GRAFICI E RISOLUZIONI GRAFICHE

1. PRESENTAZIONE

Ci siamo già occupati di grafici e di risoluzioni grafiche nel **Volume 1** di questo corso.

Abbiamo spiegato
- cos'è un "**riferimento cartesiano**"
- cos'è una "**funzione**" (vedi NOTA) e cosa si intende per "**dominio**"
- cos'è e come si traccia il "**grafico**" **di una funzione** in un riferimento cartesiano

Abbiamo descritto
- i grafici delle **funzioni** "**lineari**" (= di 1° grado), evidenziando che si tratta di **RETTE**
- i grafici delle **funzioni** "**quadratiche**" (= di 2° grado), evidenziando che si tratta di **PARABOLE**
- i grafici delle **funzioni** legate a una "**proporzionalità inversa**", che risultano essere **IPERBOLI**

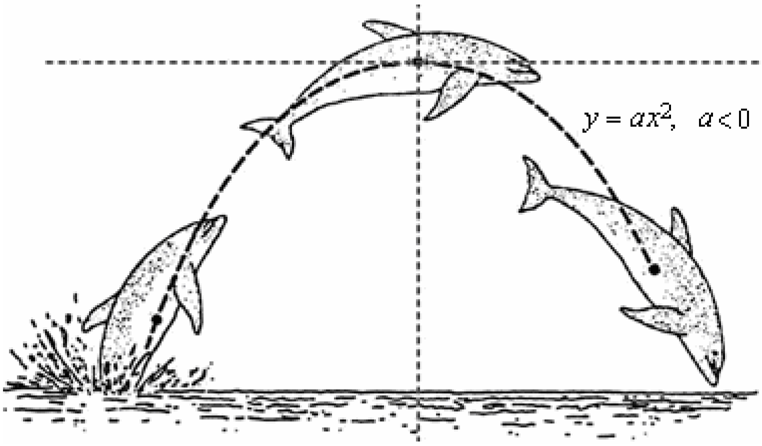
Per terminare, abbiamo visto come si possa
- **risolvere graficamente un'equazione**
- **risolvere graficamente un sistema** di due equazioni in due incognite.

NOTA
Queste pagine del Volume 1 introducono il discorso "funzioni"
con riferimento alle funzioni "reali di variabile reale",
ossia a quelle corrispondenze che da un *numero reale*
fanno passare ad uno e un solo altro *numero reale*;
una *visione più generale del concetto di funzione*
è poi esposta nel successivo capitolo "Relazioni e funzioni"

Nel presente **Volume 2** riprenderemo il discorso
- riportando, per comodità del lettore, alcune pagine del volume 1 sulle
  - **funzioni lineari**
  - **funzioni quadratiche**
  - **funzioni della proporzionalità inversa**
- introducendo in modo elementare il simbolo di "**limite**"
- menzionando con un rapidissimo cenno la cosiddetta "**Geometria Analitica**"
- parlando brevemente delle meravigliose "**coniche**"
- occupandoci di **grafici di potenze e radici**, e del **grafico della funzione** $y=|x|$
- dando **qualche altro esempio di risoluzione grafica**
- indicando le "**manipolazioni**" che ci consentono,
  a partire dal grafico di una funzione "madre", di tracciarne rapidamente altri con esso correlati.

MOLTO interessante!

Grazie a Jill Britton,
Camosun College,
Victoria BC (Canada),
autrice del sito
http://britton.disted.camosun.bc.ca/home.htm,
pieno di ottime e divertenti idee,
per l'autorizzazione
ad utilizzare l'immagine qui a fianco.



Il baricentro del delfino descrive un arco di parabola.

2. FUNZIONI LINEARI: RETTE

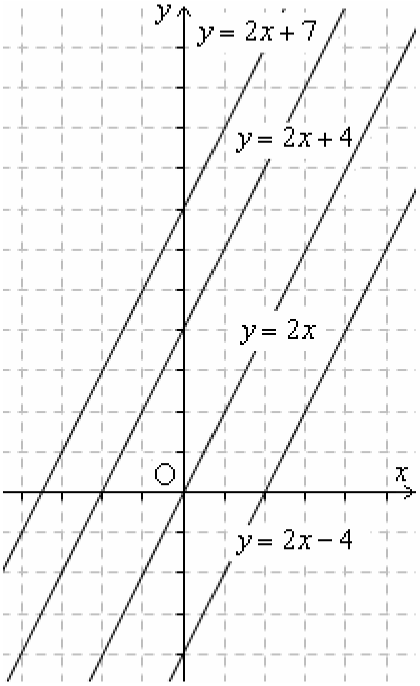
Prova a disegnare, sul tuo quaderno, il grafico di una funzione della forma

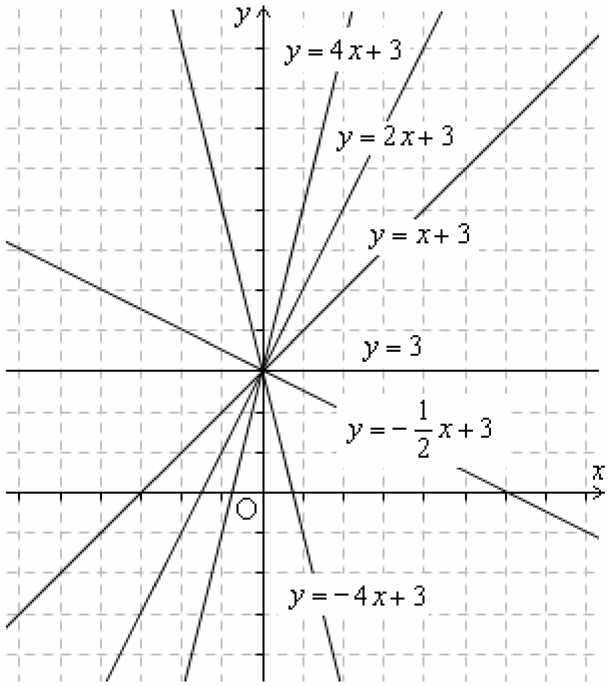
$\boxed{y = mx + q}$, **essendo *m, q* due numeri fissati**

