LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - PRIMA PARTE

1. CHE COS'È E COME SI RISOLVE UN' EQUAZIONE DI 2° GRADO

Si dice "di 2° grado", o "quadratica" (inglese: *quadratic* equation)**, un'equazione della forma**

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)}$$

Casi particolari (equazioni "**incomplete**"):

$b = 0$	$ax^2 + c = 0$	equazione "**binomia pura**"
$c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	equazione "**binomia spuria**"
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	equazione "**monomia**"

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

- **BINOMIA PURA**

Per risolvere una binomia pura, si isola x^2;
l'equazione potrà, a seconda dei casi, avere due soluzioni opposte, oppure essere impossibile.

$$4x^2 - 9 = 0 \qquad 4x^2 = 9 \qquad x^2 = \frac{9}{4} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2} \quad \to \text{vedi NOTA}$$

$$4x^2 + 9 = 0 \qquad 4x^2 = -9 \qquad x^2 = -\frac{9}{4} \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

$$8x + 25 = (x+4)^2 \qquad \cancel{8x} + 25 = x^2 \cancel{+8x} + 16 \qquad -x^2 = -9; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm 3$$

NOTA Il DOPPIO SEGNO davanti alla radice è INDISPENSABILE.
Infatti il simbolo $\sqrt{9/4}$ indicherebbe il solo numero $3/2$,
quindi *senza il doppio segno perderemmo una delle due soluzioni.*

- **BINOMIA SPURIA**

Per risolvere una binomia spuria, si scompone in fattori raccogliendo *x*,
e si applica la "legge di annullamento del prodotto":

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO: $\mathbf{a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0}$

$\Leftarrow$ *Se almeno uno dei fattori è nullo, il prodotto vale 0;*

$\Rightarrow$ *e viceversa: se un prodotto è uguale a 0, allora certamente almeno uno dei fattori è 0.*

In breve: **UN PRODOTTO E' UGUALE A 0 SE E SOLO SE ALMENO UNO DEI FATTORI E' 0**.

$$5x^2 - 3x = 0 \qquad x(5x-3) = 0 \qquad x = 0 \vee 5x - 3 = 0 \qquad 5x = 3 \qquad x = \frac{3}{5}$$

$$5x^2 + 3x = 0 \qquad x(5x+3) = 0 \qquad x = 0 \vee 5x + 3 = 0 \qquad 5x = -3 \qquad x = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{(2x+1)(2x-1)}{4} = x - \frac{1}{4}; \quad \frac{4x^2-1}{\cancel{4}} = \frac{4x-1}{\cancel{4}}$$

$$4x^2 \cancel{-1} = 4x \cancel{-1} \qquad \cancel{4}x^2 - \cancel{4}x = 0 \qquad x^2 - x = 0 \quad x(x-1) = 0 \qquad x = 0 \vee x = 1$$

Una binomia spuria ha sempre due soluzioni, di cui una nulla.

- **MONOMIA**

Un'equazione monomia ha sempre una sola soluzione, uguale a zero;
si può anche dire che ha "due soluzioni coincidenti, entrambe nulle".

$$7x^2 = 0 \qquad x^2 = 0 \qquad x = 0 \ (x_1 = x_2 = 0)$$

Si parla di "**due soluzioni coincidenti** $x_1 = x_2 = 0$"
per il fatto che, essendo $x^2 = x \cdot x$,
è come se la soluzione *x* = 0 venisse "trovata due volte";
e anche perché … (vedi NOTA)

$$x^2 = 0 \qquad x \cdot x = 0 \qquad \underset{1^\circ\ fatt.}{x = 0} \vee \underset{2^\circ\ fatt.}{x = 0}$$

NOTA: $x^2 = 4 \to x = \pm 2; \quad x^2 = \frac{1}{4} \to x = \pm\frac{1}{2}; \quad x^2 = \frac{1}{100} \to x = \pm\frac{1}{10}; \quad x^2 = \frac{1}{1000000} \to x = \pm\frac{1}{1000}; \ \ldots$

In $x^2 = k$, quanto più la costante non negativa *k* diminuisce, tanto più le due soluzioni si avvicinano l'una all'altra sulla *number line* … Se *k* diventasse 0, si può pensare a due soluzioni che a forza di avvicinarsi hanno finito per sovrapporsi, per coincidere.

ESERCIZI SVOLTI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

1)
$9\left(x^2-2\right)=7$
$9x^2-18=7$
$9x^2=25$
$x^2=\dfrac{25}{9}$
$x=\pm\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\pm\dfrac{5}{3}$

Non c'è x, quindi questa equazione è **binomia pura**: va isolato x^2

2)
$\dfrac{(x+4)^2}{8}-x=0$
$(x+4)^2-8x=0$
$x^2\cancel{+8x}+16\cancel{-8x}=0$
$x^2+16=0$
$x^2=-16$
IMPOSSIBILE

3)
$(4-x)(x-3)+12=0$
$4x\cancel{-12}-x^2+3x\cancel{+12}=0$
$-x^2+7x=0$
$x^2-7x=0\quad(*)$

Scompare il termine noto: si ha una **binomia spuria**

(*) ♥ **Quando il coeff. di x^2 è negativo, conviene cambiare tutti i segni!**

$x(x-7)=0$
$x=0\ \vee\ x=7$

4)
$15x^2+4x=3x^2$
$\overset{3}{\cancel{12}}x^2+\cancel{4}x=0$
$3x^2+x=0$
$x(3x+1)=0$
$x=0\ \vee\ 3x+1=0$
$3x=-1$
$x=-\dfrac{1}{3}$

In questo caso abbiamo semplificato l'equazione, dato che tutti i coefficienti erano divisibili per uno stesso numero (il 4).

Domanda: sarebbe lecito semplificare pure per x?
… NO, perché così facendo "perderemmo" la soluzione $x = 0$.
Se ne riparlerà comunque a pag. 71.

5)
$\dfrac{4x-3}{3}=\dfrac{1-x}{x}$
$x(4x-3)=3(1-x)$
$(x\neq 0)$
$4x^2\cancel{-3x}=3\cancel{-3x}$
$x^2=\dfrac{3}{4}$
$x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La condizione $x\neq 0$ è dovuta al fatto che moltiplicando per $3x$ se n'è andato il denominatore. E' come se avessimo fatto il den. comune $3x$ in entrambi i membri e poi lo avessimo eliminato.

6)
$\dfrac{x+8}{x^2-4x}+\dfrac{x+4}{2x}=\dfrac{x}{x-4}\qquad \dfrac{x+8}{x(x-4)}+\dfrac{x+4}{2x}=\dfrac{x}{x-4}$

$\dfrac{2(x+8)+(x-4)(x+4)}{\cancel{2x(x-4)}}=\dfrac{2x^2}{\cancel{2x(x-4)}}\qquad \begin{array}{l}x\neq 0\\ x\neq 4\end{array}$

$2x\cancel{+16}+x^2\cancel{-16}=2x^2$
$2x+x^2-2x^2=0$
$-x^2+2x=0$
$x^2-2x=0$ (**Quando il coefficiente di x^2 è negativo, è conveniente cambiare tutti i segni**)
$x(x-2)=0$
$\cancel{x=0}$ NON ACCETTABILE; $\boxed{x=2}$

7)
$\dfrac{2}{5}x=\dfrac{3}{2}x^2$
$4x=15x^2$ (NOTA 1)
$15x^2-4x=0$ (NOTA 2)
$x(15x-4)=0$
$x=0\vee x=4/15$

NOTA 1
Abbiamo moltiplicato per 10 per sbarazzarci dei denominatori

NOTA 2
Qui, allo scopo di far sì che x^2 avesse subito coefficiente positivo, abbiamo portato tutto a 2° membro, e simultaneamente abbiamo scambiato i due membri fra loro

ESERCIZI

8) $x^2-4x=0$ **9)** $x^2-4=0$ **10)** $-4x^2=0$ **11)** $x^2+4=0$ **12)** $x^2+4x=0$
13) $x^2-3=0$ **14)** $x^2+3=0$ **15)** $x^2=3x$ **16)** $4x^2-3x=0$ **17)** $4x^2-3=0$
18) $x^2=\dfrac{1}{2}x$ **19)** $\dfrac{3}{4}x=\dfrac{6}{7}x^2$ **20)** $1-\dfrac{1}{9}x^2=0$ **21)** $-\dfrac{1}{9}x^2=0$ **22)** $\dfrac{1}{3}x^2=-3x$
23) $25-16x^2=0$ **24)** $25+16x^2=0$ **25)** $25x+16x^2=0$ **26)** $3x^2=2$ **27)** $7x=6x^2$
28) $15x^2-30=0$ **29)** $15x^2-30x=0$ **30)** $(x+1)^2=1$ **31)** $(x+1)^2=2x$ **32)** $(x+1)^2=x+1$

SOLUZIONI (l'insieme delle soluzioni è indicato con S)

