *x*.
I valori di $x$ per cui è $y>0$ sono quelli
per i quali il punto sulla parabola
lo si vede guardando verso l'alto.

… e osservando il grafico
si traggono subito
le conclusioni ( $y$ esprime
il valore del trinomio):

$y>0$ *per* $x<2 \vee x>6$
$y=0$ *per* $x=2 \vee x=6$
$y<0$ *per* $2<x<6$

*Ad es., con $x=5$*
*(5 è compreso fra 2 e 6)*
*il trinomio*
*dovrebbe assumere*
*valore negativo.*
*Controlla, sostituendo!*
*Troverai che con $x=5$*
*il trinomio vale $-3$*




**ESERCIZI**. Studiare il segno dei trinomi seguenti (risposte subito a fianco):

1) $-x^2-x+20$
$y>0$ *per* $-5<x<4$
$y=0$ *per* $x=-5 \vee x=4$
$y<0$ *per* $x<-5 \vee x>4$

2) $2x^2-x$
$y>0$ *per* $x<0 \vee x>1/2$
$y=0$ *per* $x=0 \vee x=1/2$
$y<0$ *per* $0<x<1/2$

3) $x^2-14x+49$
$y>0$ *per* $x \neq 7$
$y=0$ *per* $x=7$
$y<0$ *per nessun valore di x*

4) $x^2-x+1$
$y>0$ *per tutti i valori di x*
$y=0$ *per nessun valore di x*
$y<0$ *per nessun valore di x*

5) $49-x^2$
$y>0$ *per* $-7<x<7$
$y=0$ *per* $x=-7 \vee x=7$
$y<0$ *per* $x<-7 \vee x>7$

6) $x^2-20x+64$
$y>0$ *per* $x<4 \vee x>16$
$y=0$ *per* $x=4 \vee x=16$
$y<0$ *per* $4<x<16$

7) $x^2-16x+64$
$y>0$ *per* $x \neq 8$
$y=0$ *per* $x=8$
$y<0$ *per nessun valore di x*

8) $x^2-12x+64$
$y>0$ *per tutti i valori di x*
$y=0$ *per nessun valore di x*
$y<0$ *per nessun valore di x*

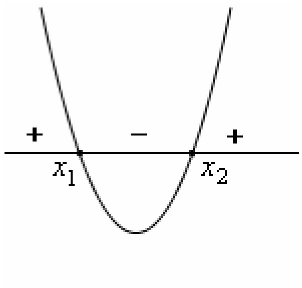
9) $2x^2+2x-24$
$y>0$ *per* $x<-4 \vee x>3$
$y=0$ *per* $x=-4 \vee x=3$
$y<0$ *per* $-4<x<3$

10) $-x^2+2x+1$
$y>0$ *per* $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$
$y=0$ *per* $x=1-\sqrt{2} \vee x=1+\sqrt{2}$
$y<0$ *per* $x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2}$

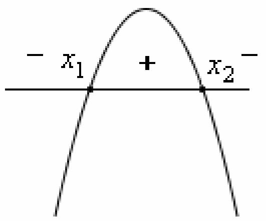
Volendo, si possono enunciare le seguenti **REGOLE**:

Un trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$
con $\boxed{\Delta > 0}$
ha **segno concorde con quello del suo 1° coeff. per valori** di $x$ **esterni** all'intervallo delimitato dalle due soluzioni dell'equazione associata
(cioè, per $x < x_1 \vee x > x_2$)
mentre ha **segno discorde** rispetto a quello del suo 1° coefficiente **per valori interni**
(cioè, per $x_1 < x < x_2$)

$\Delta > 0,\ a > 0$

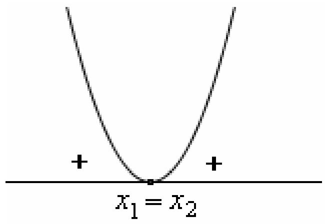



$\Delta > 0,\ a < 0$

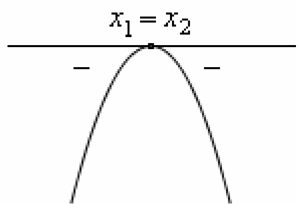



Un trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$
con $\boxed{\Delta = 0}$
ha **quasi sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, con una sola eccezione**:
per $x = x_1$,
con $x_1\ (= x_2)$ soluzione dell'equazione associata, il trinomio si annulla.

$\Delta = 0,\ a > 0$

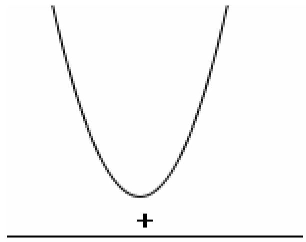



$\Delta = 0,\ a < 0$

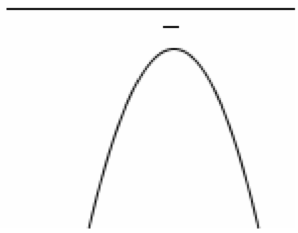



Un trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$
con $\boxed{\Delta < 0}$
ha **sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, senza eccezioni.**

$\Delta < 0,\ a > 0$



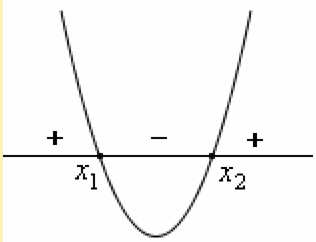

$\Delta < 0,\ a < 0$



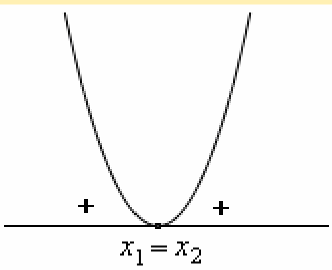

Quando si risolve una disequazione di 2° grado, si ha sempre la possibilità di lavorare con un trinomio col 1° coefficiente positivo: infatti, se così non fosse, si potrebbero sempre cambiare segni e verso. E' perciò molto comodo, oltre che conoscere bene le regole sopra riportate, tenere anche presente cosa dicono **LE STESSE REGOLE**, quando vengono **PARTICOLARIZZATE AL CASO** $\mathbf{a > 0}$:

♥ **UN TRINOMIO DI 2° GRADO** $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ **CON 1° COEFFICIENTE POSITIVO** ($\boxed{\mathbf{a > 0}}$)

se ha $\boxed{\mathbf{\Delta > 0}}$
è **positivo per valori esterni**
$x < x_1 \vee x > x_2$
e **negativo per valori interni**
$x_1 < x < x_2$




se ha $\boxed{\mathbf{\Delta = 0}}$
è **positivo per ogni valore di** $\mathbf{x}$,
**con una sola eccezione**:
è nullo per $x = x_1\ (= x_2)$




se ha $\boxed{\mathbf{\Delta < 0}}$
è **positivo per ogni valore di** $\mathbf{x}$, **senza eccezioni**.


Rimpiazzando, in questo schema, "positivo/negativo" con "concorde/discorde, in segno, rispetto al segno del 1° coefficiente", ecco che si torna alle regole generali.

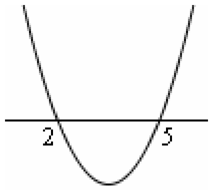
**Una DISEQUAZIONE DI 2° GRADO ci chiede di rispondere a uno solo dei tre punti in cui consiste lo studio del segno di un trinomio di 2° grado.** Vediamo alcuni ESEMPI SVOLTI.

$\boxed{x^2-7x+10<0}$

Equazione associata:

$$x^2-7x+10=0$$
$$(x-2)(x-5)=0$$
$$x=2 \vee x=5$$

Il grafico della parabola $y=x^2-7x+10$
è il seguente ( $a>0$ , quindi concavità verso l'alto):




La disequazione (che ha verso $<$)
è perciò verificata per: $\boxed{2<x<5}$

$\boxed{2x+1<8x^2}$

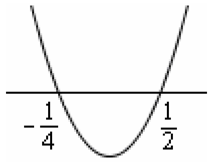
$$-8x^2+2x+1<0$$

1° coefficiente negativo: conviene cambiare segni e verso

$$8x^2-2x-1>0$$

Penso all'equazione associata e la risolvo: $x_{1,2}=\ldots=\begin{cases}-1/4\\1/2\end{cases}$

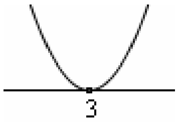
Il grafico della parabola $y=8x^2-2x-1$ è:




La disequazione (il cui verso *definitivo* è $>$)
risulta quindi verificata per: $\boxed{x<-1/4 \vee x>1/2}$

$\boxed{x^2-6x+9>0}$

L'equazione associata è: $x^2-6x+9=0$
con le soluzioni $x_1=x_2=3$
Il grafico della parabola $y=x^2-6x+9$ è:




La disequazione è perciò verificata per $\boxed{x\neq 3}$

Anche (meglio!) con ragionamento più diretto:

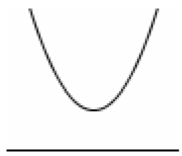
$$x^2-6x+9>0 \leftrightarrow (x-3)^2>0$$

La disequazione ci chiede dunque di stabilire
per quali valori di $x$ il quadrato $(x-3)^2$
è strettamente positivo.
Ma un quadrato è **quasi sempre** strettamente positivo:
l'unica eccezione si ha quando il quadrato si annulla,
il che avviene quando si annulla la sua base.
Perciò la disequazione proposta è verificata
"quasi sempre", purché sia $x-3\neq 0,\ \ x\neq 3$ .

$\boxed{x<\dfrac{x^2+5}{4}}$

$$4x<x^2+5$$
$$-x^2+4x-5<0$$
$$x^2-4x+5>0$$

Passando all'equazione associata, si vede che è $\Delta<0$
per cui tale equazione è impossibile.
Ciò significa che non esiste nessun valore di $x$
per il quale si abbia $y=x^2-4x+5=0$ :
la parabola $y=x^2-4x+5$
è priva di intersezioni con l'asse delle $x$ e il suo grafico è



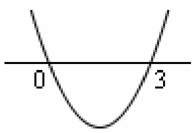
La disequazione è perciò verificata $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}}$

$\boxed{x^2>3x}$

$$x^2-3x>0$$
$$x(x-3)>0$$

Mutando ora nella nostra mente
il > in =
per pensare all'equazione associata,
vediamo che le soluzioni di questa
sono $x=0 \vee x=3$

Grafico:



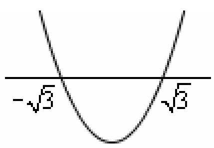

Soluzioni della disequazione:

$\boxed{x<0 \vee x>3}$

$\boxed{x^2>3}$

$$x^2-3>0$$

Eq. associata: $x^2-3=0$ ,
con le soluzioni $x=\pm\sqrt{3}$ .




Soluzioni della disequazione:

$\boxed{x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3}}$

*NOTA*
*Sarebbe stato possibile risolvere questa disequazione anche in un altro modo, sullo stile dell'Esempio 1 di pagina 148*

$\boxed{x^2+3>0}$

Si vede subito che la disequazione
è sempre verificata, $\forall x\in\mathbb{R}$ . Infatti
il 1°membro è la somma di due termini,
il primo dei quali è $\geq 0$ per ogni $x$
e il secondo dei quali è una costante >0.
E' quindi evidente che la somma
di tali due termini sarà >0 per ogni $x$.

$$\underbrace{\overbrace{x^2}^{\geq 0,\forall x}\ \overbrace{+3}^{>0}}_{>0,\ \forall x}$$

Volendo risolvere in modo "standard",
si trova un'eq. ass. impossibile, quindi
un grafico "tutto sopra" rispetto all'asse $x$,
e la conclusione è la medesima:
disequazione verificata $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}}$

## 8. SIGNIFICATO DEI SIMBOLI $\le$ *(minore o uguale di)*, $\ge$ *(maggiore o uguale di)*

$a \le b$ significa : $a < b$ oppure $a = b$ $\boxed{a \le b \leftrightarrow a < b \vee a = b}$ $\le$ equivale a "non maggiore";

$a \ge b$ significa : $a > b$ oppure $a = b$ $\boxed{a \ge b \leftrightarrow a > b \vee a = b}$ $\ge$ equivale a "non minore"

Ad es., l'insieme $\{x \in \mathbb{R} /\ x \le 4\}$ è formato da tutti i numeri minori di 4, più anche il numero 4.

Sono corrette (anche se appaiono strane) le scritture $3 \le 4$ e $4 \le 4$,
mentre sarebbe, ovviamente, SBAGLIATO scrivere $\cancel{5 \le 4}$

**SUGGERIMENTO IMPORTANTE**

♥ **Di fronte a una disequazione di 2° grado col $\le$, oppure il $\ge$, può essere utile pensare dapprima alla disequazione STRETTA (cioè, quella solo col $<$ o col $>$), per poi aggiungere all'insieme delle soluzioni così trovate anche quei valori che rendono il 1° membro uguale al 2°.**
**Questa indicazione è ancora più efficace per le disequazioni di grado superiore al 2° o fratte.**
**Invece per le disequazioni di 1° grado basta procedere "meccanicamente",**
semplicemente ricordando che, **nel caso il verso debba cambiare, il $\le$ diventa $\ge$, e viceversa**:
ad esempio $2x \le 3x + 4;\ \ 2x - 3x \le 4;\ \ -x \le 4;\ \ x \ge -4$

## 9. ESERCIZI

### ❑ ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 1° GRADO

1) $3(x-5) < 2$ 2) $x + 7 < 4(x-1)$ 3) $(x+2)^2 > (x-1)^2 + 15$ 4) $\frac{x-1}{4} + \frac{2x-3}{2} < 3x$ 5) $\frac{2}{3}(3-x) - x > 0$

6) $2x - \frac{4x-3}{5} \le 1$ 7) $3(x+1) \le 5(x+7)$ 8) $\frac{2x}{5} - \frac{x-1}{2} \ge -\frac{3}{4}x$ 9) $\frac{x}{3} < \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}(x-1)$ 10) $x(x+1) > x(x+4)$

11) $4(2x+1) - 3x < 5(x-2)$ 12) $(x-1)^2 \le (x+1)^2$ 13) $226(x-8) > 0$ 14) $x\sqrt{2} - x\sqrt{3} > \sqrt{6}$ 15) $x < x\sqrt{2}$

16) $x < x\sqrt{2} - 1$ 17) $0{,}0004x - 0{,}003 < 0{,}0005x$ 18) $(2x-1)^2 < 4x(x-1)$ 19) $(x+7)^2 > x(x+16) + 47$

### SOLUZIONI

1) $x < \frac{17}{3}$ 2) $x > \frac{11}{3}$ 3) $x > 2$ 4) $x > -1$ 5) $x < \frac{6}{5}$ 6) $x \le \frac{1}{3}$ 7) $x \ge -16$ 8) $x \ge -\frac{10}{13}$

9) indeterminata (verificata $\forall x \in \mathbb{R}$) 10) $x < 0$ 11) imposs. 12) $x \ge 0$ 13) $x > 8$ senza nessun calcolo!