(ad esempio, potresti prendere $y = 3x + 4,\ \ y = x - 1,\ \ y = -2x\ \ldots$)

Le funzioni della forma $\boldsymbol{y = mx + q}$ sono anche dette "**funzioni di 1° grado**" o "**funzioni lineari**".

Bene! Ti accorgerai che
una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una RETTA
(*ecco* perché i matematici utilizzano con lo stesso significato
la locuzione "di 1° grado" e l'aggettivo "lineare"!)





Quelli qui sopra sono i grafici delle rette

$y = 2x + 7$
$y = 2x + 4$
$y = 2x$
$y = 2x - 4$

Come vediamo, tali rette sono fra loro *parallele*.

Da qui possiamo intuire che se due rette
$$y = mx + q,\ \ y = m'x + q'$$
hanno $m = m'$, allora sono parallele fra loro.

La costante ***m*** dell'equazione $y = mx + q$ viene detta "**coefficiente angolare**".

Ricordalo, è importante:

♥ "**Se due rette hanno lo stesso coeff. angolare *m*, allora sono parallele**".

Dalle figure emerge pure il significato della costante *q*.

♥ **La costante *q* esprime l'ordinata del punto nel quale la retta taglia l'asse verticale**.

In effetti, data l'equazione $y = mx + q$,
se si pone $x = 0$ si ottiene $y = q$
per cui la retta in questione passerà per $(0,\ q)$.

La costante ***q*** viene detta "l'**ordinata all'origine**", per il fatto che **indica l'ordinata del punto della retta che sta sopra (o sotto) l'origine**.

Questi altri grafici corrispondono alle rette

$y = 4x + 3$ $\quad y = 3$
$y = 2x + 3$ $\quad y = -\dfrac{1}{2}x + 3$
$y = x + 3$ $\quad y = -4x + 3$

accomunate dalla stessa "ordinata all'origine" *q*
(mentre i coeff. angolari sono fra loro differenti).

Si vede chiaramente che

♥ **quando il coeff. angolare è positivo** ($m > 0$) **la retta è in salita,**

♥ **quando il coeff. angolare è negativo** ($m < 0$) **la retta è in discesa**,

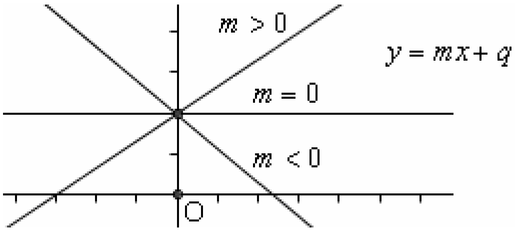
♥ **quando il coeff. angolare è nullo** ($m = 0$) **la retta è in orizzontale**.

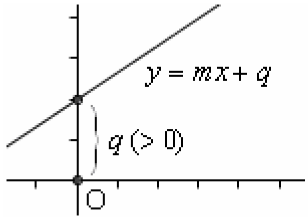
Il caso del coefficiente angolare nullo è quello della "funzione costante", ad esempio
$$y = 3,$$
che potrebbe anche essere scritta come
$$y = 0 \cdot x + 3$$
e assume sempre il valore $y = 3$
per qualsiasi valore di *x*.

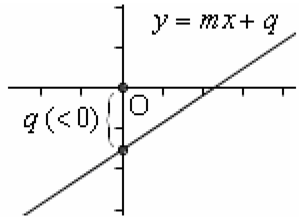
Inoltre,

♥ **quanto più è grande il valore assoluto** $|m|$ del coefficiente angolare, tanto più la retta **è inclinata nella sua salita o discesa.**

RIASSUNTO SCHEMATICO



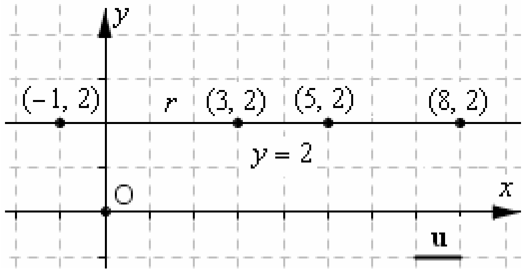




$m =$ *coefficiente angolare* $\quad$ $m > 0$ *salita*, $m < 0$ *discesa*, $m = 0$ *orizzontalità*

$q =$ "*ordinata all'origine*"
$=$ *ordinata del punto che ha* $x = 0$
$=$ *ordinata del punto di intersezione con l'asse* y

RETTE ORIZZONTALI



Sappiamo che **una retta orizzontale** (**= parallela all'asse *x***) **ha coefficiente angolare nullo** $(m = 0)$.
Riflettiamo ancora un attimo su questo fatto.

