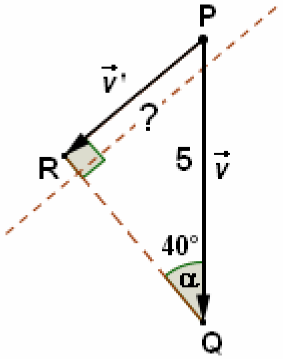
INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

1. SENO, COSENO E TANGENTE DI UN ANGOLO: UN PRIMO APPROCCIO

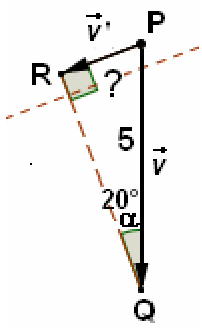
NOTA - In questo capitolo utilizzeremo ♥ il PUNTO, anziché la virgola, come separatore per i decimali

Il vettore $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ in figura ha modulo 5; l'ampiezza dell'angolo α è di 40°. Quanto misurerà il modulo di $\overrightarrow{PR} = \vec{v}\,'$?



Problemi di questo tipo si presentano di frequente in Fisica. Fra i tantissimi esempi, possiamo pensare allo studio del moto su di un piano inclinato sotto l'azione della forza di gravità: è proprio la situazione a cui si ispira la figura.

Come è ovvio, la risposta dipende strettamente dal fatto che l'angolo α è proprio di 40°.
Se, poniamo, α misurasse invece 20° (e la misura di $\vec{v}$ fosse sempre 5: figura qui a destra), la risposta cambierebbe: $\vec{v}\,'$ avrebbe, in questo caso, un modulo più piccolino (osserviamo comunque, per inciso, che nel passaggio da $\alpha = 40°$ ad $\alpha = 20°$ il valore del modulo di $\vec{v}\,'$ NON diventerebbe esattamente la metà!). Bene:



chiamiamo "seno" di un angolo acuto α un numero, che è caratteristico dell'angolo stesso; il "seno" di α è il numero per cui moltiplicare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha un angolo acuto uguale ad α, per ottenere la misura del cateto opposto !!!

Prendi la macchinetta calcolatrice e digita 40 sul display.

Premi ora il tasto $\boxed{\text{sin}}$.

Sul display comparirà il numero cercato, che si scrive "*sen* α" o "*sin* α" (leggi: "*sen alfa*" o "*seno di alfa*"): in questo caso, si tratterà di "*sen* 40°", leggi "*seno di* 40°".
Esso è 0.6427876 (valore approssimato; salvo casi particolarissimi, i numeri così ottenuti hanno infinite cifre decimali, e la macchinetta li arrotonda).

Se ora moltiplichi il modulo di $\vec{v}$ (che è 5) per $sen\ \alpha = sen\ 40° = 0.6427876$, otterrai 3.2139381 che è il modulo di $\vec{v}\,'$.

Fai poi la stessa cosa supponendo che l'angolo α misuri 20°.
Otterrai $sen\ 20° = 0.3420201$ che è dunque il valore per cui moltiplicare il modulo di $\vec{v}$ se si desidera ottenere il modulo di $\vec{v}\,'$, qualora sia $\alpha = 20°$.
Perciò il modulo di $\vec{v}\,'$ sarà in questo caso $0.3420201 \cdot 5 = 1.7101008$

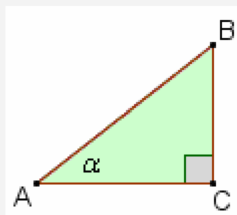
IL SENO DI UN ANGOLO ACUTO α

$\boxed{sen\ \alpha = numero\ per\ cui\ moltiplicare\ l'ipotenusa\ di\ un\ triangolo\ rettangolo\ che\ abbia\ \alpha\ come\ angolo\ acuto,\ se\ si\ vuole\ ottenere\ il\ cateto\ opposto}$

$\boxed{CB = AB \cdot sen\,\alpha}$ $\boxed{sen\,\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{cateto\ opposto}{ipotenusa}}$

Il seno di un angolo acuto α è quindi uguale al rapporto, al quoziente, fra il cateto opposto e l'ipotenusa, in un triangolo rettangolo che abbia α come angolo interno.

Poiché in un triangolo rettangolo ogni cateto è minore dell'ipotenusa, **il seno di un angolo acuto sarà sempre <1.**

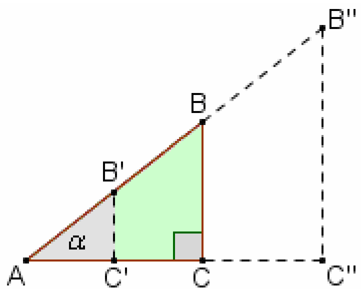


sen α oppure *sin* α
Latino *sinus*, inglese *sine*

$\boxed{sen\,\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{cateto\ opposto}{ipotenusa}}$

Osserviamo che se noi teniamo fissa l'ampiezza dell'angolo α, ma restringiamo o allarghiamo il triangolo rettangolo, il rapporto *cateto opposto/ipotenusa*, ossia il seno, non cambia, perché se ad esempio il cateto si riduce alla metà, la stessa cosa avviene anche all'ipotenusa, per cui il loro quoziente rimane inalterato:
$CB/AB = C'B' : AB' = C''B'' : AB'' = \ldots$

Per questo **la definizione è "ben posta": la quantità *sen* α dipende esclusivamente dall'angolo α, e non dal particolare triangolo rettangolo considerato.**



Si dice che **IL "SENO" È UNA "FUNZIONE ANGOLARE"**.
"Funzione" indica una quantità che dipende in modo univoco da un'altra.
Nel nostro caso, il valore del seno dipende in modo univoco dall'ampiezza dell'angolo.

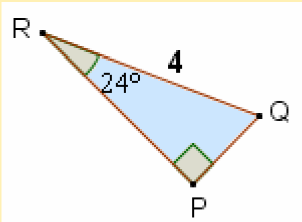
NELLA FUNZIONE "SENO"
- al raddoppiare dell'angolo, il seno NON raddoppia;
- se l'angolo diventa triplo, il seno NON diventa triplo;
- se l'angolo dimezza, il seno NON dimezza …

eccetera.

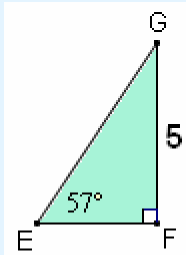
OCCHIO a non fare confusione.
La scrittura $sen\ \alpha$ non ha proprio NIENTE A CHE FARE con una moltiplicazione: non significa "*sen*" moltiplicato "α" … per carità, non avrebbe nessun senso!
Come non avrebbe senso scrivere "*sen*" e basta. La scrittura $sen\ \alpha$ significa "il seno di α": α è l'angolo e *sen* indica la funzione, indica che vogliamo passare dall'ampiezza dell'angolo a quel numero che ne esprime il "seno", e del quale ben conosciamo il significato geometrico.

Vediamo se hai capito. Copri con la mano le risposte, che sono riportate immediatamente sotto.

PROBLEMA 1)
Se nel triangolo rettangolo in figura io conosco $RQ = 4\ \text{m}$, $\hat{R} = 24°$ e dispongo di una macchinetta calcolatrice, potrò determinare tutti gli altri lati?



PROBLEMA 2)
Se nel triangolo rettangolo in figura io conosco $FG = 5\ \text{cm}$, $\hat{E} = 57°$ e dispongo di una macchinetta calcolatrice, potrò determinare tutti i lati?

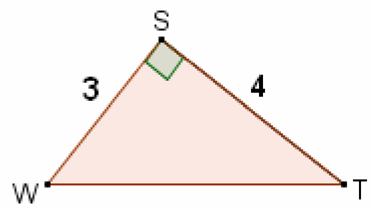


RISPOSTE
1) Sì. $PQ = RQ \cdot sen\ 24° = 4 \cdot 0.4067366 = 1.6269466$. RP potrà essere calcolato con Pitagora oppure così:
$\hat{Q} = 180° - 90° - 24° = 66°$; $RP = RQ \cdot sen\ 66° = 4 \cdot 0.9135454 = 3.6541818$

2) Sì. $sen\ \hat{E} = \dfrac{FG}{EG} \rightarrow EG = \dfrac{FG}{sen\ \hat{E}} = \dfrac{5}{sen\ 57°} = \dfrac{5}{0.8386705} = 5.961817$, poi EF con Pitagora oppure facendo:
$\hat{G} = 180° - 90° - 57° = 33°$; $EF = EG \cdot sen\ 33° = 5.961817 \cdot 0.544639 = 3.2470383$

COME RISALIRE DAL VALORE DEL SENO ALL'AMPIEZZA DELL'ANGOLO

Se nel triangolo rettangolo in figura io conosco $SW = 3\ \text{cm}$, $ST = 4\ \text{cm}$ e dispongo di una macchinetta calcolatrice, potrò determinare le ampiezze degli angoli acuti?



Certamente!
Prima, con Pitagora, $WT = \sqrt{SW^2 + ST^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, quindi $sen\ \widehat{W} = \dfrac{ST}{WT} = \dfrac{4}{5} = 0.8$
da cui potrò risalire all'ampiezza di $\widehat{W}$ digitando 0.8 con la calcolatrice poi **premendo il tasto** $\boxed{\sin^{-1}}$.
Questa in genere nelle macchinette è una "seconda funzione": per attivarla si premerà prima il tasto $\boxed{\textbf{2ndF}}$.
Si trova 53.130102 ovvero **una misura in: gradi, decimi di grado, centesimi di grado …**

- ❑ **Volendo trasformare in gradi, primi** (60-esimi di grado) **e secondi** (60-esimi di primo), **come si può fare?**
  Si prende la parte dopo il punto decimale ossia 0.130102
  e ci si chiede innanzitutto a quanti primi, ossia a quanti 60-esimi di grado, corrisponde:
  $$0.130102 = \frac{x}{60} \rightarrow x = 0.130102 \cdot 60 = 7.80612 \text{ quindi } 7' + 0.80612'.$$
  Ma a quanti secondi (= 60-esimi di primo) corrispondono ora $0.80612'$?
  $$0.80612 = \frac{y}{60} \rightarrow y = 0.80612 \cdot 60 = 48.3672 \text{ cioè } 48'' + \text{ancora una frazione di secondo.}$$
  A questo punto possiamo però accontentarci, e approssimare $53.130102°$ con $53°\ 7'\ 48''$.

OSSERVAZIONE - Il tasto, sulla macchinetta, per **risalire dal seno all'angolo**, è dunque $\boxed{\sin^{-1}}$; comunque quel "-1" in alto a destra *non è un esponente*, è piuttosto uno PSEUDO-esponente: non significa "fare il reciproco", ma "applicare la funzione inversa, quella che fa tornare indietro".

E veniamo ora alla funzione "sorella" del *seno*: il *coseno*, e a una "cugina": la *tangente*.

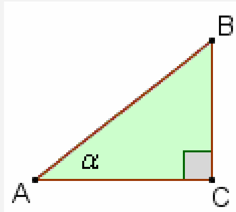
IL COSENO DI UN ANGOLO ACUTO α

$\boxed{\begin{array}{l} cos\ \alpha = numero\ per\ cui\ moltiplicare \\ \quad l'ipotenusa\ di\ un\ triangolo\ rettangolo \\ \quad che\ abbia\ \alpha\ come\ angolo\ acuto, \\ \quad se\ si\ vuole\ ottenere\ il\ cateto\ adiacente \end{array}}$

$\boxed{AC = AB \cdot cos\,\alpha}$ $\boxed{\boldsymbol{cos\,\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa}}}$

Il coseno di un angolo acuto α è quindi uguale al rapporto, al quoziente, fra il cateto adiacente e l'ipotenusa, in un triangolo rettangolo che abbia α come angolo interno.

Poiché in un triangolo rettangolo ogni cateto è minore dell'ipotenusa, **il coseno di un angolo acuto sarà sempre <1.**



$\boxed{cos\,\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa}}$

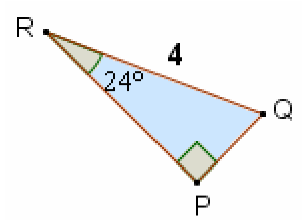
Riprendiamo un attimo il problema 1).
Si trattava di determinare i lati del triangolo in figura sapendo che

$RQ = 4\ m\ ,\ \widehat{R} = 24°$

Bene: per calcolare RP, si potrebbe dunque utilizzare il coseno e scrivere

$RP = RQ \cdot cos\,\widehat{R} = RQ \cdot cos\,24° = 4 \cdot 0.9135454$

dove il valore del coseno è stato ricavato tramite una macchinetta calcolatrice, digitando 24 poi pigiando il tasto $\boxed{cos}$.



Il tasto, sulla macchinetta, che permette di **risalire dal coseno all'angolo**, è $\boxed{cos^{-1}}$

LA TANGENTE DI UN ANGOLO ACUTO α

$\boxed{\begin{array}{l} tg\ \alpha = numero\ per\ cui\ moltiplicare \\ \quad il\ cateto\ adiacente\ ad\ \alpha\ in\ un\ triangolo\ rettangolo \\ \quad che\ abbia\ \alpha\ come\ angolo\ acuto, \\ \quad per\ ottenere\ il\ cateto\ opposto \end{array}}$

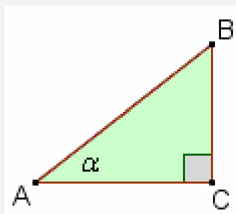
$\boxed{CB = AC \cdot tg\,\alpha}$ $\boxed{\boldsymbol{tg\,\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente}}}$

La tangente goniometrica di un angolo acuto α è quindi uguale al rapporto, al quoziente, fra il cateto opposto e il cateto adiacente, in un triangolo rettangolo che abbia α come angolo interno.

La tangente goniometrica
(di solito si dice, per abbreviare: "la tangente")
di un angolo acuto può assumere valori qualsiasi, anche molto grandi.

La tangente è legata al seno e al coseno da una semplice relazione:

$$\boxed{tg\,\alpha =} \frac{CB}{AC} = \frac{\frac{CB}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \boxed{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}$$



$\boxed{tg\,\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente}}$

$tg\,\alpha$ oppure $tan\,\alpha$

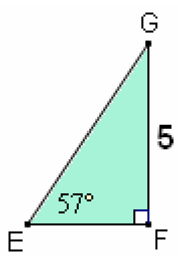
Si legge "*tangentalfa*"

Riprendiamo il problema 2).
I dati erano: $FG = 5\ cm\ ,\ \widehat{E} = 57°$. Per calcolare EF, si potrebbe procedere così:

$\widehat{G} = 180° - 90° - 57° = 33°\ ;\ \ EF = FG \cdot tg\,\widehat{G} = FG \cdot tg\,33° = 5 \cdot 0.6494075 = 3.247038$

Il tasto sulla calcolatrice per ottenere la tangente porta in genere la scritta $\boxed{tan}$.

In alternativa: $FG = EF \cdot tg\,\widehat{E} = EF \cdot tg\,57° \rightarrow EF = \frac{FG}{tg\,57°} = \frac{5}{1.539865} = 3.247038$

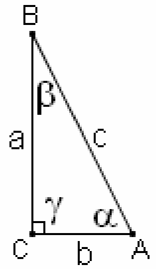


Il tasto, sulla macchinetta, che permette di **risalire dalla tangente all'angolo**, è $\boxed{tan^{-1}}$

OSSERVAZIONE - In questo paragrafo, per semplicità, abbiamo utilizzato sempre il simbolo = anche quando, per via dei valori approssimati, avremmo dovuto, più rigorosamente, scrivere ≈ che significa "**uguale circa**".

ESERCIZI (risposte a pag. 433)

1)



I) $sen\,\alpha = ?$ a) $\dfrac{\textit{cateto opposto}}{\textit{cateto adiacente}}$ b) $\dfrac{\textit{cateto opposto}}{\textit{ipotenusa}}$ c) $\dfrac{\textit{cateto adiacente}}{\textit{cateto opposto}}$

d) $\dfrac{\textit{cateto adiacente}}{\textit{ipotenusa}}$ e) $\dfrac{\textit{ipotenusa}}{\textit{cateto opposto}}$ f) $\dfrac{\textit{ipotenusa}}{\textit{cateto adiacente}}$

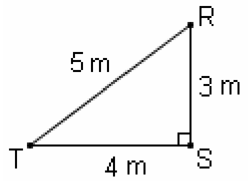
II) $cos\,\alpha = ?$ a) $\dfrac{\textit{cateto opposto}}{\textit{cateto adiacente}}$ b) $\dfrac{\textit{cateto opposto}}{\textit{ipotenusa}}$ c) $\dfrac{\textit{cateto adiacente}}{\textit{cateto opposto}}$

d) $\dfrac{\textit{cateto adiacente}}{\textit{ipotenusa}}$ e) $\dfrac{\textit{ipotenusa}}{\textit{cateto opposto}}$ f) $\dfrac{\textit{ipotenusa}}{\textit{cateto adiacente}}$

III) $tg\,\alpha = ?$ a) $\dfrac{\textit{cateto opposto}}{\textit{cateto adiacente}}$ b) $\dfrac{\textit{cateto opposto}}{\textit{ipotenusa}}$ c) $\dfrac{\textit{cateto adiacente}}{\textit{cateto opposto}}$

d) $\dfrac{\textit{cateto adiacente}}{\textit{ipotenusa}}$ e) $\dfrac{\textit{ipotenusa}}{\textit{cateto opposto}}$ f) $\dfrac{\textit{ipotenusa}}{\textit{cateto adiacente}}$

2)

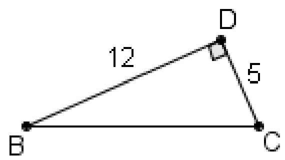


I) $sen\,\widehat{R} = ?$ a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{5}$ f) $\frac{5}{3}$

II) $cos\,\widehat{R} = ?$ a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{5}$ f) $\frac{5}{3}$

III) $tg\,\widehat{R} = ?$ a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{5}$ f) $\frac{5}{3}$

3)



I) a) $sen\,\widehat{B} = ?$ … b) $cos\,\widehat{B} = ?$… c) $tg\,\widehat{B} = ?$…

II) a) $sen\,\widehat{C} = ?$ … b) $cos\,\widehat{C} = ?$… c) $tg\,\widehat{C} = ?$…

4) La tabella seguente riporta i valori di seno, coseno e tangente di alcuni angoli particolari (arrotondati a 2 cifre decimali: fanno eccezione solo $sen\,30°$ e $cos\,60°$ che valgono *esattamente* 0.5). Utilizzando la tabella, determina i valori approssimati dei segmenti che nelle varie figure sono indicati col "punto interrogativo".

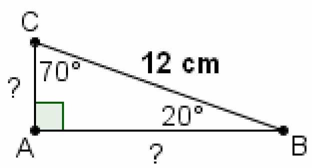
$\alpha°$	**10°**	**20°**	**30°**	**40°**	**50°**	**60°**	**70°**	**80°**
$sen\,\alpha$	0.17	0.34	0.50	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98
$cos\,\alpha$	0.98	0.94	0.87	0.77	0.64	0.50	0.34	0.17
$tg\,\alpha$	0.18	0.36	0.58	0.84	1.19	1.73	2.75	5.67

Prima di svolgere gli esercizi osserva la tabella:

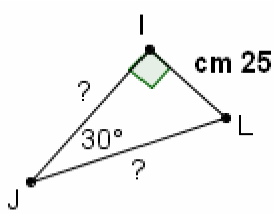
♪ potrai notare che **il seno di un angolo coincide col coseno dell'angolo complementare** (**due angoli sono fra loro "complementari" quando sono del tipo α, $90°-\alpha$** ossia quando **la loro somma è di 90°**: ad esempio, un angolo di 20° e uno di 70° sono complementari).

♫ **quando l'angolo raddoppia, NON è vero che seno, coseno, tangente raddoppino**
(il loro valore è *piuttosto* vicino al doppio *solo quando l'angolo è piccolo*,
ma conservando un numero maggiore di cifre decimali,
si potrebbe osservare che nemmeno per gli angoli piccoli
al raddoppiare dell'angolo si ha un valore della funzione *esattamente* doppio).

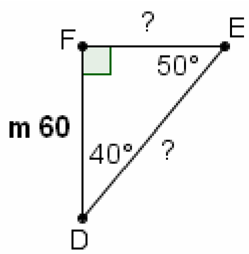
a)



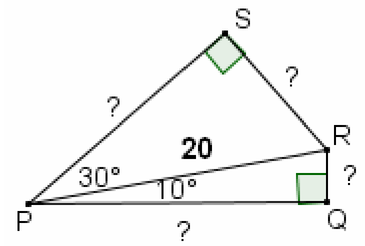
b)



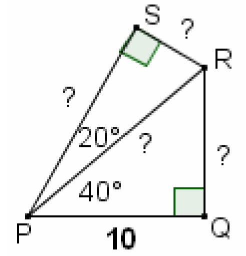
c)



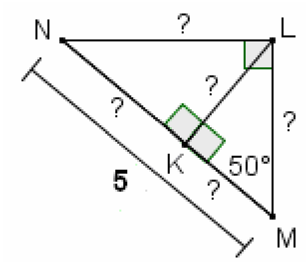
d)



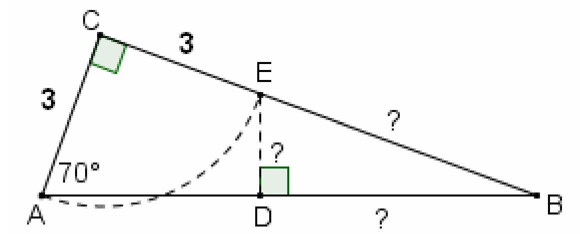
e)



f)



g)



5) Sapendo che $sen\,\alpha = 0.95$ e $cos\,\beta = 0.92$
con una macchinetta calcolatrice determina, arrotondandole al grado,
le misure degli angoli α, β, γ di un triangolo ABC.