14) $x < -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \ldots = -(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$ 15) $x > 0$ 16) $x > \sqrt{2} + 1$ 17) $x > -30$ 18) imp. 19) $x < 1$

### ❑ ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 2° GRADO

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20) $2x^2 - 7x + 3 < 0$ | 21) $x^2 - 5x + 4 > 0$ | 22) $x^2 - 49 < 0$ | 23) $x^2 - 4x > 0$ |
| 24) $25x^2 - 10x + 1 > 0$ | 25) $2x^2 - 4x + 9 > 0$ | 26) $x + 12 > x^2$ | 27) $x < \frac{x^2+1}{2}$ |
| 28) $4x^2 + 1 < 0$ | 29) $x^2 - 4x + 1 > 0$ | 30) $x^2 + 8x + 16 > 0$ | 31) $x^2 + 10x + 16 > 0$ |
| 32) $x^2 - 5 < 0$ | 33) $x^2 - 2x + 2 > 0$ | 34) $x^2 - 6x + 9 < 0$ | 35) $x^2 + x > 0$ |
| 36) $7x > 6x^2 + 1$ | 37) $x^2 - 4x + 3 > 0$ | 38) $x^2 - 4x + 4 > 0$ | 39) $x^2 - 4x + 5 > 0$ |
| 40) $9x > x^2$ | 41) $9 > x^2$ | 42) $9x^2 + 49 > 0$ | 43) $9x^2 + 1 > 10x$ |
| 44) $9x^2 + 1 > -6x$ | 45) $9x^2 + 1 < -3$ | 46) $9x^2 > 0$ | 47) $9x^2 > 9$ |

### SOLUZIONI

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20) $1/2 < x < 3$ | 21) $x < 1 \vee x > 4$ | 22) $-7 < x < 7$ | 23) $x < 0 \vee x > 4$ |
| 24) $x \ne 1/5$ | 25) $\forall x \in \mathbb{R}$ | 26) $-3 < x < 4$ | 27) $x \ne 1$ |
| 28) *imposs.* | 29) $x < 2 - \sqrt{3} \vee x > 2 + \sqrt{3}$ | 30) $x \ne -4$ | 31) $x < -8 \vee x > -2$ |
| 32) $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ | 33) $\forall x \in \mathbb{R}$ | 34) *imposs.* | 35) $x < -1 \vee x > 0$ |
| 36) $1/6 < x < 1$ | 37) $x < 1 \vee x > 3$ | 38) $x \ne 2$ | 39) $\forall x \in \mathbb{R}$ |
| 40) $0 < x < 9$ | 41) $-3 < x < 3$ | 42) $\forall x \in \mathbb{R}$ | 43) $x < 1/9 \vee x > 1$ |
| 44) $x \ne -1/3$ | 45) *imposs.* | 46) $x \ne 0$ | 47) $x < -1 \vee x > 1$ |

♥ Vuoi un CONSIGLIO? Almeno ogni tanto, fai qualche "esperimento", sostituendo al posto dell'incognita qualche valore preso dall'insieme delle soluzioni che hai trovato, per vedere se la disuguaglianza è vera!

## ❑ ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 1° e 2° GRADO

| | SOLUZIONI |
|---|---|
| 1) $6x^2-7x-10\ge 0$ | $x\le -5/6 \vee x\ge 2$ |
| 2) $6x^2-7x-10\le 0$ | $-5/6\le x\le 2$ |
| 3) $16x^2-40x+25>0$ | $x\ne 5/4$ |
| 4) $16x^2-40x+25\ge 0$ | $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| 5) $16x^2-40x+25<0$ | *imposs.* |
| 6) $16x^2-40x+25\le 0$ | $x=5/4$ |
| 7) $3x^2-4x+2>0$ | $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| 8) $3x^2-4x+2\ge 0$ | $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| 9) $3x^2-4x+2<0$ | *imposs.* |
| 10) $3x^2-4x+2\le 0$ | *imposs.* |
| 11) a) $x^2>9$ b) $x^2>9x$ c) $x^2>-9$ | a) $x<-3 \vee x>3$ b) $x<0 \vee x>9$ c) $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| 12) a) $9x>0$ b) $9x^2>0$ c) $9x^2>1$ | a) $x>0$ b) $x\ne 0$ c) $x<-1/3 \vee x>1/3$ |
| 13) a) $x^2<1$ b) $x^2<0$ c) $x^2<x$ | a) $-1<x<1$ b) *imposs.* c) $0<x<1$ |
| 14) a) $5-4x^2\le 0$ b) $5x-4x^2\le 0$ | a) $x\le -\sqrt{5}/2 \vee x\ge \sqrt{5}/2$ b) $x\le 0 \vee x\ge 5/4$ |
| 15) a) $(x+1)^2>x(x+2)$ b) $(x-1)^2>x^2+1$ | a) $\forall x\in\mathbb{R}$ b) $x<0$ |
| 16) a) $(x-2)(x-6)>0$ b) $(x-2)(x-6)>5$ | a) $x<2 \vee x>6$ b) $x<1 \vee x>7$ |
| 17) a) $(x-2)^2>0$ b) $(x-2)^2\ge 0$ | a) $x\ne 2$ b) $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| 18) a) $(x-2)^2>x$ b) $(x-2)^2+4x>0$ | a) $x<1 \vee x>4$ b) $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| 19) $2-x-x^2>0$ (se vuoi, cambia segni e verso!) | $-2<x<1$ |
| 20) $(2x-1)(2x^2-x-3)\le(2x-1)^3-4x(x-1)^2$ | $x\ge 4/7$ |
| 21) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)+x+2^{-2}\ge\frac{13}{8}$ | $x\le -\frac{5}{4} \vee x\ge 1$ |
| 22) $\frac{2x-3}{6}\le\frac{x^2}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}(x-1)$ 23) $3x^2\ge 2(4x-3)$ | $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| 24) $(x+3)^2+(2x-3)^2\le x+2$ | *imposs.* |
| 25) $\frac{1}{6}(x-1)-x^2<x$ 26) $\frac{x^2}{23}\ge 0$ | $x<-\frac{1}{2} \vee x>-\frac{1}{3}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| 27) $\left(y+\frac{1}{6}\right)^2\ge\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2$ | $-1\le y\le -\frac{1}{3}$ |
| 28) $4x\left(\sqrt{3}-x\right)\ge 3$ 29) $9x^2+16>24x$ | $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x\ne\frac{4}{3}$ |
| 30) $(3w-2)^3-3w(3w-1)^2+3w<0$ | $w<\frac{1}{3} \vee w>\frac{2}{3}$ |
| 31) $(x^2-x-2)^2-(x^2+x-2)^2+1>x(3-4x-4x^2)$ | $x<-1 \vee x>-\frac{1}{4}$ |
| 32) $2(-3x+1)(-3x-1)>3\left(2x\sqrt{2}-1\right)$ | $x\ne\frac{\sqrt{2}}{6}$ |
| 33) $x^2-x+\sqrt{2}\le 2$ 34) $2-x^2\ge\sqrt{2}$ | $1-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ $-\sqrt{2-\sqrt{2}}\le x\le\sqrt{2-\sqrt{2}}$ |
| 35) $(0{,}0002x+24)^2>0$ | $x\ne -120000$ |
| 36) $347(3x-122)(4x-123)<0$ | $\frac{123}{4}<x<\frac{122}{3}$ |
| 37) $a-2<a$ 38) $(b-2)^2<b^2$ 39) $(c-2)^3<c^3$ | $\forall a\in\mathbb{R}$ $b>1$ $\forall c\in\mathbb{R}$ |

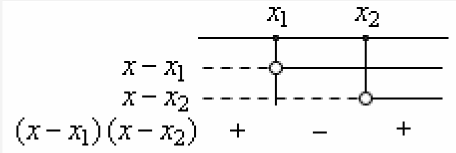
## ANCORA SULLO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO

Abbiamo detto che il grafico di una funzione di 2° grado $y = ax^2 + bx + c$
è una curva che va "prima giù e poi su" oppure "prima su e poi giù", detta "parabola".
E' evidente che il discorso è generico: richiederebbe una impostazione più rigorosa,
e corredata da dimostrazioni di quanto affermato. Ciò è compito della "Geometria Analitica".

Ci limitiamo qui ad affermare che, **volendo, le regole per lo studio del segno di un trinomio di 2° grado potrebbero anche essere ricavate senza interpretazione grafica, ossia per pura via algebrica**.

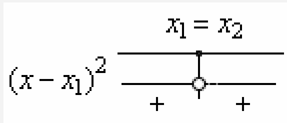
Sia infatti $ax^2 + bx + c$ un trinomio di 2° grado. Sappiamo che

1) se $\Delta > 0$, il trinomio è scomponibile in $a(x - x_1)(x - x_2)$, con $x_1, x_2$ soluzioni dell'equazione associata.
Ma in questo caso allora, dato che il fattore $x - x_1$
è $>, =, < 0$ a seconda che sia $x > x_1,\ x = x_1,\ x < x_1$,
e analogamente per il fattore $x - x_2$,
il prodotto $(x - x_1)(x - x_2)$
avrà, a seconda dei vari valori di $x$,
il segno che risulta dallo schema riportato qui a destra →
ed essendo dunque $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
se ne trae che il trinomio avrà
"**segno concorde con quello del suo primo coefficiente *a* per valori esterni, discorde per valori interni**"




*tratteggio = negatività,*
*linea continua = positività*

2) se $\Delta = 0$, il trinomio è scomponibile in $a(x - x_1)^2$, con $x_1\ (= x_2)$ unica soluzione dell'equaz. associata.
Poiché ora un quadrato è sempre $> 0$,
con la sola eccezione di essere $= 0$ se ne è $= 0$ la base,
se ne trae che **il trinomio avrà *sempre* segno concorde con quello del suo primo coefficiente *a* , *con una sola eccezione*:**
il trinomio infatti si annullerà per $x = x_1$, essendo $x_1\ (= x_2)$
l'unica soluzione che in questo caso possiede l'equazione associata.




*linea continua = positività,*
*pallino = annullamento*

3) se, infine, $\Delta < 0$, l'equazione associata è impossibile in campo reale,
e **il trinomio non è scomponibile in campo reale**;
in questo caso però possiamo scrivere

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} \underbrace{- \frac{\Delta}{4a^2}}_{>0}\right]$$

Siccome è $\Delta < 0$, il contenuto della parentesi quadra sarà strettamente positivo (>0)
perché somma di un termine non negativo (il quadrato) con un termine >0
$\left(-\frac{\Delta}{4a^2},\ \text{che è} > 0 \ \text{perché è l'opposto del quoziente fra}\ \Delta < 0 \ \text{e}\ 4a^2 > 0\right)$.
Ma il prodotto del coefficiente $a$ per un numero strettamente positivo qualunque sia $x$,
**ha sempre, per qualsiasi valore di *x*, lo stesso segno di *a*.**

# 10. DISEQUAZIONI IN CUI COMPAIONO POTENZE

## I) UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI, CONFRONTATA CON LO ZERO

a) $(x-7)^4 > 0$ b) $(x-7)^4 < 0$ c) $(x-7)^4 \geq 0$ d) $(x-7)^4 \leq 0$

Per risolvere queste disequazioni basta ragionare così:

**una quarta potenza (più in generale: UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI)**
**NON PUO' MAI ESSERE NEGATIVA.**
**Essa è:**
- **POSITIVA quando la BASE è DIVERSA DA 0;**
- **NULLA quando la BASE è UGUALE A 0.**

Perciò:

a) $(x-7)^4 > 0$ è verificata quando $x-7 \neq 0$, ossia $x \neq 7$. Insieme delle soluzioni $= S = \mathbb{R} - \{7\}$

b) $(x-7)^4 < 0$ non è mai verificata, è **impossibile**: $S = \varnothing$

c) $(x-7)^4 \geq 0$ è **sempre verificata**, per ogni *x*: $S = \mathbb{R}$

d) $(x-7)^4 \leq 0$ è **verificata solo per x = 7**. $S = \{7\}$

E' chiaro che allo stesso modo avremmo potuto procedere
se al posto dell'esponente 4 ci fosse stato un qualunque esponente PARI.

**ESERCIZI**

1) $(2x-1)^6 < 0$ 2) $(3x-8)^8 > 0$ 3) $(x^2-3)^4 > 0$ 4) $(6x^2-18x+5)^2 \geq 0$

5) $(4-x)^6 \leq 0$ 6) $x^{10} > 0$ 7) $(3x^2-2x-1)^2 > 0$ 8) $(3-7x)^4 < 0$ 9) $(3-7x)^4 \leq 0$

**SOLUZIONI**

1) imposs. 2) $x \neq 8/3$ 3) $x \neq \pm\sqrt{3}$ 4) $\forall x \in \mathbb{R}$

5) $x = 4$ 6) $x \neq 0$ 7) $x \neq -\frac{1}{3} \wedge x \neq 1$ 8) imposs. 9) $x = \frac{3}{7}$

**II) UNA POTENZA CON ESPONENTE DISPARI, CONFRONTATA CON LO ZERO**

e) $(x-7)^5 > 0$ f) $(x-7)^5 < 0$ g) $(x-7)^5 \geq 0$ h) $(x-7)^5 \leq 0$

Per risolvere queste disequazioni basta osservare che

**una quinta potenza**
**(più in generale: UNA POTENZA CON ESPONENTE DISPARI)**
**HA SEMPRE LO STESSO SEGNO DELLA SUA BASE, ossia è:**
- **positiva quando la base è positiva;**
- **negativa quando la base è negativa;**
- **nulla quando la base è nulla.**

Perciò:

e) $(x-7)^5 > 0$ è verificata quando $x-7 > 0$, ossia $x > 7$. Insieme delle soluzioni: $S = (7, +\infty)$

f) $(x-7)^5 < 0$ è verificata quando $x-7 < 0$, ossia $x < 7$. $S = (-\infty, 7)$

g) $(x-7)^5 \geq 0$ è verificata quando $x-7 \geq 0$, ossia $x \geq 7$. $S = [7, +\infty)$

h) $(x-7)^5 \leq 0$ è verificata quando $x-7 \leq 0$, ossia $x \leq 7$. $S = (-\infty, 7]$

E allo stesso modo, ovviamente, si sarebbe potuto ragionare
se al posto dell'esponente 5 avessimo trovato un qualsiasi altro esponente DISPARI.

**ESERCIZI**

10) $(3x-2)^5 > 0$ 11) $(4-x)^5 \geq 0$ 12) $(x^2-3)^5 > 0$ 13) $x^7 < 0$

14) $(3x^2-2x-1)^3 < 0$ 15) $(x+7)^5 \geq 0$ 16) $(x^2+7)^5 > 0$ 17) $(3x^2-2x-1)^4 \geq 0$

18) $(x^2+2x\sqrt{6}+6)^3 > 0$ 19) $(4x^2-1)^3 > 0$ 20) $(9x^2-6x+1)^3 < 0$ 21) $\left[(7x+5)^4+1\right]^3 > 0$

**SOLUZIONI**

10) $x > 2/3$ 11) $x \leq 4$ 12) $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$ 13) $x < 0$ 14) $-1/3 < x < 1$ 15) $x \geq -7$

16) $\forall x \in \mathbb{R}$ 17) $\forall x \in \mathbb{R}$ 18) $x \neq -\sqrt{6}$ 19) $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$ 20) imposs. 21) $\forall x \in \mathbb{R}$

## III) DISEQUAZIONI RISOLUBILI ESTRAENDO UNA RADICE CON INDICE PARI

**L'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza,
o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza,
sono leciti SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.**

Infatti, indicato con 2n un intero PARI, e con a, b due numeri reali POSITIVI O NULLI, si ha:

$$a<b \Leftrightarrow a^{2n}<b^{2n}; \qquad a<b \Leftrightarrow \sqrt[2n]{a}<\sqrt[2n]{b}$$

Invece, se due numeri che *non* sono entrambi positivi sono disuguali, *non* è detto che i loro quadrati (ad esempio) siano disuguali nello stesso senso: potrebbero esserlo, o non esserlo.

$$-2<3 \quad e \quad 4<9$$
$$-5<3 \quad \text{MA} \quad \cancel{25<9}$$
$$-8<-5 \quad \text{MA} \quad \cancel{64<25}$$

**Nel risolvere una disequazione mediante estrazione di radice con indice pari, ci vuole cautela!!!**

- ♪ Innanzitutto, ribadiamolo ancora, **il passaggio è possibile solo quando i due membri sono positivi (in senso lato: $\ge 0$ ) sempre, ossia per ogni valore di $x$;**
- ♫ inoltre, **è indispensabile ricordare che l'estrazione di radice con indice pari costringe, spesso, a introdurre un simbolo di valore assoluto**:
  ad esempio, sappiamo (vedi pag. 31) che $\sqrt{x^2}=|x|$

**Esempio 1** $\boxed{x^4>625}$

**Possiamo estrarre le radici quarte perché i due membri sono sempre $\ge 0$, $\forall x$ :**

$\sqrt[4]{x^4}>\sqrt[4]{625}$

OCCHIO ADESSO! Deve per forza intervenire il simbolo di valore assoluto, e si ottiene

$|x|>5$

Ma quali sono i numeri reali il cui valore assoluto è maggiore di 5?
**Il valore assoluto di un numero non è altro che la distanza dall'origine del punto che, sulla *number line*, rappresenta quel numero!**
E allora

$|x|>5 \Leftrightarrow \boxed{x<-5 \ \vee \ x>5}$ (i numeri, la cui distanza dall'origine sulla *number line* è >5, sono quelli a destra del +5 ma anche quelli a sinistra del $-5$)

**Es. 2** $\boxed{(5x-3)^4<16}$

$\sqrt[4]{(5x-3)^4}<\sqrt[4]{16}$

$|5x-3|<2$

$-2<5x-3<2$

(i numeri il cui val. ass. è <2 sono quelli la cui "distanza dall'origine" è <2, ossia quelli compresi fra –2 e +2).

