LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - SECONDA PARTE

NOTA - *Preliminare a questi argomenti, è la conoscenza dei "numeri complessi"* (*capitolo precedente*)

a) RELAZIONI FRA SOLUZIONI E COEFFICIENTI IN UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO

In ogni equazione di 2° grado $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ **la somma e il prodotto delle soluzioni sono legati ai coefficienti dalle formule:**

$$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1x_2=\frac{c}{a}}$$

$$ax^2+bx+c=0; \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right.$$

$$\boxed{x_1+x_2=}\ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\cancel{-\sqrt{\Delta}}-b\cancel{+\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}\boxed{=-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1\cdot x_2=}\ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}\cancel{-b^2}+4ac}{4a^2}=\frac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}}\boxed{=\frac{c}{a}}$$

Esempio 1. Le soluzioni dell'equazione $2x^2-5x-3=0$ hanno per somma $-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ e per prodotto $\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}$

Risolvi l'equazione e verificalo direttamente!

Esempio 2. Le soluzioni dell'equazione $x^2+4x+5=0$ non esistono in campo reale;

sono due numeri complessi, la cui somma è $-\frac{b}{a}=-4$ e il cui prodotto è $\frac{c}{a}=5$

b) TROVARE DUE NUMERI CONOSCENDONE LA SOMMA s E IL PRODOTTO p

Il problema si può risolvere in più modi (vedi ⇨); tuttavia,

basta scrivere l'equazione di 2° grado $\boxed{x^2-sx+p=0}$ **e risolverla.**
Le soluzioni di questa equazione saranno i due numeri cercati!

Infatti, tali due soluzioni avranno per somma $-\frac{b}{a}=-\frac{-s}{1}=s$ e per prodotto $\frac{c}{a}=\frac{p}{1}=p$.

Esempio: trovare due numeri sapendo che la loro somma è $s=4\sqrt{3}$ e il loro prodotto è $p=11$.

$$x^2-4\sqrt{3}\cdot x+11=0; \qquad x_{1,2}=2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-11}=\left\langle \begin{array}{l} 2\sqrt{3}-1 \\ 2\sqrt{3}+1 \end{array} \right.$$

NOTA Se nell'equazione $x^2-sx+p=0$ è $\Delta=0$, allora i due numeri sono uguali;
se è $\Delta<0$, i due numeri sono complessi: in $\mathbb{R}$, non esistono.

ESERCIZI (trovare due numeri conoscendone somma e prodotto)

1) $s=134,\ p=1353$	2) $s=4,\ p=1$	3) $s=2,\ p=-575$	4) $s=54,\ p=729$
5) $s=\frac{7}{6},\ p=\frac{1}{3}$	6) $s=-\frac{5}{6},\ p=-1$	7) $s=0,\ p=-5$	8) $s=5,\ p=5$
9) $s=2\sqrt{3},\ p=1$	10) $s=-4\sqrt{3},\ p=12$	11) $s=4k\sqrt{2},\ p=6k^2$	12) $s=a^2+2,\ p=a^3+1$

RISULTATI

1) $11,\ 123$	2) $2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$	3) $-23,\ 25$	4) $27,\ 27$
5) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}$	6) $-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$	7) $\sqrt{5},\ -\sqrt{5}$	8) $\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}$
9) $\sqrt{3}+\sqrt{2},\ \sqrt{3}-\sqrt{2}$	10) $-2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3}$	11) $k\sqrt{2},\ 3k\sqrt{2}$	12) $a+1,\ a^2-a+1$

c) FORMULA GENERALE PER SCOMPORRE IN FATTORI UN TRINOMIO DI 2° GRADO

Indicato con $\mathbf{ax^2+bx+c}$ **il trinomio da scomporre, per effettuare la scomposizione basterà scrivere l'equazione** $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ **("equazione associata" al trinomio considerato), e risolverla. Dette** x_1, x_2 **le soluzioni di questa** (NOTE), **si avrà:**

$$\boxed{\mathbf{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}}$$

NOTE

♪ Se le due soluzioni coincidono ($\Delta=0$: $x_1=x_2$) la formula rimane pienamente valida,
e può essere riscritta come $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_1)=a(x-x_1)^2$
Quindi (IMPORTANTE!): **se** $\mathbf{\Delta=0}$**, il trinomio** $\mathbf{ax^2+bx+c}$
è uguale al QUADRATO DI UN BINOMIO,
moltiplicato eventualmente per una costante.