6) a) Prova a inserire nella macchinetta calcolatrice il numero 2 e a pigiare poi il tasto
(seconda funzione) sen^{-1}. Che succede? … Cosa significa tutto ciò?

b) Che valore ti aspetti di ottenere, a "occhio", se fai invece il calcolo $tan^{-1}(2)$?

7) **TRASFORMARE IN GRADI, PRIMI E SECONDI UN ANGOLO ESPRESSO IN GRADI, DECIMI DI GRADO, ECCETERA**

Esempio:

$$13.548° = 13° + 0.548°$$
$$0.548 \cdot 60 = 32.88$$
$$13.548° = 13° + 32' + 0.88'$$
$$0.88 \cdot 60 = 52.8$$
$$13.548° \approx 13°\,32'\,53''$$

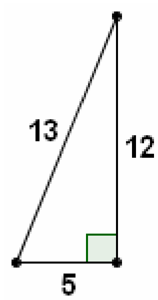
ESERCIZI

a) $19.72°$ b) $2.4837°$ c) $133.842°$ d) $12.12°$ e) $38.245°$ f) $48.357°$ g) $19.88°$

8) Con la calcolatrice tascabile, stabilisci quanto misurano gli angoli acuti
dei triangoli rettangoli che corrispondono alle quattro "terne pitagoriche"

a) 5, 12, 13
b) 7, 24, 25
c) 9, 40, 41
d) 48, 55, 73

E' richiesto di approssimare l'angolo ai gradi e ai PRIMI.



9) **TRASFORMARE IN GRADI, DECIMI DI GRADO, ECCETERA, UN ANGOLO ESPRESSO IN GRADI, PRIMI, SECONDI**

Esempio:

$$45°\,32'\,27'' = \left(45 + \frac{32}{60} + \frac{27}{3600}\right)° = \left(45 + \frac{32 \cdot 60 + 27}{3600}\right)° = 45.540833...° \approx 45.54°$$

ESERCIZI

a) $3°\,14'$ b) $89°\,59'\,28''$ c) $23°\,8'\,30''$ d) $75°\,24'$ e) $1°\,2'\,3''$ f) $123°\,47'\,38''$

10) Con **GeoGebra**,
disegna un triangolo rettangolo (“retta perpendicolare”),
evidenzia l’angolo retto (GeoGebra lo marcherà con un quadratino),
poi evidenzia un angolo acuto e, tramite i rapporti
- cateto opposto/ipotenusa,
- cateto adiacente/ipotenusa,
- cateto opposto/cateto adiacente,

servendoti di “testi dinamici” (vol. 1, Geometria, cap. 4),
visualizza i valori di seno, coseno, tangente di quell’angolo.
Come devi deformare il triangolo se vuoi che si avvicini a 1 il valore del seno/del coseno/della tangente?

RISPOSTE

1) I) b II) d III) a 2) I) c II) e III) b 3) I) a) 5/13 b) 12/13 c) 5/12 II) a) 12/13 b) 5/13 c) 12/5

4) NOTA - Se un calcolo darà come risultato un numero con più di 2 cifre dopo la virgola,
arrotonderemo ai centesimi, seguendo la **REGOLA PER GLI ARROTONDAMENTI** seguente:

♪ **Se vengono trasformate in “0” tutte le cifre a partire da una certa cifra e verso destra,**
quando la prima cifra da trasformare in “0” è 0, 1, 2, 3 o 4,
allora nell’arrotondamento la cifra precedente resta invariata;

♫ **se invece la prima cifra da trasformare in “0” è 5, 6, 7, 8 o 9,**
allora nell’arrotondamento la cifra precedente viene aumentata di un’unità.

Esempi:
l’arrotondamento di 2.4763 ai centesimi è 2.48; quello di 0.372 sempre ai centesimi è 0.37.

a) $AC = 12 \cdot sen\,20° \approx 12 \cdot 0.34 = 4.08$ $AB = 12 \cdot cos\,20° \approx 12 \cdot 0.94 = 11.28$

b) $JL = 25 / sen\,30° = 25/0.5 = 50$ (non abbiamo messo il simbolo $\approx$ perché il valore 0.5 per *sen* 30°
è, eccezionalmente, un valore esatto e non approssimato;
inoltre, pure il calcolo 25/0.5 dà *esattamente* 50)

$IJ = JL \cdot cos\,30° \approx 50 \cdot 0.87 = 43.5$
oppure $IJ = IL / tg\,30° \approx 25/0.58 \approx 43.10$
oppure $IJ = IL \cdot tg\,\hat{L} = IL \cdot tg\,60° \approx 25 \cdot 1.73 = 43.25$

dove le differenze fra i valori trovati coi tre metodi si devono al fatto che nella nostra tabella i valori di seno, coseno e tangente non sono in generale esatti ma approssimati

c) $FE = 60 \cdot tg\,40° \approx 60 \cdot 0.84 = 50.4$ $ED = 60 / cos\,40° \approx 60/0.77 \approx 77.92$

d) $RQ = 20 \cdot sen\,10° \approx 20 \cdot 0.17 = 3.4$ $PQ = 20 \cdot cos\,10° \approx 20 \cdot 0.98 = 19.6$
$RS = 20 \cdot sen\,30° = 20 \cdot 0.50 = 10$ $PS = 20 \cdot cos\,30° \approx 20 \cdot 0.87 = 17.4$

e) $RQ = 10 \cdot tg\,40° \approx 10 \cdot 0.84 = 8.4$ $PR = 10 / cos\,40° \approx 10/0.77 \approx 12.99$
$RS \approx 12.99 \cdot sen\,20° \approx 12.99 \cdot 0.34 \approx 4.42$ $PS \approx 12.99 \cdot cos\,20° \approx 12.99 \cdot 0.94 \approx 12.21$

f) $LN = 5 \cdot sen\,50° \approx 5 \cdot 0.77 = 3.85$ $LM = 5 \cdot cos\,50° \approx 5 \cdot 0.64 = 3.2$ $LK = LM \cdot sen\,50° \approx ... \approx 2.46$ (NOTA)
$MK = LM \cdot cos\,50° \approx 3.2 \cdot 0.64 \approx 2.05$ $KN = 5 - MK \approx 5 - 2.05 = 2.95$

g) $BC = AC \cdot tg\,70° \approx 3 \cdot 2.75 = 8.25$ $BE = BC - 3 \approx 8.25 - 3 = 5.25$ $\hat{B} = 180° - 90° - 70° = 20°$
$DE \approx 5.25 \cdot sen\,20° \approx 5.25 \cdot 0.34 \approx 1.79$ $DB \approx 5.25 \cdot cos\,20° \approx 5.25 \cdot 0.94 \approx 4.94$

NOTA - Se a questo punto si ricalcolasse LN come LK/*sen* 40° ,
uscirebbe una lunghezza leggermente diversa da quella trovata prima.
In questo contesto ci interessa poco, tant’è vero che abbiamo deciso di
approssimare a due cifre decimali anche i seni, i coseni e le tangenti;
ma in generale, in calcoli di questo genere,
è sempre **BUONA NORMA**
CERCARE DI COINVOLGERE VALORI “BASE”,
E NON VALORI GIÀ CALCOLATI, QUINDI AFFETTI DA APPROSSIMAZIONE.

5) 72°, 23°, 85°

6) a) Messaggio di errore. Non può esistere un angolo il cui seno sia maggiore di 1.
b) Disegna un triangolo rettangolo coi cateti uno doppio dell’altro …
Vedrai che l’angolo acuto maggiore è compreso fra i 60° e i 70° (più precisamente, è di $63°\,26'$ circa)

7) a) $19°\,43'12''$ b) $\approx 2°\,29'1''$ c) $\approx 133°\,50'31''$ d) $12°\,7'12''$ e) $38°\,14'\,42''$ f) $\approx 48°\,21'\,25''$ g) $19°52'48''$

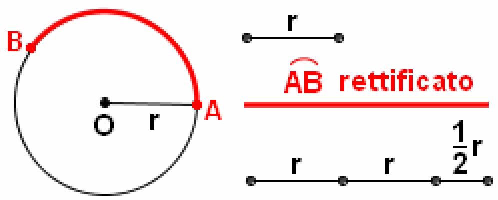
8) a) $\approx 22°\,37'$, $\approx 67°\,23'$ b) $\approx 16°\,16'$, $\approx 73°\,44'$ c) $\approx 12°\,41'$, $\approx 77°\,19'$ d) $\approx 41°\,7'$, $\approx 48°\,53'$

9) a) $\approx 3.23°$ b) $\approx 89.99°$ c) $\approx 23.14°$ d) $75.4°$ e) $\approx 1.034°$ f) $\approx 123.794°$

2. MISURA DI UN ARCO DI CIRCONFERENZA IN RADIANTI

Si dice che un arco di circonferenza è misurato in radianti
quando lo si misura assumendo come unità di misura il raggio della circonferenza stessa.
Vale a dire: per misurare un arco di circonferenza in radianti, **si immagina di rettificare questo arco, poi si misura il segmento così ottenuto, prendendo come unità di misura il raggio**.

Ad esempio, la lunghezza di un certo arco in radianti è 2.5 (= un certo arco misura 2.5 radianti)
se rettificando quell'arco si ottiene un segmento lungo esattamente 2.5 volte il raggio (vedi figura sottostante).
Un arco misura quindi UN radiante quando la lunghezza di quell'arco, supposto rettificato,
è uguale alla lunghezza del raggio della circonferenza.



In questa figura, l'arco $\overset{\frown}{AB}$ misura 2.5 radianti: infatti è esattamente due volte e mezza il raggio.

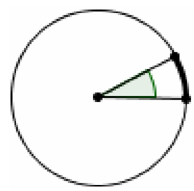
NOTA - "Misurare" un segmento **s** rispetto ad un altro segmento **u** (unità di misura) vuol dire stabilire "quante volte" il segmento **u** che fa da unità di misura è contenuto in **s**: e a tale scopo, qualora si conoscano le misure di **s** e di **u** rispetto ad **un'altra** unità di misura **u'** , basterà fare il quoziente fra tali due misure per conoscere la misura di **s** rispetto a **u** (Teorema del Rapporto).
Per questo, misurare un arco in radianti equivale a calcolare il quoziente, il rapporto, fra la lunghezza dell'arco e la lunghezza del raggio della circonferenza, determinate entrambe rispetto a una medesima unità di misura.

In pratica, il Teorema del Rapporto può essere illustrato con l'esempio seguente. Supponiamo che un pensionato sia abituato a utilizzare il suo bastone per calcolare le lunghezze, e abbia constatato che la misura del campo da bocce, quando l'unità di misura è il bastone, vale 8.5 (perché "il bastone ci sta esattamente 8 volte e mezzo nel campo da bocce"). Bene! Allora quel pensionato, qualora andasse a misurare sia il campo da bocce che il bastone in metri, e facesse poi la divisione fra le due misure in metri ottenute, troverebbe come quoziente proprio 8.5.

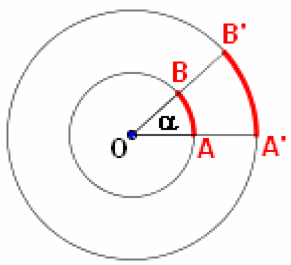
UN ARCO SI PUO' MISURARE SIA IN RADIANTI CHE IN GRADI
E UN ANGOLO SI PUO' MISURARE SIA IN GRADI CHE IN RADIANTI

In una data circonferenza la lunghezza di un arco dipende in modo univoco dall'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente, e viceversa.
Perciò
- **UN ARCO DI CIRCONFERENZA SI PUO' MISURARE SIA IN RADIANTI CHE IN GRADI;**
- **E UN ANGOLO, SIA IN GRADI CHE IN RADIANTI**
  [Evidentemente, per "misura in radianti di un angolo α" si intenderà la misura in radianti dell'arco che α stacca su di una qualsiasi circonferenza avente il centro nel vertice di α (NOTA)]

Dell'arco in figura, posso dire indifferentemente che misura
- **0.5 radianti** *(perché è lungo la metà del raggio)*
- **OPPURE $28°39'$** *(circa), perché tale è l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente.*

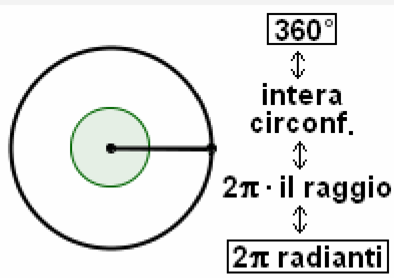


NOTA
E' intuitivo – e, volendo, dimostrabile – che la misura ottenuta è del tutto indipendente dal raggio della circonferenza che viene tracciata, perché – ad esempio – raddoppiando il raggio raddoppia anche la lunghezza dell'arco e allora il rapporto *arco/raggio* rimane costante.



$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{OA} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{OA'} =$$
= misura in radianti di : $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{A'B'}, \alpha$

Se il raggio di una circonferenza è r , l'intera circonferenza misura $2\pi r$: cioè, 2π moltiplicato il raggio (= circa 6.28 volte il raggio). Perciò,
se come unità di misura si sceglie proprio il raggio, la lunghezza dell'intera circonferenza risulta uguale a 2π .
Di conseguenza,
la misura in radianti dell'intera circonferenza, ossia dell'arco che corrisponde ad un angolo al centro di 360°, è 2π (circa 6.28): come misura di angolo o di arco, **360° EQUIVALE A 2π RADIANTI** .



Dunque avremo:

Gradi	360°	$180° = \frac{1}{2}\cdot 360°$	$90° = \frac{1}{4}\cdot 360° = \frac{1}{2}\cdot 180°$
Radianti	2π	π	$\pi/2$

Possiamo ora proseguire, ricavando ad esempio

$45° = \frac{1}{2}\cdot 90° \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

NOTA: il simbolo " = " non è qui del tutto rigoroso; ci concediamo una licenza! Non si tratta, infatti, di una vera uguaglianza, ma piuttosto di una **corrispondenza** fra due misure che sono numericamente diverse perché completamente diverse sono le unità di misura utilizzate: il grado (ampiezza) a 1° membro, e il radiante (lunghezza) a 2° membro.

$30° = \frac{1}{3}\cdot 90° = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

$60° = \frac{1}{3}\cdot 180° = \frac{1}{3}\cdot\pi = \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{oppure } 60° = 2\cdot 30° = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\right)$

$120° = 2\cdot 60° = 2\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ $\qquad 135° = 3\cdot 45° = 3\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

$40° = 2\cdot 20° = 2\cdot\frac{1}{9}\cdot 180° = 2\cdot\frac{1}{9}\pi = \frac{2}{9}\pi$ $\qquad 75° = \frac{1}{2}\cdot 150° = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 30° = \frac{5}{2}\cdot 30° = \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi$

$\boxed{\mathbf{1° = \frac{1}{180}\cdot 180° = \frac{1}{180}\pi = \frac{\pi}{180}}}$ $\qquad 111° = 111\cdot 1° = 111\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\cancel{111}^{37}}{\cancel{180}_{60}}\pi$

Negli esercizi (e in talune applicazioni) compaiono con particolare frequenza gli **angoli multipli di 30° e di 45°.**
Ecco la **tabella dei corrispondenti valori in radianti**:

Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.	Gradi	Rad.
0°	0	90°	$\frac{\pi}{2}$	180°	π	270°	$\frac{3}{2}\pi$	360°	2π
30°	$\frac{\pi}{6}$	120°	$\frac{2}{3}\pi$	210°	$\frac{7}{6}\pi$	300°	$\frac{5}{3}\pi$	390°	$\frac{13}{6}\pi$
45°	$\frac{\pi}{4}$	135°	$\frac{3}{4}\pi$	225°	$\frac{5}{4}\pi$	315°	$\frac{7}{4}\pi$	405°	$\frac{9}{4}\pi$
60°	$\frac{\pi}{3}$	150°	$\frac{5}{6}\pi$	240°	$\frac{4}{3}\pi$	330°	$\frac{11}{6}\pi$	420°	$\frac{7}{3}\pi$

Gli angoli che superano i 360° sono quelli che "vanno oltre il giro completo". Si fa un giro (360°), poi si prosegue.

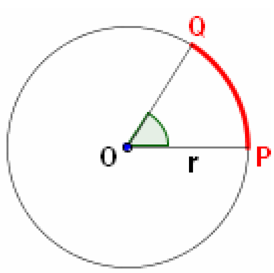
Più avanti parleremo pure di angoli negativi.

D'ora in poi, data la stretta corrispondenza fra "angolo" (pensato come "angolo al centro di una circonferenza") e "arco", **parleremo indifferentemente di "angolo" e di "arco", trattando questi due concetti come "equivalenti" ed "intercambiabili"**.
Di norma, quando si ragiona in "radianti" si preferisce dire "arco", quando si usano i "gradi", "angolo".

Abbiamo visto sopra che l'angolo di 1 grado misura, in radianti, $\pi/180$ ossia circa 0.01745.

Quanto misurerà, in gradi, l'arco di 1 radiante?

Possiamo rispondere mediante la proporzione
$1:\pi = x°:180°$ da cui
misura in gradi dell'arco di 1 radiante =
$= \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.14159...} \approx \mathbf{57.3° = 57°18'}$



La misura trovata, poco più di 57°, è del tutto "convincente" dato che l'arco di 1 radiante è poi l'arco il quale, se rettificato, darebbe luogo a un segmento uguale al raggio (vedi figura qui a fianco, nella quale è appunto $\overset{\frown}{PQ} = 1$ radiante).

E COME SI PASSA, IN GENERALE, DAI GRADI AI RADIANTI E VICEVERSA?

DAI GRADI AI RADIANTI

$$\boxed{x_{rad} : \pi = x° : 180° \;\rightarrow\; x_{rad} = \frac{\pi\cdot x°}{180°} = \frac{x°}{180°}\cdot\pi}$$

Si prende dunque la misura, es. $72°\,32'$, la si trasforma in "gradi virgola …": $72°\,32' = 72.533333...°$
poi si divide per 180 e si moltiplica per π :

$72°\,32' = 72.5333...° = \frac{72.5333...}{180}\cdot\pi \; rad = 1.2659... \; rad$

La sigla *rad* viene di norma omessa.

DAI RADIANTI AI GRADI

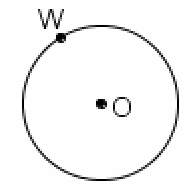
$$\boxed{x_{rad} : \pi = x° : 180° \;\rightarrow\; x° = \frac{x_{rad}\cdot 180°}{\pi} = \frac{x_{rad}}{\pi}\cdot 180°}$$

Si prende la misura in radianti, es. 2.493
la si divide per π e si moltiplica per 180:

$2.493 \; radianti \;\rightarrow\; \frac{2.493}{\pi}\cdot 180° = 142.838...°$

Naturalmente, volendo, questi "gradi virgola …" possono poi essere trasformati in gradi, primi e secondi.

ESERCIZI



1) a) A partire dal punto W disegna:
   - in senso antiorario, un arco di 3 radianti
   - e in senso orario, uno di 0.8 radianti.

   b) Quanti radianti misura l'intera circonferenza? Perché?

   c) E 1/16 di circonferenza, quanti radianti misura?

2) Ricordando che π corrisponde a 180° (perché? …)

   I) trova le misure in gradi dei seguenti angoli espressi in radianti:

   a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{3}{4}\pi$ d) $\frac{1}{90}\pi$ e) $\frac{3}{2}\pi$ f) $\frac{5}{3}\pi$ g) $\frac{6}{5}\pi$ h) 3 radianti i) 2.2 rad l) 0.8 rad

   II) trova le misure in radianti di un angolo di:

   a) 50° b) 36° c) 210° d) 225° e) 20° f) 330° g) 140°

3) π *radianti* $\leftrightarrow 180°$ da cui la proporzione fondamentale $x_{rad} : \pi = x° : 180°$.

   I) Completa ora le formule: $x_{rad} = \frac{\dots}{\dots} \cdot \pi$; $x° = \frac{\dots}{\dots} \cdot 180°$

   II) Trasforma da gradi-primi-secondi a radianti (approssimando a 2 cifre decimali), e viceversa:

   a) $141° = \dots$ *rad* b) 1.2 *rad* $= \dots$ ° c) $14°15' = (\ .....\ )° = \dots$ *rad* d) $2,45$ *rad* $= \dots$ °
   e) $24° = \dots$ *rad* f) $55° = \dots$ *rad* g) $11°\ 30' = \dots$ *rad* h) $95°\ 20' = \dots$ *rad*
   i) $137°\ 6' = \dots$ *rad* l) $1,42$ *rad* $= \dots$ ° m) 0.4 *rad* $= \dots$ ° n) $200,5° = \dots$ *rad*

4) Data la lunghezza del raggio e l'ampiezza dell'angolo, determina la lunghezza dell'arco

   a) $r = 3.7$ km; $\alpha = 48°$ b) $r = 4$ cm; $\alpha = 22°45'$

5) Data la lunghezza dell'arco e il raggio, trova l'angolo al centro corrispondente in gradi e in primi.

   a) $\ell = 5.4$; $r = 12$ b) $\ell = 0.154$; $r = 0.245$

6) Un arco è lungo cm 4.7, ed è sotteso da un angolo al centro di 23.4°.
   Quanto misura il raggio della circonferenza?

