# CALCOLO COMBINATORIO

## 1 - STRATEGIE DI PENSIERO

### 1.1 - Premessa

**Per "calcolo combinatorio" (C.C.) si intende una branca della matematica che studia i modi di raggruppare ed ordinare oggetti presi da un insieme assegnato, con l'obiettivo finale di contare il numero dei possibili raggruppamenti od ordinamenti.**

Il C.C. ha fama, presso gli studenti, di essere piuttosto antipatico e "indigesto".
Perché mai?

A mio avviso, il motivo sta nel fatto che di norma i libri di testo, nel presentarlo, passano con *fretta eccessiva* alla trattazione astratta, alla terminologia specifica, alle formule!

Qui si tenterà invece di dare un'introduzione AMICHEVOLE e per quanto possibile rassicurante del C.C.

Faremo *pochissima teoria* e *molti esercizi*.
Utilizzando solamente

- ♪ un metodo grafico
  (il "*grafo ad albero*", detto anche "diagramma ad albero" o semplicemente "albero")
- ♫ e tre "*principi generali*",

saremo in grado,
senza pensare a formule precostituite e senza aver adottato una terminologia particolare,
di *risolvere problemi* apparentemente complicati - ma, in genere, curiosi e divertenti.

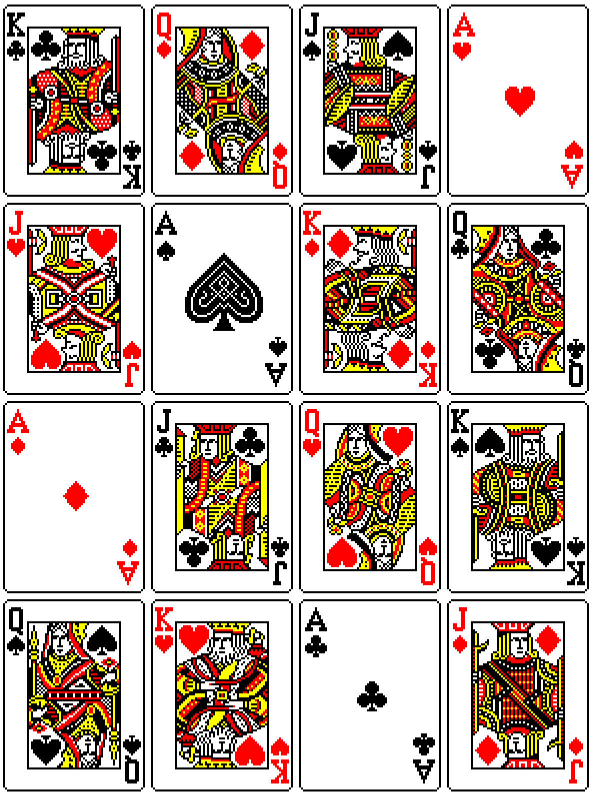


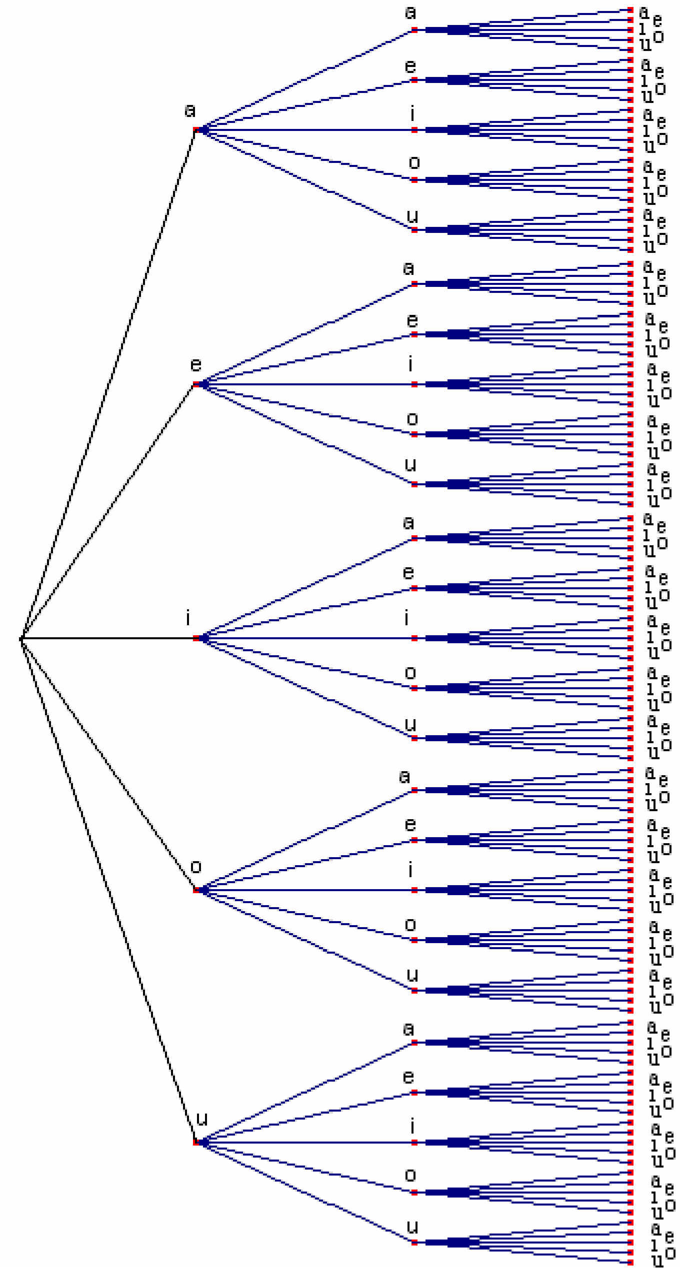
Immagine dal sito www.numericana.com

Immagine dal sito http://faculties.sbu.ac.ir

## 1.2 - Il “primo principio” del C.C.

- **Problema 1**
  **Quante parole (anche prive di senso: insomma, quante “sequenze”, quante “stringhe”) di 3 lettere possono essere composte utilizzando solo le cinque vocali? (es.:  aoe, iii, uaa ...)**