8) $S=\{0,\,4\}$ **9)** $S=\{-2,\,2\}$ **10)** $S=\{0\}$ **11)** $S=\varnothing$ **12)** $S=\{0,\,-4\}$
13) $S=\left\{-\sqrt{3},\,+\sqrt{3}\right\}$ **14)** $S=\varnothing$ **15)** $S=\{0,\,3\}$ **16)** $S=\{0,\,3/4\}$ **17)** $S=\left\{-\sqrt{3}/2,\,\sqrt{3}/2\right\}$
18) $S=\{0,\,1/2\}$ **19)** $S=\{0,\,7/8\}$ **20)** $S=\{-3,\,3\}$ **21)** $S=\{0\}$ **22)** $S=\{0,\,-9\}$
23) $S=\left\{-\dfrac{5}{4},\,\dfrac{5}{4}\right\}$ **24)** $S=\varnothing$ **25)** $S=\left\{0,\,-\dfrac{25}{16}\right\}$ **26)** $S=\left\{-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ **27)** $S=\left\{0,\,\dfrac{7}{6}\right\}$
28) $S=\left\{-\sqrt{2},\,+\sqrt{2}\right\}$ **29)** $S=\{0,\,2\}$ **30)** $S=\{0,\,-2\}$ **31)** $S=\varnothing$ **32)** $S=\{0,\,-1\}$

L’EQUAZIONE DI 2° GRADO COMPLETA

Per risolvere un'equazione completa, si può:

a) scomporre in fattori ed applicare la **legge di annullamento del prodotto**:

$$x^2-13x-30=0$$
$$(x-15)(x+2)=0$$
$$x=15 \vee x=-2$$

b) oppure utilizzare il **“metodo del completamento del quadrato”**:

$$4x^2-12x+3=0$$
$$4x^2-12x+9-6=0$$
$$(2x-3)^2=6$$
$$2x-3=\pm\sqrt{6}\left\langle\begin{array}{l} 2x-3=\sqrt{6};\quad x=\dfrac{3+\sqrt{6}}{2} \\ 2x-3=-\sqrt{6};\quad x=\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$$

In realtà, questo metodo è rarissimamente utilizzato e lo presentiamo soltanto perché si utilizza per "costruire" la formula risolutiva di cui al successivo punto c)

c) oppure ancora, servirsi della seguente **formula risolutiva**:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$ **FORMULA RISOLUTIVA DELL’EQUAZIONE** $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

Esempio di applicazione della formula:

$$3x^2+x-2=0 \qquad (a=3,\ b=1,\ c=-2)$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{-1\pm5}{6}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-1-5}{6}=-\dfrac{6}{6}=-1 \\ \dfrac{-1+5}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

La formula considerata è valida anche per le equazioni incomplete;
per queste ultime, però, sono di gran lunga più veloci i metodi “specifici” visti in precedenza.

Come è stata ricavata la formula risolutiva?

Sostanzialmente, applicando all'equazione "generale" $ax^2+bx+c=0$ il metodo del *completamento del quadrato*.
Si tratta di trovare la maniera di far comparire, a primo membro, un quadrato di binomio della forma $(x+...)^2$.

Ecco i passaggi:

$$ax^2+bx+c=0; \qquad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0; \qquad x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=0;$$
$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0; \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a};$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}; \qquad x+\frac{b}{2a}\underset{\text{NOTA 1}}{=}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}};$$
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\underset{\text{NOTA 2}}{=}-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

NOTA 1
Questo passaggio vale a condizione che la quantità di cui si vuole estrarre la radice sia ≥ 0.
Poiché il denominatore $4a^2$ è positivo in quanto è un quadrato, in definitiva dovrà essere $b^2-4ac\geq0$ perché il passaggio sia effettuabile.
A dire il vero, dopo l’introduzione dei cosiddetti “numeri complessi”, questo vincolo di positività verrà a cadere …

NOTA 2
Nell’estrarre il fattore ci vorrebbero le stanghette di valore assoluto, ma sono rese superflue dalla presenza del doppio segno.

Il “DELTA” E IL NUMERO DI SOLUZIONI

La quantità $\boxed{b^2-4ac}$ **che sta sotto radice quadrata nella formula risolutiva, è chiamata “delta” o “discriminante” e indicata col simbolo** Δ (la lettera greca “*delta*” maiuscola).

Sono possibili tre casi:

- **se** $\Delta>0$, **l’equazione ha due soluzioni distinte**
- **se** $\Delta=0$, **l’equazione ha una sola soluzione (si può anche dire che ha “due soluzioni coincidenti”)**
- **se** $\Delta<0$, **l’equazione non ha nessuna soluzione (= è impossibile)**

ESERCIZI SVOLTI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE

1) $6\left(x^2+1\right)=x\left(x-13\right)$ *Svolgo i calcoli...*

$6x^2+6=x^2-13x$ *... e ora, dato che l'equazione è completa, porto tutto a primo membro*

$\underline{6x^2}+6\underline{-x^2}+13x=0$ *... dopodiché, riduco i termini simili scrivendoli nell'ordine corretto*

$5x^2+13x+6=0$ *Posso a questo punto applicare la formula:*

$$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot5\cdot6}}{2\cdot5}=\frac{-13\pm\sqrt{169-120}}{10}=\frac{-13\pm\sqrt{49}}{10}=\frac{-13\pm7}{10}=\begin{cases}\dfrac{-13-7}{10}=-\dfrac{\cancel{20}^{\,2}}{\cancel{10}}=-2\\[2ex]\dfrac{-13+7}{10}=-\dfrac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{10}_{\,5}}=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

2) $16x^2+25=40x$

$16x^2-40x+25=0$ *Nel calcolo del $\Delta=b^2-4ac$, è indifferente se si prende $-b$ anziché b! $b^2-4ac=(-b)^2-4ac$*

$$x_{1,2}=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot16\cdot25}}{32}=\frac{40\pm\sqrt{1600-1600}}{32}=\frac{40\pm0}{32}=\frac{\cancel{40}^{\,5}}{\cancel{32}_{\,4}}=\frac{5}{4}$$

Risoluzione più "brillante":

$16x^2-40x+25=0$

$\left(4x-5\right)^2=0$

$x=\frac{5}{4}\quad\left(x_1=x_2=\frac{5}{4}\right)$

3) $-\frac{1}{15}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}=\frac{2}{3}$

$\frac{-x^2+5x+3}{\cancel{15}}=\frac{10}{\cancel{15}}$

$-x^2+5x-7=0$

$x^2-5x+7=0$ (NOTA)

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-28}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{-3}}{2}\ \text{IMP.}\ \left(\Delta<0\right)$$

NOTA:

♥ **quando il coefficiente di x^2 è <0, è davvero conveniente cambiare tutti i segni!**

4) $12-x=x^2$

$x^2+x-12=0$ **(per avere immediatamente il 1° coefficiente positivo, ho portato tutto a 2° membro, e scambiato i membri fra loro)**

$\left(x-3\right)\left(x+4\right)=0$ (NOTA)

$x=3\vee x=-4$

Verifica che le soluzioni trovate sono corrette, sostituendole nell'uguaglianza iniziale!

NOTA:

♥ **quando la risoluzione per fattorizzazione è facile, è la via più rapida e comoda**

ESERCIZI (alcuni si prestano, volendo, all'applicazione dalla "formula ridotta" di cui alla pag. seguente)

5) $15x^2-22x+8=0$ **6)** $12x^2+7x-12=0$ **7)** $x^2-4x-5=0$ **8)** $x^2-4x+5=0$

9) $x^2-4x+4=0$ **10)** $x^2+19x+90=0$ **11)** $x^2+8x-2=0$ **12)** $3x\left(2-3x\right)=1$

13) $15x=2\left(x^2+11\right)$ **14)** $3\left(x^2+4\right)=7x$ **15)** $13x^2+40x+27=0$ **16)** $\left(23x-11\right)\left(19x-31\right)=0$

17) $5x^2+4x+1=0$ **18)** $4x^2+4x+1=0$ **19)** $3x^2+4x+1=0$ **20)** $2x^2+4x+1=0$

21) $2-\frac{2}{3}x=\frac{1}{6}x^2$ **22)** $x=\frac{\left(x+3\right)\left(x-3\right)}{8}$ **23)** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{32}=\frac{9}{4}x^2-\frac{x}{32}$ **24)** $\left(2x-3\right)^2=\left(x-2\right)^2$

SOLUZIONI (l'insieme delle soluzioni è indicato con S)

5) $S=\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right\}$ **6)** $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{3}{4}\right\}$ **7)** $S=\left\{-1,5\right\}$ **8)** $S=\varnothing$

9) $S=\left\{2\right\}$ **10)** $S=\left\{-10,-9\right\}$ **11)** $S=\left\{-4-3\sqrt{2},-4+3\sqrt{2}\right\}$ **12)** $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

13) $S=\left\{2,\frac{11}{2}\right\}$ **14)** $S=\varnothing$ **15)** $S=\left\{-\frac{27}{13},-1\right\}$ **16)** $S=\left\{\frac{11}{23},\frac{31}{19}\right\}$

17) $S=\varnothing$ **18)** $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **19)** $S=\left\{-1,-\frac{1}{3}\right\}$ **20)** $S=\left\{\frac{-2-\sqrt{2}}{2},\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right\}$

21) $S=\left\{-6,2\right\}$ **22)** $S=\left\{-1,9\right\}$ **23)** $S=\left\{\frac{1}{8},\frac{1}{9}\right\}$ **24)** $S=\left\{1,\frac{5}{3}\right\}$

LA FORMULA "RIDOTTA"

Nel caso in cui b sia pari, è conveniente applicare, al posto della formula generale, la seguente variante, detta **"formula ridotta"**:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$

LA FORMULA RIDOTTA (conveniente quando b è pari)

Ecco i passaggi coi quali la formula "ridotta" si può ricavare da quella generale.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } b \text{ pari}: \boxed{b = 2b'} \quad (b' = b/2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \boxed{\frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$

Ed ecco qualche esempio di applicazione della formula ridotta.