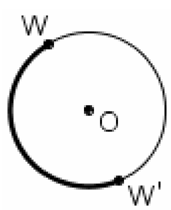
7) Un arco è lungo m 0.03, ed è sotteso da un angolo al centro di 2°.
   Quanto misura il raggio della circonferenza?

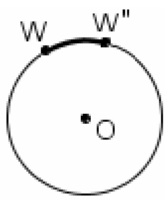
8) In un cerchio di raggio 4.5 metri, quanto è lungo un arco di 2 radianti?
   In un cerchio di raggio 4.5 metri, quanto è lungo un arco di 2°?
   In un cerchio di raggio 2 m, quanto è lungo un arco di $25°\ 30'$?

9) In una circonferenza di diametro 4 metri, che angolo al centro corrisponde a un arco lungo 1 metro?
   Esprimi la risposta in gradi, primi e secondi.

Puoi trovare altri esercizi di questo tipo, e dei tipi successivi, su ⇨

RISPOSTE





1) a) Vedi figura (il triplo del raggio; 0.8 volte il raggio = gli 8/10 del raggio)

   b) 2π, perché è uguale a 2π volte il raggio c) $2\pi \cdot \frac{1}{16} = \frac{\pi}{8} \approx 0.39$

2) I) a) 60° b) 150° c) 135° d) 2° e) 270° f) 300° g) 216°

   h) Proporzione: $3 : \pi = x° : 180°$ da cui $x° = \frac{3 \cdot 180°}{\pi} \approx 171.9°$

   i) $2.2 \cdot 180° / \pi \approx 126.1°$ l) $0.8 \cdot 180° / \pi \approx 45.8° = 45°48'$

   II) a) $\frac{5}{18}\pi$ b) $\frac{\pi}{5}$ c) $\frac{7}{6}\pi$ d) $\frac{5}{4}\pi$ e) $\frac{\pi}{9}$ f) $\frac{11}{6}\pi$ g) $\frac{7}{9}\pi$

3) I) $x_{rad} = \frac{x°}{180°} \cdot \pi$; $x° = \frac{x_{rad}}{\pi} \cdot 180°$

   II) a) 2.46 *rad* b) $68°\ 45'\ 18''$ c) $14°15' = 14.25° \approx 0.25$ *rad* d) $140°\ 22'\ 29''$ e) 0.42 *rad*
   f) 0.96 *rad* g) 0.20 *rad* h) 1.66 *rad* i) 2.39 *rad* l) $81°\ 21'\ 36''$ m) $22°\ 55'\ 6''$ n) 3.50 *rad*

4) a) Circa 3.10 km b) Circa 1.59 cm 5) a) $\approx 25°\ 47'$ b) $\approx 36°\ 1'$

6) $\approx$ cm 11.5 7) $\approx$ m 0.86 8) m 9; $\approx$ m 0.157; ≈ 0.89 m 9) $\approx 28°\ 38'\ 52''$

3. CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Ora andremo a **RIDEFINIRE**, da un punto di vista ben più generale rispetto al paragrafo 1, le "**funzioni angolari**" **SENO**, **COSENO** e **TANGENTE**.

Le definizioni che daremo si riferiranno ad angoli qualsiasi, anche maggiori o uguali a 90°, anche maggiori di 360°, anche nulli o negativi, e tuttavia saranno perfettamente EQUIVALENTI, per gli angoli acuti, a quelle con cui abbiamo in precedenza avviato il discorso.

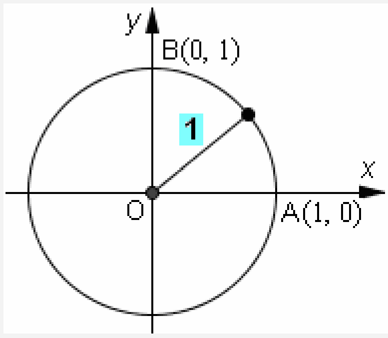
L'equivalenza fra definizioni "vecchie" e definizioni "nuove" verrà rigorosamente dimostrata in un paragrafo dedicato ai "teoremi sui triangoli rettangoli".

Lo studio delle funzioni angolari (ossia di quelle quantità, come il seno, il coseno e la tangente, il cui valore dipende dall'ampiezza di un angolo - o, in modo equivalente, dalla misura di un arco) viene chiamato "**GONIOMETRIA**" (in greco, **gonos = angolo** e **metron = misura**) oppure "**TRIGONOMETRIA**", termine che è praticamente un sinonimo di "goniometria" ma mette maggiormente in rilievo il fatto che, molto sovente, interessa applicare le formule studiate ai tre angoli interni di un *triangolo*.

Lo strumento concettuale che è posto alla base della goniometria è la "**circonferenza goniometrica**".

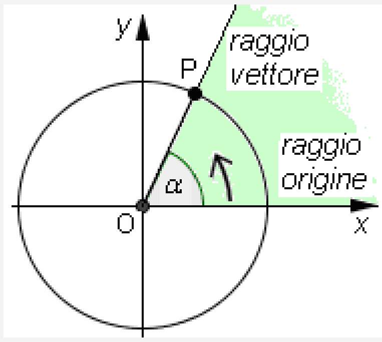
Cos'è, dunque, la "**CIRCONFERENZA GONIOMETRICA**"?

E' una circonferenza
- **avente il centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani**
- **e (importantissimo!) RAGGIO UGUALE A 1**
  (cioè, raggio uguale all'unità di misura del sistema di riferimento).



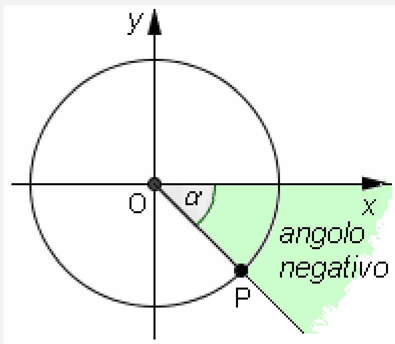
S'intende che sulla circonferenza goniometrica
gli ANGOLI vadano sempre riportati
- **con vertice nel centro (= nell'origine)**
- **a partire dal semiasse delle ascisse positive**
  (che sarà dunque sempre il "primo lato" dell'angolo)
- **e in SENSO ANTIORARIO .**

Il "primo lato" dell'angolo, ossia il semiasse delle ascisse positive, viene anche detto "**raggio origine**" dell'angolo, mentre il secondo lato (semiretta OP nella figura) è detto "**raggio vettore**".



Agli angoli riportati in senso ORARIO si assegna MISURA NEGATIVA:

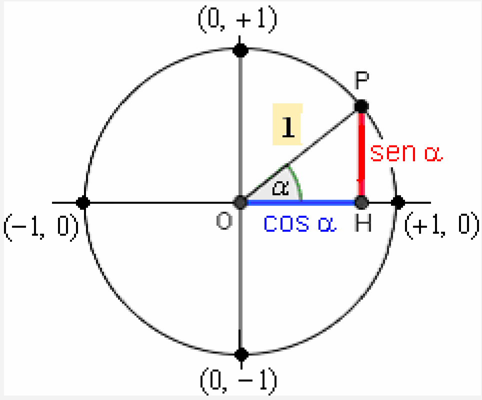
ad esempio,
l'angolo qui a fianco raffigurato misurerà $-45°$
(oppure, in radianti, $-\frac{\pi}{4}$).



4. SENO E COSENO DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo un certo angolo α
(che di norma sarà compreso fra 0° e 360°, ma potrebbe pure essere negativo, o maggiore di 360°):
cosa intendiamo per "seno di α ($\operatorname{sen}\alpha$)" e per "coseno di α ($\cos\alpha$)" ?

Andiamo a considerare il punto P in cui il raggio vettore di α interseca la circonferenza goniometrica:
- ♪ **il SENO di α è, per definizione, l'ORDINATA di P,**
- ♫ **mentre il COSENO di α è, per definizione, l'ASCISSA di P.**



$\color{red}{\text{sen}\,\alpha}$ = ordinata di P = misura (con segno) di HP
$\color{blue}{\cos\alpha}$ = ascissa di P = misura (con segno) di OH

La circonferenza goniometrica ha, come abbiamo detto, centro nell'origine e raggio 1; quindi i suoi punti hanno

- ascissa che può andare da un minimo di -1 a un max di $+1$;
- ordinata che può andare, anch'essa, da un minimo di -1 a un massimo di $+1$.

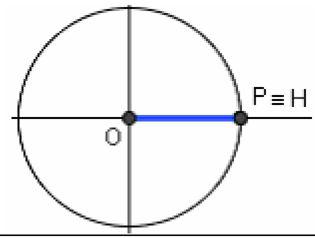
Pertanto **il seno e il coseno di un angolo α sono sempre compresi fra -1 e $+1$**:

$$\boxed{\forall\alpha,\quad -1\le \text{sen}\,\alpha\le 1\quad -1\le\cos\alpha\le 1}$$

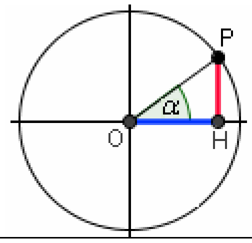
Si ha subito (Pitagora) la **1ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA**: qualunque sia l'angolo α (anche, eventualmente, con $\alpha>360°$, o $\alpha<0°$), è sempre

$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha=1}$ NOTA: $\text{sen}^2\,\alpha$, $\cos^2\alpha$ sono scritture abbreviate di: $(\text{sen}\,\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$

Per $\alpha=0°$ (0 radianti)
$\text{sen}\,\alpha=0;\ \cos\alpha=1$

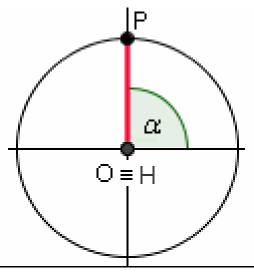


Nel $\boxed{1°\text{ quadrante}}$, ossia per $0°<\alpha<90°$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, è $\boxed{\text{sen}\,\alpha>0,\ \cos\alpha>0}$

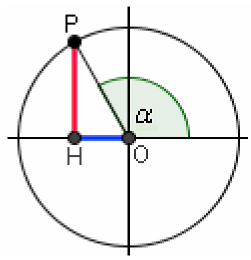


… e quando α cresce da 0° a 90°,
$\text{sen}\,\alpha$ cresce (da 0 a 1)
$\cos\alpha$ decresce (da 1 a 0)

Per $\alpha=90°$ ($\pi/2$ radianti)
$\text{sen}\,\alpha=1;\ \cos\alpha=0$

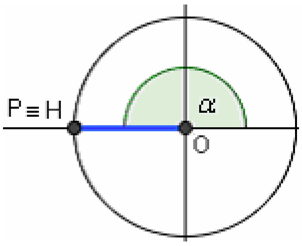


Nel $\boxed{2°\text{ quadrante}}$, ossia per $90°<\alpha<180°$ $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$, è $\boxed{\text{sen}\,\alpha>0,\ \cos\alpha<0}$

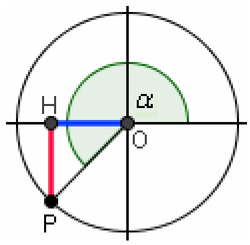


… e quando α cresce da 90° a 180°,
$\text{sen}\,\alpha$ decresce (da 1 a 0)
$\cos\alpha$ decresce (da 0 a -1)

Per $\alpha=180°$ (π radianti)
$\text{sen}\,\alpha=0;\ \cos\alpha=-1$

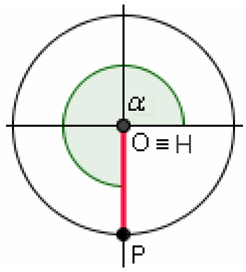


Nel $\boxed{3°\text{ quadrante}}$, ossia per $180°<\alpha<270°$ $\left(\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi\right)$, è $\boxed{\text{sen}\,\alpha<0,\ \cos\alpha<0}$

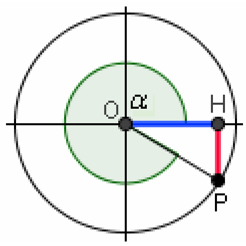


… e quando α cresce da 180° a 270°,
$\text{sen}\,\alpha$ decresce (da 0 a -1)
$\cos\alpha$ cresce (da -1 a 0)

Per $\alpha=270°$ $\left(\frac{3}{2}\pi\text{ radianti}\right)$
$\text{sen}\,\alpha=-1;\ \cos\alpha=0$



Nel $\boxed{4°\text{ quadrante}}$, ossia per $270°<\alpha<360°$ $\left(\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi\right)$, è $\boxed{\text{sen}\,\alpha<0,\ \cos\alpha>0}$

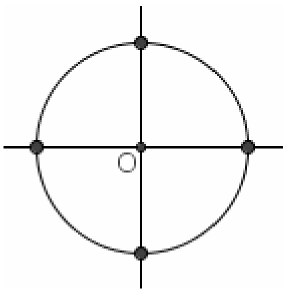


… e quando α cresce da 270° a 360°,
$\text{sen}\,\alpha$ cresce (da -1 a 0)
$\cos\alpha$ cresce (da 0 a 1)

Quando α raggiunge e poi supera i 360°, i valori di $\text{sen}\,\alpha$ e di $\cos\alpha$ "ripartono come se si ripartisse da 0° "; cioè, **le funzioni "seno" e "coseno" sono "periodiche di periodo 360° "**. Ne riparleremo.

Clicca QUI ⇨ per una bella figura "dinamica" (GeoGebra) sulla variazione di seno e coseno al variare dell'arco

ESERCIZI



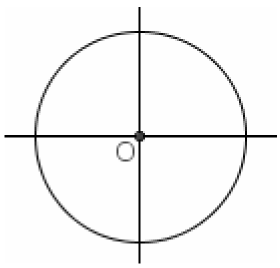
1) Nella circonferenza goniometrica in figura
   I) scrivi la coppia delle coordinate di ciascuno dei cinque punti evidenziati
   II) disegna: a) l'angolo di 135°; b) quello che misura $\frac{7}{6}\pi$; c) quello di $-80°$
   III) e disegna inoltre una coppia di angoli fra loro complementari: α e $90°-\alpha$ (potrebbero essere, ad esempio, 25° e 65° …) per constatare un fatto importante, che vale poi per qualsiasi valore di α, anche maggiore di 90° o di 180° o di 360°, anche negativo: si ha sempre
   $\boxed{sen(90°-\alpha)=cos\,\alpha}$ e $\boxed{cos(90°-\alpha)=sen\,\alpha}$

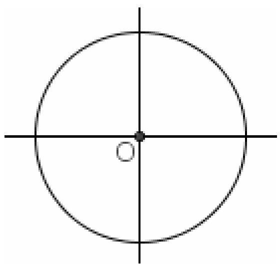
PASSANDO DA UN ANGOLO AL SUO COMPLEMENTARE, I VALORI DI SENO E COSENO SI SCAMBIANO FRA LORO.

2) Sapendo che $sen\,43° \approx 0.68$, $cos\,43° \approx 0.73$, riempi i puntini: $sen\,47° \approx ...$, $cos\,47° \approx ...$

3) a) Noto il valore $sen\,\alpha$ del seno di un angolo, ci sono due modi per ricavare $cos\,\alpha$. Quali?
   b) Determina: il coseno di un angolo ottuso il cui seno vale 0.39
   c) Determina il seno di un angolo acuto il cui coseno vale 0.14

4) Quali sono gli angoli, compresi fra 0° e 360°,
   a) il cui seno è uguale a 0? b) il cui coseno è uguale a 0? c) il cui seno è uguale a 1?
   d) il cui coseno è uguale a 1? e) il cui seno è uguale a -1? f) il cui coseno è uguale a -1?
   g) il cui seno è uguale al coseno? h) il cui seno è l'opposto del coseno?
   i) Se un angolo α compreso fra 0° e 360° ha coseno <0, in quale intervallo di ampiezze può trovarsi?

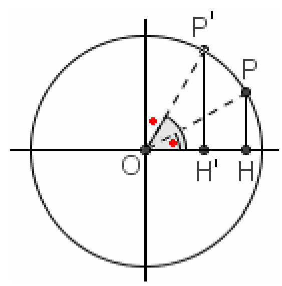




5)
$sen\,122°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,122°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$sen\,180°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,180°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$sen\,214°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,214°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$sen\,270°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,270°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$sen\,355°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$
$cos\,355°$ è: a) >0 b) <0 c) $=0$ d) $=+1$ e) $=-1$

6) Utilizzando una matita e una circonf. goniometrica, individua la risposta corretta:
$sen(\alpha+180°)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$sen(180°-\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$sen(90°-\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$sen(90°+\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$sen(-\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$
$cos(180°-\alpha)=?$ a) $sen\,\alpha$ b) $cos\,\alpha$ c) $-sen\,\alpha$ d) $-cos\,\alpha$

RISPOSTE



1) III) In effetti, nella figura qui a destra, si ha: $P\hat{O}H=\alpha$, $P'\hat{O}H'=90°-\alpha$,
   $PH=sen\,\alpha$, $OH=cos\,\alpha$, $P'H'=sen(90°-\alpha)$, $OH'=cos(90°-\alpha)$
   e si può osservare (e dimostrare) che è $P'H'=OH$, $OH'=PH$

2) $sen\,47°=cos(90°-47°)=cos\,43°\approx 0.73$
   $cos\,47°=sen(90°-47°)=sen\,43°\approx 0.68$

3) a) Primo modo: $cos\,\alpha=\pm\sqrt{1-sen^2\,\alpha}$ *dove il segno dev'essere deciso in base all'ampiezza dell'angolo*
   Secondo modo: con la macchinetta, risalire dal seno all'angolo (tasto sen^{-1}), poi calcolare il coseno (cos)
   b) ≈ -0.92 c) ≈ 0.99

4) a) 0°, 180°, 360° b) 90°, 270° c) 90° d) 0°, 360° e) 270°
   f) 180° g) 45°, 225° h) 135°, 315° i) $90°<\alpha<270°$

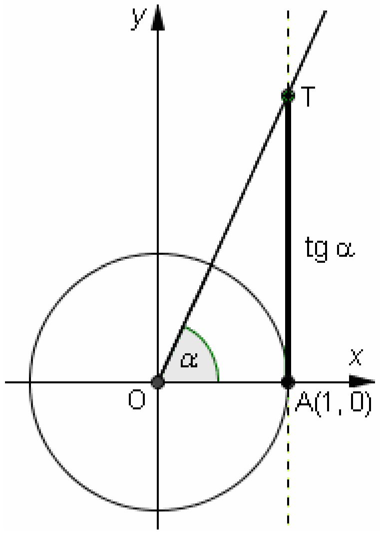
5) $sen\,122°>0$, $cos\,122°<0$, $sen\,180°=0$, $cos\,180°=-1$, $sen\,214°<0$,
   $cos\,214°<0$, $sen\,270°=-1$, $cos\,270°=0$, $sen\,355°<0$, $cos\,355°>0$

6) $sen(\alpha+180°)=-sen\,\alpha$, $sen(180°-\alpha)=sen\,\alpha$, $sen(90°-\alpha)=cos\,\alpha$,
   $sen(90°+\alpha)=cos\,\alpha$, $sen(-\alpha)=-sen\,\alpha$, $cos(180°-\alpha)=-cos\,\alpha$

5. TANGENTE DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo il punto A che sta "all'estrema destra", di coordinate $(1,0)$.
Per A tracciamo la retta "verticale", ossia quella parallela all'asse y,
e indichiamo con T il punto di intersezione fra tale retta e il raggio vettore di un dato angolo α
(o, eventualmente, il prolungamento del raggio vettore dalla parte dell'origine).

Si dice "tangente di α" l'ordinata del punto T, ossia la misura (con segno) del segmento AT in figura.

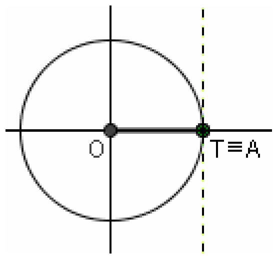


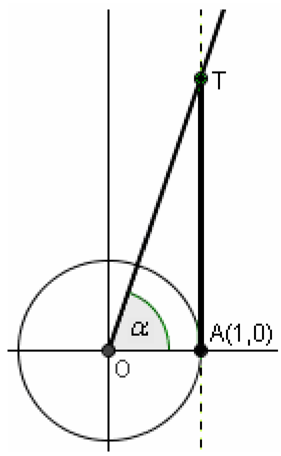
tgα = ordinata di T = misura (con segno) di AT

Clicca QUI ⇨
per una bella figura dinamica
(software GeoGebra)
che ti permetterà di osservare
la variazione della tangente goniometrica
al variare dell'angolo.

Per $\boxed{\alpha = 0° \text{ (0 radianti)}}$

$\boxed{\text{tg}\,\alpha = 0}$





Nel $\boxed{1° \text{ quadrante}}$, ossia

per $0° < \alpha < 90°$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$,

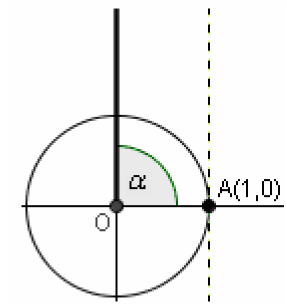
si ha $\boxed{\text{tg}\,\alpha > 0}$

… e quando α si avvicina a 90°,
mantenendosi però *minore* di 90°,
tgα diventa altissima,
"tende a $+\infty$".

