

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

SE una proprietà $P(x)$, il cui insieme ambiente sia $\mathbb{N}$:

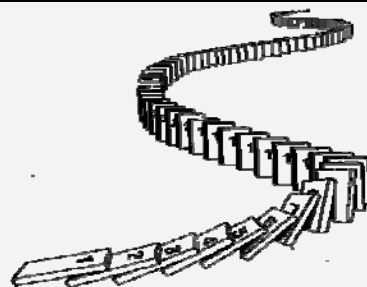
- **vale per il numero 0**
- **e, nel caso valga per un numero naturale x , vale certamente anche per il successivo $x + 1$**

ALLORA quella proprietà vale per ogni numero naturale.

Per dimostrare, applicando il P.I.M., che una data proprietà $P(x)$ è valida per ogni x appartenente ad $\mathbb{N}$, si procede nel modo seguente:

- a) si verifica che la proprietà $P(x)$ vale con $x = 0$;
- b) si suppone, come ipotesi di lavoro ("ipotesi induttiva") che la proprietà valga con $x = k$, e si dimostra che, sotto questa ipotesi, dovrà necessariamente valere anche con $x = k + 1$.

Un'ovvia variante consiste nel "partire da 1" anziché da zero.



Questa suggestiva figura viene dal sito

www.parabola.unsw.edu.au

- Dimostriamo che $\forall x \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2}$ tramite il "Principio di Induzione Matematica" (precisamente, la sua variante in $\mathbb{N}^*$, ossia la variante che parte da 1 anziché da 0)

- a) L'uguaglianza da dimostrare è verificata con $x = 1$?

Vediamo: con $x = 1$, l'uguaglianza da dimostrare diventa $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ che è vera! OK!

- b) Supponiamo ora che l'uguaglianza da dimostrare sia vera con $x = k$: supponiamo cioè che si abbia

$$(*) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{"IPOTESI INDUTTIVA"}$$

Ci chiediamo: essa sarà ancora vera anche per $x = k + 1$?

Partiamo dal 1° membro dell'uguaglianza da dimostrare, ponendo $x = k + 1$. Il nostro obiettivo è di controllare se il valore dell'espressione così ottenuta equivale a $\left[\frac{x(x+1)}{2} \right]_{\text{con } x=k+1}$. Avremo:

$$\begin{aligned} [1 + 2 + 3 + \dots + x]_{\text{con } x=k+1} &= 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) \stackrel{\text{per la } (*)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \left[\frac{x(x+1)}{2} \right]_{\text{con } x=k+1} \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Pertanto: l'uguaglianza da dimostrare è vera con $x = 1$, e, qualora sia vera con $x = k$, continua certamente a valere anche per $x = k + 1$: è perciò vera per $x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, \dots$ Insomma, con un "effetto domino" cui si ispira la figura in alto, è vera per ogni numero naturale non nullo x .

- Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ col "P.I.M." Qui usiamo n anziché x : fa niente, vero? ☺

Anche in questo caso, evidentemente, partiremo da 1 anziché da 0.

- a) L'uguaglianza da dimostrare è verificata con $n = 1$? Con $n = 1$, essa diventa $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6}$, OK!

- b) Supponiamo che l'uguaglianza da dimostrare sia vera con $n = k$: supponiamo cioè che si abbia

$$(*) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{"IPOTESI INDUTTIVA"}$$

Ci chiediamo: essa sarà ancora vera anche per $n = k + 1$?

$$\begin{aligned} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2]_{\text{con } n=k+1} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \stackrel{\text{per la } (*)}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3k + 6)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]_{\text{con } n=k+1} \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Il P.I.M. ci consente a questo punto di affermare che l'uguaglianza proposta è effettivamente vera per ogni numero naturale non nullo n .

□ Applicando il “Principio di Induzione Matematica”, dimostriamo che:

$\forall n \in \mathbb{N}$, se un insieme A ha n elementi, il suo insieme delle parti $P(A)$ ha 2^n elementi.

a) La proprietà da dimostrare è vera per $n = 0$?

Nel caso $n = 0$, l'insieme A è privo di elementi: $A = \emptyset$.