Esempio 1: $7x^2 + 24x - 16 = 0 \quad b = 24$, PARI!

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 7\cdot(-16)}}{7} =$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{7} = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{7} = \frac{-12 \pm 16}{7} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-28}{7} = -4 \\ \frac{4}{7} \end{array} \right.$$

♥ Imparare la formula ridotta non è "indispensabile", ma è davvero UTILISSIMO perché rende i calcoli molto, ma molto più semplici, rapidi e piacevoli.

Esempio 2:
$$(2x-3)^2 = 2x$$
$$4x^2 - 12x + 9 = 2x$$
$$4x^2 - 14x + 9 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{4}$$

Esempio 3:
$$x^2 = 4(x+2)$$
$$x^2 = 4x + 8$$
$$x^2 - 4x - 8 = 0$$
$$x_{1,2} \underset{\text{RIDOT-TISSIMA}}{=} 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm \sqrt{12} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

La formula ridotta, se applicata nel caso $a = 1$, non richiede neppure di scrivere la linea di frazione (infatti il denominatore sarebbe 1).
Alcuni parlano di formula "**ridottissima**" per indicare, appunto, la **ridotta nel caso particolare $a = 1$**.

Esempio 4:

$$\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{\frac{1-2x}{1+2x+x^2}}{(1-x)^2} = 0$$

$$\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1-2x}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = 0$$

$$\frac{1}{2(1+x)^2} - \frac{1-2x}{(1+x)^2(1-x)^2} = 0$$

$$\frac{(1-x)^2 - 2(1-2x)}{\cancel{2(1+x)^2(1-x)^2}} = 0 \quad (x \neq \pm 1)$$

$$\underline{1} \underline{\underline{-2x}} + x^2 \underline{-2} \underline{\underline{+4x}} = 0$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} \underset{\text{RIDOT-TISSIMA}}{=} -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2} \approx \left\langle \begin{array}{l} -1-1,4 = -2,4 \\ -1+1,4 = 0,4 \end{array} \right.$$

IL "DELTA QUARTI"

Nella formula ridotta, sotto radice non troviamo più la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$,

sostituita da $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

che ne è poi la *quarta parte*: infatti

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{b^2}{4} - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4} = \frac{\Delta}{4}$$

♥ **Il "delta della ridotta"** è perciò chiamato **"DELTA QUARTI"**

e indicato, appunto, col simbolo $\frac{\Delta}{4}$:

$$\boxed{\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$$

EQUAZIONI DI 2° GRADO CON COEFFICIENTI IRRAZIONALI

1) $(-2x)^2-(x+3)^2=6(\sqrt{2}-x)$

$4x^2-x^2\cancel{-6x}-9=6\sqrt{2}\cancel{-6x}$

$\cancel{3}x^2=\cancel{9}^3+\cancel{6}^2\sqrt{2}$

$x^2=3+2\sqrt{2}$

$x=\pm\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\pm\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\pm(\sqrt{2}+1)$

2) $x(x+4\sqrt{6})=126;\quad x^2+4x\sqrt{6}=126;$

$x^2+4x\sqrt{6}-126=0$

$x_{1,2}\underset{\substack{\text{con la}\\\text{formula}\\\text{RIDOTTA}}}{=}-2\sqrt{6}\pm\sqrt{(2\sqrt{6})^2+126}=$

$=-2\sqrt{6}\pm\sqrt{24+126}=-2\sqrt{6}\pm\sqrt{150}=$

$=-2\sqrt{6}\pm\sqrt{25\cdot 6}=-2\sqrt{6}\pm 5\sqrt{6}=\left\langle\begin{matrix}-7\sqrt{6}\\3\sqrt{6}\end{matrix}\right.$

3) $x^2+2\sqrt{5}(5-2x)=2(2x-9)$

Svolgiamo innanzitutto i calcoli, trasportiamo e ordiniamo per portare sotto la forma $ax^2+bx+c=0$ ... (NOTA)

$x^2+10\sqrt{5}-4x\sqrt{5}=4x-18$

$x^2-4x\sqrt{5}-4x+18+10\sqrt{5}=0$

$\boxed{x^2-4(\sqrt{5}+1)x+2(9+5\sqrt{5})=0}$

... e a questo punto applichiamo la formula (ridotta con $a=1$*, quindi "ridottissima"), con coefficienti*

$\boxed{a=1\quad b=-4(\sqrt{5}+1)\quad c=2(9+5\sqrt{5})}$:

$x_{1,2}=2(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{[2(\sqrt{5}+1)]^2-2(9+5\sqrt{5})}=$

$=2(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{4(\sqrt{5}+1)^2-18-10\sqrt{5}}=$

$=2(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{4(5+1+2\sqrt{5})-18-10\sqrt{5}}=$

$=2\sqrt{5}+2\pm\sqrt{24+8\sqrt{5}-18-10\sqrt{5}}=$

$=2\sqrt{5}+2\pm\sqrt{6-2\sqrt{5}}=$

$=2\sqrt{5}+2\pm\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=$

$=2\sqrt{5}+2\pm(\sqrt{5}-1)=\left\langle\begin{matrix}2\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+1=\sqrt{5}+3\\2\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-1=3\sqrt{5}+1\end{matrix}\right.$

♥ NOTA

Si porta tutto a primo membro:
prima i termini con x^2,
poi i termini con x,
infine gli altri (termini noti).
Se i termini contenenti x^2 sono più d'uno, fra essi si raccoglie x^2;
se i termini contenenti x sono più d'uno, fra essi si raccoglie x.

Avrai osservato che è nostra abitudine, quando ci serviamo della formula, applicarla sempre

♪ PRIMA col "–"
♫ e POI col "+".

Ciò è conveniente perché in tal modo, se, come di norma accade, il *denominatore* è *positivo*, la soluzione ricavata *per prima* sarà la *minore* fra le due; ossia, ci ritroveremo automaticamente le due soluzioni *ordinate per valori crescenti*.

E questo ci farà comodo, in particolare, quando dalle equazioni di 2° grado passeremo alle *disequazioni*.

4) $3(x-1)(\sqrt{3}+1)=2x^2$

$3(x\sqrt{3}+x-\sqrt{3}-1)=2x^2;\qquad 3x\sqrt{3}+3x-3\sqrt{3}-3=2x^2;$

$-2x^2+3x\sqrt{3}+3x-3\sqrt{3}-3=0;\qquad 2x^2-3x\sqrt{3}-3x+3\sqrt{3}+3=0$

$\boxed{2x^2-3x(\sqrt{3}+1)+3(\sqrt{3}+1)=0}$ $\boxed{\textit{Ci siamo!}\ \ a=2,\ \ b=-3(\sqrt{3}+1),\ \ c=3(\sqrt{3}+1)}$

$$x_{1,2}=\frac{3(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{9(\sqrt{3}+1)^2-24(\sqrt{3}+1)}}{4}=\frac{3\sqrt{3}+3\pm\sqrt{9(3+1+2\sqrt{3})-24\sqrt{3}-24}}{4}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+3\pm\sqrt{36+18\sqrt{3}-24\sqrt{3}-24}}{4}=\frac{3\sqrt{3}+3\pm\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{4}=\frac{3\sqrt{3}+3\pm\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}}{4}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+3\pm(3-\sqrt{3})}{4}=\left\langle\begin{matrix}\dfrac{3\sqrt{3}\cancel{+3}\cancel{-3}+\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{4}}=\sqrt{3}\\[2ex]\dfrac{3\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\cancel{2}\sqrt{3}+\cancel{6}^3}{\cancel{4}_2}=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}\end{matrix}\right.$$

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO

INCOMPLETE: 1) $5-3x=\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2$ 2) $(2x-1)(2x+1)=6$ 3) $x^2+9=0$ 4) $28-21x^2=0$

5) $\left(\frac{1}{3}x+1\right)^2=1$ 6) $\frac{x}{4}=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}x-2\right)$ 7) $(2x-3)^2-(2-3x)^2=0$ 8) $2+\frac{1}{6}x-\frac{x}{2}=\frac{2}{3}x\left(\frac{x}{4}-0{,}5\right)$

9) $\left(\frac{1}{3}x-2\right)^2=\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$ 10) $-4x^2=0$ 11) $\frac{1}{4}\left(x^2-2x\right)=\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)$ 12) $\frac{3}{5}(x-1)=\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{5}$