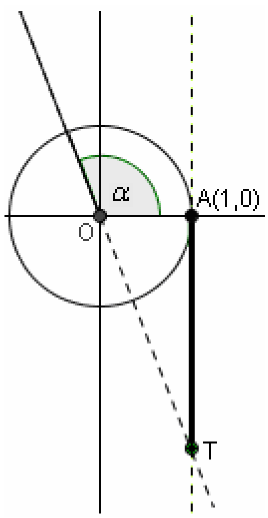
Ad esempio, si ha
$\text{tg } 89.97° \approx 1909.86$

Per $\boxed{\alpha = 90° \ (\pi/2 \text{ radianti})}$

$\boxed{\text{tg}\,\alpha \text{ NON ESISTE}}$!



Il raggio vettore, ossia
il secondo lato dell'angolo,
in questo caso coincide col
semiasse delle ordinate positive.
Ma allora il punto T "non si trova",
perché il raggio vettore
e la retta tratteggiata
sono parallele
e quindi non si incontrano.



Nel $\boxed{2° \text{ quadrante}}$, ossia

per $90° < \alpha < 180°$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$,

si ha $\boxed{\text{tg}\,\alpha < 0}$

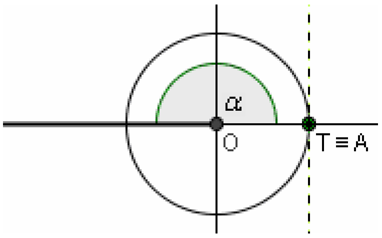
Il raggio vettore è una semiretta
immersa nel 2° quadrante,
ma la definizione di tangente goniometrica
prevede che si debba sempre considerare
l'intersezione fra la retta verticale per A
e il raggio vettore o, eventualmente
(come in questo caso), il suo prolungamento.

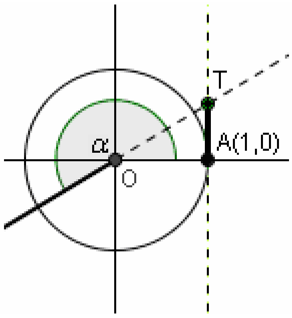
Quando α si avvicina a 90°,
mantenendosi però *maggiore* di 90°
(ossia: decrescendo),
tgα diventa altissima in valore assoluto,
ma negativa in segno:
si dice che "tende a $-\infty$"

Ad es., si ha $\text{tg } 90.01° \approx -5729.58$

Per $\boxed{\alpha = 180°\ (\pi \text{ radianti})}$

è di nuovo $\boxed{\text{tg}\,\alpha = 0}$





Nel $\boxed{3° \text{ quadrante}}$, ossia

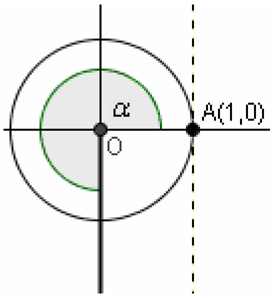
per $180° < \alpha < 270°$ $\left(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi\right)$,

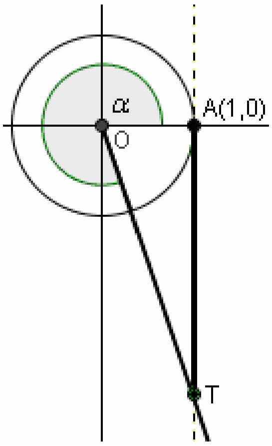
ritorna ad essere $\boxed{\text{tg}\,\alpha > 0}$

Osserva che,
appena l'angolo supera i 180°,
la tangente riprende gli stessi valori
che aveva a partire da 0°.

Per $\boxed{\alpha = 270°\ \left(\frac{3}{2}\pi \text{ radianti}\right)}$

$\boxed{\text{tg}\,\alpha}$, nuovamente, $\boxed{\text{NON ESISTE}}$.



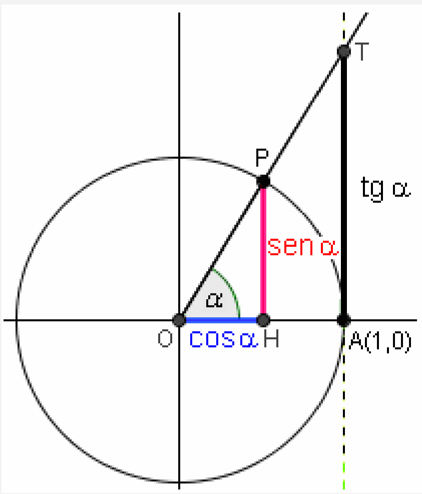


Nel $\boxed{4° \text{ quadrante}}$, ossia

per $270° < \alpha < 360°$ $\left(\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$,

ritorna ad essere $\boxed{\text{tg}\,\alpha < 0}$

Quando l'angolo α raggiunge e poi supera i 360°, i valori della tangente "ripartono come se si ripartisse da 0° ". Ma in fondo vediamo che questo "ricominciare da capo" si ha già quando l'angolo raggiunge e poi supera **180°**! Insomma, **la funzione "tangente" è "periodica di periodo 180°"**; di questo torneremo a parlare più avanti.



La figura qui a fianco mostra
$AT = \text{tg}\,\alpha$, $HP = \text{sen}\,\alpha$, $OH = \cos\alpha$.
I due triangoli OAT, OHP sono simili
(sono entrambi rettangoli,
hanno l'angolo α in comune
e i due angoli acuti di vertici T e P uguali
per differenza rispetto a 180°).
Perciò vale la proporzione $AT : OA = HP : OH$
la quale si può riscrivere come

Due triangoli
con gli angoli
rispettivamente uguali
sono detti "*simili*",
e hanno anche
i lati in proporzione.
Breve spiegazione
alle pagine 442-443.

$\text{tg}\,\alpha : 1 = \text{sen}\,\alpha : \cos\alpha$ ossia $\boxed{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}}$.

L'uguaglianza nel riquadro prende il nome di

2ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA.

Possiamo a questo punto osservare che la 2ª rel. fondamentale della goniometria è coerente col fatto che

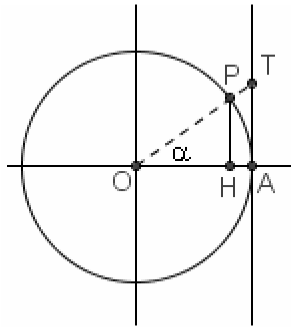
- **la tangente vale 0 per tutti e soli quegli angoli il cui seno è 0**, che sono poi: **0°, 180°, 360°**
  e, andando fuori dai confini del 1° giro, **360° + 180° = 540°, 540° + 180° = 720°, ... ; −180°, −360°, ...** ;
  più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
  $\boldsymbol{k \cdot 180°}$, essendo k un intero relativo ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$);
- **la tangente non esiste ("va all'infinito") per tutti e soli quegli angoli il cui coseno è 0** cioè **90°, 270°**
  e, andando fuori dai confini del 1° giro, **270° + 180° = 450°, 450° + 180° = 630°, ... ; − 90°, − 270°, ...**
  più in generale, dunque: per tutti gli angoli che si possono scrivere sotto la forma
  $\boldsymbol{90° + k \cdot 180°}$, essendo k un intero relativo ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$)

IL TENDERE A INFINITO. Dire, ad es., che **la tangente "va all'infinito a 90°"**, significa affermare che **quando l'angolo si fa molto vicino a 90°, la rispettiva tangente diventa grandissima in valore assoluto**:

- **per un angolo di pochissimo inferiore a 90°**, ossia **quando l'angolo tende a 90° "per difetto" (1° quadrante), la tangente è grandissima in valore assoluto e positiva ("tende a $+\infty$")**
- mentre **per un angolo appena superiore a 90°**, ossia **quando l'angolo tende a 90° "per eccesso" (2° quadrante), la tangente è grandissima in valore assoluto e negativa ("tende a $-\infty$").**

ESERCIZI

1)



Sui lati del triangolo OAT nella circonferenza goniometrica in figura, pianta le seguenti due bandierine: $\boxed{tg\,\alpha}$ $\boxed{1}$

Invece sui lati di OPH pianta le bandierine: $\boxed{sen\,\alpha}$ $\boxed{cos\,\alpha}$ $\boxed{1}$

Ora i due triangoli OHP, OAT sono "simili": cosa vuol dire?
Scrivi la proporzione fra i loro lati, che porta alla "2^a relazione fondamentale della goniometria".

2) Fra gli angoli compresi fra 0° e 360°,
   a) quali sono quelli la cui tangente è <0? b) quali quelli la cui tangente non esiste?
   c) quali quelli la cui tangente è uguale a $+1$? d) e a -1?

3) Cosa si può dire della tangente degli angoli il cui coseno vale 0?

4) Secondo te, a "occhio" (fai un disegno!), l'angolo acuto la cui tangente goniometrica misura 4 è compreso:
   a) fra 50° e 60° ? b) fra 60° e 70° ? c) fra 70° e 80°?
   Servendoti di una macchinetta calcolatrice, stabilisci la misura di quell'angolo (in gradi e primi), poi trasformala in radianti (approssimando ai centesimi).

5) Disponendo di una macchinetta calcolatrice, calcola $tg\,54°$ senza però mai pigiare il tasto tan.

6) E' vero che $tg\,(90°-\alpha)=\dfrac{1}{tg\,\alpha}$?

RISPOSTE

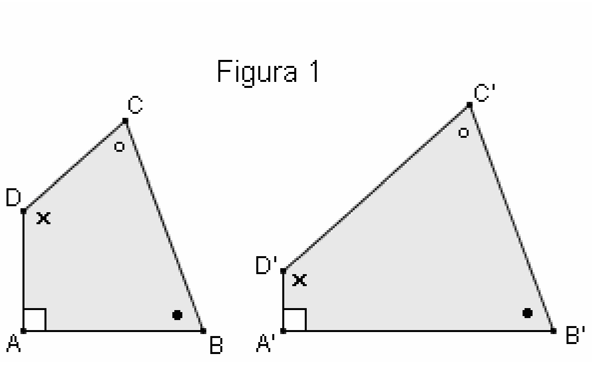
2) a) sono gli angoli α tali che $90°<\alpha<180°$ e $270°<\alpha<360°$ b) 90°, 270° c) 45°, 225° d) 135°, 315°
3) Quando il coseno di un angolo vale 0, la tangente di quell'angolo non esiste.
   Questo si vede a partire dalla circonferenza goniometrica, o anche dalla 2^a Relazione Fondamentale: essa ci dice che $tg\,\alpha = sen\,\alpha / cos\,\alpha$, e quando il denominatore è 0 una frazione non è definita.
4) c) $\approx 75°\,58'$; ≈ 1.33 radianti 5) Basta fare $sen\,54°/cos\,54°$. Si ottiene ≈ 1.376
6) Sì, è vero. $tg\,(90°-\alpha)=sen\,(90°-\alpha)/cos\,(90°-\alpha)=cos\,\alpha/sen\,\alpha=1/(sen\,\alpha/cos\,\alpha)=1/tg\,\alpha$

6. POLIGONI SIMILI (CENNI)

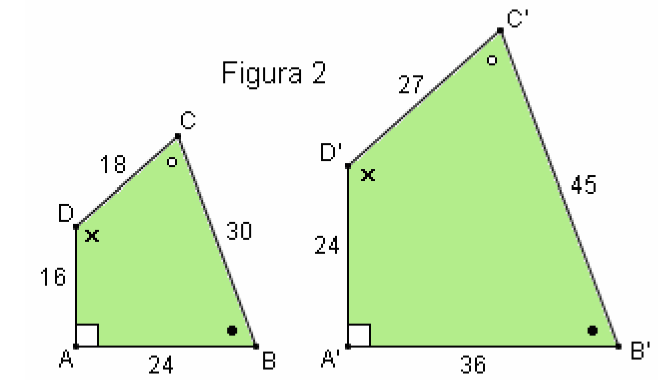
Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono "simili" se sono uno l'ingrandimento dell'altro.

Se ti sforzi di disegnare due poligoni, ad esempio due quadrilateri, in modo che **uno di essi appaia come l'ingrandimento dell'altro**, ti renderai conto che dovrai innanzitutto disegnarli con **gli angoli rispettivamente uguali**; … ma ciò **non sarà sufficiente**: ci vorrà qualcosa in più, e precisamente dovrai fare in modo che **i lati siano in proporzione**.

I due poligoni della figura sottostante hanno gli angoli rispettivamente uguali. Eppure, evidentemente, NON sono "uno l'ingrandimento dell'altro"…



... Invece i due poligoni di quest'altra figura, oltre ad avere gli angoli rispettivamente uguali, hanno pure i lati proporzionali, perché ciascun lato del primo poligono è i 2/3 del lato che gli corrisponde nel secondo poligono. In questa Figura 2, i due poligoni in gioco appaiono "uno l'ingrandimento dell'altro".



Dire che "hanno i lati corrispondenti proporzionali" significa dire
che il rapporto fra due lati corrispondenti è lo stesso per ogni coppia di lati corrispondenti.

Con riferimento alla *Figura 2*, $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'$.

Tale rapporto costante si dice "**rapporto di similitudine**".

Ad esempio, in *Figura 2*, il rapporto di similitudine dei due quadrilateri $ABCD$, $A'B'C'D'$ (presi in quest'ordine), è 2/3 (prendendoli invece nell'ordine opposto, il rapporto di similitudine sarebbe 3/2)

❑ TRIANGOLI SIMILI

Abbiamo visto che due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli risp. uguali e i lati corrisp. proporzionali.

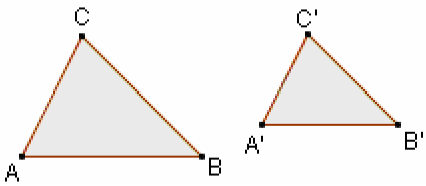
Nel caso dei triangoli, tuttavia, **questa definizione si rivela sovrabbondante**, perché si può dimostrare che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora hanno SENZ'ALTRO anche i lati corrispondenti proporzionali; cosa che invece non necessariamente accade per i poligoni con più di 3 lati.

Questo enunciato (di cui non diamo qui la dimostrazione) prende il nome di "Primo Criterio di Similitudine".

TEOREMA (1° Criterio di similitudine) - Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora sono simili, cioè hanno anche i lati corrispondenti proporzionali.

LA PROPORZIONALITA' SI PUO' "VEDERE" IN DUE MODI

Se abbiamo due triangoli simili, l'affermazione che "i lati corrispondenti sono proporzionali" può essere interpretata indifferentemente in due modi, che si equivalgono perfettamente fra loro.



$\mathbf{AB : A'B' = AC : A'C'}$
ma anche $\mathbf{AB : AC = A'B' : A'C'}$

Le due proporzioni qui a fianco sono equivalenti: si possono ricavare l'una dall'altra applicando la proprietà del permutare i medi.

♪ Si può dire che il rapporto tra due lati corrispondenti è costante, cioè che

"un lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente, come un altro lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente"

$AB : A'B' = AC : A'C' \qquad AB : A'B' = BC : B'C' \qquad AC : A'C' = BC : B'C'$

♫ … e si può anche dire che il rapporto di due lati del 1° triangolo è uguale al rapporto dei due lati corrispondenti del 2° triangolo (presi nello stesso ordine), cioè che

"un lato (del 1° triangolo) sta ad un altro lato (sempre del 1° triangolo) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo"

$AB : AC = A'B' : A'C' \qquad AB : BC = A'B' : B'C' \qquad AC : BC = A'C' : B'C'$

E' chiaro che ciascuno è liberissimo di "vedere", di esprimere, la similitudine, nel modo che preferisce!

Il 1° Criterio di Similitudine è un teorema che si applica con **grandissima frequenza** negli esercizi.
Osserviamo fra l'altro che si può subito concludere che due triangoli dati sono simili anche soltanto sapendo che hanno **DUE angoli rispettivamente uguali**,
perché **allora (per differenza rispetto a 180°) saranno certo uguali anche gli angoli rimanenti**.

COROLLARIO del 1° Criterio di similitudine
Una retta parallela ad un lato di un triangolo stacca da questo un triangolo simile al dato

"Corollario"= affermazione che è conseguenza immediata di un'altra

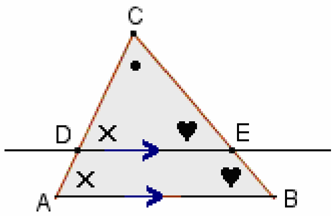


Figura qui a fianco: basta tener presente che, quando si hanno due parallele con trasversale, gli angoli corrispondenti sono uguali …

TEOREMA (2° Criterio di similitudine)
Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali, allora sono simili

Quindi possiamo ad es. dire che sono simili due triangoli ABC e PQR tali che: $\hat{A} = \hat{P}$, $AB = 5PQ$, $AC = 5PR$

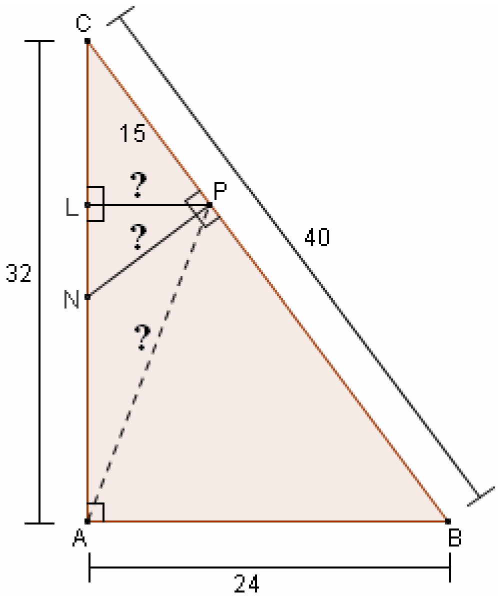
TEOREMA (3° Criterio di similitudine)
Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente proporzionali, allora sono simili

Ad es., se i lati di ABC misurano 6, 8 e 12 e quelli di DEF misurano 9, 12 e 18 (una volta e mezza), allora ABC e DEF sono simili. Se noi raddoppiamo, o triplichiamo, o dimezziamo, o riduciamo alla 3^a parte, … , insomma: moltiplichiamo per uno stesso numero $k > 0$, tutti e tre i lati di un triangolo, otterremo in questo modo un triangolo che sarà sicuramente simile a quello di partenza.

PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI: UN ESEMPIO SVOLTO

In un triangolo rettangolo ABC i due cateti AB e AC misurano rispettivamente 24 cm e 32 cm.
Sull'ipotenusa BC si prende un segmento CP = 15 cm e per P si tracciano:
- la perpendicolare ad AC, fino ad incontrare AC in L
- e la perpendicolare a BC, fino ad incontrare AC in N.

Quanto misurano i tre segmenti PL, PN, PA?



$B\hat{A}C = 90°$
$AB = 24\ \text{cm}$
$AC = 32\ \text{cm}$
$CP = 15\ \text{cm}$
$PL \perp AC$
$PN \perp BC$

$PL = ?$
$PN = ?$
$PA = ?$

Ripasso
PROPRIETA' FONDAMENTALE
DELLE PROPORZIONI:
$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$
"In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;
E, VICEVERSA,
se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due, allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione, a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di uno stesso prodotto".
Conseguenza:
se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;
se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto

Esempio $25 : x = 20 : 12 \qquad x = \dfrac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{4}{\cancel{20}}} = 15$

$$BC \underset{\text{Pitagora}}{=} \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40\ \text{cm}$$

Il simbolo
"simile con"
è un serpentello:
~

LPC ~ ABC (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

$PL : AB = PC : BC$
(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente)

$PL : 24 = 15 : 40$

$$\boxed{PL =} \dfrac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{5}{\cancel{40}}} = \boxed{9\ \text{cm}}$$

oppure

$PL : PC = AB : BC$
(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

$PL : 15 = 24 : 40$

$$\boxed{PL =} \dfrac{\overset{3}{\cancel{15}} \cdot \overset{3}{\cancel{24}}}{\underset{5}{\cancel{40}}} = \boxed{9\ \text{cm}}$$

NOTA
Nei due triangoli considerati, i due lati PL ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

In due triangoli simili, due lati si corrispondono se stanno opposti ad angoli uguali (o allo stesso angolo)

PNC ~ ABC (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

$PN : AB = PC : AC$
(un lato sta al suo corrispondente, come un altro lato sta al suo corrispondente)

$PN : 24 = 15 : 32$

$$\boxed{PN =} \dfrac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot 15}{\underset{4}{\cancel{32}}} = \boxed{\dfrac{45}{4}\ \text{cm}}$$

oppure

$PN : PC = AB : AC$
(un lato sta a un altro lato - sempre nello stesso triangolo - come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

$PN : 15 = 24 : 32$

$$\boxed{PN =} \dfrac{15 \cdot \overset{3}{\cancel{24}}}{\underset{4}{\cancel{32}}} = \boxed{\dfrac{45}{4}\ \text{cm}}$$

NOTA
Nei due triangoli considerati, i due lati PN ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

Per quanto riguarda PA, lo ricaveremo con Pitagora su APL, dopo aver calcolato AL:

$CL = \sqrt{PC^2 - PL^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12\ \text{cm} \qquad AL = AC - CL = 32 - 12 = 20\ \text{cm}$

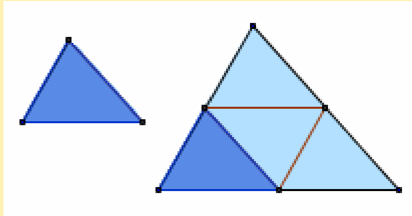
$$\boxed{PA =} \sqrt{AL^2 + PL^2} = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{400 + 81} = \boxed{\sqrt{481}\ \text{cm}}$$

Nel passaggio da un triangolo a un altro simile, LE AREE stanno fra loro come i QUADRATI di due lati omologhi (= corrispondenti).