Aggiungendo ora 3 ad ogni anello della catena si ha

$1<5x<5$

e dividendo infine per 5

$\boxed{\frac{1}{5}<x<1}$

**Es. 3** $\boxed{(x-7)^6>64}$

$\sqrt[6]{(x-7)^6}>\sqrt[6]{64}$

$|x-7|>2$

$x-7<-2 \ \vee \ x-7>2$

$\boxed{x<5 \ \vee \ x>9}$

**Es. 4** $\boxed{(x^2-10x)^2<576}$

$\sqrt{(x^2-10x)^2}<\sqrt{576}$

$|x^2-10x|<24$

$-24<x^2-10x<24$

Qui però *non* si può isolare $x$ operando direttamente sulla catena. La doppia limitazione equivale a domandarsi per quali valori di $x$ sono verificate *simultaneamente entrambe* le condizioni

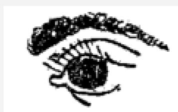
$-24<x^2-10x$ (*o anche* $x^2-10x>-24$) e $x^2-10x<24$

quindi a risolvere il SISTEMA $\begin{cases} x^2-10x>-24 \\ x^2-10x<24 \end{cases}$.

La 1ª disequaz. è verificata per $x<4 \vee x>6$, la 2ª per $-2<x<12$, quindi il sistema ha per soluzioni i valori $\boxed{-2<x<4 \vee 6<x<12}$; comunque, dell'argomento si occuperà un capitolo successivo.

**Es. 5** $\boxed{x^4>-16}$

**OCCHIO!!!**



**Qui 2° membro è negativo, perciò NON si possono estrarre le radici quarte.**

Siamo *bloccati*, dobbiamo procedere diversamente.
Ma basta osservare che il risultato dell'operazione $x^4$ è sempre (qualunque sia $x$) positivo $(\ge 0)$, per concludere che la disequazione proposta è $\boxed{\text{sempre verificata, } \forall x \in \mathbb{R}}$.

## IV) DISEQUAZIONI RISOLUBILI ESTRAENDO UNA RADICE CON INDICE DISPARI

**L'elevamento ad esponente DISPARI, o l'estrazione di radice con indice DISPARI, è un passaggio SEMPRE LECITO in una disequazione**:

infatti, qualunque siano i segni dei due numeri reali a, b, valgono le doppie implicazioni

$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$    $a < b \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b}$

| Esempio 1 | Esempio 2 | Esempio 3 | Esempio 4 | Esempio 5 |
|---|---|---|---|---|
| $x^3 < 8$ | $x^5 - 3 > 0$ | $(x-7)^3 - 27 \le 0$ | $(x-1)^3 < -2$ | $(x^2-x-1)^3 > 1$ |
| $\sqrt[3]{x^3} < \sqrt[3]{8}$ | $x^5 > 3$ | $(x-7)^3 \le 27$ | $x-1 < \sqrt[3]{-2}$ | $x^2-x-1 > 1$ |
| $x < 2$ | $x > \sqrt[5]{3}$ | $x-7 \le 3$ | $x-1 < -\sqrt[3]{2}$ | $x^2-x-2 > 0$ |
| | | $x \le 10$ | $x < 1-\sqrt[3]{2}$ | $(x+1)(x-2) > 0$ |
| | | | | $x < -1 \vee x > 2$ |

**ESERCIZI** (se c'è la freccia, cliccando potrai vedere la correzione)

22) $x^4 > 16$  23) $x^3 > 8$  24) $625x^4 - 1 < 0$  25) $625x^4 + 1 > 0$

26) $8x^3 - 1 < 0$  27) $8x^3 + 1 < 0$  28) $25x^4 - 49 \ge 0$  29) $x^6 - 1 < 0$

30) $x^6 - 4 < 0$  31) $x^6 + 4 < 0$  32) $x^8 + 3 > 0$  33) $x^8 - 3 > 0$

34) $(x-1)^3 < 8$  35) $(x-1)^4 < 16$  36) $(2x+1)^4 - 1 > 0$  37) $(6x+1)^3 + 8 > 0$

38) $x^6 + 1 \ge 0$  39) $8x^3 + 3 \ge 0$  40) $8x^4 + 3 \ge 0$  41) $x^3 + 16 \le 0$  42) $x^4 + 16 \le 0$

43) $(x-1)^2 + (x-2)^2 > 0$ ⇨  44) $(x-1)^3 + (x-2)^3 > 0$ ⇨  45) $(x+1)^2 + (x^2-1)^2 \le 0$ ⇨

46) $(2x-1)^4 < 0$  47) $(2x-1)^4 > 0$  48) $(2x-1)^3 < 0$  49) $(2x-1)^3 > 0$

50) $(2x-1)^4 < 1$  51) $(2x-1)^4 > 1$  52) $(2x-1)^3 < 1$  53) $(2x-1)^3 > 1$

54) $(4x+1)^4 < 3$ ⇨  55) $(1-x)^6 < 64$ ⇨  56) $(4x-3)^4 > 81$ ⇨

**SOLUZIONI**

22) $x < -2 \vee x > 2$  23) $x > 2$  24) $-1/5 < x < 1/5$  25) $\forall x \in \mathbb{R}$

26) $x < \frac{1}{2}$  27) $x < -\frac{1}{2}$  28) $x \le -\sqrt{\frac{7}{5}} \vee x \ge \sqrt{\frac{7}{5}}$  29) $-1 < x < 1$

30) $-\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}$  31) imposs.  32) $\forall x \in \mathbb{R}$  33) $x < -\sqrt[8]{3} \vee x > \sqrt[8]{3}$

34) $x < 3$  35) $-1 < x < 3$  36) $x < -1 \vee x > 0$  37) $x > -1/2$

38) $\forall x \in \mathbb{R}$  39) $x \ge -\sqrt[3]{3}/2$  40) $\forall x \in \mathbb{R}$  41) $x \le -2\sqrt[3]{2}$  42) imposs.

43) $\forall x \in \mathbb{R}$  44) $x > 3/2$  45) $x = -1$

46) imposs.  47) $x \ne 1/2$  48) $x < 1/2$  49) $x > 1/2$

50) $0 < x < 1$  51) $x < 0 \vee x > 1$  52) $x < 1$  53) $x > 1$

54) $-\frac{\sqrt[4]{3}+1}{4} < x < \frac{\sqrt[4]{3}-1}{4}$  55) $-1 < x < 3$  56) $x < 0 \vee x > 3/2$

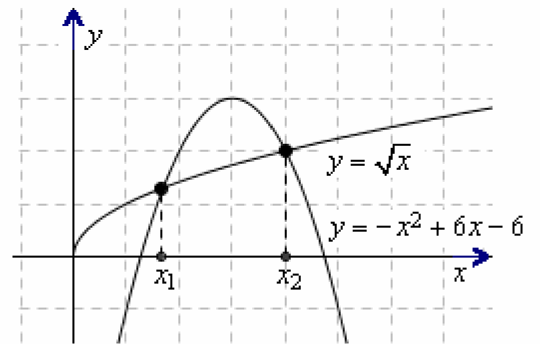
**CENNI ALLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI**

Sono quelle che **contengono l'incognita sotto il segno di radice**.
Ci si libera dalle radici elevando a potenza; e tuttavia,
mentre l'elevamento a esponente dispari è un'operazione "tranquillissima",
perché sempre lecita e sempre tale da mutare la disequazione di partenza in un'altra ad essa equivalente,
invece **l'elevamento ad esponente pari**, necessario ad esempio per sbarazzarsi da una radice quadrata,
**è un passaggio estremamente problematico**, possibile solo a condizione che i due membri siano positivi per tutti i valori di *x*, o almeno "per tutti i valori di *x* ai quali ci si sta riferendo".

Tutto ciò costringe ad elaborare una teoria non semplicissima,
che fa parte di uno studio più avanzato.

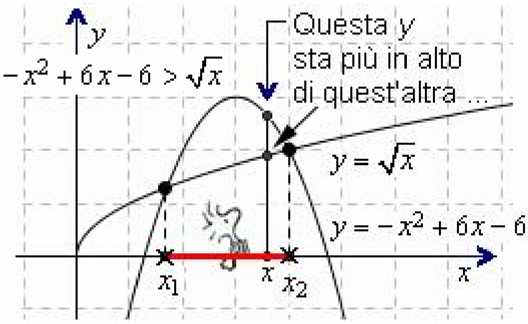
# 11. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UNA DISEQUAZIONE

- Per risolvere graficamente una disequazione come
$$-x^2+6x-6>\sqrt{x}$$
**si tracceranno innanzitutto, in uno stesso riferimento cartesiano, i grafici delle due funzioni a 1° e a 2° membro**
$$y=-x^2+6x-6;$$
$$y=\sqrt{x}$$




A questo punto, la disequazione ci "chiede" di determinare per quali valori di $x$ la $y$ della prima funzione è maggiore, quindi sta più in alto, della $y$ della seconda.

**Viaggiamo quindi, con gli occhi della mente, lungo l'asse delle *x*: quali sono i valori di *x* in corrispondenza dei quali la "*y*" della funzione a 1° membro** $y=-x^2+6x-6$ **sta più in alto?**
Sono, evidentemente, gli $x$ compresi fra quei due puntini, sull'asse orizzontale, che rappresentano le ascisse $x_1$ e $x_2$ dei punti di intersezione fra le due curve.




La $x$ evidenziata, vicino alle zampette dell'uccello Woodstock, vale circa 3,6.

La $y$ che corrisponde a questa $x$ sulla curva $y=-x^2+6x-6$ vale circa 2,7 ed è maggiore dell'altra $y$, quella sulla curva $y=\sqrt{x}$, che vale meno di 2.

Possiamo così concludere che le soluzioni della disequazione data sono i valori di $x$ tali che
$x_1<x<x_2$ (le crocette che abbiamo messo in figura servono proprio per escludere gli estremi).

Ora, per quanto riguarda $x_2$ sembrerebbe dalla figura che valga esattamente 4, e in effetti, se sostituiamo il valore 4 al posto di $x$ nelle due equazioni $y=-x^2+6x-6$ e $y=\sqrt{x}$, vediamo che si ottiene la stessa $y$:
$$\left[y=-x^2+6x-6\right]_{x=4}=-16+24-6=2 \quad \text{e anche} \quad \left[\sqrt{x}\right]_{x=4}=2.$$

Per determinare $x_1$ occorre invece risolvere l'equazione
$$-x^2+6x-6=\sqrt{x}.$$
Elevando al quadrato, si ottiene un'equazione di 4° grado di cui già sappiamo che è verificata con $x=4$;
caso vuole, si tratta di un'equazione risolubile per scomposizione in fattori col metodo di Ruffini …
e tuttavia, indipendentemente da questa circostanza, potremmo anche fermarci qui accontentarndoci di concludere che la nostra disequazione
$$-x^2+6x-6>\sqrt{x}$$
è verificata per
$$x_1<x<4,$$
dove $x_1$ è un determinato valore compreso fra 1,5 e 2.

- Un altro esempio.

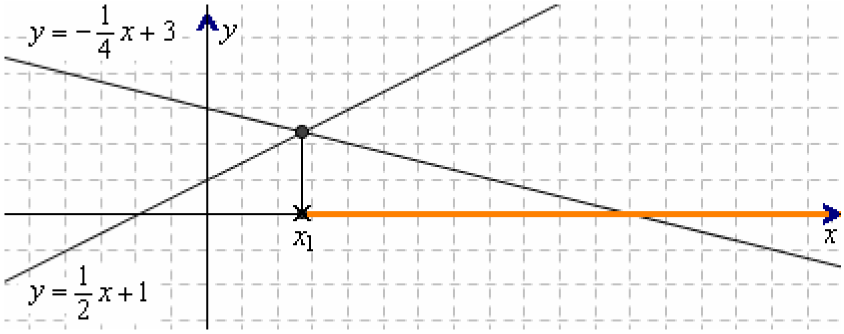
Volendo risolvere graficamente la disequazione

$$-\frac{1}{4}x+3<\frac{1}{2}x+1,$$

disegneremo i grafici delle due funzioni lineari

$$y=-\frac{1}{4}x+3 \text{ (retta in discesa)}$$

$$y=\frac{1}{2}x+1 \text{ (retta in salita)}$$




per andare a vedere per quali valori di $x$ accade che l'ordinata corrispondente sulla prima retta è minore, è più bassa, dell'ordinata corrispondente sulla seconda retta.
Ciò avviene per $x>x_1$, ma quanto vale $x_1$?
Dalla figura si può solo vedere che è compresa fra 2 e 3 (più vicina a 3 che a 2 …)

Per rispondere, risolviamo l'equazione $-\frac{1}{4}x+3=\frac{1}{2}x+1$. Otterremo $x=\frac{8}{3}=2,\overline{6}$.

Quindi in definitiva la nostra disequazione è verificata con $x>8/3$.

- La figura qui a fianco si riferisce alla disequazione

$$\frac{3}{x}\geq x^2+4x$$

e mostra che essa è verificata quando

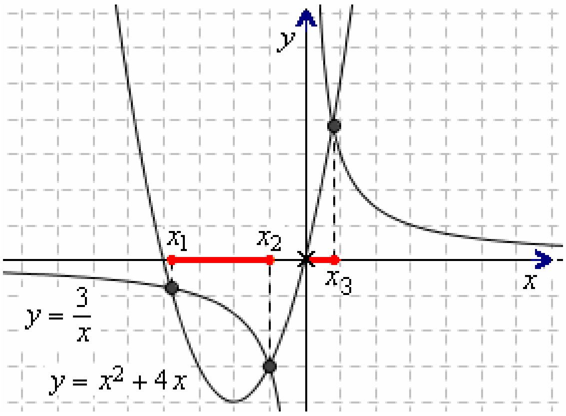
$$x_1\leq x\leq x_2 \ \vee\ 0<x\leq x_3$$

dove

$$x_2=-1$$

come il disegno suggerisce e come si può verificare:

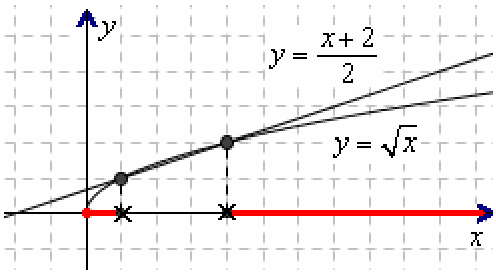
$$\left[\frac{3}{x}\right]_{x=-1}=-3 \qquad \left[x^2+4x\right]_{x=-1}=-3$$




Quanto alle altre due soluzioni $x_1, x_3$ dell' "equazione associata" $\frac{3}{x}=x^2+4x$,
si possono facilmente determinare scomponendo col metodo di Ruffini il polinomio di 3° grado che si ottiene dopo aver eliminato il denominatore.