In effetti, una retta orizzontale è il luogo dei punti del piano cartesiano, con la proprietà di avere una certa ordinata fissata k (ad esempio, nella figura qui a fianco è rappresentata la retta formata da tutti e soli i punti di ordinata uguale a 2).
L'equazione "gemellata" a tale retta, ossia l'uguaglianza indicante la proprietà che è caratteristica di tutti i suoi punti e di essi soltanto, è perciò della forma $y = k$ (per la retta in figura, $y = 2$).
Un'uguaglianza del tipo $y = k$ può anche essere riscritta come $y = 0 \cdot x + k$;
vediamo che qualunque valore si attribuisca a x, la y corrispondente vale sempre k,
e il moltiplicatore di x, ossia il coefficiente angolare, è appunto 0.

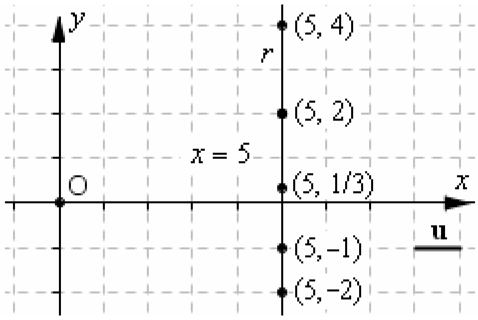
Riassumendo: **il coefficiente angolare $m = 0$ è associato all'orizzontalità**;
♥ **una retta orizzontale** (NOTA) **ha** dunque **equazione della forma $y = k$ (k costante)**

NOTA: spesso in queste pagine ci prendiamo la licenza, per brevità, di scrivere "retta *orizzontale/verticale*" quando invece dovremmo parlare di "retta *parallela all'asse delle ascisse/ordinate*". Di norma, in effetti, l'asse delle ascisse è disposto orizzontalmente rispetto all'osservatore, e quello delle ordinate verticalmente.

RETTE VERTICALI

♥ **Per una retta "verticale" (= parallela all'asse delle *y*)**
il coefficiente angolare non esiste, non è definito.

Infatti si intende per "coefficiente angolare" la costante che moltiplica x in un'equazione della forma $y = mx + q$; ma una retta verticale *non ha* un'equazione di tal forma.
L'equazione di una retta (o, più in generale, di una data curva sul piano cartesiano) esprime una proprietà "caratteristica" dei punti di quella retta, ossia una proprietà che è posseduta dalle coordinate *x*, *y* di tutti i punti di quella retta, e di essi soltanto.
Ora, prendiamo la retta verticale della figura a destra.
Qual è la proprietà che caratterizza i suoi punti?
E' facile riconoscere che i suoi punti sono tutti e soli i punti del piano cartesiano, la cui ascissa è 5.
Pertanto tale retta sarà associata all'equazione $x = 5$.
… Impossibile riscriverla sotto la forma $y = mx + q$!

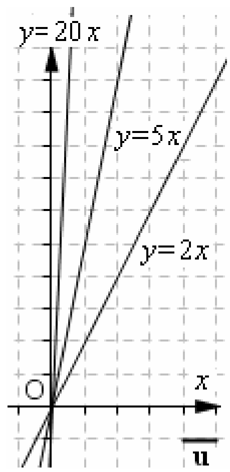


♥ Anche **l'asse delle *y*** è una particolare retta verticale: la sua equazione è $\mathbf{x = 0}$.
♥ E **l'asse *x*** è una particolare retta orizzontale, di equazione $\mathbf{y = 0}$.

♥ **Una retta verticale ha equazione della forma $x = k$**.
Osserviamo che tale equazione
- NON indica una funzione in cui x sia var. indipendente
- NON può essere portata sotto la forma $y = mx + q$.

♥ **DA UN CERTO PUNTO DI VISTA, si può però dire che "una retta verticale ha coefficiente angolare INFINITO".**
Questa affermazione va interpretata nel senso che
"se una retta ha inclinazione altissima, quasi verticale, il suo coefficiente angolare sarà grandissimo, tendendo all'infinito all'aumentare dell'inclinazione".

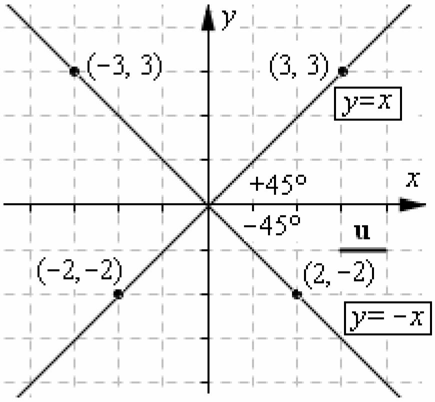
Osserva la figura qui a fianco. E immagina che inclinazione avrebbe una retta con coefficiente angolare uguale a 1.000.000.000 !!!



BISETTRICI DEI QUADRANTI E RETTE INCLINATE DI 45°

- ♥ **La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano
  la cui ordinata è uguale all'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = 1$**
  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale,
  sono inclinate di **45° in salita (+ 45°)**.

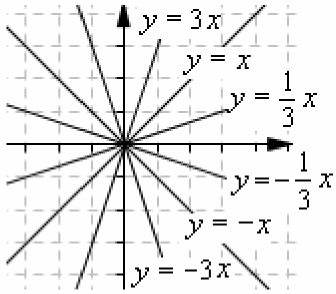
- ♥ **La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$**
  (è il luogo dei punti del piano cartesiano
  la cui ordinata è uguale all'opposto dell'ascissa).
  Quindi **il coefficiente angolare $m = -1$**
  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale,
  sono inclinate di **45° in discesa (– 45°)**.