Ad esempio: *Ogni lato raddoppia* ? Allora

- anche IL PERIMETRO *raddoppierà*,
- ciascuna ALTEZZA *raddoppierà*,
- ma l'AREA *diventerà il quadruplo*.

♥ *Lati* doppi? *Area* quadrupla!



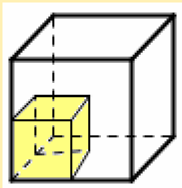
Se poi il lato triplica, l'area diventa 9 volte tanto (= subisce una moltiplicazione per $3^2 = 9$), ecc.

Questo vale, più in generale, per tutte le FIGURE PIANE sottoposte a DILATAZIONE O CONTRAZIONE:
nel passaggio da una figura piana ad un'altra che ne sia la dilatazione o la contrazione "in scala", LE AREE STANNO FRA LORO COME IL QUADRATO DEL RAPPORTO DI SCALA.

Nello SPAZIO TRIDIMENSIONALE,
avviene qualcosa del genere ma coi VOLUMI e coi CUBI anziché con le aree e coi quadrati.
Nel passaggio da una figura solida a un'altra che ne sia la DILATAZIONE o la CONTRAZIONE "in scala", I VOLUMI STANNO FRA LORO COME IL CUBO DEL RAPPORTO DI SCALA.

Se un solido subisce, ad es., una dilatazione in modo che ogni misura lineare raddoppi, il suo volume diventerà 8 volte tanto.

♥ *Spigoli* doppi? *Volume* moltiplicato per 8!



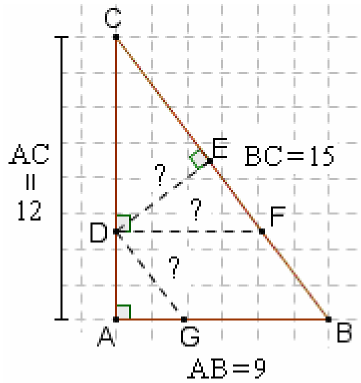
Il cubo di lato doppio
richiede 8 cubetti piccoli
per essere riempito.
Quindi il suo volume
è 8 volte il volume del cubetto piccolo.

ESERCIZI (le risposte sono a pag. 450)

1) Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha i lati di 9 cm, 12 cm, 15 cm.
Da un punto D preso sul cateto maggiore AC,
in modo che DC = 2AD,
si tracciano:

- la perpendicolare DE a BC;
- la parallela DF ad AB;
- la parallela DG a BC.

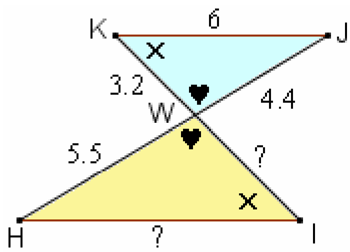
Determinare le misure dei tre segmenti DE, DF, DG.



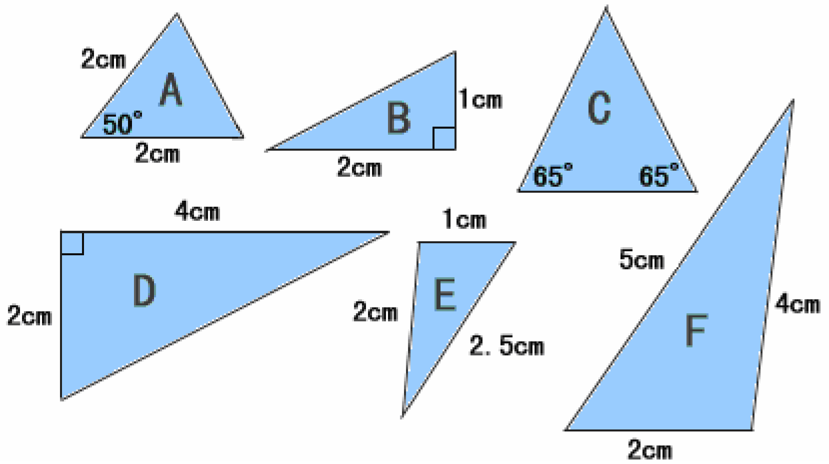
2) La figura mostra due triangoli KWJ, IWH i quali, per avere due angoli rispettivamente uguali, avranno (per diff. rispetto a 180°) uguale anche l'angolo rimanente e perciò saranno simili.
Del triangolo KWJ sono note (e indicate in figura) le misure di tutti e tre i lati; del triangolo IWH si sa solo che HW = 5.5

a) Determina i due lati rimanenti del secondo triangolo

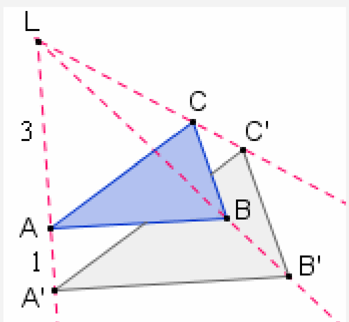
b) Per quale numero si deve moltiplicare l'area del triangolo più piccolo, se si vuole ottenere quella del triangolo più grande?



3) Ci sono triangoli simili in figura? (da http://www.ies.co.jp/math/)



4) A'B'C' è l'ombra di ABC.
Se LA = 3 e AA' = 1, qual è il rapporto fra il perimetro di A'B'C' e quello di ABC?
E qual è il rapporto fra le aree?

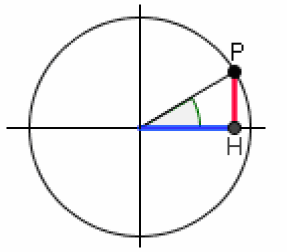


7. PERIODICITA' DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

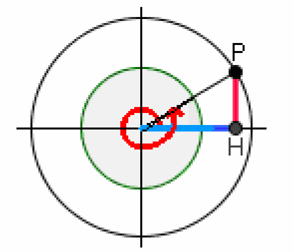
I VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE SENO, COSENO E TANGENTE "SI RIPETONO DOPO UN GIRO COMPLETO". Insomma:

sulla circonferenza goniometrica, un angolo di $30°$
"vale come un angolo di $30°+360°=390°$,
o come un angolo di $30°-360°=-330°$"
dal punto di vista dei valori delle tre funzioni goniometriche.

a) $30°$

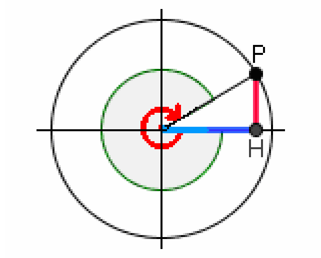


b) $30°+360°=390°$
Si prosegue, oltre l'angolo di 30°,
di un altro giro in senso ANTIORARIO …



… e il punto P
ritorna
NELLA STESSA
POSIZIONE
DI PRIMA!

c) $30°-360°=-330°$
Da 30° si toglie,
ruotando in senso ORARIO,
un giro completo
(cioè, tutti i 30° poi altri 330°):
l'effetto è di ripartire
dal semiasse delle ascisse positive
ruotando di 330° in senso ORARIO …

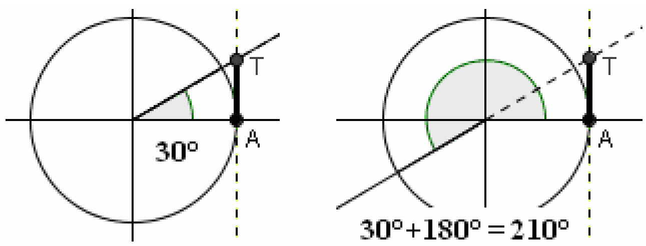


… e il punto P
ritorna
NELLA STESSA
POSIZIONE
DI PRIMA!

Più in generale, **prendendo un angolo α,
e aumentandolo, o anche diminuendolo, di un giro completo (= 360°)
o di un numero intero di giri completi (= un multiplo di 360°),
le tre funzioni goniometriche restano inalterate.**

**PER LA TANGENTE, ADDIRITTURA,
BASTA CHE L'ANGOLO α SUBISCA UN AUMENTO, O UNA DIMINUZIONE,
ANCHE SOLO DI "MEZZO GIRO" (= 180°)
O DI UN MULTIPLO DI MEZZO GIRO (= UN MULTIPLO DI 180°),
PERCHÉ TALE FUNZIONE RESTI INVARIATA.**

La figura qui a fianco, ad esempio,
mostra che
la tangente non cambia
se l'angolo subisce
un aumento di 180°.



Questo ripetersi del valore di $sen\,\alpha$ e $cos\,\alpha$,
quando α aumenta o diminuisce di 360° o di un multiplo di 360°,
e questo ripetersi del valore di $tg\,\alpha$,
quando α aumenta o diminuisce di 180° o di un multiplo di 180°,
viene chiamato la "**PERIODICITÀ**".
Si dice che

- **LE FUNZIONI "SENO" E "COSENO" SONO PERIODICHE DI PERIODO 360°,**
- **LA FUNZIONE "TANGENTE" È PERIODICA DI PERIODO 180°.**

8. CALCOLATRICI E FUNZIONI GONIOMETRICHE

Come fa la calcolatrice tascabile a determinare i valori delle funzioni goniometriche, dirette e inverse?

La matematica mette a disposizione, per calcoli di questo tipo, le *formule di Maclaurin*.
Colin Maclaurin o Mac Laurin, 1698-1746, fu un matematico scozzese. Eccole, queste fantastiche formule:

- ❑ $sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
- ❑ $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- ❑ $tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$

Il "punto esclamativo" indica il cosiddetto "**fattoriale**" di un intero: ad esempio,
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (*si legge*: "3 *fattoriale*"); $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Queste "**somme di infiniti addendi**" (= "**serie**") a secondo membro approssimano il valore esatto con una precisione che cresce al crescere del numero di addendi presi in considerazione.

- ❑ Inversa del seno (dal seno y fa tornare all'angolo x espresso in radianti, e compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$):

$$x = sin^{-1}(y) = arc\,sen\, y = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{y^7}{7} + \dots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$

  Si legge "arco seno di y" (significa, essenzialmente: "il più semplice fra gli archi aventi per seno y ")

- ❑ Inversa del coseno:

$$x = cos^{-1}(y) = arc\cos y = \frac{\pi}{2} - arc\,sen\, y = \frac{\pi}{2} - y - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{y^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{y^7}{7} - \dots \qquad (0 \le x \le \pi)$$

- ❑ Inversa della tangente: $x = tg^{-1}(y) = arc\,tg\, y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \dots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

Per testare la correttezza di queste formule, prova tu stesso a prendere, ad esempio,
la formula per $sen\, x$ e ad applicarla nel caso dell'angolo di 30°.

Prima di tutto dovrai passare ai radianti ottenendo, per l'angolo in gioco, 0.5236 *rad* (valore arrotondato).
Poi porrai $x = 0.5236$ e considererai, ad esempio, i primi 3 termini, eseguendo il calcolo.

Otterrai un valore che in piccola parte dipenderà anche dagli arrotondamenti eseguiti nei vari passaggi dallo strumento di calcolo di cui ti sei servito, ma che comunque dovrebbe essere vicino a 0.500003193, numero che differisce di pochissimo da quello che è il VERO seno di 30° ossia, come è noto, esattamente $1/2 = 0.5$.

Prendendo un numero maggiore di termini (e partendo da una misura in radianti affetta da un errore di arrotondamento più piccolo) il valore ottenuto sarebbe ancora più preciso.

Bene! Certe calcolatrici del passato, quando si digitava la misura di un angolo per poi pigiare il tasto della funzione *sin*, facevano proprio questo lavoro, di trasformare eventualmente i gradi in radianti ed eseguire la rispettiva formula di Maclaurin, con un numero di termini adeguato alla precisione che lo strumento poteva raggiungere. In realtà, dopo aver introdotto il discorso in questo modo per dare un'idea del *modus operandi* di una calcolatrice, dobbiamo dire che gli algoritmi più utilizzati per il calcolo automatico delle funzioni goniometriche sono *altri*, soprattutto il **metodo CORDIC**, di cui non ci possiamo qui occupare.

LE VARIANTI DELLA SIMBOLOGIA (SUI LIBRI, SUI COMPUTER, SULLE CALCOLATRICI)

a) Accade che, su certi libri di testo o sui tasti delle calcolatrici,
si incontrino leggére variazioni dei simboli da noi scelti:
ad esempio, al posto di **sen *x*** puoi trovare **sin *x***, al posto di **tg *x*** puoi trovare **tan *x***.
A volte, poi, viene usata una parentesi dove noi non l'abbiamo invece messa: **sen (*x*), cos (*x*)** ecc.

Analogamente per le funzioni goniometriche inverse:
- al posto di **arc sen** puoi trovare **arc sin** o anche $\mathbf{sen^{-1}}$ o $\mathbf{sin^{-1}}$
- al posto di **arc cos** puoi trovar scritto $\mathbf{cos^{-1}}$
- al posto di **arc tg** puoi trovar scritto **arc tan** o anche $\mathbf{tan^{-1}}$

Il " -1 " fa da PSEUDO-esponente: non significa qui "fare il reciproco", bensì "applicare la funzione inversa"

b) Occhio quando usi la **calcolatrice tascabile**, alla questione dei *radianti* e dei *gradi*!
Se vuoi calcolare, ad esempio, il seno dell'angolo di 2°,
devi controllare che la macchinetta sia impostata sui "gradi" e non sui "radianti".
C'è comunque **sempre un tasto, o una successione di tasti, che consente il passaggio dall'impostazione "in gradi" a quella "in radianti" e viceversa**.

♥ E in ogni caso, tramite la proporzione $\boxed{x_{rad} : \pi = x^\circ : 180^\circ}$
è ben facile transitare fra la misura di un arco in gradi e la misura dello stesso arco in radianti:

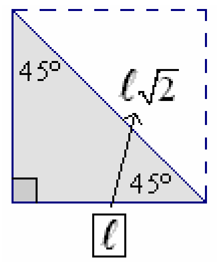
dai gradi ai radianti $\boxed{x_{rad} =} \frac{\pi \cdot x^\circ}{180^\circ} = \boxed{\frac{x^\circ}{180^\circ} \cdot \pi}$; **dai radianti ai gradi** $\boxed{x^\circ =} \frac{x_{rad} \cdot 180^\circ}{\pi} = \boxed{\frac{x_{rad}}{\pi} \cdot 180^\circ}$

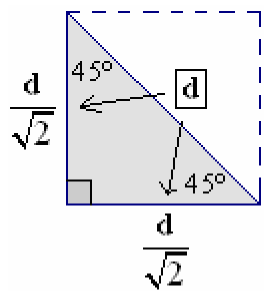
9. ALCUNE FORMULE UTILI

I valori delle funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente) degli angoli multipli di 30° o di 45° si possono trovare utilizzando le formule qui sotto riportate (facilmente ottenibili con semplici considerazioni di geometria elementare e utilizzando il T. di Pitagora). Esse permettono, nei cosiddetti "triangoli rettangoli particolari"(=quelli con gli angoli acuti di 30° e 60°, o di 45°), di ricavare tutti i lati conoscendo uno solo di essi.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 45°
(che può essere visto come la metà di un quadrato):

- **L'IPOTENUSA E' UGUALE AL CATETO MOLTIPLICATO $\sqrt{2}$**
- **IL CATETO E' UGUALE ALL'IPOTENUSA DIVISO $\sqrt{2}$**





Ricordiamo che
$\sqrt{2} = \mathbf{1.414213... \approx 1.4}$

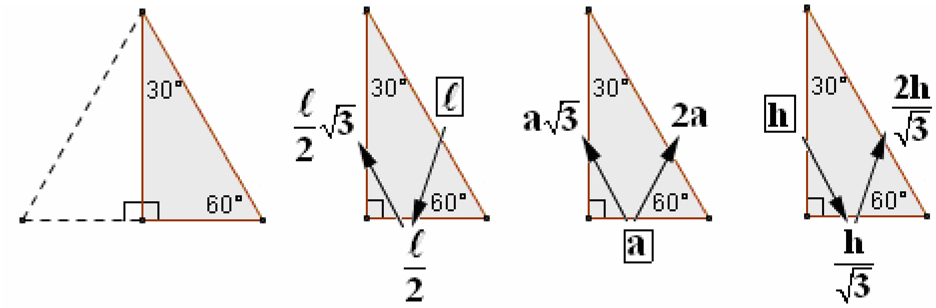
L'espressione $\frac{\mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$ *viene di norma "razionalizzata":*

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{2}}}} = \frac{\mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \boxed{\frac{\mathbf{d}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}$$

Scrivendo $\frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$
noi *non abbiamo alterato il valore* dell'espressione di partenza $d/\sqrt{2}$, perché l'abbiamo moltiplicata per 1 ! L'abbiamo invece "razionalizzata", cioè *ci siamo liberati della radice a denominatore*, ritenuta per varie ragioni fastidiosa.

In un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 30° e 60°
(che può essere visto come la metà di un triangolo equilatero):

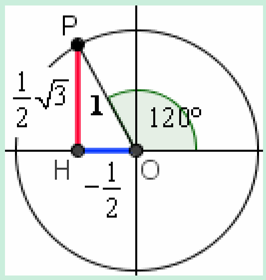
- **IL CATETO MINORE E' META' DELL'IPOTENUSA**
  e quindi l'ipotenusa è il doppio del cateto minore
- **IL CATETO MAGGIORE E' UGUALE AL MINORE MOLTIPLICATO $\sqrt{3}$** e quindi:
  il cateto maggiore è uguale a metà ipotenusa moltiplicato $\sqrt{3}$
  mentre il cateto minore è uguale al cateto maggiore diviso $\sqrt{3}$)



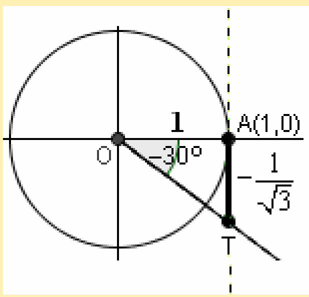
Ricordiamo che
$\sqrt{3} = \mathbf{1.73205... \approx 1.7}$

$$\boxed{\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{\mathbf{3}}}} = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{3}}} = \boxed{\frac{\mathbf{h}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}}$$

- **Quanto valgono sen 120° e cos 120°?**
  Facciamo un disegnino e ricordiamo che il raggio della circonf. goniometrica vale 1.
  I lati del triangolo rett. particolare OPH ($P\hat{O}H = 180° - 120° = 60°$) valgono dunque:
  1 (l'ipotenusa OP); $\frac{1}{2}$ (il cateto minore OH); $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (il cateto maggiore HP).
  Allora avremo, tenendo conto dei segni: $\text{sen } 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$



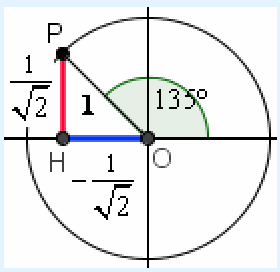
- **Quanto vale $\mathbf{tg}(-30°)$?**



Questa volta il segmento noto è OA = raggio = 1.

Si trae subito, tenendo conto che T ha ordinata negativa,
$\text{tg}(-30°) =$
$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- **Quanto valgono seno e coseno di 135° ?**

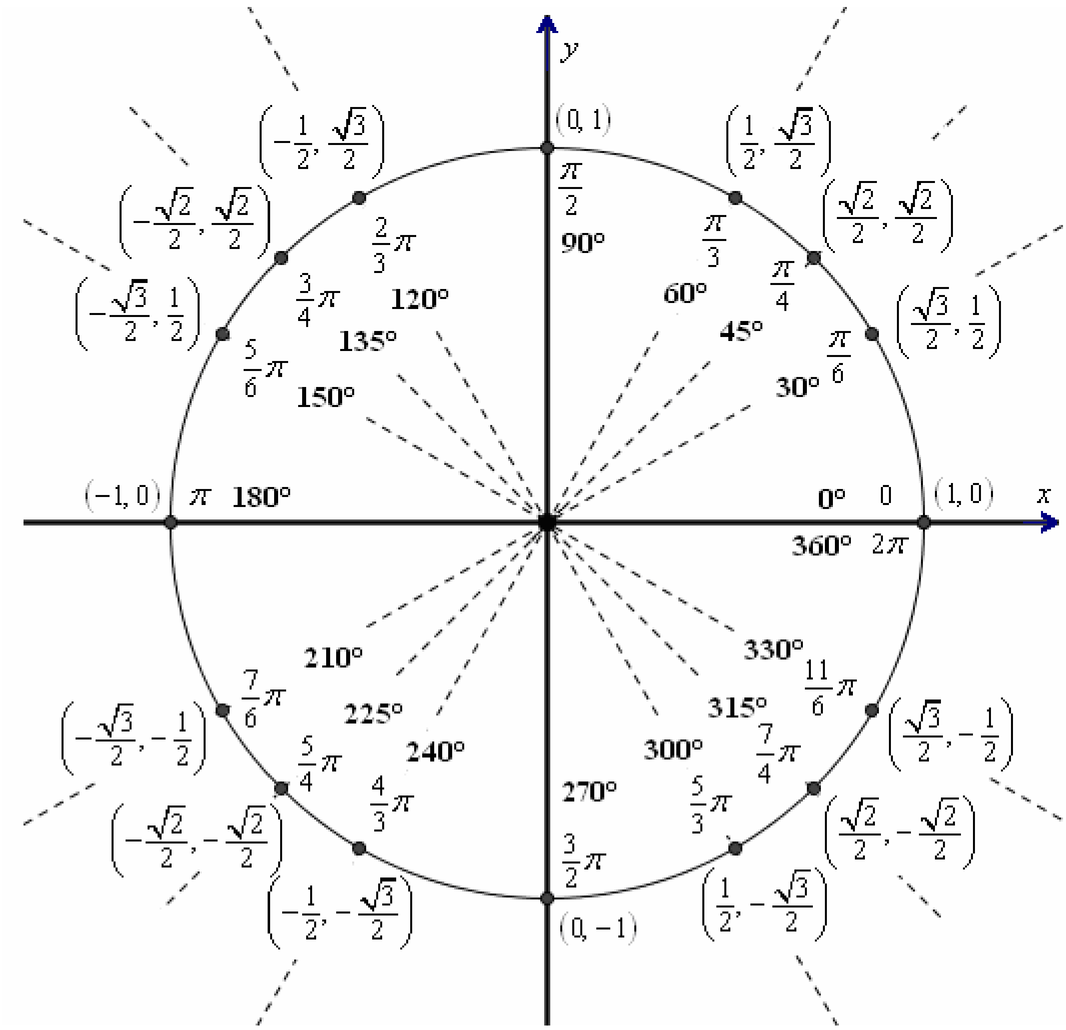


Il segmento noto è qui OP = raggio = 1.
Il triangolo rett. POH ha gli angoli acuti di 45°.
P ha ascissa negativa e ordinata positiva …

$\text{sen } 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

La seguente figura mostra i
VALORI DEL SENO E DEL COSENO DI ALCUNI ANGOLI "PARTICOLARI".