In definitiva si ha $\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\leq x\leq -1 \ \vee\ 0<x\leq \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

- A volte quando si risolve graficamente una disequazione occorre anche tenere conto del "**campo di esistenza**" delle funzioni coinvolte.
Facciamo un esempio:
la disequazione $\sqrt{x}<\frac{x+2}{2}$
è verificata per $0\leq x<1 \ \vee\ x>4$




**ESERCIZI**

Risolvi graficamente le disequazioni che seguono.

1) $7-x<3x$ 2) $3-2x>0$ 3) $x^2<x+6$ 4) $\frac{4}{x}>1-x$ 5) $3x+1\leq 2x+5$ 6) $3x-1<5x$

7) $x^2+x>12$ 8) $0,5x^2+1<6/x$ 9) $x^3\leq 2-x$ 10) $\sqrt{x}<4-3x$ 11) $x^3>x^2-1$ 12) $\sqrt[3]{x}>x^2-2$

**RISPOSTE**

1) $x>\frac{7}{4}$ 2) $x<\frac{3}{2}$ 3) $-2<x<3$ 4) $x>0$ 5) $x\leq 4$ 6) $x>-\frac{1}{2}$ 7) $x<-4 \vee x>3$

8) $0<x<2$ 9) $x\leq 1$ 10) $0\leq x<1$ 11) $x>x_1$, con $-1<x_1<-0,5$ 12) $-1<x<x_2$, con $1,5<x_2<2$

## 12. PROBLEMI CHE HANNO COME MODELLO UNA O PIU’ DISEQUAZIONI

**A) I minibus che il Comune ha predisposto per trasportare la gente ad una festa campestre, cui si è deciso di vietare l’accesso in automobile, possono trasportare ciascuno al massimo 24 passeggeri. E si sono prenotate 440 persone. Quanti servizi devono effettuare al minimo?**

Il problema è SEMPLICISSIMO e potremmo pure fare a meno di disequazioni.
Comunque, detto $x$ il numero minimo di viaggi che è richiesto di determinare, potremo scrivere
$\mathbf{24x \ge 440}$ **da cui** $\mathbf{x \ge 18,3...}$ e **la risposta è dunque: “minimo 19 viaggi”**.

**B) Il prodotto di due multipli di 72 consecutivi non raggiunge 200000.
Quanto possono valere, al massimo, quei due numeri?**

Facile anche questo! Potremmo benissimo procedere per tentativi …
… Tuttavia, come possiamo indicare due multipli di 72 consecutivi?
Con $x$ e $x+72$, ad esempio, intendendo che $x$ sia multiplo di 72;
oppure con $72n$ e $72(n+1)$, dove $n$ è un intero positivo.
Con la prima scelta ($x$ e $x+72$), avremo
$\mathbf{x(x+72) < 200000;\quad x^2+72x-200000 < 0}$ da cui $\mathbf{-484,7 < x < 412,7}$ (valori approssimati).
**$x$ sarà perciò il multiplo di 72 più vicino, per difetto, a 412,7**.
Possiamo determinarlo andando a vedere quante volte il 72 sta nel 412,7.
La divisione 412,7:72 dà circa 5,7 quindi ci sta 5 volte e il multiplo cercato è $72 \cdot 5 = 360$.
**I due numeri in questione sono** dunque **360 e 432**.

**ESERCIZI (risposte a pagina 155)**


1) L’attempato Riccardo ha fatto oggi il suo solito allenamento, alla velocità costante di 250 m al minuto, senza però riuscire, per via dei crampi, a coprire i 12 km che si era proposto come distanza minima. Per quanti minuti può, al massimo, aver corso? Scrivi e risolvi la disequazione che risponde a questa domanda.

2) La signora Tiziana ha 3 figlioli gemelli ai quali concede come paghetta mensile una somma, data da un numero intero di euro per ciascuno, e che non deve superare 100 € per tutti e 3. Se questa settimana si è deciso in famiglia che uno dei fratelli debba ricevere 5 € in meno di un altro, e questi a sua volta 5 euro in meno del terzo, per via della diversa collaborazione nei lavori domestici, stabilisci attraverso una disequazione quanti euro potrà al massimo ricevere il più bravo.

3) Giuliana e Gaia sono bravissime a confezionare piccole crostate, che vendono con successo ai compagni di scuola, durante l’intervallo, al prezzo di 3 euro e 50 centesimi l’una.
Questo mese hanno deciso di donare il 75% delle loro entrate in beneficenza, e desidererebbero destinare a tale scopo non meno di 100 euro.
Scrivi e risolvi la disequazione che porta a stabilire il numero minimo di crostatine da vendere per realizzare il lodevole proposito.

4) Se uno studente ha totalizzato 76 punti su 100 alla prima prova, 81 alla seconda, 75 alla terza, e 74 alla quarta, quale punteggio dovrebbe far registrare, al minimo, alla quinta e ultima prova perché la sua media complessiva non sia inferiore a 80?

5) Un pugile ha vinto 30 fra le 40 sfide finora disputate.
Nel prossimo anno sono previsti 8 altri match, dopodiché il boxeur intende ritirarsi: tuttavia, desidererebbe aver concluso vittoriosamente almeno l’80% degli incontri.
A tale scopo, quanti fra gli 8 combattimenti dovrebbe vincere, al minimo?

6) Due ciclisti partono nello stesso istante a distanza di 2 km l’uno dall’altro, venendosi incontro; a un certo punto, si incroceranno e si saluteranno, proseguendo a pedalare.
La bici di Anselmo procede alla velocità costante di 18 km all’ora, quella di Beniamino ai 14 km/h.
Quanto tempo deve passare, al minimo, perché la loro distanza sia maggiore di 2 km?
Scrivi la disequazione che permette di rispondere.
[Immagina una *number line* … Anselmo parte dall’origine e Beniamino dal punto di ascissa 2 … ]

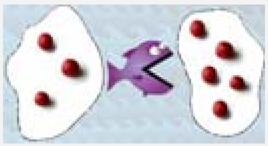
7) Determina tutte le terne di multipli di 4 consecutivi, la cui somma sia inferiore a 1000.

8) Da www.sinclair.edu
You rent a car and are offered 2 payment options.
- You can pay $25 a day plus 15 cents a mile (option A)
- or you can pay $10 a day plus 40 cents a mile (option B).

For what amount of daily miles will option A be the cheaper plan?

Matematica e Problemi della Realtà

**DISEQUAZIONI E SITUAZIONI REALI CENNI ALLA “RICERCA OPERATIVA”**



The symbol “less than” <
http://illuminations.nctm.org

**Moglie e marito stanno partendo per le ferie, verso una località di mare piuttosto lontana.**
**Va detto che la moglie è molto prudente e timorosa, per cui vuole mantenere la velocità costante di 80 km/h, mentre il marito, più esperto e sicuro, è abituato a viaggiare ai 100 km/h.**
**Poiché non intendono, per la prima giornata, restare al volante complessivamente più di 8 ore, ma in compenso desiderano percorrere non meno di 700 km, traccia un diagramma che mostri il numero di ore *x* e il numero di ore *y* che ciascuno dei due potrà, teoricamente, passare alla guida.**
**Per quante ore dovrà guidare, al minimo, il marito?**

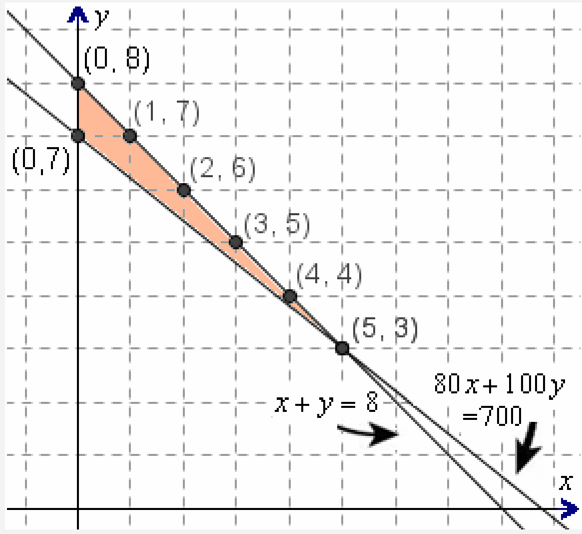
Innanzitutto si ha $\boldsymbol{x+y\le 8}$, $\boldsymbol{80x+100y\ge 700}$

Ora, la condizione $x+y\le 8$ equivale a $y\le 8-x$ ed è verificata dalle coordinate $(x, y)$ di quei punti che si trovano AL DI SOTTO della retta di equazione $y=8-x$.

Allo stesso modo, la condizione $80x+100y\ge 700$ è verificata dalle coppie $(x, y)$ che sono coordinate di punti situati AL DI SOPRA della retta $80x+100y=700$ $(y=7-0{,}8x)$.

**In figura è ombreggiata la regione di piano nella quale sono verificate simultaneamente ENTRAMBE le condizioni in gioco.**

**Le soluzioni del problema sono le coordinate dei punti che appartengono a quella regione: abbiamo evidenziato solo quelli a coordinate intere.**




**La signora potrà, ad esempio, guidare 0 ore e il marito 7 ore, oppure anche 8; o in alternativa 1 ora la signora e 7 il marito, ecc. ecc., comprese le soluzioni non intere: in tutti questi casi saranno verificate entrambe le condizioni richieste, ossia:**
**a) tempo di guida complessivo non superiore a 8 h b) distanza percorsa non inferiore a 700 km**

Tieni dunque presente che **sul piano cartesiano l’insieme delle coppie (*x*, *y*), che sono soluzione di una DISEQUAZIONE DI 1° GRADO IN DUE INCOGNITE, costituisce un SEMIPIANO** (ovviamente, nell’esempio, dall’intersezione dei due semipiani abbiamo comunque tolto le coppie con $x<0$, che non interessavano dato il contesto).

Dal diagramma si vede anche che il marito dovrà guidare al minimo per 3 ore, mentre la moglie potrebbe anche, volendo, fare 0 ore di guida, lasciando il volante a suo marito per un numero di ore da 7 fino a 8.

**CHE COS’E’ LA “RICERCA OPERATIVA”**

In Matematica, si dice “ricerca operativa” (*operational research*), o anche “teoria delle decisioni”, un insieme di strumenti che possono servire ad ottimizzare scelte gestionali, magari per massimizzare oppure minimizzare una “funzione obiettivo”, come ad esempio un guadagno o un costo. Essa insegna ad elaborare un “modello matematico” di un dato problema, e a partire da questo a ricercare la soluzione ottima o, quando ciò non sia possibile, “subottima”, per il problema medesimo.

I quesiti di cui ci stiamo occupando possono rappresentarne dei semplicissimi esempi introduttivi.

9) Nadia l’estate scorsa è stata in villeggiatura a Rimini, dove ha fatto amicizia con un pasticciere che le ha confidato il segreto di due ricette veramente fantastiche per preparare bomboloni e croissant. Le è stato raccomandato di dosare gli ingredienti alla perfezione, altrimenti il rischio di fallire è alto. In particolare, un singolo bombolone richiede 15 grammi esatti di zucchero e 10 grammi di burro, mentre per un croissant ci vogliono precisamente 8 grammi di zucchero più 20 di burro. Un bel giorno la nostra Nadia, mentre si trova nella baita di famiglia in montagna, riceve una telefonata che le annuncia la visita, la mattina dopo, di un gruppetto di amici escursionisti. Messa giù la cornetta, si precipita subito tutta contenta in cucina per preparare le sue prelibatezze … … ma si rende conto che le sono rimasti solo 120 grammi di zucchero e 185 di burro, mentre è del tutto evidente l’impossibilità di fare acquisti in paese in tempo utile. La aiuteresti, con l’impiego di un diagramma cartesiano, a determinare qual è il numero massimo di dolci che potrà offrire ai suoi ospiti?

10) Con un liquido X, contenente il 20% di alcool, e un altro liquido Y, che contiene il 30% di alcool, si vuole fare una miscela che:
- contenga almeno il 22% di alcool;
- ci stia in un bottiglione da 8 litri.

Disegna un grafico dal quale risulti come si possono scegliere $x$ e $y$
in modo che mescolando $x$ di litri di X e $y$ di litri di Y siano rispettati questi vincoli.
Stabilisci infine quanti litri di liquido X si possono utilizzare, al massimo, nella miscela.

11) Osvaldo ha 16000 euro di risparmi, e intende investirli, tutti o in parte, coi vincoli seguenti:
- almeno 4000 euro in un fondo ad alto rischio-alto rendimento;
- e almeno il doppio, in titoli di Stato.

Disegna un diagramma che illustri la possibile ripartizione
fra le $x$ migliaia di euro per l'investimento nel fondo e le $y$ migliaia di euro per quello in titoli.
Stabilisci anche qual è la massima cifra possibile per il primo investimento, quello più rischioso.

12) Il medico specialista mi ha prescritto degli integratori alimentari per il fatto che dai miei esami del sangue è emersa la carenza di due certe sostanze A e B.
In commercio sono disponibili due parafarmaci utili a questo scopo, Vitalyn ed Energex, che hanno anche ugual prezzo (ed entrambi sono, a dire il vero, scandalosamente cari …)
Una fiala di soluzione Vitalyn contiene 3 milligrammi di A e 2 milligrammi di B.
Una fiala di Energex contiene invece 2 milligrammi di A e 4 di B.
L'indicazione del dottore è che io assuma complessivamente, nell'arco di un mese, almeno 20 mg di A e 20 di B; non ha importanza se la dose viene superata, basta che sia assicurato quel minimo.
Quante fiale di Vitalyn e quante di Energex devo acquistare, per ridurre il più possibile la spesa?

13) Una confezione di preparato dietetico a base di riso integrale e di farro dovrebbe fornire almeno 50 grammi di proteine e non più di 10 grammi di grassi.
Ora, un etto di riso integrale fornisce 7,5 grammi di proteine e 2 grammi di grassi;
mentre un etto di farro 15 grammi di proteine e 2,5 grammi di grassi.
E perché il piatto abbia un buon sapore, la dose di farro dev'essere almeno il doppio di quella di riso, ma anche non più del quadruplo.
Determina le quantità di riso e di farro che a) minimizzino b) massimizzino il peso della confezione.

14) Un emporio specializzato in blue jeans si rifornisce dai due laboratori artigianali di Anna e di Barbara.
Tuttavia, dopo ciascun approvvigionamento il direttore dell'emporio esegue una cernita accurata dei capi, per distinguere fra quelli di qualità ottima, buona, e accettabile.
Ora, l'emporio prevede, per il prossimo inverno, di doversi procurare almeno 100 blue jeans di ottima qualità e almeno 150 di buona qualità.
Diciamo che le forniture di Anna sono mediamente tali che il 50% dei suoi pezzi è giudicato ottimo, il 30% buono e il 20% accettabile; mentre per il laboratorio di Barbara queste percentuali sono rispettivamente del 30%, 60% e 10%.
Poiché entrambe le imprenditrici fanno pagare i propri jeans 24 euro l'uno, determina quanti jeans dovrebbero essere acquistati presso Anna e quanti presso Barbara per realizzare la scorta minima desiderata, e nel contempo spendere il meno possibile. [*Utilizza GEOGEBRA per il diagramma …* ]

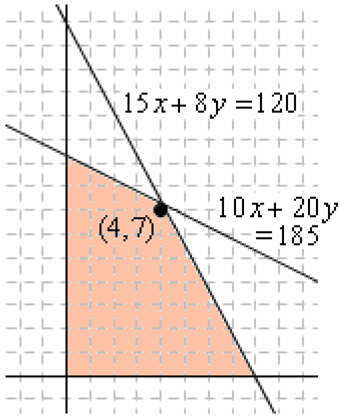
15) Una confezione da 1 Kg di anticrittogamico S1 contiene
6 hg di una data sostanza A, e 3 hg di un'altra sostanza B (l'hg restante si deve a un eccipiente).
E una confezione da 1 Kg di S2 contiene 2 hg di A, e 6 hg di B.
Ora, il preparato S1 costa 3 euro la confezione, e 5 euro invece S2.
L'agricoltore Gilberto necessita di almeno 3 kg di A e di almeno 4 kg di B: aiutalo a determinare quante confezioni di S1 e quante di S2 dovrebbe acquistare per spendere la cifra più bassa possibile.
Se il prezzo di S2 scattasse improvvisamente a 7 euro la confezione, la risposta rimarrebbe la stessa?