Le bisettrici dei quadranti

RETTE CON INCLINAZIONE MAGGIORE, O MINORE, DI 45°

- **Una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) > 45°, ha $|m| > 1$;**
  una retta, con inclinazione (in salita o in discesa) < 45°, ha $0 \le |m| < 1$
- **Due rette, che siano ugualmente inclinate,**
  ma una in salita e l'altra in discesa,
  hanno coefficienti angolari fra loro OPPOSTI.
- ♥ **Si può dimostrare che due rette PERPENDICOLARI**
  hanno coefficienti angolari fra loro ANTIRECIPROCI
  (si dice "antireciproco" l'opposto del reciproco).



LA PROPRIETA' FONDAMENTALE DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Prendi una retta qualsiasi: che so, la $y = 2x + 3$. Adesso, assegna a x due valori, per calcolare i corrispondenti valori di y e determinare dunque due punti della retta stessa. Ad esempio,

- puoi porre $x = 1$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ e di conseguenza un primo punto $\mathrm{A}(1,\ 5)$;
- poi puoi porre $x = 4$, e avrai quindi $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ da cui un secondo punto $\mathrm{B}(4,\ 11)$.

Ora vai a calcolare il rapporto (= quoziente) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti ottenuti:

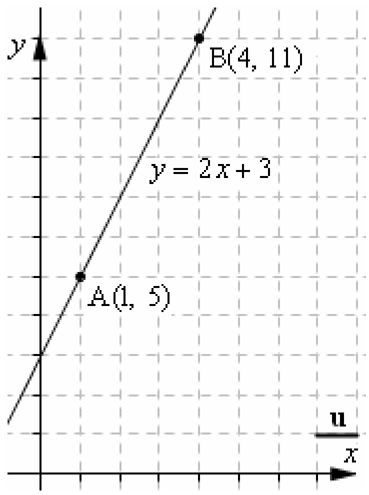
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \underset{\text{NOTA}}{=} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

Come hai potuto vedere, il risultato di questo calcolo coincide col coefficiente angolare m della retta.

Prova con un'altra coppia di punti, fai nuovamente il calcolo: otterrai ancora lo stesso valore, il valore del coefficiente angolare.
Prendi un'altra retta, considera una coppia di suoi punti: vedrai che il calcolo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

darà sempre il coefficiente angolare m di quella retta.



Ecco una retta $y = 2x + 3$,
e due suoi punti
$\mathrm{A}(1,\ 5);\ \mathrm{B}(4,\ 11)$.

Calcoliamo $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

avremo $\dfrac{11-5}{4-1} = \dfrac{6}{3} = \boxed{2}$.

Ma 2 è il coeff. angolare!!!

Vale dunque (lo si potrebbe dimostrare in generale) la **formula**

♥ $$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m}$$ (importantissima!)

Data una retta di equazione $y = mx + q$,
il suo coefficiente angolare m
è uguale al rapporto
fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse
di due punti qualsiasi della retta stessa.

NOTA - Il simbolo Δ è sovente utilizzato, in matematica, per indicare "differenza".
Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età $\Delta e = 47 - 15 = 32$.
Presi, in Fisica, due istanti di tempo successivi t_1 e t_2, nei quali la velocità di un corpo è risp. v_1 e v_2, allora nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ l'incremento di velocità (>, < o = 0) è dato da $\Delta v = v_2 - v_1$.

E’ utile ed importante osservare (vedi figura) che

♥ le due quantità Δx e Δy
corrispondono alle due misure (con segno)
dei due segmenti orizzontale (Δx) e verticale (Δy)
che occorre percorrere per passare dal primo punto al secondo

… **misure CON SEGNO**, nel senso che

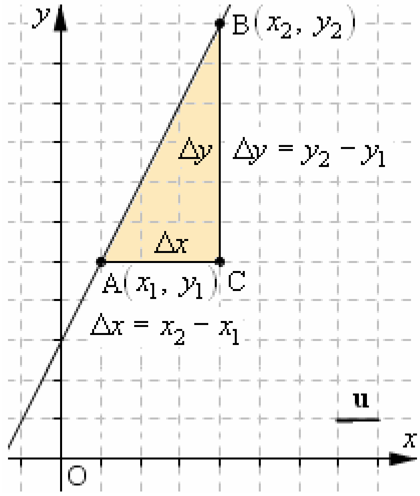
il segmento orizzontale andrà preso col segno

- positivo se viene percorso da sinistra verso destra,
- negativo se viene percorso da destra verso sinistra;

e allo stesso modo

il segmento verticale andrà preso col segno

- positivo se viene percorso dal basso verso l’alto,
- negativo se viene percorso dall’alto verso il basso.



Quanto sopra ci dice che in una funzione “lineare”, ossia della forma $y = mx + q$, l’incremento di x è proporzionale all’incremento corrispondente di y: il rapporto fra questi due incrementi è costante.
Si può dimostrare che VALE ANCHE IL VICEVERSA:
se due grandezze x, y sono legate fra loro in modo tale che l’incremento di x è proporzionale all’incremento corrispondente di y (se raddoppia uno, raddoppia anche l’altro …)
allora la relazione tra le due grandezze è della forma $y = mx + q$.

Segnaliamo infine che molti testi chiamano “**AFFINE**” una funzione della forma $y = ax + b$, riservando il termine “**LINEARE**” solo, o prevalentemente, al caso in cui $b = 0$ ($y = ax$).