Il **coseno** è la 1ª coordinata, ossia l'**ascissa** del punto; il **seno** è la 2ª coordinata, ossia l'**ordinata**.

Tanto per fare un esempio: l'angolo di 120° ha come misura in radianti $\frac{2}{3}\pi$, e, dato che il punto associato è $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, risulta

$\cos 120° =$
$= \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\text{sen } 120° =$
$= \text{sen } \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ESERCIZI (risposte a pag. 450)

Tenendo coperta la figura qui sopra ☺, determina i valori seguenti:

1) $\text{sen } 30°$	2) $\cos 30°$	3) $\text{tg } 30°$	4) $\text{sen } 60°$	5) $\cos 60°$	6) $\text{tg } 60°$
7) $\text{sen } 45°$	8) $\cos 45°$	9) $\text{tg } 45°$	10) $\text{sen } 120°$	11) $\cos 120°$	12) $\text{tg } 120°$
13) $\text{sen } 150°$	14) $\cos 150°$	15) $\text{tg } 150°$	16) $\text{sen } 135°$	17) $\cos 135°$	18) $\text{tg } 135°$
19) $\text{sen } 0°$	20) $\cos 0°$	21) $\text{sen } 90°$	22) $\cos 90°$	23) $\text{sen } 180°$	24) $\cos 180°$
25) $\text{sen } 225°$	26) $\cos 225°$	27) $\text{tg } 225°$	28) $\text{sen } 210°$	29) $\cos 210°$	30) $\text{tg } 210°$
31) $\text{sen } 240°$	32) $\cos 240°$	33) $\text{tg } 240°$	34) $\text{sen } 270°$	35) $\cos 270°$	36) $\text{tg } 270°$
37) $\cos 270°$	38) $\text{sen } 315°$	39) $\cos 315°$	40) $\text{sen } (-60°)$	41) $\cos 300°$	42) $\text{tg } 330°$
43) $\text{tg } \pi$	44) $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	45) $\text{sen } \frac{\pi}{6}$	46) $\cos \frac{2}{3}\pi$	47) $\text{tg } \frac{5\pi}{2}$	48) $\text{sen } \frac{5}{4}\pi$
49) $\cos \frac{9}{4}\pi$	50) $\text{tg } 780°$	51) $\text{sen } 630°$	52) $\text{tg } \frac{11}{6}\pi$	53) $\text{sen } \frac{7}{6}\pi$	54) $\cos \frac{5}{3}\pi$

Stabilisci quali sono, nell'ambito del **primo giro ($0° \le x \le 360°$)**,
le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche (scrivi le soluzioni in **gradi**).

55) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$	56) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$	57) $\cos x = \frac{1}{2}$	58) $\cos x = -\frac{1}{2}$
59) $\text{tg } x = -1$	60) $\text{sen } x = 0$	61) $\cos x = 0$	62) $\text{tg } x = 0$
63) $\text{sen } x = \cos x$	64) $\text{tg } x = -\sqrt{3}$	65) $\cos x = \sqrt{2}/2$	66) $\text{sen } x + \cos x = 0$

RISPOSTE agli esercizi di pag. 449

1) $\frac{1}{2}$	2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	3) $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	5) $\frac{1}{2}$	6) $\sqrt{3}$
7) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	8) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	9) 1	10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	11) $-\frac{1}{2}$	12) $-\sqrt{3}$
13) $\frac{1}{2}$	14) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	15) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	16) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	17) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	18) -1
19) 0	20) 1	21) 1	22) 0	23) 0	24) -1
25) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	26) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	27) 1	28) $-\frac{1}{2}$	29) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	30) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
31) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	32) $-\frac{1}{2}$	33) $\sqrt{3}$	34) -1	35) 0	36) non esiste
37) 0	38) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	39) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	40) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	41) $\frac{1}{2}$	42) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
43) 0	44) -1	45) $\frac{1}{2}$	46) $-\frac{1}{2}$	47) non esiste	48) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
49) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	50) $\sqrt{3}$	51) -1	52) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	53) $-\frac{1}{2}$	54) $\frac{1}{2}$

55) $x=30°,\quad x=150°$
56) $x=210°,\quad x=330°$
57) $x=60°,\quad x=300°$
58) $x=120°,\quad x=240°$
59) $x=135°,\quad x=315°$
60) $x=0°,\quad x=180°,\quad x=360°$
61) $x=90°,\quad x=270°$
62) $x=0°,\quad x=180°,\quad x=360°$
63) $x=45°,\quad x=225°$
64) $x=120°,\quad x=300°$
65) $x=45°,\quad x=315°$
66) $x=135°,\quad x=315°$

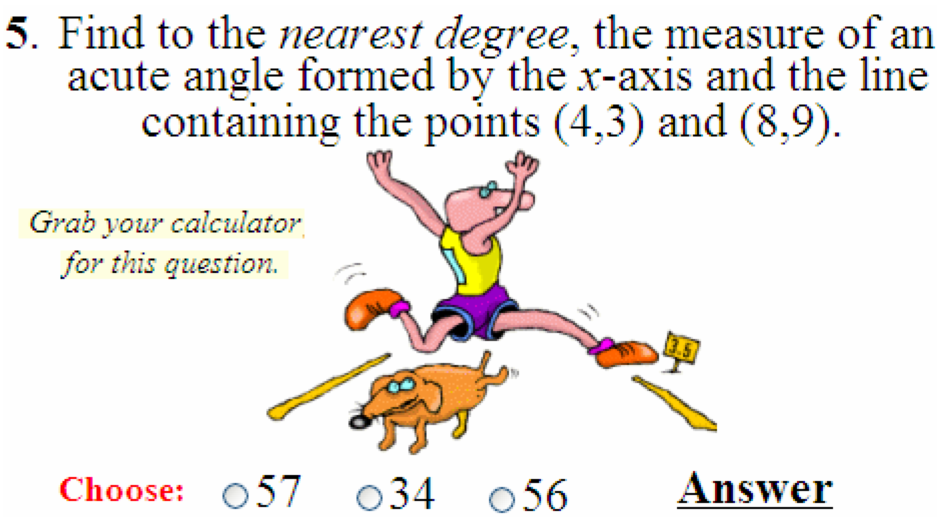


Immagine a fianco:
da www.regentsprep.org/

RISPOSTE agli esercizi di pag. 445

1) $DE=\frac{24}{5}\text{ cm}=4.8\text{ cm},\ \ DF=6\text{ cm},\ \ DG=5\text{ cm}$ 2) a) $WI=4,\ \ HI=7.5$ b) per $\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1.5625$

3) Sono simili:

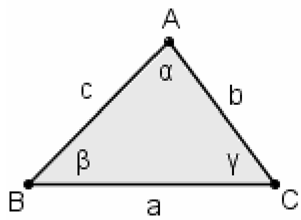
- A e C , perché hanno gli angoli rispettivamente uguali! 1° Criterio di similitudine.
  Infatti in A un angolo misura 50° e gli altri due, essendo uguali fra loro in quanto A è isoscele perché ha due lati entrambi di 2 cm, misureranno $(180°-50°)/2=65°$;
  e gli angoli di C misurano 65°, 65°, $180°-65°-65°=50°$
- B e D , in quanto hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali perché entrambi di 90°: 2° Criterio di similitudine.
- E e F, perché hanno i lati in proporzione: 3° Criterio.
  Ciascun lato di F è infatti il doppio del lato che gli corrisponde in E.

4) Il perimetro di $A'B'C'$ è i 4/3 di quello di ABC; l'area di $A'B'C'$ è i 16/9 dell'area di ABC.

10. TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Questi teoremi mostrano che le definizioni di seno, coseno e tangente date all'inizio del capitolo, coi triangoli rettangoli, vanno d'accordo con le definizioni successive, quelle basate sulla circonferenza goniometrica.

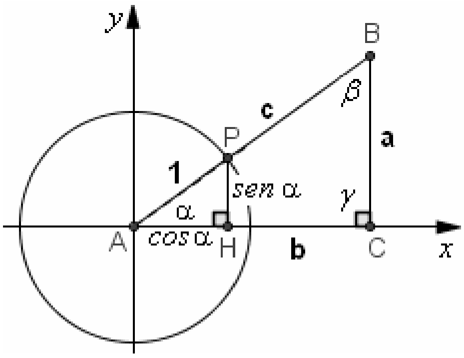
Adotteremo di preferenza, quando possibile, la **SIMBOLOGIA STANDARD** illustrata dalla figura qui a fianco:
- triangolo ABC ,
- lati *a, b, c* (*a* opposto al vertice A, ecc.)
- angoli α, β, γ ($\alpha = \hat{A}$ ecc.)



TEOREMA

In un triangolo rettangolo, il SENO di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa

$$\boxed{sen\ \alpha = \frac{cateto\ opposto}{ipotenusa} = \frac{a}{c}}$$



Dimostrazione
Nel piano su cui giace il triangolo rettangolo ABC, disegniamo un riferimento cartesiano di origine A, il cui semiasse delle ascisse positive coincida con la semiretta AC.
Su questo riferimento, disegniamo poi la circonferenza goniometrica, di raggio 1.
I due triangoli rettangoli ABC, APH sono simili, quindi possiamo scrivere la proporzione

$$\text{HP : AP = CB : AB} \quad \text{da cui} \quad sen\,\alpha : 1 = a : c \quad \frac{sen\,\alpha}{1} = \frac{a}{c} \quad sen\,\alpha = \frac{a}{c}, \quad c.v.d$$

CONSEGUENZA IMMEDIATA: $\boxed{a = c \cdot sen\ \alpha}$ cioè $\boxed{cateto = ipotenusa \cdot seno\ dell'angolo\ opposto}$

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, il COSENO di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto adiacente e l'ipotenusa

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{cateto\ adiacente}{ipotenusa} = \frac{b}{c}}$$

La dimostrazione è analoga alla precedente: poiché i due triangoli rettangoli ABC, APH sono simili avremo

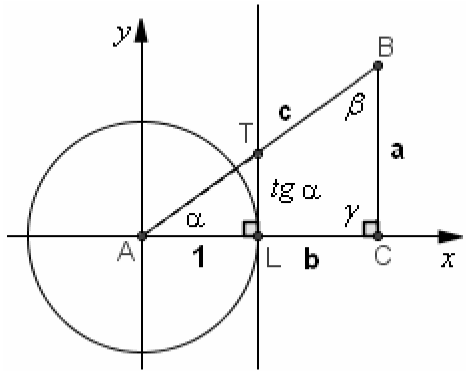
$$\text{AH : AP = AC : AB} \quad \text{da cui} \quad \cos\alpha : 1 = b : c \quad \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{b}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad c.v.d.$$

CONSEGUENZA IMMEDIATA: $\boxed{b = c \cdot \cos\ \alpha}$ cioè $\boxed{cateto = ipotenusa \cdot coseno\ dell'angolo\ adiacente}$

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, la TANGENTE di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e il cateto adiacente

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{cateto\ opposto}{cateto\ adiacente} = \frac{a}{b}}$$



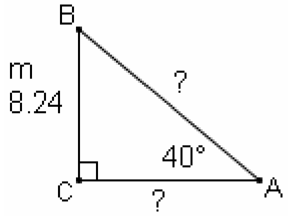
Dimostrazione
Questa volta sfruttiamo la similitudine fra ABC e ATL.

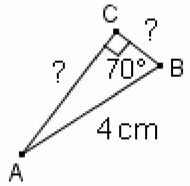
$$\text{LT : AL = CB : AC} \quad \text{quindi}$$

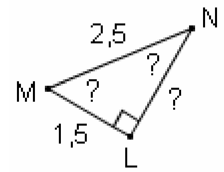
$$tg\,\alpha : 1 = a : b \quad \frac{tg\,\alpha}{1} = \frac{a}{b} \quad tg\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad c.v.d.$$

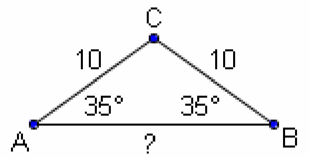
CONSEGUENZA IMMEDIATA: $\boxed{a = b \cdot tg\ \alpha}$; $\boxed{cateto = altro\ cateto \cdot tangente\ dell'angolo\ opposto\ al\ primo}$

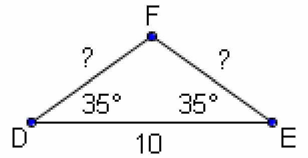
ESERCIZI

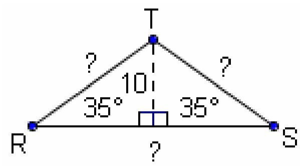
1) a) 

b) 

c) 

2) a) 

b) 

c) 

11. TEOREMI SUI TRIANGOLI QUALSIASI

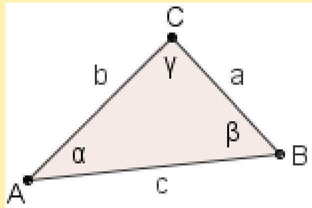
Si potrebbero dimostrare gli interessanti teoremi che seguono, validi per triangoli qualsiasi.

- Il **TEOREMA DEI SENI**:
  "in un triangolo, è costante il rapporto fra ciascun lato e il seno dell'angolo opposto"

$$\frac{a}{sen\ \alpha}=\frac{b}{sen\ \beta}=\frac{c}{sen\ \gamma}$$

- e il **TEOREMA DEL COSENO**:
  in ogni triangolo, valgono le relazioni scritte nel riquadro qui a destra →

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$



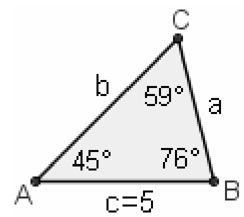
ESERCIZI

3) Mediante il Teorema dei Seni,
determina gli elementi incogniti del triangolo qui a fianco raffigurato.

INDICAZIONE: Per ricavare b, si prenderà la formula $\frac{b}{sen\ \beta}=\frac{c}{sen\ \gamma}$

che coinvolge b e il lato noto c,

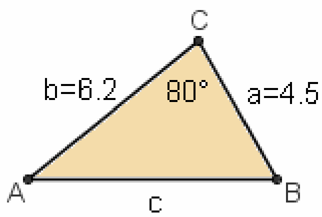
per risolverla rispetto a b: $b=\frac{c}{sen\ \gamma}\cdot sen\ \beta$



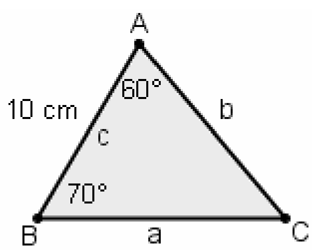
4) Serviti del Teorema del Coseno per trovare il 3° lato del triangolo in figura.
Successivamente, col T. dei Seni, determina le misure dei seni degli angoli e infine risali al valore, approssimato ai gradi, degli angoli stessi.

INDICAZIONE: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\ldots$ dopodiché:

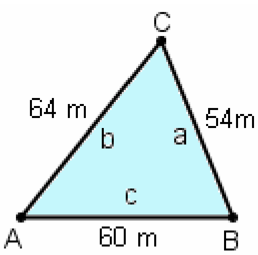
$\frac{a}{sen\ \alpha}=\frac{c}{sen\ \gamma}$; $\frac{sen\ \alpha}{a}=\frac{sen\ \gamma}{c}$; $sen\ \alpha=\ldots$, da cui il valore di α .



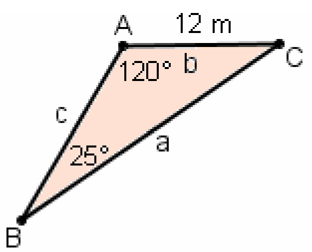
5) Applicando in modo opportuno i teoremi dei seni e del coseno, "risolvi" i triangoli in figura, ossia, a partire dai 3 elementi noti, determinane i tre elementi rimanenti.



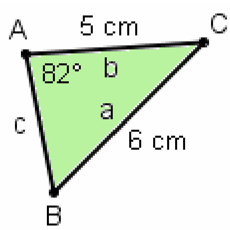
a)



b)



c)



d)

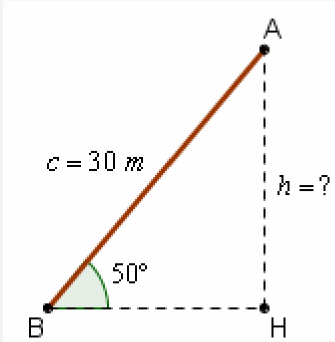
RISPOSTE

1) a) $CA\approx 9.82$ m, $AB\approx 12.82$ m b) $CA\approx 3.76$ m, $CB\approx 1.37$ m c) $LN=\sqrt{2.5^2-1.5^2}=2$; $\widehat{M}\approx 53°8'$, $\widehat{N}\approx 36°52'$
2) a) $AB\approx 16.38$ b) $DF=FE\approx 6.10$ c) $RT=TS\approx 17.43$; $RS\approx 28.56$
3) $a\approx 4.1$, $b\approx 5.7$ 4) $c\approx 7$, $\alpha\approx 39°$, $\beta\approx 61°$
5) a) 50°, ≈11.3, ≈12.3 b) ≈52°, ≈68°, ≈60° c) 35°, ≈24.6, ≈16.3 d) ≈56°, ≈42°, ≈4.1

12. ESERCIZI

ESEMPI SVOLTI

1) Un bambino sta facendo volare un aquilone, in una giornata di primavera in cui il vento è molto forte. La corda è tesa, viene utilizzata per intero, e forma col suolo un angolo di 50°. La lunghezza della corda è di 30 metri. Quanto si è sollevato dal suolo l'aquilone?



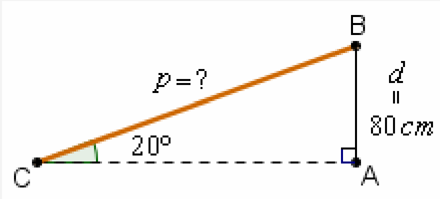
FAI SEMPRE UN DISEGNO SCHEMATICO
DELLA SITUAZIONE!
E SUL DISEGNO,
RIPORTA CON CURA I VARI DATI!

$cateto = ipotenusa \cdot seno\ dell'angolo\ opposto \qquad h = c \cdot sen\ \hat{\mathrm{B}} = 30 \cdot sen\ 50° \approx 30 \cdot 0.77 \approx 23\ m$

NOTA - Data la manifesta approssimazione da cui sono affette le informazioni, *non sarebbe stato per niente logico* scrivere il risultato con una precisione maggiore! Anzi, alla fine andrebbe aggiunto ancora 1 metro circa … l'altezza da terra della mano che regge la corda!

2) Una passerella, che permette di superare un dislivello di 80 cm, forma un angolo di 20° col suolo. Quanto è lunga la passerella?

$$d = p \cdot sen\ 20° \ \rightarrow \ p = \frac{d}{sen\ 20°} \approx \frac{80}{0.342} \approx 234\ cm$$

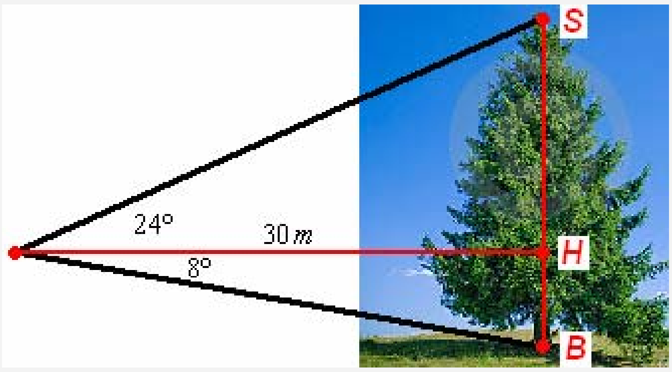


Abbiamo approssimato al risultato del calcolo alle unità perché *una precisione maggiore non avrebbe avuto molto senso*: i dati sono evidentemente affetti da incertezza, e nella pratica la passerella, quando viene sistemata, dovrà andare leggermente più in alto degli 80 cm …

3) Si valuta l'altezza di un bell'abete stando alla finestra di una villa distante 30 metri. Se l'osservatore ne vede la base e la sommità rispettivamente secondo
- **un angolo di depressione di 8°**
- **e un angolo di elevazione di 24°,**

quant'è alto l'abete?