♫ **Se** $\mathbf{\Delta<0}$**, il trinomio non è scomponibile in campo reale** (= utilizzando solo coefficienti reali); **tuttavia, volendo, si può pensare alle due soluzioni complesse** x_1, x_2 **dell'equazione associata, e allora la formula rimane pienamente valida.**

DIMOSTRAZIONE, o meglio: "costruzione" della formula

$$\boxed{ax^2+bx+c}=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=$$
$$=a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right)=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=\boxed{a(x-x_1)(x-x_2)}\quad \text{C.V.D.}$$

Esempio 1. Scomporre in fattori il trinomio $6x^2+x-1$.

Equazione associata :

$$6x^2+x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{-1\pm5}{12}=\left\langle\begin{array}{l}\boxed{-1/2}\\ \boxed{1/3}\end{array}\right.$$

$$6x^2+x-1=6\cdot\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left(x-\frac{1}{3}\right)=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\cancel{6}\cdot\frac{2x+1}{\cancel{2}}\cdot\frac{3x-1}{\cancel{3}}=(2x+1)(3x-1)$$

Esempio 2. Fattorizzare $y^2-4y\sqrt{3}+12$. *Immagino nella mia mente* l'equazione associata e la risolvo:

$$y_{1,2}=2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-12}=2\sqrt{3}\pm0=\boxed{2\sqrt{3}}$$
$$y^2-4y\sqrt{3}+12=\left(y-2\sqrt{3}\right)\left(y-2\sqrt{3}\right)=\left(y-2\sqrt{3}\right)^2$$

ESERCIZI (fattorizzazione di un trinomio di 2° grado)

1) $8x^2-6x+1$
2) $3x^2+10x-8$
3) $6x^2-5x\sqrt{2}+2$
4) x^2-2x-1
5) $x^2-2x\sqrt{5}+5$
6) $12x^2-16mx-3m^2$
7) $x^2+2ax\sqrt{2}-16a^2$
8) x^2-6x+1
9) $2y^2+3y\sqrt{3}-6$
10) $24a^2+10a-25$
11) $z^2+z\left(1-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-2$
12) $d^2-2d\left(3-\sqrt{2}\right)+\left(11-6\sqrt{2}\right)$
13) $6x^2-13ax+6a^2$
14) $3y^2+4ty-4t^2$
15) $a^2+4ab-12b^2$

RISULTATI

1) $(2x-1)(4x-1)$
2) $(3x-2)(x+4)$
3) $\left(2x-\sqrt{2}\right)\left(3x-\sqrt{2}\right)$
4) $\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right)$
5) $\left(x-\sqrt{5}\right)^2$
6) $(6x+m)(2x-3m)$
7) $\left(x-2a\sqrt{2}\right)\left(x+4a\sqrt{2}\right)$
8) $\left(x-3+2\sqrt{2}\right)\left(x-3-2\sqrt{2}\right)$
9) $\left(2y-\sqrt{3}\right)\left(y+2\sqrt{3}\right)$
10) $(4a+5)(6a-5)$
11) $(z-1)\left(z+2-\sqrt{2}\right)$
12) $\left(d+\sqrt{2}-3\right)^2$
13) $(2x-3a)(3x-2a)$
14) $(3y-2t)(y+2t)$
15) $(a-2b)(a+6b)$

d) REGOLA DI CARTESIO

Questa regola

permette di stabilire qual è il segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado assegnata (vale a dire: di stabilire se sono entrambe positive, oppure entrambe negative, oppure discordi) senza risolvere l'equazione stessa.

Premessa

In un'equazione di 2° grado, diciamo
che vi è una "**permanenza**" se due coefficienti consecutivi hanno lo stesso segno;
che vi è una "**variazione**" se due coefficienti consecutivi hanno segni opposti.

Esempio: $x^2 - 5x - 6 = 0$

$+ \quad - \quad -$

$\quad V \quad P$

REGOLA DI CARTESIO
In un'equazione di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$,

- **ad ogni PERMANENZA corrisponde una soluzione NEGATIVA,**
- **e a ogni VARIAZIONE corrisponde una soluzione POSITIVA;**

nel caso, poi, che si abbia
una permanenza e poi una variazione, oppure una variazione seguita da una permanenza,
la soluzione di valore assoluto maggiore è:
quella negativa, se viene prima la permanenza, quella positiva se viene prima la variazione.