16) Un esame si svolge con modalità molto particolari.
C'è un set di 20 problemi di Media difficoltà, e un altro set di 20 problemi di difficoltà Elevata;
il candidato deve scegliere non più di 20 problemi complessivamente,
e cercare di rispondere in un tempo massimo di 90', tenendo presente che
ogni quesito M vale 2 punti e ogni quesito E ne vale 3.
Il volonteroso Vincenzo si ritiene in grado di elaborare la risposta corretta
a una richiesta M in 3 minuti, e a una richiesta E in 10 minuti.
Quante domande M e quante E dovrebbe scegliere per massimizzare il punteggio sperato?

**RISPOSTE**

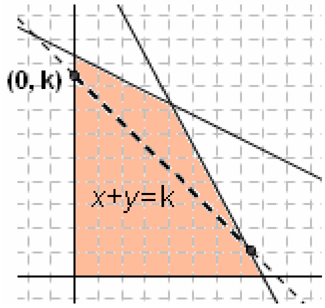
1) $250x < 12000 \rightarrow x < 48$ 2) Al massimo 38 euro
3) $3{,}5 \cdot x \cdot 75/100 \geq 100$ (almeno 39 costatine) 4) $(76+81+75+74+x)/5 \geq 80$; almeno 94
5) $30 + x \geq 80/100 \cdot 48$. Non può realizzare il suo desiderio: la disequazione è verificata per $x \geq 8{,}4$ !
6) $18x - (2-14x) > 2 \rightarrow x > 1/8$, e $1/8$ di ora sono 7 minuti e ½ 7) Da (4, 8, 12) fino a (328, 332, 336)
8) Plan A will be the cheaper plan if you drive more than 60 miles per day

9) Posto $x$ = n° di bomboloni, $y$ = n° di croissant,
**la regione di piano ombreggiata contiene tutte le coppie $(x, y)$ che rispettano entrambi i vincoli $15x + 8y \leq 120,\ 10x + 20y \leq 185$.**
**Il punto evidenziato**, di coordinate (4, 7), è quello che **appartiene alla regione**, **ha coordinate intere** e **massimizza $x + y$**.
Nadia potrà così preparare, con gli ingredienti di cui dispone, 4 ottimi bomboloni più 7 squisiti croissant da offrire agli amici.




C'è un **PROCEDIMENTO GRAFICO GENERALE PER MASSIMIZZARE $x + y$**, e lo si trae dalle considerazioni seguenti.

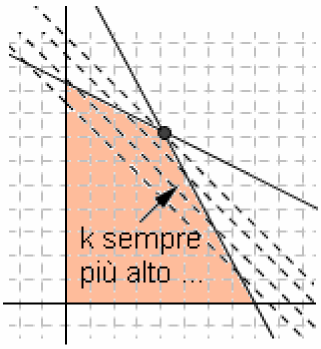
Se $k$ è un numero fissato, **l'insieme delle coppie $x, y$ per le quali è $x + y = k$ è rappresentato dalla retta di equazione $x + y = k$ ossia $y = k - x$, che è inclinata di 45° in discesa** (avendo coefficiente angolare $-1$) **e interseca l'asse verticale nel punto di ordinata $k$.**



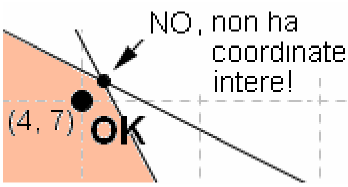

Ora i punti di una regione di piano, per i quali $x + y = k$, sono le intersezioni di quella regione con tale retta.

Adesso **andiamo ad aumentare il valore di $k$: la retta si sposta verso l'alto, parallelamente a sé stessa, e NOI SIAMO INTERESSATI AD ARRIVARE PIÙ IN ALTO CHE POSSIAMO, SEMPRE CONTINUANDO A INTERSECARE LA REGIONE.**

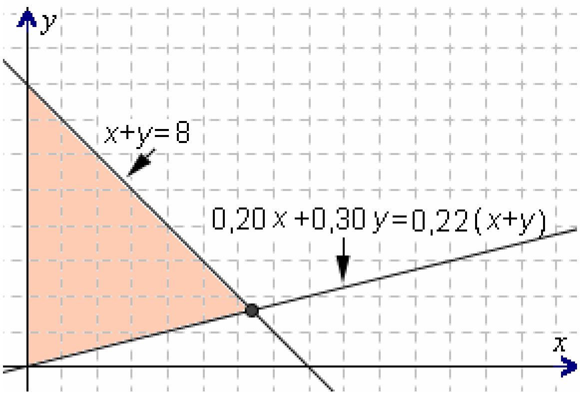
Quindi il punto della regione per cui è massima la somma $x + y$ *sarebbe* quello evidenziato col pallino nella figura qui a destra → …



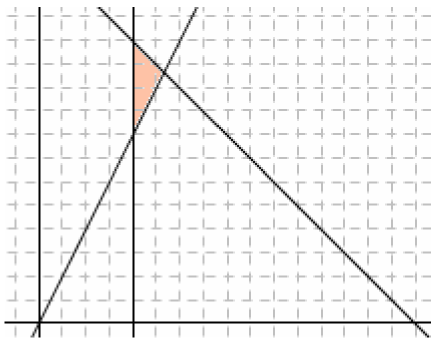

… PERO' nel caso nel nostro esempio, *non* ci interessa proprio *quel* punto dato che non ha coordinate intere: beh, considereremo i punti della regione ombreggiata, con coordinate *intere*, ad esso più vicini!




10) Massimo 6,4 litri di X




11) Vedi figura qui sotto; la cifra massima che si può investire nel fondo ad alto rischio, con quei vincoli, è di 5333 euro.



12) 8 confezioni: 4 e 4, oppure 5 di Vitalyn e 3 di Energex, o 6 di Vitalyn e 2 di Energex
13) a) hg 0,74 di riso e hg 2,96 di farro; b) 1,43 e 2,86 hg 14) 72 da A e 214 da B opp. 71 da A e 215 da B
15) 4 di S1 e 5 di S2. No; scelta migliore in questo caso: 14 confezioni di S1, e 0 di S2 16) 16 M, 4E

# 13. DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

**Esempio 1**: $\boxed{2\left(x^3+5x+4\right)<11x^2}$

**Innanzitutto svolgiamo i calcoli e portiamo tutto a 1° membro, in modo che il 2° membro sia 0**

$$2x^3+10x+8<11x^2$$
$$2x^3-11x^2+10x+8<0$$

**Ora SCOMPONIAMO il 1° membro IN FATTORI, ciascuno dei quali dovrà essere:**

- **di 1° grado**
- **oppure di 2° grado**
- **o comunque tale che il suo segno si possa studiare agevolmente**

$$\underbrace{(x-2)}_{1°\ fatt.}\underbrace{\left(2x^2-7x-4\right)}_{2°\ fatt.}<0 \quad \text{(\textit{la scomposizione è stata effettuata qui col metodo di Ruffini})}$$

**Dalla disequazione ottenuta ci viene rivolta dunque la seguente richiesta:**
***dimmi, caro solutore, per quali valori di x il prodotto che sta a primo membro risulta <0 !***

Ora, il segno di un prodotto dipende dalla combinazione dei segni dei suoi fattori:

- un prodotto è *positivo* se tutti i fattori sono positivi, oppure se si ha un numero pari di fattori negativi
- un prodotto è *negativo* se presenta un solo fattore negativo, oppure un numero dispari di fattori negativi
- sempre tenendo presente, s'intende, che se anche uno solo dei fattori è nullo, allora il prodotto è *nullo*.

**Dovremo quindi STUDIARE IL SEGNO DI OGNI SINGOLO FATTORE,**
per stabilire per quali valori di $x$ esso è positivo, per quali nullo, per quali negativo;

**dopodiché, utilizzeremo un semplice SCHEMA PER IL CONFRONTO DEI SEGNI,** che
darà un quadro "sinottico" degli studi effettuati e ci permetterà, finalmente, di trarre le conclusioni.

Diciamo subito che il modo più comodo per studiare il segno di un'espressione contenente $x$
è quello di impostare la disequazione

$\boxed{espressione > 0}$,

finalizzata a stabilire per quali valori di $x$ l'espressione data è, appunto, $>0$; risolta questa, sarà poi
del tutto immediato stabilire, "per esclusione", per quali valori di $x$ l'espressione è $<0$ e per quali è $=0$.

Procediamo, dunque!

$\boxed{1°\ fatt.>0}$ $\quad x-2>0;$ $\quad \boxed{x>2}$

Abbiamo così stabilito che l'espressione $x-2$ è positiva quando $x>2$.
In questo modo, ovviamente, sappiamo anche che l'espressione $x-2$ sarà:

- negativa per $x<2$,
- nulla per $x=2$

$\boxed{2°\ fatt.>0}$ $\quad 2x^2-7x-4>0;$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\ldots=\left\langle\begin{array}{l}-1/2\\ 4\end{array}\right.$$

$$\boxed{x<-\frac{1}{2}\ \vee\ x>4}$$

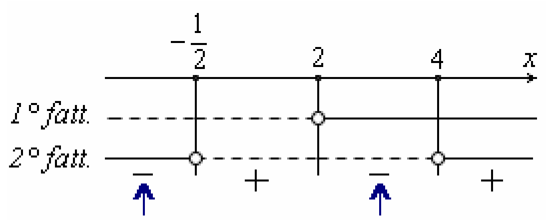
Abbiamo così stabilito che l'espressione $2x^2-7x-4$
è *positiva* quando $x<-1/2\ \vee\ x>4$;
da ciò si trae, evidentemente, che l'espressione stessa sarà:

- *negativa* per $-1/2<x<4$
- *nulla* per $x=-1/2\ \vee\ x=4$

Adesso che, tramite queste "disequazioni ausiliarie"
*1° fatt.>0, 2° fatt.>0,*
abbiamo studiato il segno di ogni singolo fattore,
possiamo costruire lo schema finale.

♥ Utilizzeremo la **SIMBOLOGIA** seguente:

| | | |
|---|---|---|
| **LINEA CONTINUA** | —— | **FATTORE POSITIVO** |
| **PALLINO VUOTO** | ∘ | **FATTORE NULLO** |
| **LINEA TRATTEGGIATA** | - - - | **FATTORE NEGATIVO** |




**SOLUZIONI** (NOTA): $\boxed{x<-\frac{1}{2}\ \vee\ 2<x<4}$

NOTA
*Nel primo intervallo, quello dei valori di x minori di –1/2,*
*il 1° fatt. ha segno negativo e il 2° fatt. positivo, quindi il prodotto sarà negativo.*
*Analogamente, si stabilisce il segno del prodotto negli altri intervalli.*
*Infine, poiché il verso della disequazione è <, si scelgono quegli intervalli nei quali il prodotto risulta <0.*

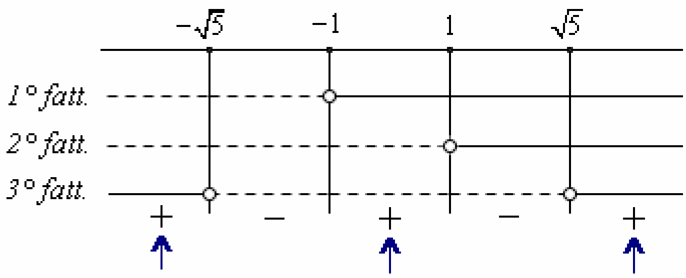
**Esempio 2**: $\boxed{x^4-6x^2+5\geq 0}$

Questa è una disequazione BIQUADRATICA.
Le disequazioni biquadratiche non fanno eccezione:
si risolvono anch'esse
SCOMPONENDO IN FATTORI

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-5\right)\geq 0$$

$$\underbrace{(x+1)}_{1°\ fatt.}\ \underbrace{(x-1)}_{2°\ fatt.}\ \underbrace{\left(x^2-5\right)}_{3°\ fatt.}\geq 0$$

| | | |
|---|---|---|
| $1°\ fatt.>0$ | $x+1>0$ | $x>-1$ |
| $2°\ fatt.>0$ | $x-1>0$ | $x>1$ |
| $3°\ fatt.>0$ (NOTA) | $x^2-5>0$ | $x<-\sqrt{5}\ \vee\ x>\sqrt{5}$ |



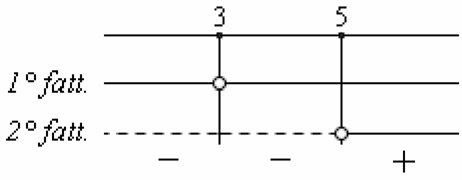

**SOLUZIONI**: $\boxed{x\leq-\sqrt{5}\ \vee\ -1\leq x\leq 1\ \vee\ x\geq\sqrt{5}}$

NOTA: *la disequaz.* $x^2-5>0$ *può essere risolta anche scrivendo* $x^2>5;\ |x|>\sqrt{5};\ x<-\sqrt{5}\vee x>\sqrt{5}$

♥ **Il modo migliore per risolvere una disequazione col ≥ o col ≤ (che non sia di 1° grado) è di pensare dapprima alla disequazione "stretta", cioè solo col > o col <, poi aggiungere alle soluzioni trovate anche i valori che rendono il primo membro uguale al secondo, ossia le soluzioni dell'EQUAZIONE. Applica questa indicazione sulle ultime due disequazioni del successivo Esempio 3!**

**Esempio 3**: $\boxed{(x-3)^2(x-5)<0}$

| | | |
|---|---|---|
| $1°\ fatt.>0$ | $(x-3)^2>0$ | $x\neq 3$ |
| $2°\ fatt.>0$ | $x-5>0$ | $x>5$ |




**SOLUZIONI:**
$\boxed{x<5\ \text{ ma }\ x\neq 3}$

Di questo esercizio potremmo considerare le **varianti** seguenti (leggi il riquadro sottostante per le ultime due):

$\boxed{(x-3)^2(x-5)>0}$ impostazione e schema identici al caso precedente; soluzioni: $\boxed{x>5}$

$\boxed{(x-3)^2(x-5)\leq 0}$ impostazione e schema identici ai casi precedenti; soluzioni: $\boxed{x\leq 5}$

$\boxed{(x-3)^2(x-5)\geq 0}$ impostazione e schema identici ai casi precedenti; soluzioni: $\boxed{x\geq 5\ \vee\ x=3}$

**Esempio 4**: $\boxed{5x(x-7)(x-4)^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x-1\right)<0}$

Qui c'è innanzitutto la possibilità di **semplificare**.

**Possono essere semplificati quei fattori che risultino sempre strettamente positivi ( > 0 )**; qui,

- il fattore 5 (**costante positiva**)
- e il fattore $x^2+1$ (che dipende da $x$, ma è **sempre strettamente positivo per qualsiasi valore di** $x$).

$$\underbrace{\cancel{5}}_{>0}\ x(x-7)(x-4)^2\underbrace{\cancel{\left(x^2+1\right)}}_{>0,\ \forall x}\left(x^2-2x-1\right)<0$$

Semplificare, infatti, vuol dire dividere,
e dividendo ambo i membri di una disuguaglianza per una quantità strettamente positiva,
il verso rimane invariato.

- **Non è lecito invece semplificare per una quantità il cui segno può essere, a seconda dei valori di $x$, positivo oppure negativo**: infatti la semplificazione per un numero <0 richiede di cambiare il verso, e allora, se volessimo a tutti i costi semplificare una disequazione per una quantità di segno variabile, saremmo obbligati ad addentrarci in una laboriosa distinzione di casi.
- **Osserviamo** che **il fattore $(x-4)^2$ NON può essere semplificato:**
**esso è QUASI sempre strettamente positivo, ma non sempre**: infatti si può annullare (per $x=4$).
Questo fattore $(x-4)^2$ ce lo dobbiamo per forza tenere: nello schema per il confronto dei segni, ad esso corrisponderà una linea continua di positività, contenente al suo interno un pallino di annullamento.