ENGLISH	• coefficiente angolare = **slope** (lett.: *pendenza*), o **gradient** • ordinata all’origine = **y-intercept** • $\Delta y / \Delta x$ = “**rise over run**” = spostamento *verticale fratto spostamento laterale*

DISEGNARE UNA RETTA CONOSCENDONE UN PUNTO E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Se noi sappiamo che una retta passa per un dato punto P_0,
e conosciamo il coefficiente angolare m di quella retta,
potremo disegnare la retta con precisione
anche senza aver determinato la costante q dell’equazione $\boldsymbol{y = mx + q}$**.**

Infatti, poiché sappiamo che per il coefficiente angolare vale la formula $\boldsymbol{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$,

ci basterà fare il disegno in modo che la retta passi per P_0
e per un altro punto P_1 per ottenere il quale partiremo da P_0 e ci sposteremo

- ♪ prima orizzontalmente di un segmento orientato Δx
- ♫ poi verticalmente di un altro segmento orientato Δy,

dopo aver scelto Δx e Δy in modo tale che il loro quoziente sia uguale a quel valore m che ci interessa.

- ❑ Ad esempio (figura 1), per disegnare la retta passante per $P_0(3,3)$ e avente coefficiente angolare $m = 2$, possiamo partire da P_0 e poi spostarci di 1 verso destra ($\Delta x = 1$) e di 2 verso l’alto ($\Delta y = 2$). Troveremo così il nuovo punto P_1, tale che la retta P_0P_1 avrà $m = \Delta y / \Delta x = 2$ e sarà perciò la retta desiderata.
- ❑ Facciamo un altro esempio (fig. 2). Per disegnare la retta passante per $A(1,5)$ e di coeff. ang. $m = -3/4$, possiamo partire da A e spostarci di 4 verso destra ($\Delta x = 4$) poi di 3 verso il basso ($\Delta y = -3$). Raggiungeremo così un nuovo punto B e congiungendo A con B il gioco sarà fatto.

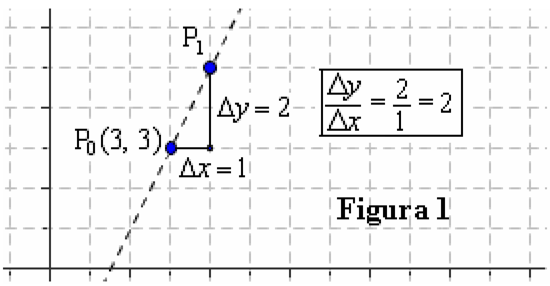


Figura 1

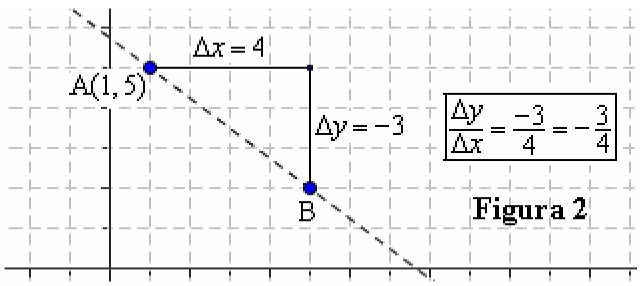


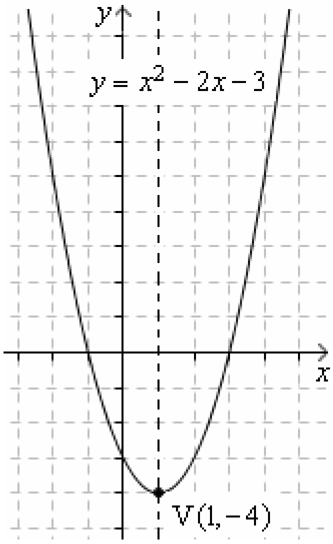
Figura 2

Queste pagine sulla retta sono state riportate pari pari dal volume 1 per comodità del lettore.
Per gli ESERCIZI, si rimanda a quel volume.

3. FUNZIONI QUADRATICHE: PARABOLE

Parliamo ora delle funzioni **“di 2° grado”, o “quadratiche”,** la cui equazione è della forma $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$

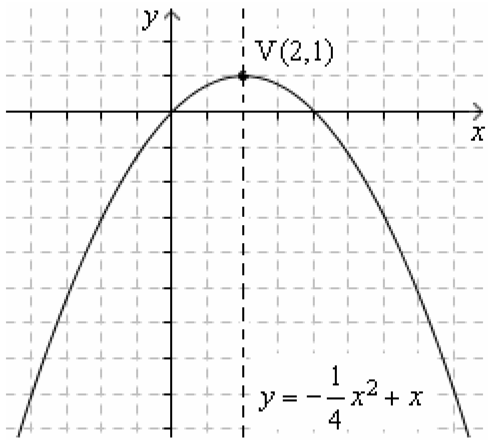
x	$y=x^2-2x-3$
-3	12
-2	5
-1	0
0	-3
$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{4}=-4+\frac{1}{4}$
1	-4
$\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{4}=-4+\frac{1}{4}$
2	-3
3	0
4	5
5	12



Disegnando questa curva per punti, ci si rende conto che essa presenta una simmetria “assiale”, cioè una simmetria rispetto a una retta (tratteggiata nella figura). La presenza di un asse di simmetria consente di tracciare il grafico con più facilità: calcolate le coordinate di un punto, dopo averlo disegnato possiamo immediatamente disegnare anche un altro punto, quello che è simmetrico del primo rispetto all’asse.

Abbiamo indicato con V (“V” di “vertice”) il punto di ordinata minima del grafico.

x	$y=-\frac{1}{4}x^2+x$
-2	-3
-1	$-1{,}25$
0	0
1	$0{,}75$
2	1
3	$0{,}75$
4	0
5	$-1{,}25$
6	-3



Questa seconda curva è “capovolta” rispetto alla precedente; inoltre la sua “curvatura” è meno accentuata. Entrambe le circostanze sono legate al coefficiente del termine di 2° grado nelle rispettive equazioni, come è spiegato più avanti.