Per rispondere a questa domanda, e soprattutto per acquisire un metodo di ragionamento che ci servirà in tanti altri problemi di questo tipo, immaginiamo di SCRIVERE effettivamente tutte queste stringhe di tre lettere. Scriviamole, poi le conteremo.
Evidentemente, per evitare confusione, omissioni o ripetizioni, dovremo seguire un certo ordine, un certo schema nel "mettere giù" tutte queste stringhe. Per esempio, potremmo stilare un "grafo ad albero" come il seguente:




“**Stringa**” significa:
“**sequenza di caratteri**”

Nel tracciare il grafo, si deve considerare innanzitutto il ventaglio di opzioni che si apre per la prima lettera.
**Per la prima lettera si hanno 5 possibilità** che sono quelle elencate in prima colonna (a, e, i, o, u).

**Poi, ad ognuna di queste 5 possibilità,**
**si possono abbinare 5 possibilità per la seconda lettera della parola.**
**In totale, per le prime due lettere, abbiamo  $5 \cdot 5 = 25$  possibilità (aa, ae, ai, ao, au;  ea, …)**

**E per ognuna di queste  $5 \cdot 5$  possibilità per le prime due lettere,**
**si aprirà un ventaglio di  5  possibilità per la terza lettera,**
**per cui in definitiva avremo  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  possibilità (aaa, aae, aai, …)**

*Risposta: le stringhe di* 3 *lettere costruibili utilizzando solo le vocali sono* 125.

- **Problema 2**
  **Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano?**

Pensiamo ancora ad un "albero" come il precedente.
Ovviamente, non staremo a completarlo!
Vogliamo solo fissare bene in mente le modalità con cui il diagramma potrebbe, avendo tempo e pazienza, essere compilato.

[**grafo ad albero** (**non è qui, ma è nella tua mente…** )]

*Risposta:*
*le stringhe di* 7 *lettere che si possono costruire con le* 21 *lettere dell'alfabeto italiano sono* $21^7$
*(se calcoli questo numero con la macchinetta, troverai che supera* 1 *miliardo e* 800 *milioni).*

- **Problema 3**
  **Quante stringhe di 3 lettere possono essere scritte utilizzando solo le cinque vocali, ma senza ripetizione?**
  **(es.: aoe, uao, aei, … MA NON iii, uaa, eie, …)**

E' chiaro che l'albero relativo al problema 1) si modificherà perdendo qualche ramo;
immagina di tracciare il nuovo albero, o, meglio, traccialo realmente, sul tuo quaderno!

*Risposta:* $5\cdot 4\cdot 3=60$

Ricapitoliamo il ragionamento:
abbiamo 5 possibilità per la prima lettera della stringa;
a ciascuna di queste 5 possibilità sono abbinate 4 possibilità per la seconda lettera
(quindi, per le prime due lettere abbiamo $5\cdot 4$ possibilità);
e per ciascuna di queste $5\cdot 4$ possibilità si apre un ventaglio di 3 possibilità per la terza lettera.
In definitiva, abbiamo $5\cdot 4\cdot 3=60$ possibili stringhe.

- **Problema 4**
  **Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano, ma "senza ripetizione",**
  **cioè col vincolo di non utilizzare una lettera più di una volta nella stessa stringa?**

*Risposta*: $21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15$

- **Problema 4'**
  **Quante sono le stringhe di 7 lettere costruibili utilizzando tutte le 21 lettere dell'alfabeto italiano, ma "senza consecutività"?**
  **(Quindi, "abbcdef" sarebbe vietata, ma andrebbe invece bene "abababa")**

*Risposta*: $21\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20$

La risoluzione "col metodo del diagramma ad albero" dei problemi 1) ... 4') mostra che vale il seguente

**PRIMO PRINCIPIO GENERALE DEL CALCOLO COMBINATORIO**

**Se una scelta può essere fatta in r modi diversi,**
**per ognuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in s modi diversi**
**e, per ciascuno dei modi in cui si sono compiute le prime due scelte,**
**una terza scelta può essere effettuata in t modi diversi**
**ecc.,**
**allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in**
$\mathbf{r\cdot s\cdot t\cdot ...}$
**modi diversi**

**(traduzione dal testo americano "Introduction to Finite Maths" di Kemeny-Snell-Thompson)**

## 1.3 - Esercizi sul “primo principio” (risposte alla fine)

5) In una compagnia di quattro amici (Mario, Paolo, Roberto, Walter) bisogna scegliere un capo e un vice.
In quanti modi può essere effettuata la scelta?
Obbligatorio tracciare il diagramma ad albero (per brevità, usare solo le iniziali dei nomi!)

6) Per andare da una città A ad una città B ci sono quattro strade diverse.
In quanti modi è possibile "fare un giro" da A fino a B e ritorno?
E se al ritorno non si vuole ripercorrere la stessa strada dell'andata?
Obbligatorio un diagramma, per ciascuno dei due casi.