Puoi proseguire per conto tuo, ora, con la risoluzione della disequazione; vedrai che essa è verificata per:

$$\boxed{1-\sqrt{2}<x<0\ \ \vee\ \ 1+\sqrt{2}<x<7\ \ ma\ x\neq 4}$$

## 14. DISEQUAZIONI FRATTE

Si risolvono come le disequazioni di grado superiore al secondo. Vale a dire:

**A) SI PORTA TUTTO A 1° MEMBRO, IN MODO CHE IL 2° MEMBRO SIA 0**
(si dovrà avere, in definitiva, un'unica frazione, confrontata con lo 0)

**B) poi SI SCOMPONGONO IN FATTORI SIA IL NUMERATORE. CHE IL DENOMINATORE**
(ciascun fattore dovrà essere di 1° grado, oppure di 2° grado, oppure di tipo "particolare": vedi es. 5)

**C)** quindi **SI STUDIA IL SEGNO DI CIASCUN FATTORE IN GIOCO** (NOTA)
NOTA. Sarebbe **gravissimo errore** mandar via il denominatore! Infatti ciò equivarrebbe a moltiplicare per il denominatore entrambi i membri, ma in una disequazione è lecito moltiplicare per un'espressione contenente $x$ soltanto se questa è sempre $>0,\ \forall x$

**D)** e infine **SI TRACCIA UNO SCHEMA PER IL CONFRONTO DEI SEGNI**
per trarre, dall'osservazione di questo, le conclusioni opportune.

**Esempio 1**: $\boxed{x\cdot\frac{2x-7}{x^2-4}<\frac{2}{x+2}}$

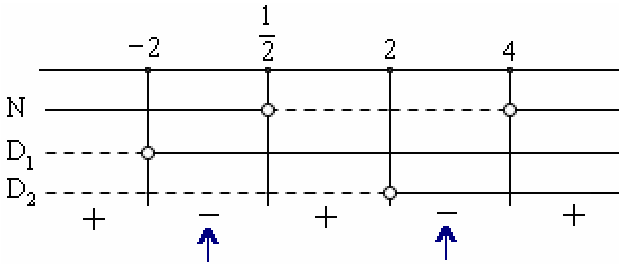
$$\frac{2x^2-7x}{x^2-4}-\frac{2}{x+2}<0\ ;\ \frac{2x^2-7x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{x+2}<0\ ;\ \frac{2x^2-7x-2x+4}{(x+2)(x-2)}<0$$

$$\boxed{\frac{\overset{N}{2x^2-9x+4}}{\underset{D_1}{(x+2)}\underset{D_2}{(x-2)}}<0}$$

$N>0\quad 2x^2-9x+4>0\quad x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm7}{4}=\left\langle\begin{matrix}1/2\\4\end{matrix}\right.\quad \boxed{x<\frac{1}{2}\ \vee\ x>4}$

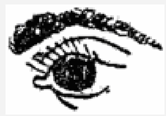
$D_1>0\quad x+2>0\quad \boxed{x>-2}$

$D_2>0\quad x-2>0\quad \boxed{x>2}$




**SOLUZIONI:** $\boxed{-2<x<\frac{1}{2}\ \vee\ 2<x<4}$

| | | |
|---|---|---|
| **LINEA CONTINUA** | —— | **FATTORE POSITIVO** |
| **PALLINO VUOTO** | ∘ | **FATTORE NULLO** |
| **LINEA TRATTEGGIATA** | - - - - | **FATTORE NEGATIVO** |

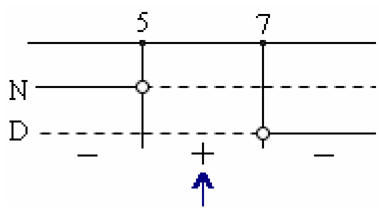


**Esempio 2:** (leggi il riquadro sottostante) $\boxed{\frac{\overset{N}{5-x}}{\underset{D}{x-7}}\ge0}$

NOTA
Volendo, si potrebbe riscrivere come
$\frac{x-5}{x-7}\le0$

$N>0\quad 5-x>0\quad -x>-5\quad \boxed{x<5}$

$D>0\quad x-7>0\quad \boxed{x>7}$




**SOLUZIONI:**
$\boxed{5\le x<7}$
$\boxed{S=[5,\ 7)}$

♥ **Nel caso si abbia il ≤, oppure il ≥, conviene pensare DAPPRIMA alla disequazione STRETTA (quella solo col > o col <), POI aggiungere alle soluzioni così trovate anche quei valori che rendono la frazione uguale a 0.**

♥ **Ricorda a proposito che una frazione si annulla quando si annulla il suo NUMERATORE, purché però non si annulli contemporaneamente anche il denominatore, nel qual caso la frazione non sarebbe nulla bensì indeterminata.**

$\frac{0}{a}=0$

$\frac{a}{0}=$ **IMPOSSIBILE**

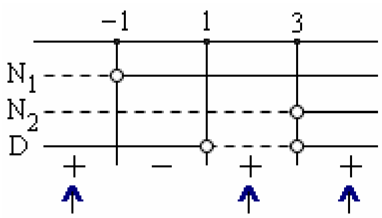
$\frac{0}{0}=$ **INDETERMINATA**

**Esempio 3:** $\boxed{\dfrac{\overset{N_1}{(x+1)^3}\,\overset{N_2}{(x-3)}}{\underset{D}{x^2-4x+3}} \ge 0}$

$N_1 > 0 \quad (x+1)^3 > 0 \quad x+1>0 \quad \boxed{x>-1}$

$N_2 > 0 \quad x-3>0 \quad \boxed{x>3}$

$D>0 \quad x^2-4x+3>0 \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = \left\langle \begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right. \quad \boxed{x<1 \vee x>3}$




**SOLUZIONI**:

$\boxed{x \le -1 \vee x>1 \; ma \; x \ne 3}$

La disequazione presenta il $\ge$.

La **disequazione "stretta"** $(>)$ è verificata per $x<-1 \vee 1<x<3 \vee x>3$.
L'**equazione** $(=)$ è verificata soltanto con $x=-1$,
valore che annulla il numeratore senza annullare il denominatore;
invece i valori $x=1$ e $x=3$ NON sono soluzioni dell'equazione:

- $x=1$ non lo è perché annulla il denominatore (frazione impossibile);
- $x=3$ non lo è perché, sebbene annulli il numeratore, annulla contemporaneamente anche il denominatore (frazione indeterminata).

Pertanto alle soluzioni della disequazione stretta andrà aggiunto il solo valore $x=-1$, e si otterrà in definitiva
$x \le -1 \;\vee\; 1<x<3 \;\vee\; x>3$ o anche: $\boxed{x \le -1 \vee x>1 \text{ ma } x \ne 3}$

OSSERVAZIONE
Risolviamo lo **stesso esercizio** diversamente, **scomponendo il denominatore in due fattori di 1° grado**:

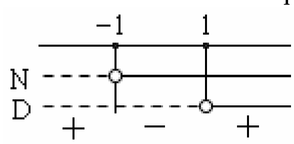
$\boxed{\dfrac{(x+1)^3(x-3)}{(x-1)(x-3)} \ge 0}$

Fattorizzando il denominatore, si nota la **possibilità di semplificare**.
Semplificando, però, viene eliminata l'espressione $(x-3)$
che inizialmente compariva a denominatore, quindi bisogna ricordarsi di **scrivere la condizione** $x \ne 3$, che significa: "se alla fine fra le soluzioni trovate dovesse rientrare anche il valore $x=3$, lo si dovrebbe escludere". Dunque:

$\dfrac{\overset{N}{(x+1)^3\cancel{(x-3)}}}{\underset{D}{(x-1)\cancel{(x-3)}}} \ge 0 \quad \boxed{x \ne 3}$

$N>0 \quad (x+1)^3>0 \quad x+1>0 \quad \boxed{x>-1}$

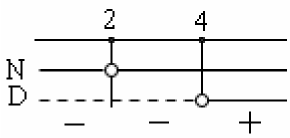
$D>0 \quad x-1>0 \quad \boxed{x>1}$




Tenuto conto ora del verso $(\ge)$
e della condizione $x \ne 3$,
si hanno le **SOLUZIONI**:
$\boxed{x \le -1 \vee x>1 \text{ ma } x \ne 3}$

**Esempio 4:** a) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}<0}$ b) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}>0}$ c) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}\le 0}$ d) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}\ge 0}$

Lo **schema finale** è, **in tutti e 4 i casi**, il seguente:




… e le **SOLUZIONI** sono, rispettivamente:

a) $\boxed{x<4 \text{ ma } x \ne 2}$ b) $\boxed{x>4}$

c) $\boxed{x<4}$ d) $\boxed{x>4 \;\vee\; x=2}$

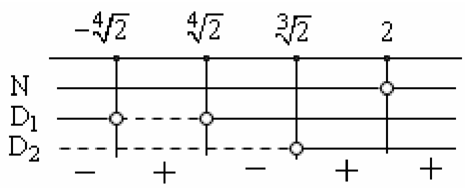
**Esempio 5:** $\boxed{\dfrac{\overset{N}{(x-2)^4}}{\underset{D_1}{(x^4-2)}\underset{D_2}{(x^3-2)}} \le 0}$

In questo caso i fattori in gioco non sono né di 1°, né di 2° grado; sono però "**di tipo particolare**", nel senso che, per ciascun fattore, se ne può agevolmente studiare il segno, mediante la disequazione ausiliaria *fattore>0*, senza ricorrere ad una … scomposizione del fattore in altri fattori di grado inferiore.

$N>0 \quad (x-2)^4>0 \quad x-2 \ne 0 \quad \boxed{x \ne 2}$

$D_1>0 \quad x^4-2>0 \quad x^4>2 \quad |x|>\sqrt[4]{2} \quad \boxed{x<-\sqrt[4]{2} \;\vee\; x>\sqrt[4]{2}}$

$D_2>0 \quad x^3-2>0 \quad x^3>2 \quad \boxed{x>\sqrt[3]{2}}$




**SOL.:** $\boxed{x<-\sqrt[4]{2} \;\vee\; \sqrt[4]{2}<x<\sqrt[3]{2} \;\vee\; x=2}$

## ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

1) $x^3-x^2-4x+4<0$ (raccoglimenti parziali) 2) $(x+3)(x-2)(x^2+7)\ge 0$

3) $4x^3+x^2-12x-3<0$ (raccoglimenti parziali) 4) $x^3-6x^2+11x-6>0$ (Ruffini)

5) $\frac{6}{5}(4x+1)(3x+1)(2x+1)^2\le 0$ 6a) $(x-5)^2(x-2)>0$ 6b) $(x-5)^2(x-2)\le 0$

7) $x(2x^2-10x+1)<5$ 8) $x^3+x^2+2x+2>0$ 9) $a^3-a^2\ge 0$ 10) $(x-1)(x^2-x+1)<0$

11a) $x^3-3x^2+2x>0$ 11b) $x^3-3x^2+2x\ge 0$ 11c) $x^4+2x^2>3x^3$ 11d) $x^4+2x^2\ge 3x^3$

12a) $x^3-4x>0$ 12b) $x^3-4x\ge 0$ 13) $5x(x+2)^2(x^2+2)(x^2-2x-4)(x^2-2x+4)<0$

14a) $4x^2<x^4$ 14b) $4x^2\le x^4$ 14c) $4x^2>x^4$ 14d) $4x^2\ge x^4$ 15) $y^4-y^3\ge 0$

16) $(x^2+3)(x+2)^2(x-1)<0$ 17) $(x-1)(x-2)^2(x-3)(4x^2+1)<0$ 18) $x^3(x^2-2x-1)<0$

19) $x^4-5x^2+4>0$ Le disequazioni BIQUADRATICHE non fanno eccezione: si risolvono anch'esse SCOMPONENDO IN FATTORI 20) $4x^4-5x^2+1\le 0$

21) $\frac{11}{12}x^2>\frac{x^4}{3}+\frac{1}{2}$ Si può moltiplicare per 12 oppure fare il den. com. 12 e mandarlo via 22) $y^4-\frac{7}{2}y^2-2>0$ 23) $21t^2+25>4t^4$

24) $16b^4-148b^2+36>0$ (semplifica innanzitutto i coefficienti!) 25) $x^4+7x^2+12>0$

26) $x^4-3x^2+4>0$ (molto particolare!) 27) $x^6-x^3-6<0$ 28) $x^8-6x^4+5<0$

29) $x^8-15x^4-16>0$ 30) $x^8-3x^4<0$ 31) $3x^4(1-5x)(4x^2+11x-3)(2x^2-1)(x^2+1)(x+1)^2<0$

## SOLUZIONI

1) $x<-2 \vee 1<x<2$ 2) $x\le -3 \vee x\ge 2$ 3) $x<-\sqrt{3} \vee -1/4<x<\sqrt{3}$ 4) $1<x<2 \vee x>3$

5) $-1/3\le x\le -1/4 \vee x=-1/2$ Il fattore 6/5 è >0 e può essere semplificato … 6a) $x>2$ ma $x\ne 5$ 6b) $x\le 2 \vee x=5$

7) Raccoglimenti parziali; si ottiene $(x-5)(2x^2+1)<0$ e a questo punto,
se si nota che il fattore $2x^2+1$ è >0 qualunque sia *x*, lo si potrà eliminare: $(x-5)\cancel{(2x^2+1)}<0$
e la disequazione diventerà allora semplicemente $x-5<0$ con le soluzioni $x<5$.
Se invece NON si elimina il fattore $2x^2+1$, essendo questo sempre >0, nello schema finale ad esso corrisponderà una linea continua di positività e si troveranno le stesse soluzioni, ossia i valori $x<5$.

8) $x>-1$ 9) $a\ge 1 \vee a=0$ 10) $x<1$ (il fattore $x^2-x+1$, con $\Delta<0$, è sempre $>0$, per ogni $x$!)