NOTA: naturalmente, **la regola di Cartesio vale soltanto a condizione che sia $\Delta \geq 0$,**
perché se $\Delta < 0$ non si hanno soluzioni in $\mathbb{R}$; volendo, le soluzioni esistono in $\mathbb{C}$,
ma quando ci riferiamo a numeri complessi non ha senso parlare di "positività" o "negatività".

Specchietto per la dimostrazione della regola di Cartesio

a	b	c	Situazione permanenze e variazioni	$x_1 x_2$ $\frac{c}{a}$	$x_1 + x_2$ $-\frac{b}{a}$	x_1	x_2	Soluzione di valore assoluto maggiore (in caso di soluzioni discordi)
+	+	+	2 permanenze	+	−	−	−	
+	+	−	1 permanenza e poi 1 variazione	−	−	−	+	quella negativa
+	−	+	2 variazioni	+	+	+	+	
+	−	−	1 variazione e poi 1 permanenza	−	+	−	+	quella positiva

NOTA allo specchietto

Nello specchietto si suppone sempre che il 1° coefficiente sia positivo, perché questa ipotesi *non è restrittiva*:
se, infatti, il 1° coefficiente fosse negativo, potremmo sempre
cambiare tutti i segni, riconducendoci ad un 1° coefficiente positivo; … e così facendo,
le permanenze resterebbero permanenze, le variazioni resterebbero variazioni, e le soluzioni non cambierebbero.

ESEMPI

a) $\boxed{45x^2 - 18x + 1 = 0}$

$+ \quad - \quad +$

$\quad V \quad V$

2 Variazioni, quindi: 2 soluzioni positive.

b) $\boxed{x^2 + 2x - 48 = 0}$

$+ \quad + \quad -$

$\quad P \quad V$

1 Permanenza seguita da 1 Variazione:
quindi, soluzioni discordi,
e la soluzione "prevalente"
(= di valore assoluto maggiore) è quella
negativa, perché viene prima la permanenza.

c) $\boxed{x^2 - 6x + 10 = 0}$

ATTENZIONE:
qui la regola non è applicabile,
perché è $\Delta < 0$

ESERCIZIO. Stabilisci quante sono le soluzioni *reali positive* dell'equazione di 2° grado $x^2 - 4x + k = 0$
a) Se $k = 12$ b) Se $k = -12$ c) Se $k = 1$ Risposte: nell'ordine, le 3 cifre dopo la virgola del numero decimale che corrisponde alla frazione 3/250

e) QUESITI SULLE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI 2° GRADO

E' data l'equazione

$$\boldsymbol{(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0}$$

Si chiede di determinare il parametro *m* in modo che:

- **i)** **la somma delle soluzioni valga 4**
- **ii)** **il prodotto delle soluzioni valga 2**
- **iii)** **le soluzioni siano coincidenti**
- **iv)** **una soluzione sia uguale a 2**
- **v)** **la somma dei quadrati delle soluzioni sia 10**
- **vi)** **le soluzioni siano reciproche l'una dell'altra**
- **vii)** **le soluzioni siano antireciproche**
- **viii)** **le soluzioni siano opposte**

i)

$$\boxed{?m/\ \ x_1+x_2=4}$$

$$-\frac{b}{a}=4$$
$$\frac{m+5}{m-1}=4$$
$$m+5=4m-4 \quad (m\neq 1)$$
$$-3m=-9$$
$$m=3$$

Sappiamo che in ogni equazione di 2° grado la somma delle soluzioni è sempre uguale a $-\frac{b}{a}$ (opposto del rapporto fra il secondo e il primo coefficiente).
Porremo perciò la condizione $-\frac{b}{a}=4$, per poi cercare i valori del parametro che la soddisfano.