7) In un'urna ci sono quattro palline, contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4.
Se si effettuano tre estrazioni, quanti sono gli esiti possibili, tenendo conto dell’ordine con cui vengono estratte le palline? (nel senso che, ad es., l’esito 1-2-3 sarà considerato distinto dall’esito 2-1-3)

Considerare separatamente i due casi:
a) dopo aver estratto una pallina, la si reintroduce (si dice: "la si reimbussola") nell'urna prima di effettuare l'estrazione successiva
b) le estrazioni avvengono una dopo l'altra, ma senza reimbussolamento.

Obbligatorio il diagramma ad albero, sia per il caso a) che per il caso b).

8) In un plotone di 25 militari bisogna scegliere:
a) un addetto alle pulizie b) un addetto alle cucine c) un soldato che monti di sentinella.
In quanti modi è possibile effettuare la scelta?

9) Un ladro è venuto a sapere che la combinazione di una cassaforte
- è formata da 5 cifre
- non contiene né la cifra 9 né la cifra 8
- non inizia con 0.

Quanti tentativi dovrebbe fare al massimo per esser certo di riuscire ad aprire la cassaforte?

10) Per giocare al “Totocalcio” bisogna scegliere un pronostico (che può essere 1, X o 2) per ciascuna delle 14 partite sulla schedina. Quante schedine diverse è possibile, teoricamente, compilare?

11) La moglie di un carcerato, per poter parlare col marito anche al di fuori delle ore di colloquio coi parenti, ha concordato con lui un codice basato sull'uso di quattro bandierine:
una Italiana, una Francese, una Americana e una del WWF.
Un messaggio può consistere nell'esposizione di una singola bandierina, oppure di due, o tre, o tutte e quattro le bandierine.
Nel caso il messaggio sia costituito da più bandierine, conta anche l'ordine in cui queste si susseguono da sinistra a destra. Si domanda: quanti messaggi è possibile trasmettere con queste modalità?

12) Sappiamo che in ogni computer la memoria è costituita da tanti "bit", essendo un "bit" un dispositivo fisico che può assumere due stati differenti.
Indicati convenzionalmente con "0" e "1" tali due stati fisici, diremo, in sostanza, che un bit è un "qualcosa" che può assumere, di volta in volta, o il valore "0" o il valore "1".
Una sequenza di 8 bit forma il cosiddetto "byte". Ad esempio, 01110110 è un "byte".
a) Quante diverse "informazioni" può contenere un byte?
b) E quante informazioni diverse si potranno memorizzare in una sequenza di 10 byte?
Tenendo conto che $2^{10} = 1024 \approx 1000$, dai un'approssimazione per difetto del numero trovato.

**RISPOSTE AGLI ESERCIZI**

5) $4 \cdot 3 = 12$ modi
6) $4 \cdot 4 = 16$ modi;
se però al ritorno non si vuole fare la stessa strada dell’andata, i modi possibili si riducono a $4 \cdot 3 = 12$

7a) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ 7b) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ 8) $25 \cdot 24 \cdot 23$ 9) $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 28672$ 10) $3^{14} = 4782969$

11) 4 messaggi con una sola bandierina;
$4 \cdot 3 = 12$ messaggi con 2 bandierine;
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ messaggi con 3 bandierine;
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ messaggi con 4 bandierine.
Totale 4+12+24+24 = 64 possibili messaggi.

12) a) $2^8 = 256$ b) $2^{80} = \left(2^{10}\right)^8 = 1024^8 > 1000^8 = \left(10^3\right)^8 = 10^{24} = 1$ milione di miliardi di miliardi

## 1.4 - Il “secondo principio” del C.C.

Consideriamo ora il seguente

- **Problema 13**

  **Se 6 persone si vogliono mettere in fila da sinistra a destra (rispetto al fotografo) per una foto di gruppo, in quanti modi diversi possono farlo?**

  **Formulazione equivalente:**

  **se 6 persone arrivano contemporaneamente ad uno sportello, in quanti modi diversi possono mettersi in coda?**

Facile:
per scegliere il primo elemento della fila (o della coda), abbiamo 6 possibilità;
in corrispondenza di ciascuna di queste 6 possibilità, abbiamo 5 possibilità per il 2° elemento;
abbinate a queste $6 \cdot 5$ possibilità abbiamo 4 possibilità per il terzo elemento;
per ciascuna di queste $6 \cdot 5 \cdot 4$ possibilità abbiamo 3 possibilità per il quarto elemento ecc ...

*Risposta:*
In totale, le 6 persone possono mettersi in fila (o in coda) in
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ (leggi: "6 fattoriale") modi diversi.

**SECONDO PRINCIPIO GENERALE DEL C.C.**
**(CONSEGUENZA DEL PRIMO)**

**Dati n oggetti, essi si possono “mettere in fila”**
**(o “mettere in coda”, o “mettere in colonna”)**
**in**
**n! (leggi: “n fattoriale”)**
**modi diversi,**
**dove il simbolo n!**
**indica il numero**
$\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

**Infatti,**
**per la scelta del primo oggetto della fila abbiamo n possibilità;**
**a ciascuna di queste n possibilità sono abbinate**
**(n–1) possibilità di scelta per il secondo oggetto della fila;**
**ad ognuna delle $\mathbf{n \cdot (n-1)}$ possibilità per i primi due oggetti**
**corrispondono (n–2) possibilità di scelta per il terzo oggetto della fila;**
**... ;**
**in totale, quindi, n oggetti possono essere ordinati**
**( = messi in fila, o in coda, o in colonna)**
**in**
$\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$
**modi diversi.**

- **Problema 14**
  **Quanti sono i possibili anagrammi della parola "mora"**
  **(contando anche quelli che non hanno significato nella lingua italiana)?**
  **Obbligatorio il grafo ad albero.**

*Risposta:*
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

## 1.5 - n-uple ordinate e n-uple non ordinate

In tutti i problemi precedentemente considerati si trattava, in sostanza,
di "pescare" da un insieme per "costruire" delle "sequenze di n elementi"
(in una parola: "n-uple")
con l'obiettivo finale di contare il numero di tali n-uple.