11a) $0<x<1 \vee x>2$ 11b) $0\le x\le 1 \vee x\ge 2$ 11c) $x<1\ (ma\ x\ne 0) \vee x>2$ 11d) $x\le 1 \vee x\ge 2$

12a) $-2<x<0 \vee x>2$ 12b) $-2\le x\le 0 \vee x\ge 2$ 13) $x<1-\sqrt{5}$ ($ma\ x\ne -2$) $\vee$ $0<x<1+\sqrt{5}$

14a) $x<-2 \vee x>2$ 14b) $x\le -2 \vee x\ge 2 \vee x=0$ 14c) $-2<x<2\ ma\ x\ne 0$ 14d) $-2\le x\le 2$

15) $y\le 0 \vee y\ge 1$ 16) $x<1\ ma\ x\ne -2$ 17) $1<x<3\ ma\ x\ne 2$ 18) $x<1-\sqrt{2} \vee 0<x<1+\sqrt{2}$

19) $x<-2 \vee -1<x<1 \vee x>2$ 20) $-1\le x\le -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2}\le x\le 1$ 21) $-\sqrt{2}<x<-\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}<x<\sqrt{2}$

22) $y<-2 \vee y>2$ 23) $-5/2<t<5/2$ 24) $b<-3 \vee -1/2<b<1/2 \vee b>3$ 25) $\forall x\in\mathbb{R}$

26) $\forall x\in\mathbb{R}$ Il trinomio biquadratico dato non è scomponibile perché il suo $\Delta$ è negativo; la negatività del $\Delta$ ci dice anche che l'equazione biquadratica associata non ha soluzioni, cioè che il trinomio non si può annullare; ma allora la quantità $x^4-3x^2+4$ mantiene segno costante, e siccome ad esempio con $x=0$ è positiva, si manterrà positiva per ogni valore di *x*

27) Si scompone in $(x^3+2)(x^3-3)$, dopodiché:
$x^3+2>0;\ x^3>-2;\ x>\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$, ecc.
Soluzioni: $-\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{3}$

28) Si scompone in $(x^4-5)(x^4-1)$, dopodiché:
$x^4-5>0;\ x^4>5;\ |x|>\sqrt[4]{5};\ x<-\sqrt[4]{5} \vee x>\sqrt[4]{5}$, ecc.
Soluzioni: $-\sqrt[4]{5}<x<-1 \vee 1<x<\sqrt[4]{5}$

29) $x<-2 \vee x>2$ 30) $-\sqrt[4]{3}<x<\sqrt[4]{3}\ ma\ x\ne 0$ 31) $-3<x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\ (ma\ x\ne -1) \vee \frac{1}{5}<x<\frac{1}{4} \vee x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

## ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI FRATTE

1a) $\dfrac{x-1}{x-2}<0$ 1b) $\dfrac{x-1}{x-2}\le 0$

2) $\dfrac{12x-4}{12x-6}\ge 0$ Può essere innanzitutto semplificata, dividendo per 4 e moltiplicando per 6: $\dfrac{3x-1}{2x-1}\ge 0$

3) $\dfrac{3-x}{x-7}>0$ o anche $\dfrac{x-3}{x-7}<0$ ⇨

4) $\dfrac{x-4}{8-x}\le 0$ opp. $\dfrac{x-4}{x-8}\ge 0$ ⇨

5) $\dfrac{5-x}{9-x}>0$ opp. $\dfrac{x-5}{x-9}>0$ ⇨

6a) $\dfrac{x^2-9}{x-1}<0$ 6b) $\dfrac{x^2-9}{x-1}\le 0$ 7) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}>0$ 8) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}\ge 0$ 9) $\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-2}<0$

10a) $\dfrac{(x-7)^2}{x-1}>0$ 10b) $\dfrac{(x-7)^2}{x-1}\ge 0$ 10c) $\dfrac{x-1}{(x-7)^2}>0$ 10d) $\dfrac{x-1}{(x-7)^2}\ge 0$ 11) $\dfrac{x^2-1}{3x^2-3x}\ge 0$

12) $\dfrac{x^3-x^2-9x+9}{x^3-2x^2}<0$ Qui INNANZITUTTO (**PRIMO PASSAGGIO**! Vedi RIFLESSIONE a pag. 163) bisogna **SCOMPORRE sia il N che il D in fattori** ciascuno dei quali deve essere: o di **1° grado**, o di **2° grado**, oppure **"di tipo particolare"**

13) $\dfrac{x^3-4x}{x^2-2}>0$ 14) $\dfrac{x^4-2x^3+4x^2}{x+2}>0$ 15) $\dfrac{x^3-9x^2+8x}{x^3-x^2-x+1}\le 0$ 16) $\dfrac{5x+15}{x^3+x^2+x+1}\le 0$

17) $\dfrac{7a+21}{a^2-9}<0$ 18) $\dfrac{3x^2}{6-x}\le 0$ 19) $\dfrac{3}{x^2-4x}>0$ 20) $\dfrac{x^2-4x+5}{4x-x^2}\le 0$ 21) $\dfrac{25-16d^4}{d^2+2d+1}>0$

22) $\dfrac{6}{2x-1}>\dfrac{5}{x-2}$ Porta a 1° m., fai il denom. comune! 23) $\dfrac{x^3+2}{x}\ge 2x+1$ 24) $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{3}{x^2-1}\le\dfrac{1}{4}$ 25) $\dfrac{2}{b^2-1}\ge -1$

Nelle seguenti N e D sono GIA' "di tipo particolare" 26) $\dfrac{x^4-2}{x^3-2}>0$ 27) $\dfrac{x^4+2}{x^3+2}>0$ 28) $\dfrac{(x+3)^4}{x^3+8}<0$ 29) $\dfrac{(x+2)^3}{x^4}\ge 0$

Qui occorre prima scomporre 30) $\dfrac{x^5-x}{x^4-81}>0$ 31) $\dfrac{x^6-x^3-2}{x^8+15x^4-16}\ge 0$ 32) $\dfrac{a^8-1}{a^3-a^2-3a+3}<0$

33) $\dfrac{x^2(3x+2)(x^3-2)}{3-4x}<0$ 34) $\dfrac{12x^4-19x^2+4}{4x^2+4x-3}\le 0$ 35) $\dfrac{z^3-3z^2+z+5}{16z^4+40z^3+25z^2}\le 0$ 36) $\dfrac{x-4}{x^2+3}<0$

## SOLUZIONI

1a) $1<x<2$ 1b) $1\le x<2$ 2) $x\le 1/3\ \vee\ x>1/2$ 3) $3<x<7$ 4) $x\le 4\vee x>8$ 5) $x<5\vee x>9$

6a) $x<-3\vee 1<x<3$ 6b) $x\le -3\vee 1<x\le 3$ 7) $x<1\vee 2<x<3\vee x>4$ 8) $x<2\vee x\ge 3$ *ma* $x\ne 4$

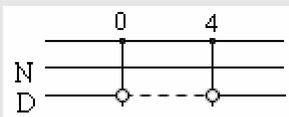
9) $-\sqrt{2}<x<1-\sqrt{2}\vee\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ 10a) $x>1$ *ma* $x\ne 7$ 10b) $x>1$ 10c) $x>1$ *ma* $x\ne 7$

10d) $x\ge 1$ *ma* $x\ne 7$ 11) $x\le -1\vee x>0$ *ma* $x\ne 1$ 12) $-3<x<1$ *ma* $x\ne 0\vee 2<x<3$

13) $-2<x<-\sqrt{2}\vee 0<x<\sqrt{2}\vee x>2$ 14) $x>-2$ *ma* $x\ne 0$ 15) $-1<x\le 0\vee 1<x\le 8$

16) $-3\le x<-1$ 17) $a<3$ *ma* $a\ne -3$ 18) $x>6\vee x=0$

19) $x<0\vee x>4$ ⇨




20) $x<0\vee x>4$ 21) $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}<d<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ *ma* $d\ne -1$ 22) $x<-\dfrac{7}{4}\vee\dfrac{1}{2}<x<2$

23) $x\le -1\vee 0<x\le 1\vee x\ge 2$ 24) $x\le -3\vee -1<x<1\vee x\ge 5$ 25) $b<-1\vee b>1$ 26) $-\sqrt[4]{2}<x<\sqrt[4]{2}\vee x>\sqrt[3]{2}$

27) $x>-\sqrt[3]{2}$ 28) $x<-2$ *ma* $x\ne -3$ 29) $x\ge -2$ *ma* $x\ne 0$ 30) $-3<x<-1\vee 0<x<1\vee x>3$

31) $x<1$ *ma* $x\ne -1\vee x\ge\sqrt[3]{2}$ 32) $a<-\sqrt{3}\vee -1<a<\sqrt{3}$ *ma* $a\ne 1$ 33) $-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{3}{4}$ *ma* $x\ne 0\ \vee\ x>\sqrt[3]{2}$

34) $-\dfrac{3}{2}<x\le -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\vee -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ *ma* $x\ne\dfrac{1}{2}$ 35) $z\le -1$ *ma* $z\ne -\dfrac{5}{4}$

36) $x<4$ Qui *eccezionalmente* il D potrebbe andarsene, perché è >0 per ogni $x$! ⇨

**ALTRI ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI FRATTE (soluzioni alla pagina seguente)**

1) $\frac{x-8}{x+2}<0$ 2) $\frac{4x-5}{2x-3}\le 0$ 3) $\frac{4x-4}{3x-15}>0$ 4) $\frac{x-5}{2}>0$ 5) $\frac{x+1}{x+3}<0$ 6) $\frac{x+1}{x+3}\le 0$

7) $\frac{5x+1}{4x+1}>0$ 8) $\frac{5x+1}{4x+1}\ge 0$ 9) $\frac{2x}{x-4}<0$ 10) $\frac{2x}{x-4}<1$ 11) $\frac{1}{x+3}>0$ 12) $\frac{3}{x-5}\le 0$

13) $\frac{1-2x}{2-x}<0$ 14) $\frac{x}{5-x}\ge 0$ 15) $\frac{4-x}{x}\ge 2$ 16) $\frac{1}{x}\ge\frac{3}{2x}$ 17) $\frac{1}{7-x}<0$ 18) $\frac{6}{7-x}<3$

19) $\frac{x^2-9x+20}{x^2-5x+6}<0$ 20) $\frac{x^2-x-12}{x-1}\le 0$ 21) $\frac{10x-5}{x^2-3x+2}>0$ 22) $\frac{x^2-1}{x^2-4x+4}\ge 0$

23) $\frac{x^2-9x+14}{x^2-15x+14}\ge 0$ 24) $\frac{x^2}{x^2-8x+15}\le 0$ 25) $\frac{x^2+14}{x^2-6x+14}>0$ 26) $\frac{x^2-14}{x^2-14x}\le 0$

27) $\frac{12x^2-7x+1}{3x^2-13x+4}<0$ 28) $\frac{6x^2+5x-1}{x^2-4x-1}\ge 0$ 29) $\frac{x^2-2x}{x^2-2x+5}<0$ 30) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-3}>0$

31) $\frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+3}<0$ 32) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+2}<0$ 33) $\frac{49x^2+14x+1}{24x^2+10x+1}<0$ 34) $\frac{x-4}{x^2-10x+16}\le 0$

35) $\frac{x^2-4x}{x^2-1}\ge 0$ 36) $\frac{x^2-4x+1}{2x^2}\ge 0$ 37) $\frac{x^2-x+2}{3x^2-12x}>0$ 38) $\frac{x+4}{x^2+4}>0$

39) $\frac{8-2x-x^2}{8+2x-x^2}>0$ 40) $\frac{x-x^2}{x^2-12x+35}>0$ 41) $\frac{2(x+1)^2}{3(x^2+1)}\le 0$ 42) $\frac{(x+3)^2}{x^2}>0$

43) $\frac{x^2-11x+30}{x-6}>0$ 44) $\frac{x^2-x}{x^2+2x}<0$ 45) $\frac{2x^2+6x+4}{x^2-2x+2}\le 0$ 46) $\frac{6x-x^2-5}{x^2-2x\sqrt{2}+2}>0$

47) $\frac{1}{x}>x$ 48) $\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}\le 2$ 49) $\frac{x^2+x}{x-1}-1>0$ 50) $\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-2}$

51) $\frac{x^4-x^2}{x^4+x^2-6}>0$ 52) $\frac{x^3-x^2-x+1}{x-2}\le 0$ 53) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-3x^2-4x+12}>0$ 54) $\frac{4x^4+3x^2-1}{4x^4-3x^2-1}\le 0$

55) $\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^3-x}\ge 0$ 56) $\frac{x^5-5x^3+6x}{4x+6}\ge 0$ 57) $\frac{1}{x^2}\ge\frac{1}{x^4}$ 58) $\frac{3x^3+x+2}{x^3}\ge 2$

59) $\frac{(x-3)^4}{(x-4)^3}<0$ 60) $\frac{x^4-625}{x^4+625}<0$ 61) $\frac{x^3-64}{x^3+64}>0$ 62) $\frac{x^6}{x^4-3}>0$

63) $\frac{x^4+3}{x^7}>0$ 64) $\frac{12+x^2(x^2-1)}{x^4}>0$ 65) $\frac{x^4-x^2-12}{x^4}>1$ 66) $\frac{x^4-10x^2+9}{x^6-10x^3+9}>0$

67) $\frac{(x+3)^3}{x^3+3}\le 0$ 68) $\frac{(x+3)^4}{x^4+3}\le 0$ 69) $\frac{x^4}{x^4-x^2+2x-1}<0$ 70) $\frac{x^6-x^2}{x^5-x^2}>0$

71) $\frac{x^2+3x-4}{4+3x-x^2}\le 0$ 72) $\frac{5}{x^7+3}<0$ 73) $\frac{5}{x^7+3}<1$ 74) $\frac{x^4-x}{x^4}<1$

75) $\frac{x^4-1}{x^4+x^2}<2$ 76) $1+x<\frac{2}{x}$ 77) $1+x^2<\frac{2}{x^2}$ 78) $1+x^3<\frac{2}{x^3}$

79) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3\ge 0$ 80) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^4\ge 0$ 81) $\frac{x^3+1}{x^3-2}<0$ 82) $\frac{x^4+1}{x^4-2}<0$

## ♥ RIFLESSIONE METODOLOGICA MOLTO IMPORTANTE

$$\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^3-2x^2}<0$$

In una disequazione fratta nella quale N e/o D siano di grado sup. al 2°, **INNANZITUTTO** bisogna **SCOMPORRE sia il N che il D in fattori** ciascuno dei quali deve essere:
o di **1° grado**, o di **2° grado**, oppure **“di tipo particolare**”

Infatti, se si fa in questo modo, si ottiene la situazione seguente: $\dfrac{\overset{N_1}{(x-1)}\overset{N_2}{(x^2-9)}}{\underset{D_1}{x^2}\underset{D_2}{(x-2)}}<0$

e basterà allora studiare il segno di ogni singolo fattore in gioco
e PASSARE POI SUBITO ALLO SCHEMA FINALE, CHE AVRA’ 4 RIGHE:

$N_1$ ...
$N_2$ ...
$D_1$ ...
$D_2$ ...

☺ **… TUTTO MOLTO VELOCE E TRANQUILLO!**

**SE INVECE non si scompone, il procedimento diventa INUTILMENTE LUNGO E NOIOSO!**

$$\frac{\overset{N}{x^3-x^2-9x+9}}{\underset{D}{x^3-2x^2}}<0$$

$N>0$, FATTORIZZAZIONE seguita da un ***PRIMO SCHEMA***
$D>0$, FATTORIZZAZIONE seguita da un ***SECONDO SCHEMA***

... e infine lo SCHEMA CONCLUSIVO N ... D ...