Abbiamo trovato m=3. Facciamo la verifica!
Andiamo a vedere cosa diventa la nostra equazione nel caso m=3,
e risolviamola, per controllare che la somma delle soluzioni valga proprio 4:

$$(3-1)x^2-(3+5)x+2\cdot 3=0;\quad \cancel{2}x^2-\cancel{8}^4x+\cancel{6}^3=0;\quad (x-1)(x-3)=0;\quad x=1\vee x=3\rightarrow 1+3=4,\ \ OK!$$

ii)

$$\boxed{?m/\ \ x_1x_2=2}$$

$$\frac{c}{a}=2$$
$$\frac{2m}{m-1}=2$$
$$\cancel{2m}=\cancel{2m}-2 \quad (m\neq 1)$$
$$0=-2 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

Sappiamo che in ogni equazione di 2° grado il prodotto delle soluzioni è sempre uguale a $\frac{c}{a}$ (rapporto fra il termine noto e il primo coefficiente)
Porremo perciò la condizione $\frac{c}{a}=2$, per poi cercare i valori del parametro che la soddisfano.

Abbiamo trovato un'equazione, nell'incognita m, impossibile.
Ciò significa che non esiste alcun valore di m per cui il prodotto delle soluzioni valga 2.
Insomma, nella famiglia delle infinite equazioni $(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0$,
non ne esiste nemmeno una nella quale il prodotto delle soluzioni valga 2.

iii)

$$\boxed{?m/\ \ x_1=x_2}$$

$$\Delta=0 \quad (b^2-4ac=0)$$
$$(m+5)^2-8m(m-1)=0$$
$$m^2+10m+25-8m^2+8m=0$$
$$-7m^2+18m+25=0$$
$$7m^2-18m-25=0$$

MOLTO IMPORTANTE !!!
In un'equazione di 2° grado
le **SOLUZIONI** sono **COINCIDENTI** se e solo se $\boldsymbol{\Delta=0}$

Nel caso poi in cui b sia pari, converrà rimpiazzare questa condizione con $\boldsymbol{\Delta/4=0}$ (equivalente ma più comoda).
Ad esempio, l'equazione $x^2+2(2-k)x-(2+9k)=0$
ha soluzioni coincidenti quando $\frac{\Delta}{4}=(2-k)^2+(2+9k)=0$ ossia
$4-4k+k^2+2+9k=0;\ \ k^2+5k+6=0;\ \ldots\ \ k=-3\vee k=-2$

$$m_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+175}}{7}=\frac{9\pm\sqrt{256}}{7}=\frac{9\pm 16}{7}=\left\langle\begin{array}{l}-1\\ 25/7\end{array}\right.$$

Verifica nel caso $m=-1$

$$(-1-1)x^2-(-1+5)x+2(-1)=0$$
$$-2x^2-4x-2=0;\quad x^2+2x+1=0;\quad (x+1)^2=0;$$
$$x_1=x_2=-1\rightarrow \textit{soluzioni coincidenti},\ OK$$

Fai tu, caro studente, la verifica con m = 25/7.

… Certo, sarebbe pure possibile:
1) risolvere l'equazione, trovando x_1 e x_2 che sarebbero espressioni con *m* sotto radice
2) uguagliare le due espressioni, ottenendo *in questo modo* l'equazione finalizzata a determinare *m*.

Tale procedimento sarebbe però inutilmente lungo e ingombrante!

iv)

$$\boxed{?m/\ \ x=2}$$

Sostituiamo...

$$(m-1)\cdot 2^2-(m+5)\cdot 2+2m=0$$
$$4m-4\cancel{-2m}-10\cancel{+2m}=0$$
$$4m=14$$
$$m=7/2$$

BANALE, MA IMPORTANTE:
una data equazione ammette come soluzione un determinato numero se e solo se, sostituendo quel numero al posto dell'incognita, si ottiene un'uguaglianza vera.

Verifica tu, caro lettore, che con m=7/2 l'equazione ammette le due soluzioni x=7/5 e, appunto, x=2.

v)

$$\boxed{?m\ /\ x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=10}$$

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$$
$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=10$$
$$\left(\frac{m+5}{m-1}\right)^2-2\frac{2m}{m-1}=10$$
$$(m+5)^2-4m(m-1)=10(m-1)^2\qquad(m\neq 1)$$
$$\dots\ 13m^2-34m-15=0$$
$$m_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289+195}}{13}=\frac{17\pm 22}{13}=\begin{cases}-\dfrac{5}{13}\\[2mm] \dfrac{39}{13}=3\end{cases}$$

La verifica, in ciascuno dei due casi, è lasciata allo studente.