Le n-uple andavano pensate "ordinate",
nel senso che occorreva tenere conto dell'ordine con cui gli elementi di una data n-upla si succedevano,
in quanto due n-uple costituite dagli stessi elementi, ma posti in ordine diverso, andavano considerate distinte.

Abbiamo dunque avuto a che fare con coppie ORDINATE, con terne ORDINATE, quaterne ORDINATE, ecc.

Ad esempio:
nel problema 1) andavano considerate distinte le due stringhe aio e oai, ossia le due terne (a, i, o) e (o, a, i);
nell'esercizio 11) andavano considerati distinti i due messaggi AF ed FA, ossia le due coppie (A, F) ed (F, A).

**Una sequenza di n elementi si dice, genericamente, n-upla** *(leggi: "ennupla")*
(per n=2 si parlerà di "coppia", per n=3 di "terna", per n=4 di "quaterna",
per n=5 di "cinquina", per n=6 di "sestina", per n>6 di "sequenza di 7, 8, 9, ... elementi").
**Quando in un'n-upla consideriamo "importante" l'ordine in cui gli elementi si susseguono,**
**parleremo di n-upla "ordinata", e la indicheremo con parentesi tonde:**
$(x_1, x_2, ..., x_n)$.
**Quando consideriamo irrilevante l'ordine, parleremo di n-upla "non ordinata" e useremo le graffe:**
$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Per evitare equivoci, ribadiamo:

♪ **Due n-uple ordinate vengono considerate distinte anche se hanno gli stessi elementi,**
**qualora l'ordine di tali elementi cambi dall'una all'altra:** $(a, o, i) \neq (a, i, o)$
**E per indicare che un'n-upla va pensata ORDINATA, si utilizzano le parentesi TONDE.**

♫ **Invece se due n-uple NON ORDINATE contengono gli stessi elementi,**
**vengono considerate come un'unica n-upla,**
**indipendentemente dall'ordine nel quale sono stati scritti gli elementi stessi,**
**in quanto quest'ordine viene pensato come irrilevante:** $\{a, o, i\} = \{a, i, o\}$
**E per indicare che un'n-upla va pensata NON ORDINATA,**
**si utilizzano le parentesi GRAFFE**, ovvero l'ordinario simbolo per indicare un insieme:
si sa che in un insieme non conta l'ordine nel quale si sceglie di elencare gli elementi.

## 1.6 - Il "terzo principio" del C.C.

❑ **Problema 15**
**Una compagnia di 5 ragazzi, Aldo (A), Bruno (B), Carlo (C), Dario (D) ed Ernesto (E),**
**deve passare una notte in una stanza in cui ci sono solo 2 letti.**
**In quanti modi è possibile scegliere i due ragazzi che dormiranno nei letti?**
**(gli altri tre si accontenteranno del sacco a pelo ...)**

E' chiaro che in questo caso si tratta di contare il numero di coppie NON ordinate
che è possibile costruire "pescando" dall'insieme {A, B, C, D, E}.

Coppie NON ordinate, perché evidentemente
la scelta {C, E} e la scelta {E, C} andranno considerate "equivalenti", "non distinte",
andranno "contate come una scelta sola"
(supponiamo che i due letti siano identici e non siano uno più comodo dell'altro).

Per risolvere questo facile problema, e, soprattutto, per iniziare a familiarizzare con una "strategia di pensiero"
che ci servirà ogniqualvolta avremo a che fare con "n-uple non ordinate", procediamo nel modo che segue.

Facciamo (o immaginiamo di fare) un grafo che porti a costruire tutte le possibili coppie ORDINATE di ragazzi;
poi, prese due coppie ordinate "equivalenti"
(perché contenenti gli stessi due ragazzi, ma in ordine scambiato),
"le inglobiamo in una sola", "le consideriamo come se fossero una sola".

E' chiaro che il numero di scelte possibili sarà dato da $(5 \cdot 4)/2 = 10$.
Il "fratto 2" si deve al fatto che "di due coppie equivalenti ne facciamo una sola".

Consideriamo ora quest'altro problema:

**Problema 16**
**Supponendo che i ragazzi del problema precedente siano 7 (A, B, C, D, E, F, G) e i letti 3, in quanti modi può essere effettuata la scelta?**

Evidentemente, basterà pensare a tutte le terne ORDINATE di ragazzi,
poi raggruppare le terne equivalenti (=contenenti gli stessi elementi),
perché se più terne contengono gli stessi elementi, noi ne vogliamo "fare una sola".