☹ **CHE BARBA !!!**


**SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI della pagina precedente**

1) $-2<x<8$ 2) $5/4\le x<3/2$ 3) $x<1\vee x>5$ (volendo, si poteva semplificare …)
4) $x>5$ (il denominatore, costante positiva, se ne può andare!) 5) $-3<x<-1$ 6) $-3<x\le -1$
7) $x<-1/4\vee x>-1/5$ 8) $x<-1/4\vee x\ge -1/5$ 9) $0<x<4$ 10) $-4<x<4$ 11) $x>-3$
12) $x<5$ 13) $1/2<x<2$ 14) $0\le x<5$ 15) $0<x\le 4/3$ 16) $x<0$ 17) $x>7$ 18) $x<5\vee x>7$
19) $2<x<3\vee 4<x<5$ 20) $x\le -3\vee 1<x\le 4$ 21) $1/2<x<1\vee x>2$ 22) $x\le -1\vee x\ge 1\wedge x\ne 2$
23) $x<1\vee 2\le x\le 7\vee x>14$ 24) $3<x<5\vee x=0$ 25) $\forall x\in\mathbb{R}$ 26) $-\sqrt{14}\le x<0\vee \sqrt{14}\le x<14$
27) $1/4<x<4\wedge x\ne 1/3$ 28) $x\le -1\vee 2-\sqrt{5}<x\le 1/6\vee x>2+\sqrt{5}$ 29) $0<x<2$
30) $x<-\sqrt{3}\vee x>\sqrt{3}\wedge x\ne 3$ 31) $1<x<3$ 32) $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}\wedge x\ne 2$
33) $-1/4<x<-1/6$ 34) $x<2\vee 4\le x<8$ 35) $x<-1\vee 0\le x<1\vee x\ge 4$
36) $x\le 2-\sqrt{3}\vee x\ge 2+\sqrt{3}\wedge x\ne 0$ 37) $x<0\vee x>4$ 38) $x>-4$
39) $x<-4\vee -2<x<2\vee x>4$ 40) $0<x<1\vee 5<x<7$ 41) $x=-1$ 42) $x\ne -3\wedge x\ne 0$
43) $x>5\wedge x\ne 6$ 44) $-2<x<1\wedge x\ne 0$ 45) $-2\le x\le -1$ 46) $1<x<5\wedge x\ne\sqrt{2}$
47) $x<-1\vee 0<x<1$ 48) $x<2\vee x\ge 4\wedge x\ne -3$ 49) $x>1$ 50) $1<x<2$
51) $x<-\sqrt{2}\vee(-1<x<1\wedge x\ne 0)\vee x>\sqrt{2}$ 52) $-1\le x<2$ 53) $x<-2\vee(0<x<2\wedge x\ne 1)\vee x>3$
54) $-1<x\le -1/2\vee 1/2\le x<1$ 55) $x\le -1-\sqrt{2}\vee -1<x<0\vee x\ge -1+\sqrt{2}\wedge x\ne 1$
56) $x\le -\sqrt{3}\vee -3/2<x\le -\sqrt{2}\vee 0\le x\le\sqrt{2}\vee x\ge\sqrt{3}$ 57) $x\le -1\vee x\ge 1$ 58) $x\le -1\vee x>0$
59) $x<4\wedge x\ne 3$ 60) $-5<x<5$ 61) $x<-4\vee x>4$ 62) $x<-\sqrt[4]{3}\vee x>\sqrt[4]{3}$ 63) $x>0$
64) $x\ne 0$ 65) imposs. 66) $x<-3\vee\left(-1<x<\sqrt[3]{9}\wedge x\ne 1\right)\vee x>3$ 67) $-3\le x<-\sqrt[3]{3}$ 68) $x=-3$
69) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\wedge x\ne 0$ 70) $x>-1\wedge x\ne 0\wedge x\ne 1$ 71) $x\le -4\vee -1<x\le 1\vee x>4$
72) $x<-\sqrt[7]{3}$ 73) $x<-\sqrt[7]{3}\vee x>\sqrt[7]{2}$ 74) $x>0$ 75) $x\ne 0$ 76) $x<-2\vee 0<x<1$ 77) $-1<x<1\wedge x\ne 0$
78) $x<-\sqrt[3]{2}\vee 0<x<1$ 79) $x\le -1\vee x>2$ 80) $x\ne 2$ 81) $-1<x<\sqrt[3]{2}$ 82) $-\sqrt[4]{2}<x<\sqrt[4]{2}$

## 15. SISTEMI DI DISEQUAZIONI

L'obiettivo di un **sistema** (di equazioni, di disequazioni, misto)
è sempre di determinare per quali valori dell'incognita, o delle incognite,
sono verificate **CONTEMPORANEAMENTE TUTTE** le condizioni che compongono il sistema.

**Per risolvere un sistema di disequazioni,**

**A) PRIMA SI RISOLVERA' SEPARATAMENTE OGNI SINGOLA DISEQUAZIONE**;

**B) POI si traccerà uno SCHEMA "DI INTERSEZIONE",**
che mostri in un quadro "sinottico" per quali valori è verificata ciascuna disequazione
e permetta così di stabilire per quali valori sono verificate contemporaneamente tutte.

**Esempio 1**:

$$\boxed{\begin{cases} (x-4)^2 \le x^2 \\ \dfrac{x-1}{x-4} \le 0 \end{cases}}$$

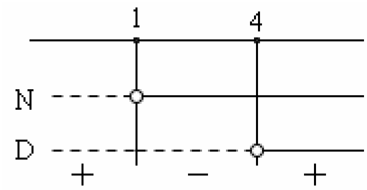
NOTA
*Due differenze fondamentali fra i sistemi di DISEQuazioni e i sistemi di EQuazioni:*
1) *in un sistema di disequazioni abbiamo UNA SOLA incognita (disequazioni in più incognite, e sistemi con esse, si incontrano in determinati contesti, e si affrontano in generale con metodi grafici, ma noi qui non ce ne occuperemo)*
2) *in un sistema di disequazioni, queste non vengono fatte "interagire" fra loro, ma, come abbiamo detto, le si risolve separatamente, una per una.*

1ª disequazione:

$(x-4)^2 \le x^2 \quad \cancel{x^2} - 8x + 16 \le \cancel{x^2} \quad -8x \le -16 \quad 8x \ge 16 \quad \boxed{x \ge 2}$ **1ª diseq.** $S_1 = [2, +\infty)$

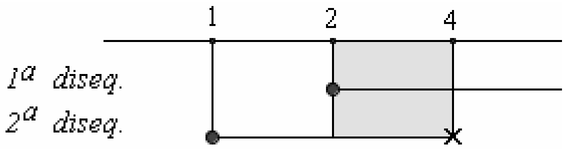
2ª disequazione:

$\dfrac{\overset{N}{x-1}}{\underset{D}{x-4}} \le 0 \qquad \begin{array}{l} N > 0 \quad x-1 > 0 \quad x > 1 \\ D > 0 \quad x-4 > 0 \quad x > 4 \end{array}$




$\boxed{1 \le x < 4}$ **2ª diseq.**
$S_2 = [1, 4)$

**SCHEMA DI SISTEMA ( = SCHEMA DI INTERSEZIONE):**




**SOLUZIONI DEL SISTEMA**:
$\boxed{2 \le x < 4}$
$S = S_1 \cap S_2 = [2, 4)$

**♥ SIMBOLOGIA**
**IN UNO SCHEMA DI SISTEMA:**
linea continua, pallino pieno
DISEQUAZIONE VERIFICATA
nessuna linea, crocetta di esclusione
DISEQUAZIONE NON VERIFICATA

Uno schema di sistema è anche chiamato "**schema di intersezione**": infatti l'insieme S delle soluzioni del sistema costituisce l'intersezione fra gli insiemi $S_1$, $S_2$, … delle soluzioni delle singole condizioni che compongono il sistema.

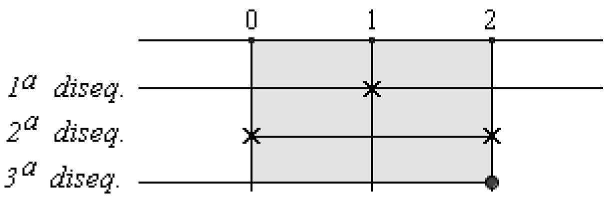
**Esempio 2**:

$$\boxed{\begin{cases} (x-1)^4 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \\ (x-2)^3 \le 0 \end{cases}}$$

**1ª disequazione**:
$(x-1)^4 > 0 \quad x \ne 1$

**2ª disequazione:**
$x^2 - 2x < 0 \quad x(x-2) < 0 \quad 0 < x < 2$

**3ª disequazione**:
$(x-2)^3 \le 0 \quad x-2 \le 0 \quad x \le 2$




**SOLUZIONI SISTEMA**:
$\boxed{0 < x < 2 \ \text{ ma } \ x \ne 1}$

In forma insiemistica:
$S_1 = \mathbb{R} - \{1\}$ *opp.* $(-\infty, +\infty) - \{1\}$ *opp.* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$S_2 = (0, 2)$
$S_3 = (-\infty, 2]$
$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (0,2) - \{1\}$ *oppure* $(0,1) \cup (1,2)$

**OSSERVAZIONI UTILI**

- **Se**, nell'ambito di un sistema, si nota che
  **due delle condizioni sono "INCOMPATIBILI"** fra loro,
  ossia: **non possono essere verificate contemporaneamente,**
  **allora** si può immediatamente concludere che **il sistema è impossibile**.

Es. $\begin{cases} x > 6 \\ 1 < x < 8 \\ x < 4 \end{cases}$ *La prima e la terza condizione sono in contraddizione fra loro, sono incompatibili: non c'è alcun valore di x che le possa soddisfare entrambe simultaneamente. Il sistema è impossibile.*

- **La presenza anche di una sola condizione IMPOSSIBILE,**
  **rende impossibile tutto il sistema**.

Es. $\begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ x^2 > 8x + 7 \\ x^2 + 1 < 0 \end{cases}$ *Si vede subito che la terza condizione è impossibile. Non perdiamo tempo: il sistema è impossibile.*

- **Invece una condizione SEMPRE VERIFICATA** ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )
  non pone alcun vincolo all'incognita,
  e di conseguenza **è irrilevante nell'ambito del sistema: essa può essere, volendo, eliminata**
  (se comunque la si tiene, nello schema finale ad essa corrisponderà una linea continua
  di "condizione sempre verificata", e tale linea continua sarà, ovviamente, ininfluente).

Es. $\begin{cases} x^2 > 9 \\ 3(x+1) > 4(x-1) \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases}$ *Si vede subito che la terza condizione è sempre verificata. Essa è allora irrilevante: se vogliamo, possiamo eliminarla dal sistema, e le soluzioni di questo non cambieranno.*

- **Sovente lo "schema di intersezione" è superfluo**, perché (almeno in situazioni semplici)
  **può essere rimpiazzato da considerazioni elementari, che si possono fare a mente.**

♪ Ad esempio, è subito evidente che il sistema $\begin{cases} x > 2 \\ x < 5 \end{cases}$ ha come soluzioni: $2 < x < 5$

♫ **FRA DUE O PIÙ CONDIZIONI "EQUIVERSE", PREVALE LA PIÙ RESTRITTIVA**,
ossia quella che lascia all'incognita minore "libertà":

$\begin{cases} x > 1 \\ x > 4 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x > 7$ *Fra le tre condizioni con lo stesso verso, la più "restrittiva", quella che lascia meno libertà a x, è la x>7, che "obbliga" x a stare "a destra del 7". Ciascuna delle altre due lascia a disposizione di x un piccolo spazio in più.*

$$\begin{cases} x > 0 \quad * \\ x < 2 \quad ** \\ x > 1 \quad * \\ x < 3 \quad ** \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \quad * \\ x < 2 \quad ** \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

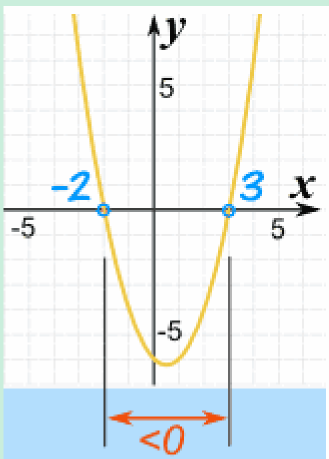
DISEQUAZIONI SU INTERNET

♪ Dal sito www.themathpage.com del professor Lawrence Spector:

**INEQUALITIES** ⇨
(The number line, "Or" versus "and", … , Solving inequalities)

♫ Dal sito www.mathsisfun.com
(da cui è tratta l'immagine qui a fianco):

**SOLVING QUADRATIC INEQUALITIES** ⇨



## ESERCIZI SUI SISTEMI DI DISEQUAZIONI

1) $\begin{cases} x^2 < 3x \\ 2x \ge x+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x+5} < 0 \\ x^2 \le x(x+1) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 < 2x-3 \\ x^2 < 3x-2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 > x+6 \\ 3(x-1) < 3x-2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x-1} \ge 1 \\ 7x \ge x^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 > x+2 \\ \dfrac{x-7}{x} \le 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} < \dfrac{x}{3} \\ 3(x+2) < 5x \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 \ge 4 \\ 2x < x+3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x \le 5 \\ x < 5 \\ x \le 4 \\ x < 4 \\ x \ge 1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{1}{2} \\ x \ge 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{4-x}{x} \ge 0 \\ \dfrac{6-x}{2-x} \le 0 \end{cases}$

$\boxed{\dfrac{4-x}{x} \ge 0}$ si può riscrivere, se si preferisce, come $-\dfrac{x-4}{x} \ge 0$ e quindi come $\boxed{\dfrac{x-4}{x} \le 0}$

$\boxed{\dfrac{6-x}{2-x} \le 0}$ si può riscrivere, volendo, come $\boxed{\dfrac{x-6}{x-2} \le 0}$ perché se si cambiano simultaneamente di segno sia il numeratore che il denominatore, una frazione non varia

12) $\begin{cases} 2x^2 < 2x+3 \\ 2x-1 > \dfrac{x}{3} \end{cases}$ 13) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-1} < 0 \\ x^2-9 > 0 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x+1 \ge 3x-1 \\ x \le 2(x+2) \\ x^2+3x < 10 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \dfrac{3x-4}{x-6} \le 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x} \le 0 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x^4 > 2x^3 \\ \dfrac{x^3-4}{x^4-4} < 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 16x^4+3 > 0 \\ 16x^4-3 \ge 0 \\ 3x^4+16 > 16x^2 \\ \dfrac{1}{x^2} \ge 0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{7-x} \le 0 \\ \dfrac{4x}{x+4} \le 0 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} 8x^6-7x^3-1 > 0 \\ x^4\left(16x^4+15\right) \ge 1 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 2x^2+3 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \\ 2x < 2x^2+4 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x^2+2 \ge 3x \\ 1 \ge \dfrac{x}{2} \\ 2x^2+1 > x \end{cases}$

## SOLUZIONI

1) $\boxed{2 \le x < 3}$ 2) $\boxed{0 \le x < 5}$ 3) $\boxed{\text{imposs.}}$ 4) $\boxed{x < -2 \vee x > 3}$ 5) $\boxed{0 \le x < 1 \vee 4 \le x \le 7}$ 6) $\boxed{2 < x \le 7}$

7) $\boxed{\begin{array}{l} 3 < x < 9: \\ S = (3, 9) \end{array}}$ 8) $\boxed{\begin{array}{l} x \le -2 \ \vee \ 2 \le x < 3: \\ S = (-\infty, -2] \cup [2, 3) \end{array}}$ 9) $\boxed{1 \le x < 4}$ 10) $\boxed{x \ge 1}$

11) $\boxed{2 < x \le 4}$ 12) $\boxed{\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}}$ 13) $\boxed{3 < x < 5}$ 14) $\boxed{-4 \le x < 2}$

15) $1^a$ *diseq.*$: -1 \le x < 6 \quad S_1 = [-1, 6)$

$2^a$ *diseq.*$: \ x \le -1 \ \vee \ 0 < x \le 1 \quad S_2 = (-\infty, -1] \cup (0, 1]$

*Sistema* : $\boxed{\begin{array}{l} x = -1 \vee 0 < x \le 1 \\ S = S_1 \cap S_2 = \{-1\} \cup (0,1] \end{array}}$

16) $1^a$ *diseq.*$: x < 0 \vee x > 2$

$2^a$ *diseq.*$: \ x < -\sqrt{2} \ \vee \ \sqrt{2} < x < \sqrt[3]{4}$

*Sistema* : $\boxed{\begin{array}{l} x < -\sqrt{2} \\ S = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \end{array}}$

17) $1^a$ *diseq.*$: \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 2^a$ *diseq.*$: \ x \le -\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2} \vee x \ge \dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$

$3^a$ *diseq.*$: \ x < -2 \vee -\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \vee x > 2$ $\quad 4^a$ *diseq.*$: \ x \ne 0$

*Sistema* : $\boxed{S = (-\infty, -2) \cup \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup (2, +\infty)}$

18) $1^a$ *diseq.*$: x \le 3 \vee x > 7$

$2^a$ *diseq.*$: \ -4 < x \le 0$

*Sistema* :

$\boxed{-4 < x \le 0: \ S = (-4, 0]}$

19) $1^a$ *diseq.*$: \ x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1$

$2^a$ *diseq.*$: \ x \le -\dfrac{1}{2} \vee x \ge \dfrac{1}{2}$

*Sistema* : $\boxed{\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1 \\ S = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \end{array}}$

20) $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \ne 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Sistema}: x \ne 2 \\ S = \mathbb{R} - \{2\} = \\ = (-\infty, +\infty) - \{2\} = \\ = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \end{array}}$

21) $\begin{cases} x \le 1 \vee x \ge 2 \\ x \le 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Sistema}: x \le 1 \vee x = 2 \\ S = (-\infty, 1] \cup \{2\} \end{array}}$