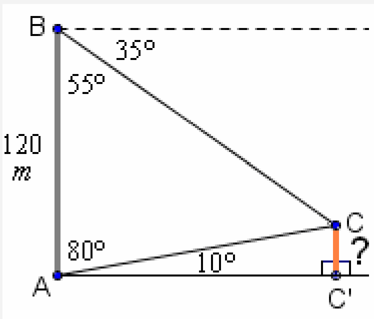
$\mathrm{HB} = 30 \cdot tg\,8° \approx 30 \cdot 0.14 = 4.2\ m$
$\mathrm{HS} = 30 \cdot tg\ 24° \approx 30 \cdot 0.45 = 13.5\ m$
Totale: circa $4.2 + 13.5 \approx 18$ *metri*



PIU' COMPLICATO: SI APPLICA IL "TEOREMA DEI SENI"

4) Un grattacielo di 120 metri si affaccia su di una grande piazza al centro della quale sopravvive un'antica chiesetta romanica. Se la sommità del campanile è vista:
- **dalla *cima* del grattacielo, secondo un angolo di depressione di 35°**
- **e dalla *base* del grattacielo, secondo un angolo di elevazione di 10°**

quanto è alto il campanile?



Consideriamo il triangolo ABC in figura, del quale conosciamo $\mathrm{AB} = m\,120$, $\mathrm{A\hat{B}C} = 55°$, $\mathrm{B\hat{A}C} = 80°$, per determinare, col Teorema dei Seni, la lunghezza di AC.

$$\frac{\mathrm{AC}}{sen\,\mathrm{A\hat{B}C}} = \frac{\mathrm{AB}}{sen\,\mathrm{B\hat{C}A}} \rightarrow \mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AB} \cdot sen\,\mathrm{A\hat{B}C}}{sen\,\mathrm{B\hat{C}A}} = \frac{120 \cdot sen\,55°}{sen\,45°} \approx 139\ m$$

Dopodichè: $\mathrm{C'C} = \mathrm{AC} \cdot sen 10° \approx 139 \cdot 0.174 \approx 24\ m$

SENO, COSENO, TANGENTE (E RISPETTIVE INVERSE): TRIANGOLI RETTANGOLI

5) Un asse lungo 3 metri è appoggiato a una parete, e forma col pavimento un angolo di 53°.
Determina l'altezza a cui arriva l'asse sulla parete.

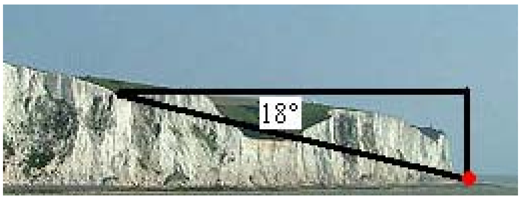
6) Per misurare l'altezza di uno scoglio una persona vi sale in cima,
fissa alla roccia il capo di una fune e lancia l'altro capo a un amico sulla spiaggia.
La fune viene tesa e risulta misurare metri 11.8; l'angolo che la fune forma con la spiaggia è di 65°.
Quanto è alto dunque lo scoglio?

7) Se una scala lunga m 2.4, appoggiata al muro, forma col pavimento un angolo di 75°,
quanto dista dalla parete la linea d'appoggio della scala sul pavimento?

8) Se una lunga scala, appoggiata alla facciata di una casa, forma col selciato un angolo di 77°,
e la sua linea d'appoggio dista dalla parete 60 cm, quanto misura la scala?
E a che altezza arriva sulla parete?

9) Il monumentale antico castagno di Melle, in Val Varaita (provincia di Cuneo),
a distanza di 180 metri ha un "angolo di elevazione" è di 10°.
Quanto è alto il castagno?

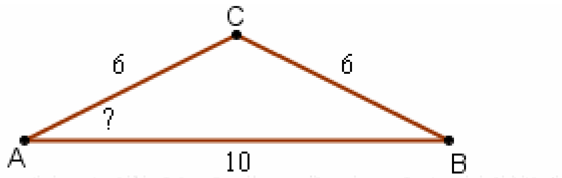
10) Da un punto delle bianche scogliere di Dover,
alto 100 metri sul mare,
si vede una boa con angolo di depressione di 18°.
Quanto dista la boa dalle scogliere?

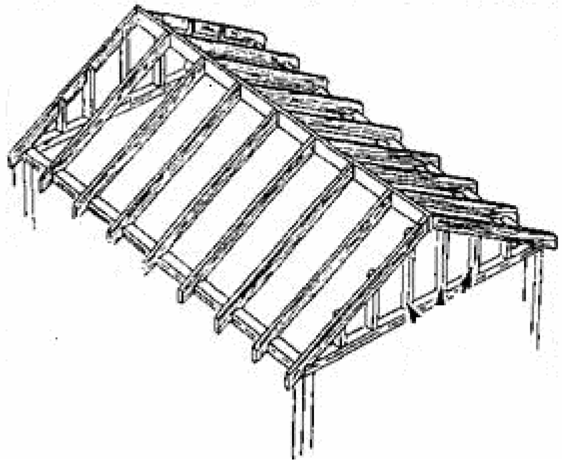


11) Dalla cima di una collina sto intravedendo col binocolo un amico, seduto sul cucuzzolo
di un'altra collina 250 metri più alta, sotto un angolo di elevazione di 12°.
Qual è la distanza in linea d'aria fra me e l'amico?

12) Se l'asta di una bandiera, alta metri 8.40, ha un'ombra lunga metri 3.50,
che angolo formano i raggi solari col terreno?

13) La figura mostra schematicamente la sezione di un tetto.
Le travi sono lunghe 6 metri
e la larghezza AB della struttura è di m 10.
Si domanda qual è l'inclinazione in gradi
di ogni trave rispetto all'orizzontalità.

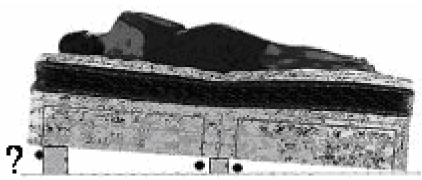




14) Una scala a pioli è appoggiata sul muro esterno
di una casa; la scala è lunga metri 3.25,
e l'altezza che raggiunge sul muro è di metri 3.
Che inclinazione ha la scala?
Qual è la distanza fra la linea d'appoggio
della scala sul selciato e la parete?

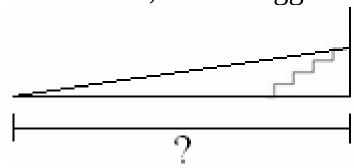
15) Un'asta lunga un metro, appoggiata verticalmente
sul terreno piano, vi proietta un'ombra di m 0.6.
Nello stesso istante un palo della luce
proietta un'ombra di 3.3 m.
Quanto è alto il palo della luce?
Che inclinazione ha, in gradi, la luce solare?

16) La IBT, Inclined Bed Therapy,
sostiene che dormire su di un letto inclinato di 5°
(rialzato dalla parte della testa)
porta notevoli benefici alla salute,
specie per gli ammalati di determinate patologie.
Se l'asse del letto è lungo 2 m, di quanto
andrà sollevata la base per applicare la terapia?



17) In un piccolo paese due signore anziane, che abitano in appartamentini situati uno di fronte all'altro,
da parti opposte di una strada larga 4 metri, si fanno consegnare le compere a turno, e si passano poi
le buste con la roba attraverso un cestello fatto scorrere lungo una fune che collega le due finestre.
Sapendo che la finestra più bassa è a 3.5 metri dal livello della strada, e quella più alta a 4.2 metri,
trovare approssimativamente l'angolo di inclinazione della fune rispetto all'orizzontalità.

18) Il parroco di una chiesa decide di far realizzare una rampa in modo che le carrozzine dei fedeli disabili possano affrontare il dislivello di 1 metro e 20 cm, fra la piazza e la porta della chiesa, fino ad oggi superabile solo attraverso i gradini di una scalinata.
La normativa richiede che la pendenza della rampa non superi gli 8°.
Un muratore del paese si offre di svolgere il lavoro gratuitamente,
ma … che lunghezza dovrebbe avere, al minimo,
la base d'appoggio sul selciato di questa rampa?



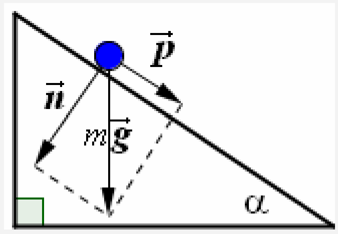
19) Un aeroplano è diretto dagli Stati Uniti verso una località nell'Italia del Nord.
Se sta volando sull'oceano a un'altezza di 9500 metri dal suolo, e vede la linea costiera del Portogallo sotto un angolo di depressione di 15°, quanti km deve ancora viaggiare prima di sorvolare il litorale?

20) Mentre scattavo una foto a Parigi, la cima della Tour Eiffel, che è alta 324 metri,
mi appariva secondo un angolo di elevazione di 60°. A che distanza ero dalla torre?
a) Fra i 150 e i 160 metri? b) Fra i 160 e i 170? c) Fra i 170 e i 180? d) Più di 180 metri?

21) Dalla terrazza (alta 30 metri) alla sommità di un condominio, si osserva una bicicletta avvicinarsi.
Se l'angolo di depressione passa da 10° a 60°, che distanza ha percorso nel frattempo il ciclista?

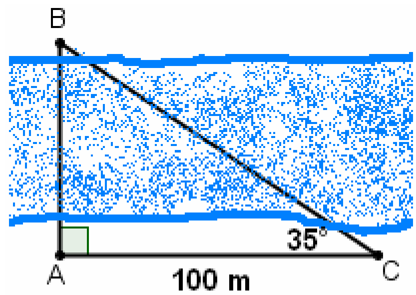
22) Sulla parete di un grattacielo c'è una vetrata davvero molto alta.
Un geometra in pensione, incuriosito, si posiziona di fronte all'edificio, a una distanza di 50 metri dalla facciata, e constata che la base della vetrata e la sua sommità vengono viste, da lì, secondo angoli di elevazione di 23° e di 52° rispettivamente. Quanto misura la vetrata?

23) Quando un corpo si trova su di un piano inclinato, su di esso agisce, verticalmente, la forza di gravità il cui modulo è dato da $F = mg$,
dove m è la massa del corpo, $g \approx 9.8\ m/s^2$ è l'accelerazione di gravità.
Ora, la forza verticale ha una componente $\vec{n}$ normale (=perpendicolare) al piano inclinato, e un'altra componente $\vec{p}$ parallela alla sua superficie.
$\vec{n}$ viene neutralizzata dalla resistenza del piano stesso
alla deformazione ("reazione vincolare");
$\vec{p}$ è responsabile del movimento del corpo, che scivolerà, o rotolerà,
lungo il piano inclinato, restando invece in equilibrio qualora gli venga
applicata una forza uguale e contraria al vettore $\vec{p}$. Ma quanto misura il modulo di $\vec{p}$?



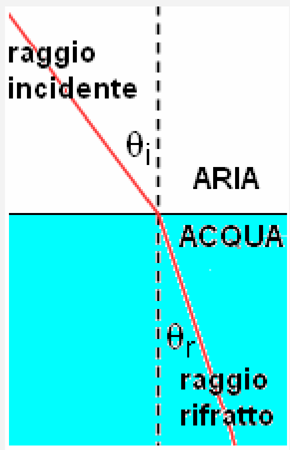
a) $mg\,sen\,\alpha$ b) $mg\cos\alpha$ c) $mg\,tg\,\alpha$ d) $\dfrac{mg}{sen\,\alpha}$ e) $mg\,sen(90°-\alpha)$

24) Supponiamo di voler misurare la larghezza di un fiume, senza poterlo attraversare.
Ci porremo sulla riva, in A, proponendoci di determinare
la distanza AB, essendo B un punto sulla riva opposta,
tale che la retta AB sia perpendicolare alla direzione del fiume.
Spostiamoci lateralmente di una certa distanza AC;
sia ad esempio AC = 100 metri. L'angolo in A è di 90°.
Ora misuriamo, con gli strumenti del geometra,
l'angolo che la congiungente CB forma con AC.
Supponiamo, per fissare le idee, che si abbia $A\hat{C}B = 35°$.
Allora AB misurerà … dillo tu!

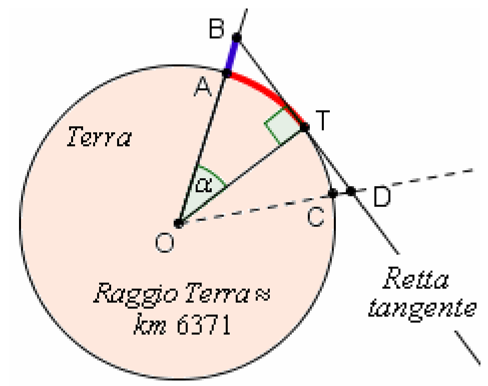


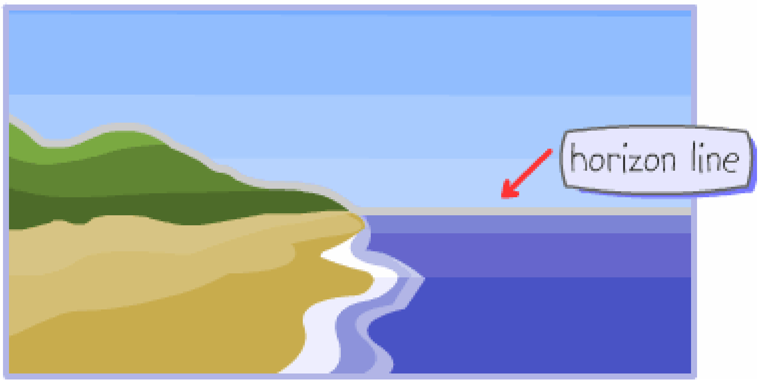
25) Osserva la figura qui a destra. Essa si riferisce a ciò che accade
quando un raggio di luce penetra nell'acqua provenendo dall'aria.
Il raggio di luce viene deviato, avvicinandosi alla normale,
cioè alla retta che è perpendicolare alla superficie di separazione aria-acqua.
Una legge, chiamata legge di Snell, regola la relazione fra i due angoli
θ_i e θ_r cosiddetti "di incidenza" e "di rifrazione", ossia degli angoli
formati con la normale dal raggio incidente e, rispettivamente, rifratto.
Tale legge però non chiama in causa direttamente gli angoli, bensì i loro *seni*.

Si ha, precisamente, $\dfrac{sen\ \theta_i}{sen\ \theta_r} = costante = n_{AB}$ dove n_{AB} è detto
"indice di rifrazione del mezzo B (in cui la luce entra)
relativo al mezzo A (da cui la luce proviene)".
Nel caso aria-acqua è $n_{AB} \approx 1.333$. Sapresti ora determinare l'angolo
di rifrazione aria-acqua supposto che l'angolo di incidenza sia di 50°?



ORIZZONTE





www.schoolsliaison.org.uk

La distanza, dall'osservatore AB, della linea dell'orizzonte, è l'arco $\overset{\frown}{AT}$.
E' fondamentale tener presente, in queste questioni, che

- **UNA RETTA TANGENTE A UNA CIRCONFERENZA È SEMPRE PERPENDICOLARE AL RAGGIO CHE VA AL PUNTO DI CONTATTO** ($O\hat{T}B = 90°$)
- **la Terra ha forma "quasi" sferica, con raggio lungo circa 6371 km**.

Si dice che α è l' "angolo al centro" che "sottende" l'arco $\overset{\frown}{AT}$.
La semiretta OD potrebbe interessare in relazione al problema di stabilire quanto dev'essere alto un oggetto sulla superficie terrestre, per poter essere visto da un osservatore posto in T, o posto in B.

26) Una scogliera è alta 100 metri sul mare. Quanto dista, in linea d'aria, per un osservatore seduto sul prato in cima alla scogliera, la linea dell'orizzonte?
Sulla distanza dell'orizzonte: ⇨

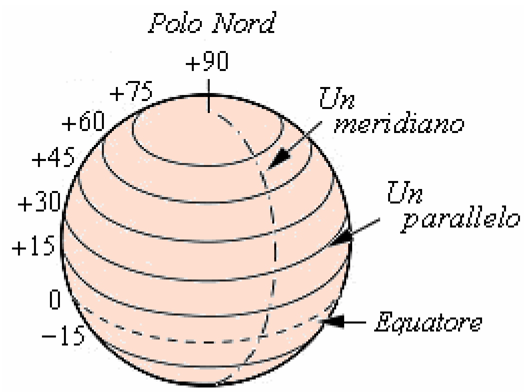
27) Un faro su di un'isoletta rocciosa dista dalla costa 45 km. Quanto è alta sul mare, al minimo, la sua lampada, se la può vedere una persona sdraiata sulla spiaggia?

TERRA E LUNA

28) La Terra non ha forma esattamente sferica; ma supponendola invece una sfera perfetta, e assumendo come lunghezza del raggio 6371 km, qual è il cambio di latitudine in un viaggio di 1000 km verso Sud?

29) Se ci si sposta da Sud verso Nord di un primo (= sessantesimo di grado) di latitudine, supponendo che la Terra sia una sfera perfetta di raggio uguale a 6371 km, che distanza si percorre?

30) La Luna ha un diametro di circa 3476 km, ed è vista dalla Terra, a seconda delle fasi della sua orbita, secondo un angolo che può variare, ma che si mantiene vicino a 31'. Se uno studente ha a disposizione questi dati, che valutazione può dare della distanza Terra-Luna?



Latitudini: Nord = positive; Sud = negative
L'equatore ha latitudine 0, il polo Nord $+90°$, il polo Sud $-90°$

31) Due punti A e B sono sullo stesso meridiano terrestre, uno a Nord e l'altro a Sud dell'equatore, alle latitudini $+1°$ e $-3°$ rispettivamente. Quanto distano i due punti lungo la superficie terrestre, supposto di approssimare la Terra ad una sfera perfetta di raggio 6371 km ?

32) La bella Anja risiede presso il circolo polare artico, alla latitudine Nord di 66° (+66°).
L'atletico Zwanga è africano: sta sullo stesso meridiano di Anja, ma alla latitudine Sud di 23° ($-23°$).
Comunicano tramite Internet!
Una sera, Anja racconta di vedere la luna esattamente all'orizzonte;
Zwanga invece riferisce di osservarla proprio sopra la propria testa.
E' noto che il raggio della Terra è di circa 6371 km.
Si può dare, con questi dati, una valutazione della distanza Terra-Luna?

PENDENZA DI UNA STRADA

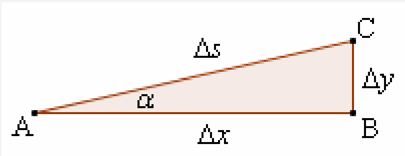
La **"PENDENZA" di un tratto rettilineo di strada**

è definita come il quoziente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AB}$

e quindi, in definitiva,

equivale alla tangente goniometrica di un angolo:

$$\boxed{pendenza = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha}$$



Se si moltiplica per 100 il numero $pendenza = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha$, si ottiene la cosiddetta "**pendenza percentuale**".

QUALCHE ESEMPIO
(qui consideriamo il **caso rettilineo**, ma il succo del discorso si può poi estendere al caso generale, come specifica la NOTA a fianco della tabella):

Angolo	**Pendenza**	**Pendenza %**
45°	1	100°
60°	1.73	173%
80°	5.67	567%
30°	0.58	58%
20°	0.36	36%
10°	0.18	18%
90°	infinita	infinita

NOTA
E se la strada non è rettilinea?
Beh, allora ha senso parlare piuttosto di "**pendenza media**".
Questa è definita come rapporto tra il dislivello Δy tra il punto di partenza e quello di arrivo e la distanza orizzontale Δx.
Quest'ultima NON è però la distanza effettivamente percorsa, bensì è lunghezza della curva che si otterrebbe proiettando il percorso vero e proprio su di un piano perfettamente orizzontale.

La definizione è identica a quella che si dà in Geometria Analitica
(pendenza, *slope*, di una retta = coefficiente angolare).

Ma dal punto di vista pratico, per una data strada, come si procederà?

Beh, Δy si determina con uno strumento denominato "altimetro", dopodiché si può scegliere se
- rilevare Δx con l'ausilio di una mappa
- oppure rilevare Δs con un contachilometri poi calcolare Δx col Teorema di Pitagora.

Tuttavia, c'è anche chi, dopo aver utilizzato il contachilometri per trovare Δs,
non si "scomoda" a fare il pur semplice calcolo, e assume come valore per la pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta s}$ anziché $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

In effetti, se, come avviene per la grandissima maggioranza delle strade,
la pendenza non supera il 20% (circa 11.3°), l'errore che si commette in questo modo è inferiore al 5%;
addirittura, nel caso di pendenze $\leq 10\%$, l'errore che si commette
prendendo $\Delta y / \Delta s$ al posto del più corretto $\Delta y / \Delta x$ non va oltre lo 0.5%.

Diciamo quindi che nel concreto è come se qualcuno applicasse la definizione

$$pendenza = \Delta y / \Delta s$$

anziché

$$pendenza = \Delta y / \Delta x\,,$$

ma per pendenze piccole la differenza fra le due alternative è, ai fini pratici, irrilevante.

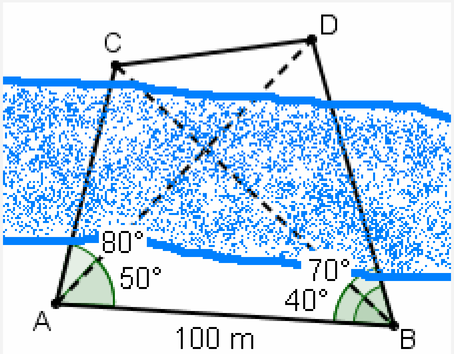
33) Determina la pendenza percentuale di un tratto rettilineo di strada che si elevi di un angolo $\alpha = 14°$

34) Una pendenza è del 7% se calcolata mediante la formula $\Delta y / \Delta x$.
E se invece per il calcolo si utilizzasse la $\Delta y / \Delta s$?