Ma, presa una terna ordinata, ad esempio: la terna (A, D, E), QUANTE SONO le terne equivalenti ad essa?
Sono tante quanti sono i modi di mettere in fila 3 oggetti fissati, ossia sono 6
(comprendendo anche la terna di partenza): (A, D, E); (A, E, D); (D, A, E); (D, E, A); (E, A, D); (E, D, A).
Pertanto la risposta al problema è il numero $(7\cdot 6\cdot 5)/6=35$ .

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (ABC) | (ABD) | (ABE) | (ABF) | (ABG) | (ACB) | (ACD) | (ACE) | (ACF) | (ACG) | (ADB) | (ADC) | (ADE) | (ADF) | (ADG) |
| (AEB) | (AEC) | (AED) | (AEF) | (AEG) | (AFB) | (AFC) | (AFD) | (AFE) | (AFG) | (AGB) | (AGC) | (AGD) | (AGE) | (AGF) |
| (BAC) | (BAD) | (BAE) | (BAF) | (BAG) | (BCA) | (BCD) | (BCE) | (BCF) | (BCG) | (BDA) | (BDC) | (BDE) | (BDF) | (BDG) |
| (BEA) | (BEC) | (BED) | (BEF) | (BEG) | (BFA) | (BFC) | (BFD) | (BFE) | (BFG) | (BGA) | (BGC) | (BGD) | (BGE) | (BGF) |
| (CAB) | (CAD) | (CAE) | (CAF) | (CAG) | (CBA) | (CBD) | (CBE) | (CBF) | (CBG) | (CDA) | (CDB) | (CDE) | (CDF) | (CDG) |
| (CEA) | (CEB) | (CED) | (CEF) | (CEG) | (CFA) | (CFB) | (CFD) | (CFE) | (CFG) | (CGA) | (CGB) | (CGD) | (CGE) | (CGF) |
| (DAB) | (DAC) | (DAE) | (DAF) | (DAG) | (DBA) | (DBC) | (DBE) | (DBF) | (DBG) | (DCA) | (DCB) | (DCE) | (DCF) | (DCG) |
| (DEA) | (DEB) | (DEC) | (DEF) | (DEG) | (DFA) | (DFB) | (DFC) | (DFE) | (DFG) | (DGA) | (DGB) | (DGC) | (DGE) | (DGF) |
| (EAB) | (EAC) | (EAD) | (EAF) | (EAG) | (EBA) | (EBC) | (EBD) | (EBF) | (EBG) | (ECA) | (ECB) | (ECD) | (ECF) | (ECG) |
| (EDA) | (EDB) | (EDC) | (EDF) | (EDG) | (EFA) | (EFB) | (EFC) | (EFD) | (EFG) | (EGA) | (EGB) | (EGC) | (EGD) | (EGF) |
| (FAB) | (FAC) | (FAD) | (FAE) | (FAG) | (FBA) | (FBC) | (FBD) | (FBE) | (FBG) | (FCA) | (FCB) | (FCD) | (FCE) | (FCG) |
| (FDA) | (FDB) | (FDC) | (FDE) | (FDG) | (FEA) | (FEB) | (FEC) | (FED) | (FEG) | (FGA) | (FGB) | (FGC) | (FGD) | (FGE) |
| (GAB) | (GAC) | (GAD) | (GAE) | (GAF) | (GBA) | (GBC) | (GBD) | (GBE) | (GBF) | (GCA) | (GCB) | (GCD) | (GCE) | (GCF) |
| (GDA) | (GDB) | (GDC) | (GDE) | (GDF) | (GEA) | (GEB) | (GEC) | (GED) | (GEF) | (GFA) | (GFB) | (GFC) | (GFD) | (GFE) |

Ricapitoliamo il ragionamento. Qui sopra sono elencate tutte le possibili terne ordinate.
Presa una terna ordinata, essa fa parte di una famiglia di 6 terne ordinate "equivalenti" fra loro
(perché contengono gli stessi elementi, se pure in ordine diverso).
Le terne ordinate equivalenti vengono "contate come una terna sola".
Il totale di $7\cdot 6\cdot 5$ terne ordinate viene così diviso per 6. Quindi, se ci sono 7 ragazzi,
la scelta di quei 3 che dormiranno nei letti potrà essere effettuata in $(7\cdot 6\cdot 5)/6=35$ modi.

**Problema 17**
**In una fabbrica con 25 operai, se ne devono sorteggiare 6 per la pulizia dello stabilimento. Quanti sono i possibili esiti del sorteggio?**

Ragioniamo dapprima sulle sestuple ordinate. Queste sono $25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20$.
Te le immagini, queste sestuple ordinate, tutte scritte una dopo l'altra? Sono veramente tantissime!

Bene. **Noi però vogliamo "raggruppare" tutte le sestuple "equivalenti"
(cioè, contenenti gli stessi operai, se pure in ordine diverso) per "farne una sola",
per "farne un gruppo che verrà contato come un'unica sestupla".**

**MA DATA UNA SESTUPLA, QUANTE SONO LE SESTUPLE ORDINATE
AD ESSA EQUIVALENTI (COMPRESA QUELLA DI PARTENZA)?
EVIDENTEMENTE, SONO TANTE QUANTI I MODI CON CUI, DATI 6 OGGETTI,
QUESTI POSSONO ESSERE ORDINATI (=MESSI IN FILA, O IN CODA).**

E il Secondo Principio del Calcolo Combinatorio ci dice che ciò può avvenire in
$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=6!$ (leggi: "6 fattoriale") modi diversi.

Pertanto, fissata una sestupla ordinata, essa fa parte di un gruppo di 6! sestuple equivalenti.