Il vertice in questo caso è il punto di ordinata massima.

Una funzione di 2° grado $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$ ha come grafico una “parabola”.

♥ Il **segno del coefficiente $\boldsymbol{a}$** determina l’orientamento della “**concavità**” ovvero della “parte cava”:
- $\boldsymbol{a>0}$: **concavità rivolta verso l’alto** $\cup$
- $\boldsymbol{a<0}$: **concavità rivolta verso il basso** $\cap$

♥ Il **valore assoluto di $\boldsymbol{a}$** si dice “**apertura**” perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola
- sia più “dolce” (valori di $|a|$ piccoli)
- o sia più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Si dimostra che l’**ascissa del “vertice”** (che possiamo provvisoriamente descrivere come il punto della parabola avente ordinata minima oppure massima, o anche come l’intersezione della parabola col proprio asse di simmetria) è calcolabile tramite la formula

♥ $x_V=-\dfrac{b}{2a}$.

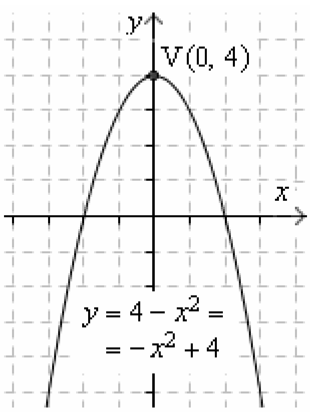
Trovata con questo calcolo l’ascissa del vertice, la rispettiva ordinata si potrà determinare facilmente: basterà semplicemente sostituire, nell’equazione della parabola, al posto di x il valore trovato.

Ad esempio, nel caso della parabola di equazione $y=x^2-2x-3$,

il calcolo fornisce: $x_V=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\cdot 1}=1$ da cui successivamente $y_V=x_V^{\,2}-2x_V-3=1-2-3=-4$

L’*individuazione del vertice* è *la prima cosa* che conviene fare, quando si vuole disegnare una parabola, come d’altronde il tracciamento dell’**asse di simmetria**, che è poi la retta verticale passante per il vertice, ossia la retta formata dai punti di ascissa $\boldsymbol{x=-\dfrac{b}{2a}}$ (brevemente: la retta di equazione $\boldsymbol{x=-\dfrac{b}{2a}}$).

x	$y=4-x^2$
-3	-5
-2	0
-1	3
$-\frac{1}{2}$	$4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$
0	4
$1/2$	$15/4$
1	3
2	0
3	-5



Un ultimo esempio.

$\boldsymbol{y=4-x^2}$ si può riscrivere come $y=-x^2+4$.

E' dunque $b=0$, quindi anche $x_V=-\frac{b}{2a}=0$.

Ma se il vertice ha ascissa 0, esso si troverà sull'asse delle y, che sarà perciò l'asse di simmetria per la curva.

D'altronde, che la curva fosse simmetrica rispetto all'asse y lo si poteva capire pure dal fatto che, non essendoci il termine contenente x ma solo il termine con x^2 e il termine noto, dando a x due valori opposti si ottiene sempre lo stesso valore di y!

4. FUNZIONI DELLA PROPORZIONALITA' INVERSA: IPERBOLI

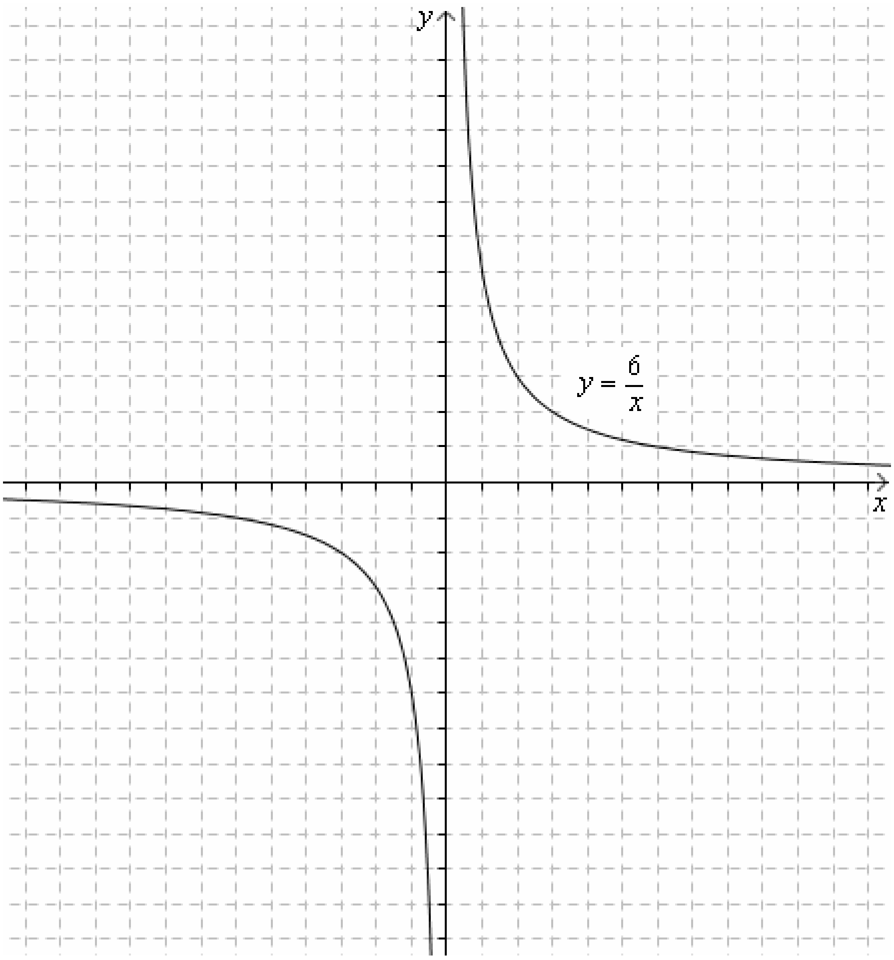
Una funzione della forma $\boldsymbol{y=k/x}$, con k costante, è detta "**funzione della proporzionalità inversa**", perché **le due variabili in gioco, *x* e *y*, sono inversamente proporzionali**:
se *x* raddoppia, *y* si dimezza; se *x* triplica, *y* si riduce alla terza parte; ecc. ecc.