35) Una pendenza è del 100% se calcolata mediante la formula $\Delta y / \Delta x$.
E se invece per il calcolo si utilizzasse la $\Delta y / \Delta s$?

36) Un segnale di discesa pericolosa.
Se il contachilometri mi dice che ho percorso 800 metri,
di quanti metri sono sceso in verticale?

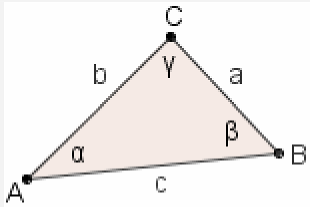
37) Vogliamo misurare la distanza fra due punti C e D
che si trovano entrambi al di là di un fiume;
fiume che una impetuosa corrente ci impedisce di attraversare.
Siano A, B due punti sulla nostra riva,
situati ad una certa distanza AB
che per fissare le idee supponiamo essere di 100 metri.
Ora andiamo a misurare i 4 angoli $C\hat{A}B,\ D\hat{A}B,\ D\hat{B}A,\ C\hat{B}A$.
Supponiamo ad esempio che sia
$C\hat{A}B = 80°,\ D\hat{A}B = 50°,\ D\hat{B}A = 70°,\ C\hat{B}A = 40°$.



Applichiamo ORA, al triangolo ABD,
il **TEOREMA DEI SENI**, introdotto a pag. 452:

in un triangolo, è costante il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto

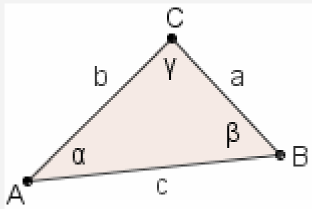
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$



$$\frac{AD}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{AB}{\operatorname{sen} \ldots} \quad \text{quindi} \quad \frac{AD}{\operatorname{sen} 70°} \approx \frac{100\,\mathrm{m}}{0.87}$$

da cui potremo ricavare la misura di AD. Si troverà AD = …
Sei in grado ora di ricavare, allo stesso modo, la misura di AC?
Su quale triangolo occorrerà operare? Procedi: troverai AC = …
Andiamo ora a considerare il triangolo CAD.
Di esso conosciamo due lati e l'angolo fra essi compreso,
quindi potremo determinare il lato rimanente con il **TEOREMA DEL COSENO** (sempre a pag. 452):

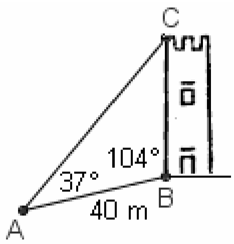
in ogni triangolo, è
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$



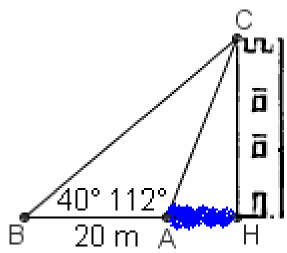
Allora avremo $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos(80° - 50°)}$.

Fai il calcolo poi vai a vedere a pag. 462 se la misura trovata è corretta.

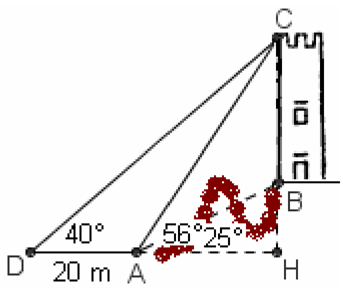
38) Supponi di voler misurare l'altezza di una torre,
che si trovi sulla cima di un'altura, e che ti separi dalla torre
un tratto ad inclinazione costante (vedi figura a fianco).
Come fare?
Determina l'altezza della torre quando i dati sono quelli in figura.



39) Questa volta la torre si trova sul piano orizzontale,
ma è inaccessibile per via di un fossato.
Noi d'altra parte desidereremmo determinare sia la sua altezza,
sia la sua distanza HA dall'osservatore posto in A.
Mettiti al lavoro, coi dati della figura.



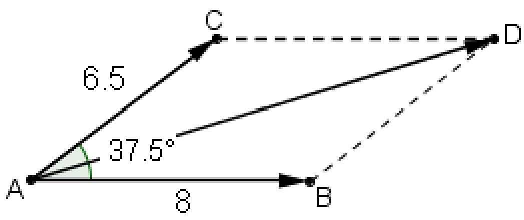
40) L'osservatore della torre da misurare
si trova su di un piano orizzontale,
mentre la torre è sopraelevata e inaccessibile.
Determina la sua altezza, coi dati della figura
$\left(B\hat{A}H = 25°,\ C\hat{A}H = 56°,\ C\hat{D}A = 40°\right)$



41) Supponiamo che due forze abbiano modulo 8 e 6.5 rispettivamente, e formino un angolo di $37°\,30'$.

Come determinare il modulo della forza risultante?

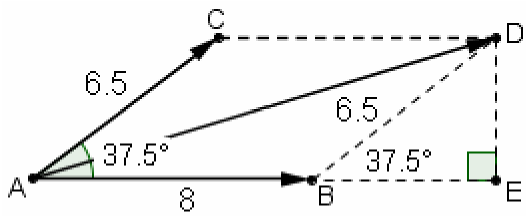
Beh, è noto che la risultante di due forze si ottiene applicando (figura) la "regola del parallelogrammo", e allora potremmo considerare ad es. il triangolo ABD, il cui angolo di vertice B misura evidentemente … , per applicargli il "teorema del Coseno":



$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot cos(180° - 37°30')}$$

IN ALTERNATIVA
(ma il procedimento è un po' più lungo)
si può proiettare il punto D sulla retta AB in E,
e pensare che l'angolo $E\hat{B}D$ è anch'esso di $37°30'$
in quanto …
per cui si avrà

$$ED = BD \cdot sen37°30' = ...$$
$$BE = BD \cdot cos37°30' = ...$$

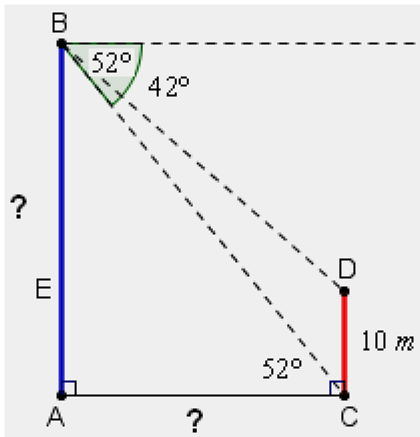


Basterà poi applicare il T. di Pitagora al triangolo AED.

Effettua i calcoli, e constata che si ottiene lo stesso risultato determinato con l'altro metodo.

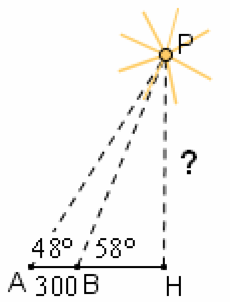
42) Dalla sommità di un edificio molto elevato la casa di fronte, che è alta 10 metri, viene vista in modo tale che l'angolo di depressione del suo tetto è di 42° mentre l'angolo di depressione della sua base è di 52°.

Quanto sono distanti i due fabbricati?
E quanto è alto il primo?



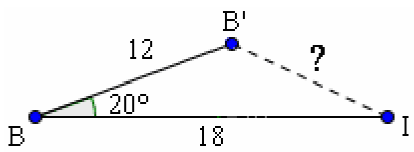
43) Un oggetto non identificato nel cielo è fisso in una posizione P, e due osservatori A e B sul terreno, a distanza $AB = m\ 300$, lo vedono guardando dalla stessa parte, sotto le inclinazioni $\hat{A} = 48°$ e $\hat{B} = 58°$. Il triangolo PAB sta su di un piano che è perpendicolare al terreno.

Quanto dista da terra l'oggetto?



44) Un marinaio deve raggiungere una piccolissima isoletta distante 18 miglia; ma si addormenta, e intanto la barca procede per 12 miglia lungo una direzione sfasata di 20° rispetto a quella giusta.

Quanto dista ora la barca dall'isola?

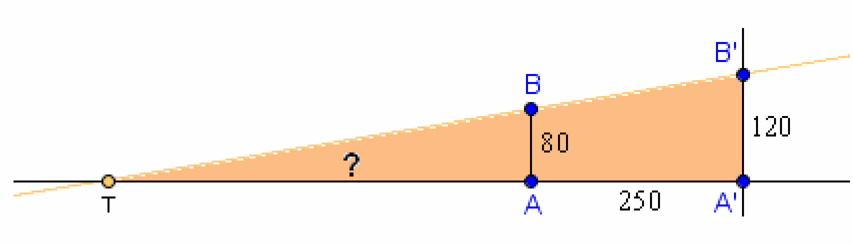


45) Un giocatore di golf colpisce con decisione la pallina, posta nel punto P, distante 90 metri dalla posizione B della buca; ma esagera, e il lancio è addirittura di 120 metri … oltre tutto, la direzione è sbagliata: 15° più a sinistra rispetto alla linea PB.

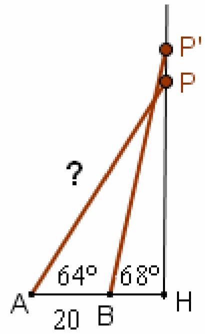
Quanto dista dopo il lancio la pallina dalla buca?

DUE PROBLEMI CHE RICHIEDONO DI IMPOSTARE UN'EQUAZIONE

46) Una torcia elettrica
è appoggiata a terra
orizzontalmente, ed accesa.
Un bambino alto 80 cm
proietta sulla parete,
che dista da lui 2 metri e ½,
un'ombra alta 1 m e 20 cm.
Qual è la distanza della torcia
dai piedi del bambino?



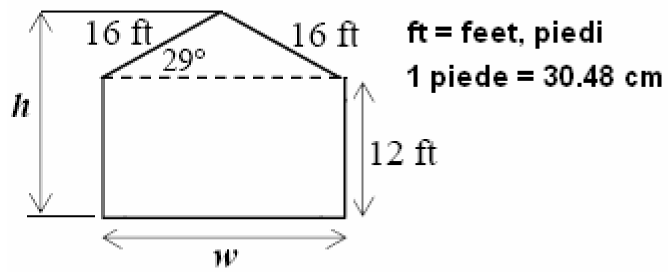
47) Una scala viene appoggiata ad un muro esterno,
in modo da formare col marciapiede un angolo di 64°.
Poi la linea di appoggio sul marciapiede
viene avvicinata di 20 cm al muro,
e allora l'inclinazione della scala aumenta di 4°.
Quanto è lunga la scala?
[Indicazione: Posto $AP = BP' = x$ e $BH = y$,
x potrà essere espressa in due modi diversi, da cui …]



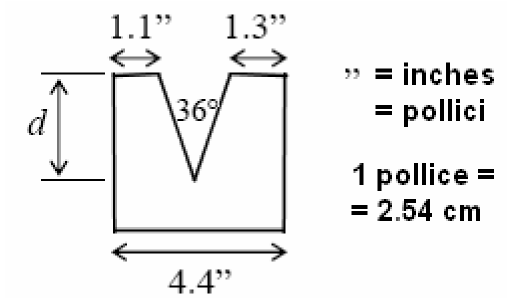
ESERCIZI DA SITI IN LINGUA INGLESE

Da www.swtc.edu:

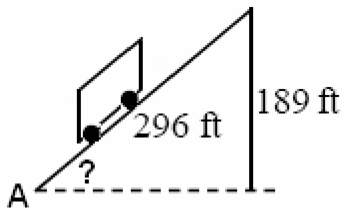
48) The diagram shows the end view of a house.
Calculate the overall height and width of this house.



49) Determine the depth of the machined groove
in this steel block.



50) The Fenelon Place Elevator in Dubuque, IA →
runs on a set of tracks that is 296 ft long
and rises 189 ft from its starting place
to the top of the hill.
What is the angle of the tracks?



Da www.funtrivia.com: TRIGONOMETRY QUIZ

51) In trigonometry, angles are formed by the rotation of a ray
about its endpoint from an initial position to a terminal position.
The measure of an angle can be negative or positive,
depending on the direction of its rotation.
Which direction of rotation returns negative angles:
counter-clockwise or clockwise?

Answer: ____________ (Answer ccw or cw only)

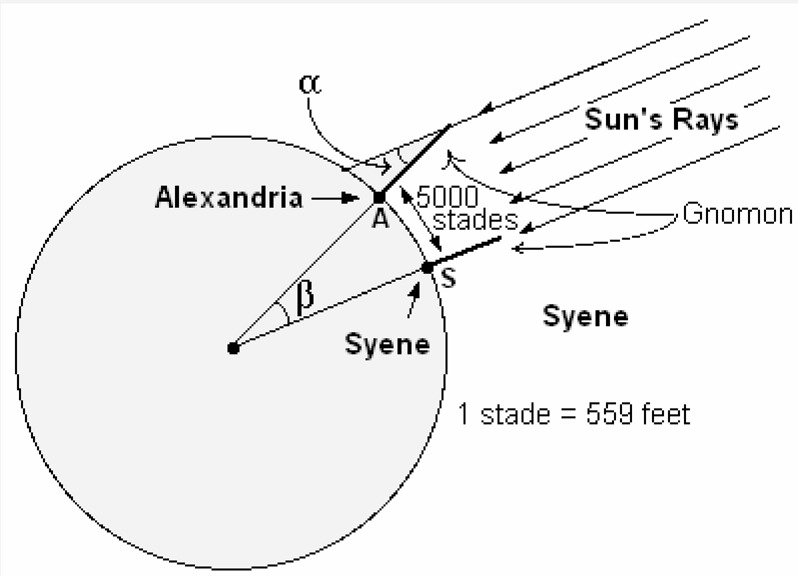
52) The two main trigonometric functions, sine (sin) and cosine (cos)
differ by the addition of the prefix "co" to "cosine".
From where does the "co" derive?

a) Coefficient b) Constant c) Constraint d) Complementary

ERATOSTENE E IL RAGGIO DELLA TERRA

Dal sito web http://share2.esd105.wednet.edu
a cura del progetto didattico SHARE (Washington, USA),
prendiamo a prestito, con qualche piccolissimo ritocco e aiuto alla traduzione,
la descrizione del modo in cui Eratostene
(Cirene, odierna Libia, 276 a.C. - Alessandria d'Egitto, 194 a.C.)
riuscì a determinare un'approssimazione della misura del raggio terrestre.
Evidentemente Eratostene partiva dall'ipotesi che la forma della Terra fosse sferica,
idea che non costituiva una novità in quanto già Aristotele (384-322 a.C.) l'aveva sostenuta,
per via dell'osservazione che durante le eclissi di luna sulla superficie lunare appare un'ombra circolare,
e che alcune stelle risultano visibili dall'Egitto ma non lo sono più se ci si sposta più a Nord.

(…) The Earth is a small point in relation to the heavenly bodies. From this Eratosthenes reasoned the Sun's rays strike the Earth parallel over its entire surface. Working in Syene (*Siene, l'odierna Assuan*) and Alexandria, which Eratosthenes assumed were on the same meridian, he estimated the distance between the cities to be about 5,000 stades (*stadi*); a stade is believed to be about 559 feet - approximately one-tenth of a mile. At summer solstice, at noon, the Sun cast no shadow in Syene, but in Alexandria a shadow was visible. Using a gnomon (a vertical stick), Eratosthenes measured the shadow's angle to be about 1/50 of a circle. In the diagram, $\alpha = \beta$ (alternate interior angles), and since angle α is 1/50 of a circle so is angle β. Since angle β is 1/50 of a circle and AS = 5000 stades, the entire circumference is $50 \cdot 5000 = 250\,000$ stades.



Using this result,
$2\pi r = 250\,000$

$$r = \frac{250\,000}{2\pi} \approx 39789 \text{ stades } \approx 6779\,\text{km}$$

[il reale *raggio medio* della Terra è di circa 6371 km]

Va detto comunque che il discorso sulla precisione delle misure di Eratostene è assai problematico …

RISORSE SU INTERNET

Puoi cliccare QUI

⇨

dal sito www.chihapauradellamatematica.org

per una raccolta di utili e gradevoli link su argomenti di Trigonometria.

RISPOSTE

5) $h = 3 \cdot sen 53° \approx 3 \cdot 0.80 = 2.4$ m   6) $h = 11.8 \cdot sen 65° \approx 10.7$ m ≈ 11 m

7) $2.4 \cdot cos 75° \approx$ m $0.62 \approx$ cm 62 8) Circa 267 cm; circa 260 cm   9) $180 \cdot tg 10° \approx 32$ m

10) Il calcolo porta a un valore vicino a 308 metri; diciamo, realisticamente, 300 metri circa

11) Circa 1200 m

12) Intorno a 67° (il calcolo dà circa $67°\ 23'$)   13) Intorno a 34°   14) $\approx 67°$; $\approx$ m 1.25

15) $\approx$ m 5.5; $\approx 59°$ 16) Circa 17.4 cm   17) Intorno a 10°   18) ≈ 8.54 metri   19) Circa 35 km e ½

20) d)   21) Circa 153 m   22) ≈ 43 metri (42.77… prendendo i dati alla lettera; ma non ha molto senso)

23) a)   24) circa 70 metri   25) L'angolo di rifrazione è $\approx 35°$

26) Quasi 36 km (il calcolo porta a un numero vicinissimo a 35.7)   27) ≈ 159 metri

28) Circa 9°   29) Circa 1 km e 853 m

30) Qui si fanno i calcoli come se il diametro della Luna fosse "un pezzetto di arco", in una circonferenza il cui raggio è la distanza fra l'osservatore e la Luna.
Ci sono inoltre varie approssimazioni nei dati.
Si ottiene in questo modo, come distanza fra l'osservatore e la Luna, un valore vicino a 385500 km.
La reale distanza media tra il centro della Terra e il centro della Luna è stimata in 384400 kilometri.

31) Circa 445 km

32) Il calcolo porta a circa 365000 km (pensando di partire dal centro della Terra).
La differenza rispetto al valore vero (distanza media = 384400 km circa) si deve alle varie approssimazioni (dei dati e delle osservazioni) che evidentemente sono in gioco.

33) Vicina al 25%   34) 6.98… % (differenza fra i valori davvero trascurabile! L'angolo è piccolo)

35) 70.7… % (qui la differenza fra i valori è notevole: l'angolo è grande)

36) Risposta immediata: di circa 80 m.
La pendenza è comunque "piccola", e il contesto ci fa capire che quel "10%" è già un'approssimazione: sarebbe dunque un esercizio puramente teorico stare a calcolare che, se il 10% si intende ricavato con la formula $\Delta y / \Delta x$, il vero calo di altitudine sarebbe di metri 79.6

37) AD $\approx$ m108; AC $\approx$ m74; CD $\approx$ m57   38) $\approx$ m38

39) HC = circa 25 m; HA = circa 10 m   40) BC ha una misura di circa 26-27 metri (il calcolo dà ≈ 26.5)

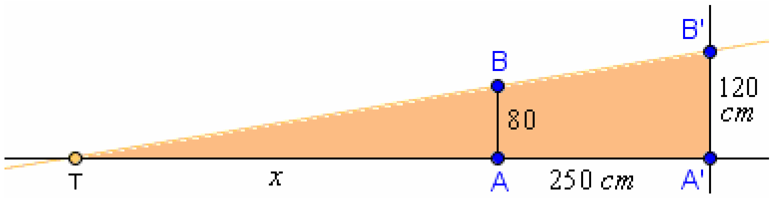
41) Si trova un valore di circa 13.7 per il modulo della risultante

42) ≈ 26 m; ≈ 34 m

43) L'oggetto si trova a un'altezza di circa 1089 metri … diciamo 1100 metri

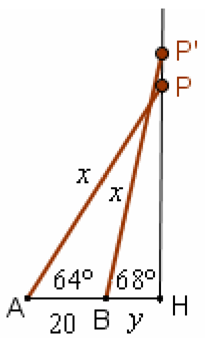
44) Circa 7.9 miglia … diciamo 8 miglia   45) La distanza è di circa 40 metri

46)



TA = x
$x : 80 = (x + 250) : 120$
$80(x + 250) = 120x$
$80x + 20000 = 120x$
$-40x = -20000; \quad 40x = 20000$
$x = 500 \rightarrow$ TA = 5m

47)



$x = \dfrac{20 + y}{cos\ 64°}; \quad x = \dfrac{y}{cos\ 68°}$ da cui

$\dfrac{20 + y}{cos\ 64°} = \dfrac{y}{cos\ 68°}$

$20\ cos\ 68° + y\ cos\ 68° = y\ cos\ 64°; \quad y\ cos\ 64° - y\ cos\ 68° = 20\ cos\ 68°$

$y\left(cos\ 64° - cos\ 68°\right) = 20\ cos\ 68°$

$y = \dfrac{20\ cos\ 68°}{cos\ 64° - cos\ 68°} \approx \dfrac{20 \cdot 0.3746}{0.4384 - 0.3746} = \dfrac{7.492}{0.0638} \approx 117\ cm$

$x = \dfrac{y}{cos\ 68°} \approx \dfrac{117}{0.3746} \approx 312\ cm$

48) $h \approx 20\ ft,\ w \approx 28\ ft$ 49) $\approx 3.1\ inches$ 50) $\approx 40°$ 51) cw   52) d