Il lungo elenco delle $25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20$ sestuple ordinate di operai può essere così suddiviso in gruppi
ciascuno dei quali contiene 6! sestuple. Ogni gruppo verrà contato come una sola sestupla non ordinata,
per cui il numero delle sestuple non ordinate di operai sarà $\dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{6!}$

**TERZO PRINCIPIO GENERALE DEL C.C. (CONSEGUENZA DEL PRIMO E DEL SECONDO)**
**Se in un certo problema noi abbiamo considerato inizialmente tutte le n-uple ordinate,
ma in realtà ci interessano le n-uple NON ordinate,
dobbiamo pensare il nostro elenco di n-uple ordinate ripartito in tanti gruppi,
avendo noi posto in ciascun gruppo tutte le n-uple "equivalenti" ad un'n-upla data
(cioè, contenenti gli stessi elementi, se pure in ordine diverso).
Abbiamo così tanti gruppi, ciascuno formato da n! n-uple, e ciascun gruppo va contato
"come se si trattasse di una sola n-upla".
E' chiaro allora che il numero totale delle n-uple ordinate andrà diviso per n!**

## 1.7 - Esercizi (risposte alle pagine successive)

18) Una cartoleria ha in vendita 32 biglietti d'auguri tutti differenti, e io devo comprarne 5.
In quanti modi diversi posso effettuare la scelta?

19) In una compagnia di 20 bambini, per carnevale 18 indosseranno costumi da animaletti.
In quanti modi è possibile scegliere quei 18? (*pssst*: *… ragiona da "furbo"*!)

20) Quanti sottoinsiemi di 5 elementi contiene un insieme di 10 elementi?

21) Con 9 numeri fissati, possiamo costruire molte "quaterne" e molte "cinquine" .
Pensiamo sia le une che le altre "non ordinate".

a) Sono più numerose le quaterne o le cinquine?

b) E se si pensasse a quaterne e cinquine *ordinate*?
In questo caso, sarebbero più numerose le quaterne o le cinquine?

22) I) 30 secondi di tempo per dire quante cinquine *non ordinate* è possibile formare con 6 numeri.
II) Altri 30 secondi per dire quante cinquine *ordinate*.

23) Dal mio guardaroba di 10 magliette e 8 paia di pantaloni voglio scegliere
3 magliette e altrettante paia di pantaloni per andare in ferie.
In quanti modi diversi posso effettuare la scelta?

24) In una classe di 28 allieve, tutte belle, intelligenti e sportive, bisogna scegliere:
- due rappresentanti di classe;
- una "miss";
- 7 ragazze per la squadra di calcetto femminile.

Stabilire in quanti modi diversi si può effettuare questa scelta
a) se gli incarichi sono incompatibili
b) se gli incarichi sono compatibili

25) Riprendiamo la situazione considerata nel problema 7).
In un'urna ci sono quattro palline, contrassegnate coi numeri 1, 2, 3, 4.
Supponiamo di estrarne 3, ma questa volta CONTEMPORANEAMENTE,
sicché non teniamo più conto dell'ordine di estrazione, ma soltanto di quali palline sono state estratte.
Quanti sono gli esiti possibili di questa estrazione?

26) In un mazzo da scopa ⇨ ci sono 40 carte. Si mischia.
In quanti possibili ordini diversi possono comparire le carte dopo la mischiata?

27) Se si effettuano 4 lanci di una moneta, quanti sono gli esiti possibili della sequenza di lanci,
tenendo conto anche dell'ordine di uscita delle Teste e delle Croci?
E' richiesto di tracciare il diagramma ad albero.

28) Devo distribuire a 10 bambini 5 mele, 2 banane e 3 pesche, ovviamente un frutto per ciascuno.
In quanti modi diversi posso effettuare la distribuzione?

29) Una ragazza possiede tre astucci di smalto per le unghie, di tre colori differenti.
In quanti modi può tingersi le unghie delle mani,
se vuole fare in modo che ciascun' unghia sia colorata in tinta unita
e non ci siano più di due colori diversi su ciascuna mano?

[E' una libera traduzione da "Introduction to Finite Maths". Testo originale:
"*A young lady has three shades of nail polish to paint her fingernails.
In how many ways can she do this – each nail being one solid color –
if there are no more than two different shades on each hand*?"]

30) Dimostra che a Perugia risiedono sicuramente almeno due persone con le stesse iniziali.

31) Ecco un esercizio che richiede tipicamente un *diagramma ad albero*.
7 persone (3 uomini e 4 donne) desiderano entrare a far parte di un "club" molto esclusivo. La direzione del "club" acconsente, a patto però di iscrivere soltanto una persona al mese, e soprattutto in modo tale che, fra i "nuovi acquisti" da quel momento in poi, si contino in totale sempre più donne che uomini.
In quanti modi diversi può avvenire la successione dei sessi nelle iscrizioni?

32) In una piccola sala d'aspetto c'è una fila di 5 poltrone.
Se il ragionier Bianchi, la signorina Rossi e il dottor Verdi vogliono sedersi,
in quanti modi diversi si possono disporre?

33) Stabilire in quanti modi possono disporsi, su di una fila di 4 sedie:
I) 1 persona  II) 2 persone  III) 3 persone  IV) 4 persone
V) 5 persone (s'intende, una resterà in piedi)  VI) 6 persone (due forzatamente resteranno in piedi)

OSSERVAZIONE: s'intende di considerare distinte fra loro anche due situazioni nelle quali, pur essendo le persone che si siedono e le sedie occupate le medesime, la collocazione delle persone sulle sedie sia differente.