Con $m=-\dfrac{5}{13}$

le due soluzioni sono irrazionali; tuttavia, come si constata col calcolo, la somma dei loro quadrati dà proprio 10.

♥ LE FORMULE DI WARING

Vale l'identità $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ che ci permette di ricondurre la somma dei quadrati alla somma e al prodotto delle basi.

Abbiamo, in pratica, utilizzato la prima di una sequenza di formule, chiamate **formule di Waring**, le quali **permettono di esprimere una somma di due potenze di ugual grado** (quadrati, cubi, …) **in funzione della somma delle basi e del loro prodotto.**

$$\boxed{x^2+y^2}=x^2+2xy+y^2-2xy=\boxed{(x+y)^2-2xy}$$

$$\boxed{x^3+y^3}=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2=$$
$$=\boxed{(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

$$\boxed{x^4+y^4}=(x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3=$$
$$=(x+y)^4-4xy\left(x^2+y^2\right)-6x^2y^2=$$
$$=(x+y)^4-4xy\left[(x+y)^2-2xy\right]-6x^2y^2=$$
$$=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+8x^2y^2-6x^2y^2=$$
$$=\boxed{(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2}$$

...

vi)

$$\boxed{?m\ /\ x_1=\frac{1}{x_2}}$$

$$x_1x_2=1$$
$$\frac{c}{a}=1$$
$$\frac{2m}{m-1}=1$$
$$\dots\ m=-1$$

Ricordiamo che due numeri si dicono "reciproci" se il loro prodotto è 1 quindi se ognuno di essi è uguale a "1 fratto l'altro". Ad esempio, sono reciproci i numeri

4 e $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{3}{2}$; $-\dfrac{3}{5}$ e $-\dfrac{5}{3}$

vii)

$$\boxed{?m\ /\ x_1=-\frac{1}{x_2}}$$

$$x_1x_2=-1$$
$$\frac{c}{a}=-1$$
$$\frac{2m}{m-1}=-1$$
$$\dots\ m=1/3$$

"Antireciproco" significa "l'opposto del reciproco". Ad es., sono antireciproci i due numeri $\dfrac{2}{3}$ e $-\dfrac{3}{2}$.

Due numeri sono antireciproci se e solo se hanno per prodotto –1.

viii)

$$\boxed{?m/\,x_1=-x_2}$$

$$x_1+x_2=0$$
$$-\frac{b}{a}=0$$
$$\frac{m+5}{m-1}=0$$
$$\dots\ m=-5$$

Molto semplice: due numeri sono opposti se e solo se la loro somma è 0.

Verifica. La nostra equazione $(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0$ *diventa, con* $m=-5$,

$$(-5-1)x^2-(-5+5)x+2(-5)=0;\quad -6x^2-10=0;\quad 3x^2+5=0$$

Ora, in campo reale questa equazione NON ha soluzioni opposte, come si desiderava, bensì è impossibile; tuttavia, sconfinando in campo complesso si può scrivere:

$x^2=-\dfrac{5}{3};\quad x=\pm\sqrt{-\dfrac{5}{3}}=\pm i\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ *quindi si ottengono due soluzioni effettivamente opposte.*

Ricapitolando, il valore richiesto di m

- *non esiste se intendiamo che le soluz. debbano obbligatoriamente appartenere a* $\mathbb{R}$,
- *esiste ed è m=–5 se ammettiamo che le soluzioni possano essere cercate in tutto* $\mathbb{C}$.

ESERCIZI (quesiti sulle equazioni parametriche di 2° grado)

E’ richiesto, in ciascun esercizio, dopo aver determinato il valore desiderato del parametro, di calcolare pure qual è il valore delle soluzioni nel caso specifico. Ciò servirà anche da verifica.