Tracciamo ad esempio il grafico della funzione $y=6/x$.

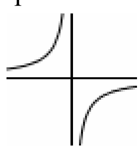
Otterremo un'armoniosa curva in due rami, della quale una caratteristica che balza subito in evidenza è la simmetria "centrale", dove il centro di simmetria è l'origine del riferimento cartesiano.

*Si potrebbe dimostrare che si tratta di una "**iperbole**".*

x	$y=\frac{6}{x}$
-1000	$-0{,}006$
-12	$-0{,}5$
-6	-1
-5	$-1{,}2$
-4	$-1{,}5$
-3	-2
-2	-3
-1	-6
$-0{,}5$	-12
$-0{,}1$	-60
$-0{,}001$	-6000
$0{,}001$	6000
$0{,}1$	60
$0{,}5$	12
1	6
2	3
3	2
4	$1{,}5$
5	$1{,}2$
6	1
12	$0{,}5$
1000	$0{,}006$
1000000	$0{,}000006$



In questo esempio è $k>0$ e la curva sta nel 1° e 3° quadrante; se invece fosse $k<0$, come nei casi $y=-\frac{2}{x}=\frac{-2}{x}$ oppure $y=-\frac{7}{4x}=\frac{-\frac{7}{4}}{x}$, la curva andrebbe ad occupare il 2° e 4° quadrante:



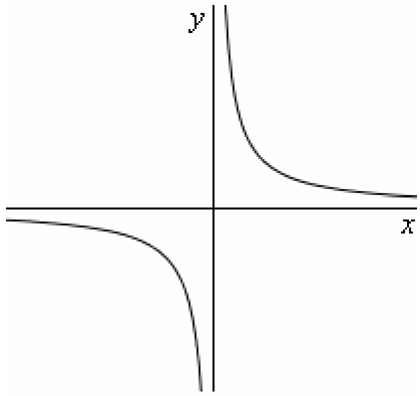
- Quando x diventa *grande grande* ($x=1000, x=1000000, \ldots$), y diventa *piccola piccola*, "si schiaccia a zero"
- Quando x si avvicina a 0 da destra, ossia "per valori positivi", la y corrispondente tende a $+\infty$
- Quando x si avvicina a 0 da sinistra, ossia "per valori negativi", la y corrispondente tende a $-\infty$
- Quando x tende a $-\infty$, la y corrispondente tende a 0 dal basso, per valori negativi

Le **definizioni** rigorose di "**parabola**" e "**iperbole**" sono riportate alla pagina 98 di questo volume.

ESERCIZI Traccia i grafici di: a) $y=x^2+4x$ b) $y=x^2-x-6$ c) $y=-x^2$ d) $y=3x^2-9$ e) $y=\frac{1}{10}x^2$ f) $y=\frac{4}{x}$ g) $y=-\frac{2}{x}$ h) $y=\frac{1}{x}$

5. IL SIMBOLO DI "LIMITE" (INTRODUZIONE ELEMENTARE)

Dunque nella funzione $y=\frac{6}{x}$
quando x diventa *grande grande*
($x=1000$, $x=1000000$ ...),
la y corrispondente
diventa *piccola piccola*,
"si schiaccia a zero".



Ciò può essere espresso,
in simboli, con la scrittura

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0}$$

che si legge:

"il limite, per x che tende a $+\infty$, della quantità $\frac{6}{x}$, è zero".

Anzi, volendo essere ancora più precisi, potremmo scrivere

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0^+}$$

dove il + accanto allo 0 indica che l'avvicinamento a 0 di y avviene "per valori positivi", "dall'alto".

IL SIMBOLO DI "LIMITE"

$\lim\limits_{x\to\boxed{}}$ $\boxed{\text{qui scrivo l'espressione della funzione}}$ $=$ $\boxed{\text{qui scrivo a cosa tende } y}$

"*per x che tende a ...*" qui scrivo a cosa tende x

"tende" = "si avvicina"

Il concetto di limite
è a dire il vero problematico e complesso;
viene trattato ad un livello
più avanzato della matematica;
qui ci limitiamo
a introdurre il simbolo di limite
per schematizzare
quelle situazioni nelle quali,
quando la x si avvicina a un certo valore,
la y corrispondente
si avvicina ad un certo altro valore.