13) $2+\frac{1}{6}x^2=\frac{x^2}{2}$ 14) $(2x-1)(2x+1)+4=0$ 15) $\frac{1}{3}x(x-1)+\frac{1}{4}=\frac{3-x}{3}$ 16) $\frac{x^2+1}{4}=\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+x$

COMPLETE: 17) $5x^2+9x-2=0$ 18) $x^2=110+x$ 19) $9x=7x^2+1$ 20) $36x^2+1=12x$ 21) $2(x-1)=x^2$

22) $2x^2+x=1$ 23) $x^2+\frac{11}{6}x+\frac{1}{2}=0$ elimina prima i denominatori 24) $\frac{3}{2}x^2=\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}$ 25) $x=\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{5}$ 26) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2=\frac{x}{4}$

ESERCIZI VARI (clicca sulla freccia per la correzione):

27) $(x+7)(x-7)+3(x+13)=0$ ⇨ 28) $2(x+2)=x(5x+1)$ ⇨ 29) $9x(x-2)+x(x-1)+6=0$

30) $2x(x+3)=(3x+1)(3x-1)$ ⇨ 31) $7(3-x)=16-(5+x)(5-x)$

32) $(x+9)^2-\left[(x+1)^2+(x+8)^2\right]=0$ ⇨ 33) $(2x+1)^2+8=(4x-3)^2$ ⇨ 34) $3x(3x-8)=-16$ ⇨

35) $(x+3)^2=(x+2)^2+(x+4)^2$ ⇨ 36) $4(4+x)=(x+2)^2$ 37) $\frac{1}{4}x^2-\frac{11}{24}x+\frac{1}{6}=0$ ⇨

38) $\frac{5}{4}x^2-\frac{x(x-5)}{2}=0$ ⇨ 39) $\frac{(x+1)^2}{14}=\frac{x+5}{7}$ 40) $\frac{1}{6}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{12}x^2+\frac{x}{3}$ 41) $x=\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2$ ⇨

42) $\frac{1}{8}\left[\frac{(4x-1)(4x+1)}{2}+4x+1\right]=x$ ⇨ 43) $\frac{(x+2)^2-1}{2}=(2x-3)(2x+3)+5$ ⇨ 44) $\frac{x(2x+3)}{5}+\frac{x+1}{6}=0$

45) $2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x}{x+1}$ ⇨ 46) $\frac{3x+4}{x^2+1}=4$ ⇨ 47) $\frac{x}{x-3}+\frac{4}{x-1}=2$ 48) $\frac{x-1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{6}{x^2-3x}$ ⇨

49) $\frac{x+5}{x}-\frac{x+4}{x-5}=-\frac{29}{x^3-5x^2}$ ⇨ 50) $\frac{x^2-2}{2x}+\frac{1-x}{3x}+1=0$ 51) $\frac{x}{\frac{x-1}{x}}+x=1$ ⇨ 52) $\frac{3x^2}{2x+1}+1=2x$

53) $\frac{x}{x-4}-2=\frac{x+4}{x}$ 54) $\frac{x^2+9}{x}=6$ 55) $\frac{x+1}{x^2+2x-8}=-\frac{1}{x^2-6x+8}$

56) $x-2=-\frac{2}{x+1}$ 57) $\frac{(x+2)^2}{x}=4$ ⇨ 58) $\frac{9}{x}+\frac{x}{9}=2$ 59) $\frac{2x+1}{6x+9}=\frac{2x-3}{4x-2}$ ⇨

60) $\frac{x}{x^2-4}=2\frac{x}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}$ 61) $\frac{4\cdot\left(1+\frac{x}{x+1}\right)}{x-2}=\frac{x+2}{2x^2+x-1}$ ⇨

SOLUZIONI

1) $\pm\frac{4}{3}$ 2) $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 3) *imposs.* 4) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 5) $0;\,-6$ 6) $0;\,\frac{15}{2}$ 7) ±1 8) $\pm2\sqrt{3}$ 9) ±2 10) $0;\,0$

11) $0;\,-8$ 12) $0;\,\frac{9}{10}$ 13) $\pm\sqrt{6}$ 14) *imposs.* 15) $\pm\frac{3}{2}$ 16) $0;\,0$ 17) $-2;\,\frac{1}{5}$ 18) $-10;\,11$ 19) $\frac{9\pm\sqrt{53}}{14}$

20) $\frac{1}{6};\,\frac{1}{6}$ 21) *imposs.* 22) $-1;\,\frac{1}{2}$ 23) $-\frac{3}{2};\,-\frac{1}{3}$ 24) $-\frac{1}{3};\,\frac{3}{5}$ 25) $\frac{2}{5};\,\frac{2}{5}$ 26) *imposs.*

27) $-5;\,2$ 28) $-\frac{4}{5};\,1$ 29) $\frac{2}{5};\,\frac{3}{2}$ 30) $-\frac{1}{7};\,1$ 31) $-10;\,3$ 32) ±4 33) $0;\,\frac{7}{3}$ 34) $\frac{4}{3};\,\frac{4}{3}$ 35) *imposs.*

36) $\pm2\sqrt{3}$ 37) $\frac{1}{2};\,\frac{4}{3}$ 38) $0;\,-\frac{10}{3}$ 39) ±3 40) $-2;\,4$ 41) $\frac{1}{9};\,1$ 42) $\frac{1}{4};\,\frac{1}{4}$ 43) $-1;\,\frac{11}{7}$

44) $-5/3;\,-1/4$ 45) $-1/2;\,\cancel{1}$ *non acc.* 46) $0;\ 3/4$ 47) $2;\ 9$ 48) $5;\,\cancel{3}$ *non acc.*

49) $-29/4;\ 1$ 50) $-2;\ 2/3$ 51) *imposs.* 52) ±1 53) $2\pm2\sqrt{3}$ 54) $3;\ 3$

55) $0;\ \cancel{2}$ *non acc.* 56) $0;\ 1$ 57) *imposs.* 58) $9;\ 9$ 59) $\pm5/2$ 60) $2\pm\sqrt{6}$ 61) $0;\ 0$

62) $\dfrac{x+2}{x^2+5x-24}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}=0$ 63) $\dfrac{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{x^3+2x^2-x-2}-\dfrac{1}{x^2+3x+2}=0$ 64) $\dfrac{3x}{2x^2-5x+2}\cdot\left(x-1\right)-\dfrac{1}{4x-2}=0$

65) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x^2+x-2}-\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x+1}$ Stranamente, parecchi studenti sbagliano affrontando questa equazione … ⇨

66) $\dfrac{6}{x^3-3x^2-9x+27}-\dfrac{x+2}{x^3-5x^2+3x+9}=0$ Il 2° denominatore si scompone col metodo di Ruffini ⇨

67) $\dfrac{x-4}{x^3-5x^2+8x-4}+\dfrac{x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=0$ I due denominatori si scompongono col metodo di Ruffini

68) $3,71x^2+2,213x-5,88=0$ con la calcolatrice

69) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=1+\dfrac{30}{x^2-9}$

70) $\dfrac{1}{x-\frac{6}{x}+1}-\dfrac{x+1}{x^3-2x^2-9x+18}=0$ 71) $\dfrac{4}{x^3-1}=\dfrac{x-1}{x^3+2x^2+2x+1}$ ⇨ 72) $\dfrac{1}{x+\frac{2}{x}+3}+2\cdot\dfrac{\frac{2}{x+2}-1}{x-1}=0$

Con COEFFICIENTI IRRAZIONALI:

73) $x^2+4=3x\sqrt{2}$ ⇨ 74) $2x\left(\sqrt{2}-x\right)=1$ ⇨ 75) $\left(x\sqrt{3}-1\right)\left(2x\sqrt{3}-1\right)=0$ ⇨

76) $9x^2+2\sqrt{3}=4$ ⇨ 77) $9x^2+2\sqrt{3}=5$ 78) $9x^2+2\sqrt{3}=3$ ⇨ 79) $x^2-\sqrt{7}=0$ 80) $x^2+\sqrt{7}=0$

81) $\left(x+4\right)\cdot\dfrac{x-4}{x-1}-2\cdot\dfrac{x+2\sqrt{6}}{1-x}=2$ ⇨ 82) $\dfrac{x+1}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{4}{x-1}$ 83) $\dfrac{2-\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{4}=2-\sqrt{3}$

84) $2x^2-3x\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=0$ ⇨ 85) $4x^2-4x\left(\sqrt{2}+1\right)+2\sqrt{2}-5=0$ 86) $2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(x-1\right)=x^2$

87) $3x+\sqrt{3}\left(3x-5\right)=x^2+8$ ⇨ 88) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{x}\left(x+1\right)=\dfrac{1}{2x}-1$ 89) $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)x-\sqrt{3}}=2$

90) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x-3}{x}\sqrt{2}=1+\dfrac{3}{x}$ 91) $x^2=-\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(2x+1\right)}{2}$ 92) $3x^2\sqrt{2}+x\left(3x-1\right)=2x$ ⇨ 93) $2\left(x^2+\sqrt{2}\right)=\sqrt{7}$

94) $\dfrac{x^2-\left(\sqrt{48}-2\right)x+13}{\sqrt{48}}=1$ 95) $x\left(\sqrt{3}-1-x\right)+2=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ *Il* Δ *qui è difficile ... comunque, è il quadrato di un trinomio!*