INDICAZIONE: qualora le persone siano più nelle sedie, uno dei modi per ragionare (non l'unico: provaci anche diversamente!) è di immaginare che siano ... le sedie a scegliere le persone.
Così, nel caso V), indicate con 1, 2, 3 e 4 le sedie e con A, B, C, D, E le persone, diciamo che la sedia 1 ha 5 possibilità di scelta;
in corrispondenza di ciascuna di queste 5 possibilità ci sono 4 possibilità di scelta per la sedia 2 ecc.

33') Stabilire in quanti modi possono disporsi, su di una fila di k sedie, n persone, distinguendo i casi:
I) $n < k$
II) $n = k$
III) $n > k$

34) Quante sono le possibili schedine di totocalcio (14 partite) ⇨ con esattamente
5 pronostici "1", 8 pronostici "X" e 1 pronostico "2"?

35)
I) 9 persone vogliono mettersi in fila per una foto di gruppo. In quanti modi diversi si possono disporre?

II) Se vogliono invece fare due file (5 persone accovacciate davanti, le altre 4 in piedi in seconda fila) il numero delle possibili disposizioni cambia?

III) Se si tratta di 5 maschi e 4 femmine,
coi maschi accovacciati in prima fila e le femmine in piedi in seconda fila,
quante sono le possibili disposizioni? Aumentano o diminuiscono rispetto al caso I) ?

36) Un Liceo prevede per ciascuno studente l'obbligo di iscriversi
ad un minimo di 1 e un massimo di 2 fra 7 gruppi sportivi
(Pallavolo, Calcetto, Atletica, Ginnastica, Nuoto, Ballo, Tiro con l'arco).

I) Se tu sei uno studente di quel Liceo, quante scelte hai teoricamente a disposizione?

II) Se Nuoto e Tiro con l'Arco si svolgono contemporaneamente,
così da non poter essere scelte entrambe dallo stesso studente,
quante risultano le tue possibilità di scelta?

37)
I) Con 5 tessere rettangolari, recanti rispettivamente le 5 lettere A, B, C, D, E,
quante sequenze diverse si possono costruire?

II) E se le 5 tessere recano le lettere A, A, C, D, E, quante sequenze diverse si possono costruire con esse?

III) Rispondere al medesimo quesito nel caso le tessere rechino le lettere A, A, C, C, C

IV) Rispondere al medesimo quesito nel caso le tessere rechino le lettere A, A, C, C, E

38) Le pareti della mia cucina sono ricoperte da 800 piastrelle.
Volendo dipingere esattamente 50 piastrelle in giallo, 100 in rosso e 200 in blu,
lasciando bianche le rimanenti, in quanti modi sarebbe possibile effettuare il lavoro?

39) Nella mia libreria ho: 10 libri di Storia, 6 libri sugli Animali e 7 libri di Matematica. Voglio allinearli
su di uno scaffale, in modo però che i libri di una medesima materia siano tutti vicini fra loro.
In quanti modi diversi posso ordinare i miei 23 libri?

**RISPOSTE AGLI ESERCIZI**

18) $(32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28)/5!=201376$

19) In tanti modi, quanti sono i modi con cui è possibile escluderne 2. Quindi: $(20\cdot 19)/2=190$

20) $(10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/5!=252$

21a) Sono *tante* le quaterne non ordinate, *quante* le cinquine non ordinate.
Infatti, ad ogni quaterna possiamo associare biunivocamente una cinquina (quella dei 5 numeri rimanenti).
Verifica algebrica: n° quaterne non ordinate = $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/4!=126$
n° cinquine non ordinate = $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5)/5!=126$

21b) Sono di più le cinquine ordinate delle quaterne ordinate.
n° quaterne ordinate = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$
n° cinquine ordinate = $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=15120$

22) I) 6 cinquine non ordinate
(tante quanti sono i modi in cui si può escludere 1 numero dall'insieme dei 6 numeri dati)

II) $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=720$ cinquine ordinate

23) $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}\cdot\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}$

24) a) Se gli incarichi sono incompatibili: $\dfrac{28\cdot 27}{2}\cdot 26\cdot\dfrac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{7!}$

b) Se gli incarichi sono compatibili: $\dfrac{28\cdot 27}{2}\cdot 28\cdot\dfrac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{7!}$

25) Immediatamente: 4 (tanti quanti i modi di escludere una pallina dall'estrazione). Oppure: $(4\cdot 3\cdot 2)/3!=4$

26) 40! (quaranta fattoriale). Davvero il gioco della scopa può essere molto vario … pur tenendo conto che due carte con lo stesso "ruolo", ad esempio: due "Re" che non siano di "denari", ossia di quadri (il seme "quadri" ha una funzione un po' speciale), sono, dal punto di vista del gioco, del tutto "intercambiabili".

27) $2^4=16$

28) Si tratta di scegliere i 5 bambini cui andranno le mele,
poi i 2 (fra i 5 bambini rimanenti) cui andranno le banane;
a questo punto, agli ultimi 3 bambini rimasti daremo le pesche.
La risposta è: $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!}\cdot\dfrac{5\cdot 4}{2}$

29) Questo problema è piuttosto complesso.
Pensiamo alla sola mano sinistra;
il numero k di possibilità che troveremo dovrà poi essere moltiplicato
per il numero di possibilità relative alla mano destra;
poiché questo secondo numero sarà evidentemente identico al precedente (e cioè k),
in definitiva il numero di possibilità richiesto dal problema sarà $k^2$
(evidentemente, va pensato come rilevante il fatto che una mano sia "la sinistra" e l'altra "la destra",
quindi questo risultato NON andrà diviso poi per 2).