Nell’equazione …	determinare il parametro (o i parametri) in modo che …
1) $x^2+2ax+a+6=0$	le soluzioni coincidano
2) $(b-1)x^2+bx+(1-b)=0$	$\sqrt{2}$ sia soluzione
3) $x^2-4mx+m-1=0$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano reciproche 3. le soluzioni siano antireciproche 4. una soluzione sia nulla
4) $(2-a)x^2+2(3-a)x+4=0$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano uguali 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche
5) $q(x^2+1)=4x$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano reciproche 3. le soluzioni siano uguali 4. le soluzioni abbiano per somma 4
6) $x^2-(3a+2b+1)x+a+b+1=0$	le soluzioni siano i numeri 1 e 2
7) $(a-1)x^2+ax+(a-1)=0$	1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$ 2. l’equazione data abbia una soluzione in comune con l’equazione $x^2-4x+3=0$
8) $kx^2+(5k-1)x+4=0$	1. $x_1 \equiv x_2$ 2. ${x_1}^2+{x_2}^2=65/4$ 3. una soluzione sia -4
9) $x^2=\frac{4ax-3}{a}$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. una soluzione sia 3 4. la somma delle soluzioni sia 4 5. la somma delle soluzioni sia -4 6. $x_1 \cdot x_2=3$ 7. il prodotto delle soluzioni sia 6 8. le soluzioni siano reciproche
10) $kx^2+(2k+1)x+k=0$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche
11) $kx^2+2(k+1)x+(k+2)=0$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche 5. la somma dei quadrati delle soluzioni sia 10
12) $(m+4)x^2+(m-1)x-1=0$	1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$ 2. $\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=10$
13) $cx^2-cx+2=0$	1. ${x_1}^3+{x_2}^3=7$ 2. ${x_1}^4+{x_2}^4=\frac{1}{8}$
14) Per quali valori dei parametri a, b le due equazioni $2x^2+7x=4$ e $(a+3b)x^2+2ax-(a+b+2)=0$ hanno le stesse soluzioni?	
15) Scrivi un’equazione di 2° grado che abbia per soluzioni i due numeri -8 e 3.	
16) Nell’equazione $x^2-(k+5)x+2(2k+1)=0$ determina k in modo che le soluzioni siano una doppia dell’altra INDICAZIONE: si potrebbe risolvere, ottenendo le soluzioni come espressioni contenenti k, poi cercare i valori di k per cui risulti $x_1=2x_2$ oppure $x_2=2x_1$; tuttavia, le equazioni nell’incognita k ottenute in questo modo conterrebbero k sotto radice e sarebbero, dunque, equazioni “irrazionali”; ora, il discorso su tali tipi di equazioni, risolvendo le quali è possibile imbattersi in soluzioni “non accettabili”, non è stato ancora trattato. C’è d’altra parte un metodo molto migliore: il sistema $\begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_1+x_2=k+5 \\ x_1 \cdot x_2=2(2k+1) \end{cases}$ porta a determinare x_1, x_2, k. Pur essendo il sistema di 2° grado, ci puoi provare: non è difficile.	
17) Nell’equazione $(h+1)x^2+3hx-2h=0$ determina h in modo che il rapporto delle soluzioni sia -4	
18) Nell’equazione $x^2-2(m+1)x+4m+3=0$ determina m in modo che $x_2-x_1=2$ (vedi esercizio 16)	
19) Nell’equazione $x^2-2(m+1)x+4m+3=0$ determina m in modo che $\lvert x_1+x_2 \rvert=10$	
20) Nell’equazione $rx^2-2rx-24=0$ determina r in modo che le soluzioni: 1. siano uguali 2. siano opposte 3. siano reciproche 4. abbiano prodotto 3 5. abbiano rapporto 3	

RISPOSTE

1)
$a=-2$ (in questo caso $x_1 = x_2 = 2$)
oppure
$a=3$ (in questo caso $x_1 = x_2 = -3$)
Ricorda che la condizione da porre è, per le soluzioni coincidenti, $\Delta = 0$;
qui è meglio, dato che il "b" è pari, $\frac{\Delta}{4}=0$

2)
$b=\sqrt{2}-1$
L'altra soluzione è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3)
1. $m=0$ $(x=\pm 1)$
2. $m=2$. In questo caso si ha $x_{1,2}=4\pm\sqrt{15}$,
e questi numeri sono fra loro reciproci in quanto
- moltiplicandoli, si ottiene 1 (verificalo!)
- oppure, facendo ad es. il calcolo $1/x_1$,
si ottiene, dopo razionalizzazione, x_2
3. $m=0$ $(x=\pm 1)$ 4. $m=1$ (l'altra soluz. vale 4)

4) 1. $a=3$ 2. $a=1$ 3. $a=-2$ 4. $a=6$
5) 1. Impossibile, nessun valore di q 2. Qualsiasi valore di q eccetto 0 3. $q=\pm 2$ 4. $q=1$
6) $a=0,\ b=1$ Sostituendo al posto di x prima il valore 1, poi 2, si hanno due condizioni, di cui si fa il sistema.