SOLUZIONI

62) $-3;\ 4$ 63) $2;\ \cancel{-1}$ *non acc.* 64) $\dfrac{2}{3};\ \cancel{\dfrac{1}{2}}$ *non acc.* 65) $-\dfrac{1}{2};\ \cancel{1}$ *non acc.*

66) $0;\ 1$ 67) $0;\ \dfrac{5}{2}$ 68) *circa* $0,996$; *circa* $-1,592$ 69) $\pm\sqrt{3}$

70) $2\pm\sqrt{5}$ 71) $3\pm2\sqrt{3}$ 72) $-3;\ \cancel{0}$ *non acc.* 73) $\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}$ 74) $\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

75) $\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 76) $\pm\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ 77) $\pm\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{3}$ 78) *imposs.*

79) $\pm\sqrt[4]{7}$ 80) *imposs.* 81) $\pm\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ 82) $\pm\left(3-2\sqrt{2}\right)$

83) $\pm\left(2-\sqrt{3}\right)$ 84) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2};\ \sqrt{2}+2$ 85) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{3\sqrt{2}+1}{2}$ 86) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}+2$

87) $\sqrt{3}+2;\ 2\sqrt{3}+1$ 88) $\sqrt{2}-3;\ \sqrt{2}+1$ 89) $\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+3$ 90) $2-\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}$

91) $-\dfrac{\sqrt{5}+3}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 92) $0;\ \sqrt{2}-1$ 93) *imposs.* 94) $2\sqrt{3}-1,\ 2\sqrt{3}-1$ 95) $\sqrt{2};\ \sqrt{3}-\sqrt{2}-1$

2. EQUAZIONI DI 2° GRADO LETTERALI

1) $\boxed{3x^2-25kx+8k^2=0}$

Si tratta di un'equazione di 2° grado "letterale", o "parametrica".
x è l'incognita, mentre k è un numero noto, che va a far parte dei coefficienti.
I $\boxed{\text{coefficienti}}$ di questa equazione sono dunque: $\boxed{a=3}$ $\boxed{b=-25k}$ $\boxed{c=8k^2}$

$$\boxed{x_{1,2}=}\frac{25k\pm\sqrt{625k^2-96k^2}}{6}=\frac{25k\pm\sqrt{529k^2}}{6}=\underset{\text{(NOTA)}}{\frac{25k\pm 23k}{6}}=\begin{cases}\dfrac{25k-23k}{6}=\dfrac{2k}{6}=\boxed{\dfrac{1}{3}k}\\[2ex]\dfrac{25k+23k}{6}=\dfrac{48k}{6}=\boxed{8k}\end{cases}$$

Anche per FATTORIZZAZIONE:

$3x^2-25kx+8k^2=0$
$3x^2-kx-24kx+8k^2=0$
$x(3x-k)-8k(3x-k)=0$
$(3x-k)(x-8k)=0$
$3x-k=0 \quad \vee \quad x-8k=0$
$x=\dfrac{k}{3}=\boxed{\dfrac{1}{3}k} \qquad x=\boxed{8k}$

NOTA
Per la precisione, sarebbe
$\sqrt{529k^2}=23|k|$;
ma il valore assoluto è reso inutile
dalla presenza del doppio segno $\pm$.
Si deve comunque osservare che in questo modo,
ogniqualvolta il parametro assumesse un valore NEGATIVO,
la soluzione che abbiamo scritto per prima
NON risulterebbe più la *minore* tra le due.

2) $(x-a)^2+a(a+2b)=(a+b)^2$ *Qui evidentemente i parametri "a" e "b" dell'esercizio non vanno confusi con le lettere "a" e "b" della teoria!*

$x^2-2ax\cancel{+a^2}+a^2\cancel{+2ab}=\cancel{a^2}\cancel{+2ab}+b^2$
$x^2-2ax+a^2-b^2=0$
$\boxed{x^2-2ax+(a^2-b^2)=0}$ $\boxed{1°\ coeff.=1;\ \ 2°\ coeff.=-2a;\ \ 3°\ coeff.=a^2-b^2}$

$$x_{1,2}\underset{\substack{\text{con la}\\ \text{RIDOTTA}}}{=}a\pm\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}=a\pm\sqrt{\cancel{a^2}\cancel{-a^2}+b^2}=a\pm b=\begin{cases}\boxed{a-b}\\ \boxed{a+b}\end{cases}$$

NOTA
♥ In un'equazione di 2° grado letterale, in generale occorre
1) svolgere i calcoli
2) portare tutto a 1° membro
3) ordinare (termini con x^2; termini con x; costanti)
4) raccogliere x^2
fra tutti i termini che contengono x^2
(in questo caso, però, ce n'è uno solo)
5) raccogliere x
fra tutti i termini che contengono x
6) … e a questo punto applicare la formula.

3) $x^2+3(x+2m^2)+2=m(5x+7)$
(NOTA)
$x^2+3x+6m^2+2=5mx+7m$
$x^2+3x-5mx+6m^2-7m+2=0$
$\boxed{x^2+(3-5m)x+(6m^2-7m+2)=0}$

$$x_{1,2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{(3-5m)^2-4(6m^2-7m+2)}}{2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{9-30m+25m^2-24m^2+28m-8}}{2}=$$

$$=\frac{-3+5m\pm\sqrt{m^2-2m+1}}{2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{(m-1)^2}}{2}=\frac{-3+5m\pm(m-1)}{2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-3+5m-m+1}{2}=\dfrac{4m-2}{2}=\dfrac{\cancel{2}(2m-1)}{\cancel{2}}=\boxed{2m-1}\\[2ex]\dfrac{-3+5m+m-1}{2}=\dfrac{6m-4}{2}=\dfrac{\cancel{2}(3m-2)}{\cancel{2}}=\boxed{3m-2}\end{cases}$$

EQUAZIONI … CON LA "CODA"

4)

$$(x+1)\big[a(x-2)+3\big]+2a=2x(x+2)$$

$$(x+1)\big[ax-2a+3\big]+2a=2x^2+4x \qquad ax^2\underline{-2ax}\,\underline{\underline{+3x}}\,\underline{+ax}\,\cancel{-2a}+3\cancel{+2a}=2x^2\underline{\underline{+4x}} \qquad ax^2-2x^2-ax-x+3=0$$

$$\boxed{(a-2)x^2-(a+1)x+3=0}$$

$$x_{1,2}\underset{\boxed{a\neq 2}}{=}\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-12(a-2)}}{2(a-2)} \qquad \text{NOTA}: \begin{array}{l}\textit{nel calcolo del } \Delta=b^2-4ac, \textit{ per via dell'esponente } 2\\ \textit{è indifferente usare } -b \textit{ anziché } b!\ \ b^2-4ac=(-b)^2-4ac\end{array}$$

L'applicazione della formula comporta in questo caso la divisione per la quantità $2(a-2)$.
Ma una divisione è effettuabile soltanto a patto che il numero per cui si intende dividere sia diverso da 0.
Pertanto, la catena $x_{1,2}=\ldots$ *vale a condizione che sia* $2(a-2)\neq 0$, *ossia* $a\neq 2$.
Il caso particolare $a=2$ *andrà valutato a parte; ce ne occuperemo in coda all'esercizio.*

$$x_{1,2}\underset{a\neq 2}{=}\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-12(a-2)}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm\sqrt{a^2+2a+1-12a+24}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm\sqrt{a^2-10a+25}}{2(a-2)}=$$

$$=\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a-5)^2}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm(a-5)}{2(a-2)}=\ldots\quad x_1=\boxed{\frac{3}{a-2}},\ x_2=\boxed{1}$$

CODA: COSA ACCADE NEL CASO $\boxed{a=2}$ PROVVISORIAMENTE LASCIATO DA PARTE ?

Con $a=2$ *non è possibile applicare la formula (si otterrebbe infatti una divisione per* 0, *che non ha senso!).*
Abbandoniamo dunque, per quanto riguarda il caso $a=2$, *l'uso della formula e chiediamoci direttamente cosa diventa l'equazione, quando al parametro* a *si attribuisce il valore* 2. *Essa diventa*

$$\cancel{(2-2)x^2}-(2+1)x+3=0;\qquad -3x+3=0;\qquad -3x=-3;\qquad x=1$$

Abbiamo quindi scoperto che nel caso particolare $a=2$ *l'equazione si abbassa di grado (non è più di secondo grado, ma di primo) e ammette una sola soluzione:* $x=1$.
Ricapitolando, l'equazione data possiede in generale due soluzioni, e precisamente $x_1=\dfrac{3}{a-2};\ x_2=1$
e soltanto nel caso particolare $a=2$ *si abbassa di grado,*
"perdendo" una soluzione e "conservando" come $\boxed{\textit{unica soluzione } x=1}$.

5)

$$\frac{x}{\underset{k(x+1)}{kx+k}}+\frac{k}{\underset{(x+1)(x+2)}{x^2+3x+2}}=2\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{x(x+2)+k^2}{k\cancel{(x+1)(x+2)}}=\frac{2k(x+1)}{k\cancel{(x+1)(x+2)}}$$

$\boxed{k\neq 0}$ COND. PRELIMINARE: questa equazione NON ha significato con $k=0$!