L'insieme $P(A)$ è dunque, in questo caso, $P(\emptyset)$,

vale a dire l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi dell'insieme vuoto.

Ma l'insieme vuoto ha *uno e un solo* sottoinsieme: sé stesso.

Perciò $P(A) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (l'insieme, il cui unico elemento è l'insieme vuoto).

L'insieme A conteneva $n = 0$ elementi; abbiamo visto che $P(A)$ contiene 1 elemento.

Ma $1 = 2^0$. Perciò la proprietà da dimostrare è vera quando $n = 0$.

b) Supponiamo che la proprietà da dimostrare sia vera per un certo numero naturale k : supponiamo cioè che, ogniqualvolta un insieme A contiene k elementi, il suo insieme delle parti $P(A)$ contenga 2^k elementi (in altre parole: supponiamo che un insieme di k elementi abbia sempre 2^k sottoinsiemi).

Questa è la nostra ipotesi induttiva: “se un insieme A contiene k elementi, allora ha 2^k sottoinsiemi”.

Vogliamo ora far vedere che, sotto tale ipotesi, la proprietà deve continuare a valere anche per $k+1$, ossia: che “un insieme contenente $k+1$ elementi deve avere necessariamente 2^{k+1} sottoinsiemi”.

In effetti: un insieme B che abbia $k+1$ elementi, può essere pensato come ottenibile a partire da un insieme A contenente k elementi, al quale venga aggiunto un nuovo elemento w .

Ora, per contare i sottoinsiemi di $B = A \cup \{w\}$, possiamo suddividerli in *due categorie*:

- quelli che non contengono w
- e quelli che contengono w

Ma i sottoinsiemi della prima categoria sono tutti e soli i sottoinsiemi di A !

Quindi il loro numero è, per l'ipotesi induttiva, 2^k .

Pensiamo ora ai sottoinsiemi della seconda categoria. Osserviamo che se prendiamo uno di questi sottoinsiemi, e gli togliamo w , otterremo un sottoinsieme di A !

Quindi i sottoinsiemi della seconda categoria sono tutti e soli quegli insiemi, ottenibili partendo da uno dei 2^k sottoinsiemi di A , e aggiungendogli l'elemento w .

Pertanto anche i sottoinsiemi della seconda categoria sono 2^k (tanti quanti i sottoinsiemi di A).

E in totale, i sottoinsiemi di B saranno dunque $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

La dimostrazione è così completata.

Il “Principio di Induzione Matematica” non è, evidentemente, uno strumento adatto a “ricavare” formule; semmai, serve per dimostrare “A POSTERIORI” la validità generale di una formula, o di una regola, che sia stata precedentemente ipotizzata o intuita sulla base di esempi, o con ragionamenti vari.

ESERCIZI (verrà sempre utilizzata la lettera n al posto di x per indicare il generico intero: per gli interi è consuetudine impiegare preferibilmente lettere centrali dell'alfabeto, come $n, m, i, k \dots$)

Utilizzando il Principio di Induzione Matematica, dimostra che:

1) $\forall n \geq 0, 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

2) $\forall n \geq 1, 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 3) $\forall n \geq 1, 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

4) $\forall n \geq 0, 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ ($a \in \mathbb{R}, a \neq 1$) 5) $\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

6) $\forall n \geq 1, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

7) $\forall n \geq 1, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \dots$ Completa la formula, dimostrarla col P.I.M.

8) $\forall n \geq 2, \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \dots$ Completa la formula, dimostrarla col P.I.M.

9) $\forall n \geq 1, \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \dots$ Completa la formula, dimostrarla col P.I.M.

10) Se ci sono n persone e ognuna stringe la mano a ciascuna delle altre, quante strette si avranno? Verifica la validità, per ogni n , dell'espressione trovata, servendoti del P.I.M.

11) Qualunque sia l'intero n , il numero $n^2 + n$ è sempre pari. Giustifica l'affermazione come ti garba, poi verificala ulteriormente servendoti del P.I.M.

12) Un poligono di n lati ha $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonali. Dimostra col P.I.M. questa affermazione.