7)
1. $a=2/3$. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}$ ...
2. $a=2/3,\ a=10/13$

8) 1. $k=1\left(x_{1,2}=-2\right) \vee k=1/25\left(x_{1,2}=10\right)$
2. $k=2\left(x_1=-4,\ x_2=-\frac{1}{2}\right) \vee k=\frac{2}{35}\left(x_{1,2}=\frac{25\pm 3i\sqrt{55}}{4}\right)$
3. $k=2$ (l'altra soluzione è $-1/2$)

9) 1. $a=3/4$ 2. nessun valore di a 3. $a=1$ 4. qualsiasi valore di a, tranne 0 5. nessun valore di a 6. $a=1$
7. $a=1/2$. In questo caso le soluz. sono due numeri complessi, $2-i\sqrt{2}$ e $2+i\sqrt{2}$, il cui prodotto è appunto 6.
8. $a=3$. In questo caso le soluzioni sono due numeri irrazionali, $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$, appunto reciproci fra loro: puoi constatarlo
♪ moltiplicandoli (otterrai 1, e due numeri sono reciproci se e solo se il loro prodotto è 1)
♫ oppure eseguendo per esempio il calcolo $\boxed{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}\boxed{=2+\sqrt{3}}$

10) 1. $k=-1/4$ 2. $k=-1/2$ (ma in questo caso le soluzioni sono complesse; in $\mathbb{R}$, il problema è impossibile)
3. Qualsiasi valore di k, tranne 0 4. Impossibile, nessun valore di k

11) 1. Impossibile
2. $k=-1$
3. Impossibile
4. $k=-1$
5. $k=1,\ k=-1/2$

12)
1. $m=2$
2. $m=\pm 1$
Denom. comune, innanzitutto …

13) 1. $c=-1$
2. $c=8\left(x_1=x_2=\frac{1}{2}\right) \vee c=\frac{8}{7}$ (soluz. complesse)
Si utilizzano le formule di Waring, pag. 65.

14)
$a=7$,
$b=-1$

15) Si potrebbe pensare alla generica equazione $ax^2+bx+c=0$ e imporre che $-8, 3$ ne siano soluzioni;
si otterrebbe così il sistema $\begin{cases}64a-8b+c=0\\9a+3b+c=0\end{cases}$ che non ha una sola soluzione, bensì ne ha infinite,
perché è verificato da tutte le terne a, b, c per le quali $b=5a,\ c=-24a$, con a qualsiasi.
Ad esempio, una terna che "va bene" è $a=1, b=5, c=-24$; un'altra è $a=-3, b=-15, c=72$ …
Moltiplicando tutti i coefficienti di un'equazione per uno stesso numero, le soluzioni non cambiano!
Tuttavia, c'è un modo molto veloce ed efficace per scrivere un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni due numeri assegnati: nel nostro caso, l'equazione cercata è semplicemente $(x+8)(x-3)=0$
(anche tutte le equazioni ottenibili moltiplicando quella per una costante risolverebbero il problema).

♥ *In generale*: un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni due valori assegnati r, s è semplicemente la $(x-r)(x-s)=0$.

Altro es.: un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni $-\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ è $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=0$
che si può riscrivere come $(3x+2)(4x-3)=0$.

16) $k=4$ 17) $h=1$ (perché $h=0$ non va bene?) 18) $m=-1,\ m=3$ 19) $m=4,\ m=-6$
20) 1. $r=-24$ 2. nessun valore di r 3. $r=-24$ 4. $r=-8$ (però con soluzioni complesse) 5. $r=-32$

Puoi andare a vedere come sono spiegate le equazioni di 2° grado sul bel sito www.themathpage.com di Lawrence Spector ⇨

Di equazioni di 2° grado si parla anche nel capitolo su "Grafici e risoluzioni grafiche" (da pag. 106 a pag. 113)