$\boxed{x\neq -1,\ x\neq -2}$ CONDIZIONI DI ACCETTABILITA'

$$x^2+2x+k^2=2kx+2k;\qquad x^2+2x-2kx+k^2-2k=0$$

$$x^2-2(k-1)x+k^2-2k=0$$

$$x_{1,2}=k-1\pm\sqrt{(k-1)^2-(k^2-2k)}=k-1\pm\sqrt{\cancel{k^2}\cancel{-2k}+1\cancel{-k^2}\cancel{+2k}}=k-1\pm 1=\left\langle\begin{array}{ll}\boxed{k-2} & (x_1)\\ \boxed{k} & (x_2)\end{array}\right.$$

CODA (ESISTONO VALORI DEL PARAMETRO PER CUI UNA SOLUZIONE RISULTA NON ACCETTABILE, IN QUANTO UGUALE A -1 OPPURE A -2 ?)

x_1 : $k-2=-1$ *con* $\boxed{k=1}$; $\quad k-2=-2$ *con* $k=0$ (*però con* $k=0$ *l'eq. perde significato!*);

x_2 : $k=-1$, *banalmente, con* $\boxed{k=-1}$; $\quad k=-2$, *banalmente, con* $\boxed{k=-2}$

In definitiva, i valori $k=0,\ k=1,\ k=-1,\ k=-2$ *sono notevoli in quanto:*

con $k=0$ *l'equazione è priva di significato*
con $k=1$ *non è accettabile la soluzione* $k-2$, *mentre l'altra* (k) *è accettabile e vale* 1
con $k=-1$ *non è accettabile la soluzione* k, *mentre l'altra* $(k-2)$ *è accettabile e vale* -3
con $k=-2$ *non è accettabile la soluzione* k, *mentre l'altra* $(k-2)$ *è accettabile e vale* -4

ESERCIZIO A
Riprendi dal principio l'es. 4 e sostituisci $a=2$ *nell'eq. iniziale, poi risolvi.*

ESERCIZIO B
Fai lo stesso nell'esempio 5, con $k=-2$.

ESERCIZIO C
Verifica che per l'equazione

$$\frac{mx(mx-2)}{2x-1}=2x+1$$

si hanno 4 casi nei quali la soluzione è unica:
$m=2\ (x=1/4)$,
$m=-2\ (x=-1/4)$,
$m=0\ (x=-1/2)$,
$m=4\ (x=1/6)$.

ESERCIZI (EQUAZIONI LETTERALI DI 2° GRADO) Correzione degli esercizi “dispari” ⇨

1) $x(x+b)=6b^2$

2) $x^2+(a-b)^2=2x(a-b)+1$

3) $(x+a)^2-4(x+a)+3=0$

4) $\frac{x^2+c^2}{2}=cx+2c-2x$

5) $2ax\left(2\sqrt{3}-3\right)=(x-3a)^2$

6) $\frac{3x^2+m^2}{m}=\frac{7}{2}x$

7) $(x+b)^2-a(a+4b)=4a(x-a)$

8) $kx^2-\left(k^3+1\right)x+k^2=0$

9) $(a+1)x^2-2(a+2)x+(a+3)=0$

10) $(a^2-1)(x^2+1)-2x=2a^2x$

11) $(m-1)x^2-m^2=m^2(x-2)$

12) $(-x+a)^2+9=6(a-x)$

13) $a(ax-2)\cdot\frac{x}{x+1}+1=x$

14) $\frac{kx(x-3)+3x+2k}{x^2-1}=2$

15) $(k-5)x+\frac{k-3}{x}=2(k-4)$

16) $\frac{x^2+m\left(x^2+1\right)-1}{x}=m^2$

17) $\frac{x}{2x-3}+3\cdot\frac{h^2}{(x-2)(2x-3)}=2\cdot\frac{h}{x-2}$

18) $\frac{k\left(x^2+1\right)}{2x-2}-k\frac{x}{x-1}+x=0$

19) $\frac{x}{x-q}+\frac{q^2-3}{x^2-3qx+2q^2}=\frac{2}{2q-x}$

20) $\frac{x^2+5}{(x-a)(2x-a)}+\frac{6}{2x-a}+\frac{a}{a-x}=0$

21) $1+\frac{3a+1}{a(x-3)}+\frac{2x^2(a-1)}{(x-3)^2}+\frac{4}{a(x-3)^2}=0$

22) $mx^2=\frac{(2m+1)x-1}{m+1}$

23) $m+2\frac{m^2-x}{x-m}-\frac{m}{x}\cdot\frac{3x+m}{x-m}=0$

24) $b\frac{x}{x-1}+\frac{3x+b}{(x-1)(x-b)}+2\frac{x+1}{x-b}=0$

25) $p(p+1)\left(x^2-1\right)+(2p+1)x=0$ [*il Δ è un quadrato di trinomio*]

SOLUZIONI

1) $x=-3b,\ x=2b$

2) $x=a-b-1,\ x=a-b+1$

3) $x=1-a,\ x=3-a$

4) $x=c-4,\ \ x=c$

5) $x=a\sqrt{3},\ x=3a\sqrt{3}$

6) $x=\frac{1}{2}m,\ x=\frac{2}{3}m\ (m\neq 0)$

7) $x=a-b,\ \ x=3a-b$

8) $Con\ k\neq 0:\ x=\frac{1}{k},\ x=k^2;\ \ con\ k=0: x=0$

9) $Con\ a\neq -1:\ x=1,\ x=\frac{a+3}{a+1}.\ \ Con\ a=-1: x=1$

10) $Con\ a\neq\pm1:\ x=\frac{a-1}{a+1},\ x=\frac{a+1}{a-1};$ $con\ a=1\vee a=-1:\ x=0$

11) $Con\ m\neq 1:\ x=\frac{m}{m-1},\ x=m;$ $con\ m=1:\ x=1$

12) $x=a-3,\ x=a-3$ [*soluzioni coincidenti*]

13) $Con\ a\neq\pm1,\ a\neq -2,\ a\neq 0:\ x=\frac{1}{a+1},\ x=\frac{1}{a-1}$ $\ Con\ a=1: x=1/2;\ \ con\ a=-1: x=-1/2;$ $con\ a=-2:\ x=-1/3;\ \ con\ a=0: x=1$

14) $Con\ k\neq 2, k\neq\frac{1}{2}:\ x=\frac{k+1}{k-2},\ x=2;\ \ con\ k=2:\ x=2;\ \ con\ k=\frac{1}{2}:\ x=2$

15) $Con\ k\neq 5,\ k\neq 3:\ x=1,\ x=\frac{k-3}{k-5};\ \ con\ k=5:\ x=1;\ \ con\ k=3:\ x=1$

16) $m\neq\pm1\rightarrow x=\frac{1}{m+1},\ x=m-1$ $\ m=-1\rightarrow x=-2;\ m=1\rightarrow x=\frac{1}{2}$

17) $h\neq 0, h\neq\pm\frac{1}{2}, h\neq\frac{2}{3}\rightarrow x=h+2,\ x=3h.\ \ h=0\rightarrow x=0;\ \ h=-\frac{1}{2}\rightarrow x=-\frac{3}{2};\ \ h=\frac{2}{3}\rightarrow x=\frac{8}{3};\ \ h=\frac{1}{2}\rightarrow x=\frac{5}{2}$

18) $k\neq -2\rightarrow x=\frac{k}{k+2}$ $\ k=-2\rightarrow equaz.\ impossibile$

19) $Con\ q\neq -3,\ q\neq 1:\ x=q-3, x=q+1$ *Sia con* $q=-3$ *che con* $q=1$ *si ha la sola soluzione* $x=-2$

20) $a\neq 10, a\neq 2: x=a-5, x=a-1$ $\ a=10\rightarrow x=9;\ a=2\rightarrow x=-3$

21) $a\neq 0,\ a\neq\frac{1}{2},\ a\neq\frac{2}{3},\ a\neq\frac{1}{3}\rightarrow x=\frac{1}{2a-1},\ x=\frac{1}{a};$ $\ a=0\rightarrow$ *equaz. priva di significato*; $a=\frac{1}{2}\rightarrow x=2;\ a=\frac{2}{3}\rightarrow x=\frac{3}{2};\ a=\frac{1}{3}\rightarrow x=-3$

22) $Con\ m\neq 0,\ m\neq -1:\ x=\frac{1}{m+1},\ x=\frac{1}{m};\ \ con\ m=0:\ x=1;\ \ con\ m=-1: priva\ di\ significato$

23) $Con\ m\neq 0,\ m\neq 2,\ m\neq 3: x=-m,\ x=\frac{m}{m-2}.\ \ Con\ m=0: impos.;\ \ con\ m=2: x=-2;\ \ con\ m=3: x=-3$

24) $b\neq -2,\ b\neq -1,\ b\neq -1-\sqrt{2},\ b\neq -1+\sqrt{2},\ b\neq 3:\ x=\frac{1}{b+2},\ x=b-2;$
$b=-2\rightarrow x=-4;\ \ b=-1\rightarrow x=-3;\ \ b=3\rightarrow x=1/5;$
$b=-1-\sqrt{2}\rightarrow x=-3-\sqrt{2};\ \ b=-1+\sqrt{2}\rightarrow x=-3+\sqrt{2}$

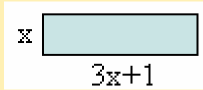
25) $Con\ p\neq 0,\ p\neq -1:\ x=-\frac{p+1}{p},\ x=\frac{p}{p+1};\ \ con\ p=0: x=0;\ \ con\ p=-1: x=0$

APPROFONDIMENTO: DAL SITO INTERNET http://mathforum.org/dr.math/

Date: 03/07/97 at 20:49:53 From: Caitlin
Subject: SOLVING QUADRATIC EQUATIONS

A certain rectangle has an area of 80 square units. Its length is one more than three times its width. What are the dimensions of the rectangle? Draw a diagram, solve the problem, and write an equation.