1) Posso scegliere di colorare tutte e 5 le dita con lo stesso colore. Ho 3 possibilità.

2) Posso scegliere di colorare 1 dito con un colore e le altre 4 dita con un altro colore.
Per la scelta del singolo dito ho 5 possibilità.
Dopodiché, mi si apre un ventaglio di $3\cdot 2=6$ possibilità per la coppia di colori da usare.
Ho quindi $5\cdot 3\cdot 2=30$ possibilità.

3) Posso scegliere di colorare 2 dita con un colore e le altre 3 dita con un altro colore.
Per la scelta della coppia di dita ho $(5\cdot 4)/2=10$ possibilità.
Dopodiché, mi si apre un ventaglio di $3\cdot 2=6$ possibilità per la coppia di colori da usare.
Ho quindi $10\cdot 6=60$ possibilità.

1), 2), 3) esauriscono tutta la casistica.
Ho in totale $k=3+30+60=93$ possibilità per la mano sinistra.
Le possibilità per la coppia di mani sono dunque $k^2=93^2=8649$.

30) Le lettere dell'alfabeto sono 26
(mettendoci anche le varie J, K, X … che ben raramente compaiono nei cognomi italiani).
Dunque il numero di possibilità per le coppie ordinate di iniziali è $26 \cdot 26 = 676$,
di gran lunga inferiore al numero di abitanti di una città di media grandezza come Perugia.
E' vero che ci sono persone con il doppio cognome o con il doppio nome di battesimo;
ma si tratta di casi "rari".
Anche supponendo, per eccesso, che tali casi anomali costituiscano la metà della popolazione di Perugia, rimarrebbe pur sempre l'altra metà, ben superiore ai 676 cittadini.
La coppia ordinata di iniziali è quindi costretta a ripetersi.

31) Il diagramma ad albero mostra che, rispettando i vincoli specificati, ci sono solo 5 possibilità.

32) La prima persona sceglie la sua poltrona: 5 possibilità.
A questo punto, la seconda persona sceglie la sua poltrona: 4 possibilità.
Si siede la terza persona: 3 possibilità.
$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilità.

Evidentemente, ragioniamo così in quanto consideriamo rilevante l'individualità delle persone,
ossia non guardiamo solo quali sedie vengono occupate, ma "quali" e "da chi".
D'altronde, almeno dal punto di vista delle persone,
per il ragionier Bianchi avere accanto la signorina Rossi è diverso dall'avere accanto il dottor Verdi.

Se invece la nostra attenzione cadesse esclusivamente sulle sedie occupate, avremmo $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ possibilità.

33) I) 4 modi II) $4 \cdot 3 = 12$ modi III) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modi IV) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modi
V) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ modi (anche: la persona che sta in piedi può essere scelta in 5 modi; dopodiché, le 4 persone che vanno a sedersi potranno farlo in $4!$ modi: quindi, i modi possibili sono $5 \cdot 4! = 120$)

VI) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ modi (anche: le 2 persone che staranno in piedi possono essere scelte in $\frac{6 \cdot 5}{2}$ modi;

le 4 persone che vanno a sedersi potranno farlo in $4!$ modi: quindi, i modi possibili sono $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4! = 360$)

33') I) $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot (k-n+1)$ Ordino le persone in un modo qualunque; la prima persona sceglie la sua sedia, e lo può fare in k modi … poi la seconda persona, ecc.

II) $k! = n!$ III) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$

34) Scelgo le 5 partite a cui associare il pronostico "1", poi le 8 a cui associare "X", e alla restante assocerò "2".

Risposta: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8!}$

Allo stesso numero approderei se pensassi alle 5 da marcare con "1" e poi a quella da marcare con "2".

Le rimanenti verrebbero marcate con "X". L'espressione sarebbe più semplice: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot 9$

anche se a dire il vero pure quella ottenuta precedentemente $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8!}$

si può immediatamente semplificare: $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5!} \cdot \frac{9 \cdot \cancel{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{8!}}$

35) I) $9!$ II) No III) $5! \cdot 4!$; diminuiscono, rispetto al caso I)

36) I) $7 + (7 \cdot 6)/2 = 28$ possibilità.
II) In quel caso ho una possibilità in meno: 27 possibilità.

37) I) $5! = 120$ II) $\frac{5!}{2} = 60$ III) $\frac{5!}{2 \cdot 3!} = 10$ IV) $\frac{5!}{2 \cdot 2} = 30$

38) Gasp! $\frac{800 \cdot 799 \cdot \ ... \ \cdot 751}{50\,!} \cdot \frac{750 \cdot 749 \cdot \ ... \ \cdot 651}{100\,!} \cdot \frac{650 \cdot 649 \cdot \ ... \ \cdot 451}{200\,!}$ … Buon calcolo, io devo andare, ciao!

39) I 10 libri di Storia possono essere ordinati in 10! modi;
i 6 libri sugli Animali in 6! modi e i 7 libri di Matematica in 7! modi.
Poi però devo decidere come ordinare i "gruppi":
da sinistra a destra Storia-Animali-Matematica oppure Animali-Storia-Matematica oppure…
L'ordinamento dei gruppi può avvenire in 3! = 6 modi.
In totale, posso disporre i miei libri in $10! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 3!$ modi.