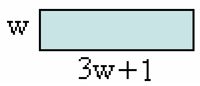
I drew and labeled the diagram with the length as 3x+1 and the width as x.
My equation is (3x+1)(x) = 80.
I am stuck on how to solve the equation. I got as far as 3x^2 + x = 80.



NOW WHAT DO I DO?

Date: 03/10/97 at 04:26:27 From: Doctor Mike
Re: Solving Quadratic Equations

Dear Caitlin,
You made a very good start on the problem.
My only suggestion so far is that
"x" does not always
have to be the unknown.
If you had used "w" for width,
and 3*w+1 for the length,



then it's easy to keep track of what the unknown means when you get to the end of the problem.
This is not an error, just something to think about when you do more and more complicated problems.

If you subtract 80 from both sides you get
3x^2 + x – 80 = 0,
which is a quadratic equation in standard form.

This kind of problem comes up a lot
and there are two main ways to solve it.

LA PRONUNCIA DI SEGNI E OPERAZIONI IN LINGUA INGLESE

+5	"positive five" o anche "plus five"
–5	"negative five" o anche "minus five"
–x	"the opposite of x" o anche "minus x"
10+2	"ten plus two" (pronuncia "plas")
10–2	"ten minus two" (pronuncia "mainəs")
10*2	"ten times two" , "ten multiplied by two"
10:2	"ten divided by two"
10^2	"ten raised to the 2nd power", "ten squared"
A*B=0	"A times B equals (is equal to) 0",
$\sqrt{10}$	"the square root of ten"
$\frac{x}{y}$	"x (pron. ecs) divided by y (pron. uai)" oppure "x over y"

1. If you can factor the equation into the product of 2 things,
then you can make good use of a well-known fact about numbers: if A*B = 0, then either A = 0 or B = 0.

Your equation is sort of tough to factor. The factored version is (3x+16)*(x–5) = 0.
Go ahead and multiply it out to see that it is the same.
Now we know that the width x must satisfy EITHER 3x+16 = 0 OR x–5 = 0
(the main reason anybody factors quadratic expressions is precisely because of that "A*B = 0" rule above).

2. It's time you should memorize **the quadratic formula**.
It says that if an equation is in the form A*x^2+B*x+C = 0, then the 2 **solutions** for that equation
(also called zeros **because the right side is zero) are given by the formulas:**

$$x = \frac{-B - \mathrm{sqrt}(B \wedge 2 - 4 * A * C)}{2 * A} \qquad x = \frac{-B + \mathrm{sqrt}(B \wedge 2 - 4 * A * C)}{2 * A}$$

You should go ahead and try this method also.
It is very valuable because
factoring can often be difficult.
You will see again that
one x-value solution is positive and one is negative.
Only the positive one makes sense.
By the way, **"sqrt" means the square root function**.

Of course, you should make sure you get
the same answer by method 1 and by method 2,
and **after you get your answer,**
go back and check to make sure that it works.
In your problem that means
to multiply the width x by the length 3*x+1
and verify that you really get 80 square units.

I hope this helps.

Doctor Mike, The Math Forum

I SIMBOLI DI OPERAZIONE AL COMPUTER

Scrivendo alla tastiera del computer, e in particolare utilizzando del software matematico, si può indicare

- la **moltiplicazione** con l'**asterisco** *,
- la **divisione** con lo "slash" /,
- la **potenza** con l'**accento circonflesso** ^,
- e la **radice quadrata** con **sqrt** (*square root*)

In alternativa a sqrt, si può utilizzare l'elevamento all'esponente ½: **sqrt(x) = x^(1/2)**
Occhio in quest'ultimo caso alle parentesi, che sono tutte indispensabili.
Se infatti noi scrivessimo x^1/2, senza parentesi, il software eleverebbe all'esponente 1 il valore di x (= lo lascerebbe invariato), poi dividerebbe per 2.
L'effetto sarebbe dunque una divisione per 2 e non una radice quadrata!

3. PROBLEMI DI 2° GRADO

- *Trovare due numeri tali che la loro somma sia 20, e la somma dei loro quadrati sia 328.*

I numeri richiesti si possono indicare con x e $20-x$ rispettivamente.
L'equazione risolvente è

$$x^2+(20-x)^2=328$$
$$x^2+400-40x+x^2=328$$
$$2x^2-40x+72=0$$
$$x^2-20x+36=0$$
$$x_{1,2}=10\pm\sqrt{100-36}=10\pm\sqrt{64}=10\pm 8=\begin{cases}2\\18\end{cases}$$

Se $x=2$, allora $20-x=18$; e se $x=18$, allora $20-x=2$.

I numeri cercati sono perciò $\boxed{2 \text{ e } 18}$ (non ha importanza, è evidente, l'ordine nel quale li si considera).

- *Sia Anna che Bruno partono dalla stessa località per raggiungerne un'altra distante 600 km, e guidano a velocità costante; tuttavia Anna, che è più prudente, parte un'ora in anticipo rispetto a Bruno, e viaggia ad una velocità di 20 km/h inferiore. Di quanti km/h sono le loro due velocità, se giungono a destinazione simultaneamente?*

Nel moto a velocità costante, detti s lo spazio percorso, t il tempo impiegato, v la velocità, valgono le formule

$$\boxed{v=\frac{s}{t}\quad s=v\cdot t\quad t=\frac{s}{v}}.$$

Allora, se indichiamo con v la velocità di Anna (in pratica, v è la nostra "x"), e con $v+20$ la velocità di Bruno, avremo

$\dfrac{600}{v}=\dfrac{600}{v+20}+1$ (Anna ci mette 1 ora in più ...)

$$\frac{600(v+20)}{\cancel{v(v+20)}}=\frac{600v+v(v+20)}{\cancel{v(v+20)}}$$

NOTA:
le condizioni di non annullamento del denominatore sono superflue, perché in ogni caso se alla fine trovassimo $v=0$ oppure $v<0$ un tale valore sarebbe ovviamente da scartare

$$\cancel{600v}+12000=\cancel{600v}+v^2+20v$$
$$v^2+20v-12000=0$$
$$v_{1,2}=-10\pm\sqrt{100+12000}=-10\pm\sqrt{12100}=-10\pm 110=\begin{cases}\cancel{-120}\\ \boxed{100}\end{cases}$$

non ha senso, in questo contesto, una velocità negativa!

$\boxed{\text{Anna}}$ viaggia perciò a $\boxed{100 \text{ km/h}}$,

$\boxed{\text{Bruno}}$ a 100+20 = $\boxed{120 \text{ km/h}}$.

Facciamo una verifica:

Anna, viaggiando a 100 km/h, quanto ci mette a fare 600 km?

$\dfrac{600}{100}$ = 6 ore.

E Bruno, viaggiando a 120 km/h, quanto ci mette a fare 600 km?

$\dfrac{600}{120}$ = 5 ore, cioè proprio 1 ora in meno, OK.

- *La differenza fra due numeri è 3, e il loro prodotto è 550. Quali sono i due numeri?*

  Detti x e $x+3$ i numeri richiesti, sarà

  $x(x+3)=550;\;\; x^2+3x=550;\;\; x^2+3x-550=0;\;\; x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+2200}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{2209}}{2}=\dfrac{-3\pm 47}{2}=\left\langle\begin{array}{l}-25\\22\end{array}\right.$

  Se $x=-25$, allora $x+3=-25+3=-22$; e se $x=22$, allora $x+3=25$.

  I numeri cercati possono perciò essere $\boxed{-25\ e\ -22}$, oppure $\boxed{22\ e\ 25}$.

- *Quale numero è inferiore di 12 unità al suo quadrato?*

  Indicato con x il numero cercato, avremo

  $$x=x^2-12$$

  $x^2-x-12=0$ (OSSERVAZIONE)

  $(x-4)(x+3)=0;\quad \boxed{x=4 \vee x=-3}$

  Anche questo problema, dunque,
  ha DUE soluzioni.

  Tanto il numero 4 che il numero -3
  hanno la proprietà di essere
  inferiori di 12 unità al proprio quadrato:

  $4^2=16\ \ e\ \ 16-12=4;$

  ma anche $(-3)^2=9$ e $9-12=-3$.

OSSERVAZIONE
Capita frequentemente di notare che,
qualora si portasse tutto a PRIMO MEMBRO,
si otterrebbe un COEFFICIENTE DI x^2 NEGATIVO.
In questi casi , piuttosto che portare
a primo membro e poi cambiare tutti i segni,
conviene immaginare di
PORTARE TUTTO A SECONDO MEMBRO
e simultaneamente
SCRIVERE DA DESTRA A SINISTRA,
SCAMBIANDO I DUE MEMBRI FRA LORO.
In questo modo, si fa un passaggio in meno!

ESERCIZI (PROBLEMI DI SECONDO GRADO) **-** *Clicca sulla freccia per la correzione*

1) Due numeri positivi, reciproci fra loro, differiscono di 7/12. Quali sono?

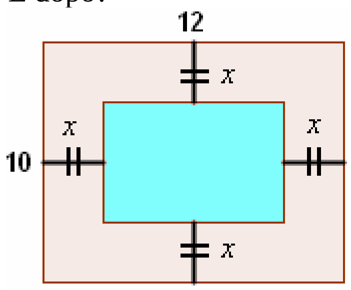
2) Trova due numeri naturali pari consecutivi, tali che la somma dei loro quadrati sia 1060.

3) I termini di una frazione minore di 1 sono due interi positivi consecutivi. Se si aggiunge 3 sia al numeratore che al denominatore, il valore della frazione aumenta di 1/6. Di che frazione si tratta?

4) Trova due numeri sapendo che differiscono di 10 unità
e che se si aggiunge alla loro somma il loro prodotto, si ottiene come risultato 815.

5) In una sala cinematografica, originariamente il numero delle file era uguale al numero delle poltrone presenti in ciascuna fila. Per via di una ristrutturazione, si è poi dovuto ridurre di 4 il numero delle poltrone in ogni fila, ma in compenso si è aumentato di 4 il numero delle file.
In tal modo il locale ha perso 1/16 della sua capienza.
Quanti spettatori poteva ospitare il cinema prima della ristrutturazione? E dopo?

6) Un cortile ha forma rettangolare, coi lati di 12 metri e 10 metri.
Al centro del cortile è stata ricavata una vasca,
anch'essa rettangolare (vedi figura),
in modo che tutti i bordi della vasca hanno
ugual distanza x dal contorno del cortile.
Determinare questa distanza costante,
sapendo che l'area della vasca è di 48 metri quadrati.



7) L'autobus per la gita scolastica di una classe ha un costo globale di 600 euro.
Purtroppo al momento della gita 5 allievi devono rinunciare perché a letto con l'influenza
e i restanti decidono di tassarsi per non far pagare gli ammalati, spendendo in questo modo
ciascuno 10 euro in più del previsto. Quanti sono gli allievi che vanno in gita? ⇨

8) Se una distanza di 225 km viene percorsa "andata e ritorno", con una velocità al ritorno maggiore di 10 km/h rispetto all'andata, e il tempo totale del viaggio è di 4 ore e ¾, quali sono le due velocità? ⇨

9) L'età di un padre 2 anni fa era uguale al quadrato dell'età del figlio, mentre fra 2 anni il padre si ritroverà ad avere il quadruplo dell'età del figlio. Quanti anni hanno ora padre e figlio?

10) a) Se il lato di un quadrato aumentasse di 5 cm, l'area del quadrato raddoppierebbe. Quanto vale il lato?
b) Se il raggio di un cerchio aumentasse di 5 cm, l'area del cerchio raddoppierebbe. Quanto vale il raggio?

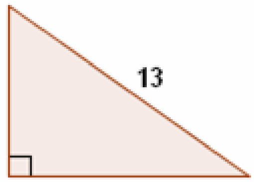
11) Tanti anni fa, quando ero al massimo della forma, nella corsa di resistenza riuscivo
a mantenere un'andatura di ben 4 km/h più veloce, e ci mettevo 30 minuti in meno
ad ultimare il mio tragitto di allenamento di 24 km. A quanti km all'ora sto correndo? ⇨

12) Due rubinetti A e B permettono, se aperti simultaneamente, di riempire l'intera vasca in 2 ore. Il rubinetto A, se aperto da solo, riempirebbe la vasca in x ore, mentre il rubinetto B, se aperto da solo, ci metterebbe 3 ore in più del rubinetto A. Quanto vale x? ⇨

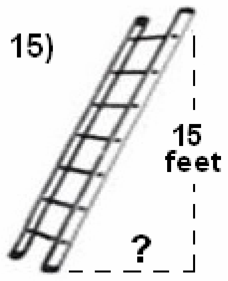
13) Il motore di un barcone gli farebbe assumere, in assenza di corrente, una velocità di 2 m/s. Se il barcone naviga su di un fiume nel quale la corrente ha una velocità di x metri al secondo, prima nella direzione della corrente poi all'incontrario, e ci mette in totale 2 ore e 8 minuti a percorrere "andata e ritorno" un tratto di fiume lungo 7 km e 200 metri, quanto vale x? ⇨

14) Un orto ha forma di triangolo rettangolo, e il suo contorno ha una lunghezza totale di 30 metri. Il lato più lungo misura metri 13. Di quanti metri quadrati è l'area dell'orto? (*Pitagora per l'equazione risolvente!*) ⇨

14)



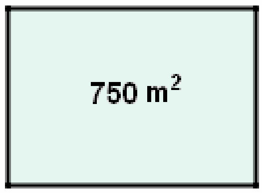
15)



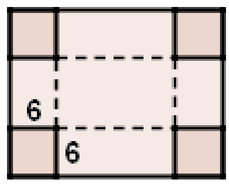
15) Da http://academic.cuesta.edu
A ladder is resting against a wall. The top of the ladder touches the wall at a height of 15 feet. Find the distance from the wall to the bottom of the ladder if the length of the ladder is one foot more than twice its distance from the wall.

16) Da www.vitutor.com
To fence a rectangular farm of $750\ \text{m}^2$, 110 m of fence has been used. Calculate the dimensions of the farm.

16)



17)



17) A rectangular piece of cardboard is 4 cm longer than wide. A box of $840\ \text{cm}^3$ is constructed by using this piece of cardboard. A square of 6 cm is cut out in every corner and the rims are folded upwards to create the box. Find the dimensions of the box.

18) Da http://www1.broward.edu
Two cars leave an intersection. One car travels north; the other travels east. When the car traveling north had gone 24 miles, the distance between the cars was four miles more than three times the distance traveled by the car heading east. Find the distance between the cars at that time.

Problemi geometrici con eq. risolvente di 2° grado alle pagg. 246 … 251

I quattro problemi che seguono sono tratti da "Elementi di Algebra" (pubblicato intorno all'anno 1765), del grande Leonhard Euler (Euléro).

19) Determina due numeri, di segno qualsiasi, il cui rapporto sia 2, e tali che se si addiziona la loro somma al loro prodotto, il risultato dell'operazione sia 90.

20) Una persona acquistò diverse pezze di tessuto per 180 corone; e se avesse ottenuto per la stessa somma di denaro 3 pezze in più, vorrebbe dire che ogni pezza gli sarebbe costata 3 corone in meno. Quante pezze comprò? E a che prezzo?

21) *Psst … Conosci la formula di Gauss per la somma dei primi n interi positivi*? $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
Un tale compra un certo numero di pezze di tessuto: per la prima paga 2 corone, per la seconda 4, per la terza 6, e allo stesso modo sempre 2 corone in più per ciascuna delle pezze successive; inoltre, tutte le pezze insieme gli costano 110 corone: quante sono queste pezze? E se la spesa fosse di 2260512 corone?

22) Due ragazze hanno portato 100 uova al mercato; una aveva più uova dell'altra, e tuttavia entrambe hanno ricavato la stessa somma dalla vendita. La prima dice alla seconda: "Se avessi avuto io il numero di uova che avevi tu, avrei guadagnato 15 penny". E l'altra replica: Se invece avessi avuto io le tue uova, il mio guadagno sarebbe stato di 6 penny e 2/3 di penny". Con quante uova è andata al mercato ciascuna delle due?

SOLUZIONI

1) $4/3$ e $3/4$ 2) 22 e 24 3) $2/3$ 4) -35 e -25 oppure 23 e 33 5) 256, 240 6) 2 m
7) Gli allievi in gita sono 15, la classe in totale ha 20 allievi 8) 90 e 100 km/h 9) 8 anni, 38 anni
10) Tanto il lato del quadrato quanto il raggio del cerchio misurano cm $5\left(1+\sqrt{2}\right)$ 11) A 12 km/h
12) $x=3$ ore (rubinetto B: 6 ore) 13) $x=0{,}5$ m/s $=1{,}8$ km/h 14) 30 m^2 15) 8 feet 16) 30 m, 25 m
17) 14, 10, 6 cm 18) 25 miles 19) 12 e 6 oppure -15 e $-15/2$ 20) Comprò 12 pezze, a 15 corone l'una
21) 10; 1503 22) 40 uova la prima, che le ha vendute a ¼ di penny, 60 la seconda (1/6 di penny per uovo)