- Quando x si avvicina a 0 da destra, ossia "per valori positivi", la y corrispondente tende a $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{6}{x}=+\infty}$$

- Quando x si avvicina a 0 da sinistra, ossia "per valori negativi", la y corrispondente tende a $-\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to0^-}\frac{6}{x}=-\infty}$$

- Quando x tende a $-\infty$, la y corrispondente tende a 0 dal basso, per valori negativi:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x}=0^-}\,.$$

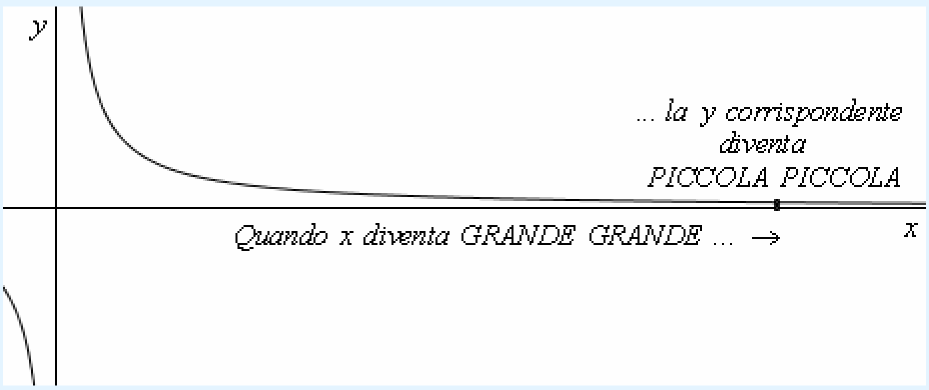
Cosa devo guardare, intuitivamente, per determinare un limite?
Facciamo riferimento al primo esempio proposto.

Posso guardare il grafico …

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=?$$

Faccio tendere x a $+\infty$,
ossia mi sposto, sull'asse x,
molto, ma molto a destra …
… e vedo cosa fa la y.

In questo caso,
la y corrispondente
diventa piccola piccola!
Tende a 0! Il limite è 0.



Oppure, anche senza grafico,
faccio assumere alla x valori molto molto grandi
e mi chiedo quali valori assume la y corrispondente.

$$x=1000\ \to\ y=\frac{6}{1000}=0{,}006$$

$$x=1000000\ \to\ y=\frac{6}{1000000}=0{,}000006$$

Tali valori della y sono piccolissimi! Il limite è dunque 0.

Qualche esercizietto sui limiti è proposto in fondo a pagina 103.

6. QUALCHE CENNO ALLA "GEOMETRIA ANALITICA"

Abbiamo visto nelle pagine precedenti che le rette verticali fanno eccezione rispetto alle altre rette, perché non vengono associate ad un'equazione della forma $y = mx + q$, bensì della forma $x = k$.

Come insegna quella branca della matematica che è chiamata "Geometria Analitica", **si possono far rientrare tutte le rette, verticali e non, nella categoria delle curve individuate da un'equaz. di 1° grado in x e y, ossia da un'equazione della forma $ax + by + c = 0$, con a, b, c costanti non tutte nulle.**

Voglio dire: si può dimostrare che l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano, le cui coordinate soddisfano ad un'equazione di tal forma, è sempre una retta, e che, viceversa, data una qualsiasi retta nel piano cartesiano, essa può essere associata ad un'equazione della forma $ax + by + c = 0$, nel senso che si può sempre trovare un'equazione di tal forma la quale sia verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti della retta in questione.
E nella famiglia delle rette $ax + by + c = 0$ le verticali saranno tutte, e sole, quelle per le quali è $b = 0$.

Osserviamo che, data un'equazione del tipo $ax + by + c = 0$, i suoi coefficienti non sono determinati in modo unico, bensì lo sono "a meno di una costante moltiplicativa".

Intendo con ciò che, se una data equazione $ax + by + c = 0$ individua una certa retta r, allora individueranno r anche tutte (e sole) le equazioni $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$, con λ costante arbitraria non nulla.
Per esempio:

- l'equazione $4x + 2y - 3 = 0$ individua una retta, che potrà essere disegnata più agevolmente se si porta l'equazione stessa in "forma esplicita", quella che presenta y isolata al primo membro:

  $4x + 2y - 3 = 0; \quad 2y = -4x + 3; \quad y = -2x + \frac{3}{2}$

  … ma anche $40x + 20y - 30 = 0$, ottenuta moltiplicando per $\lambda = 10$, individua la medesima retta.
- Ancora: tanto l'equazione $x - 3 = 0$ quanto la $2x - 6 = 0$ o la $3x - 9 = 0$ o la $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ o la $-x\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0$ individuano sempre la stessa retta verticale $x = 3$, luogo dei punti di ascissa 3.

♥ **La Geometria Analitica sviluppa l'idea secondo la quale, così come un punto del piano cartesiano è individuato, ossia è localizzato in modo univoco, dalla coppia delle sue coordinate (x, y), altrettanto una linea (curva o retta) sul piano cartesiano, se è sufficientemente regolare, può essere individuata da un'equazione nelle due variabili x e y, nel senso che può essere associata a un'opportuna equazione nelle due variabili x, y la quale sia verificata dalla coppia (x, y) delle coordinate di tutti i punti della curva, e di essi soltanto.**

Non sempre tale equazione sarà tale da definire una *funzione* di x in y, cioè un legame che a partire da un valore di x permetta di determinare *un solo* valore di y.

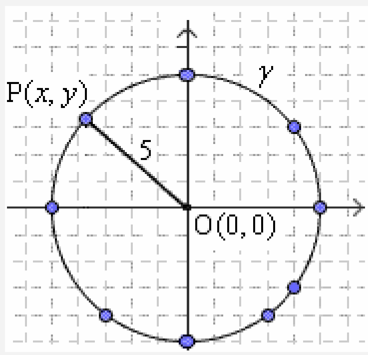
Ad es., prendiamo la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 5.
Per determinare l'equazione di questa curva, cerchiamo di stabilire quale sia la condizione alla quale deve soddisfare un punto (x, y) del piano cartesiano, per appartenervi.
γ è il luogo dei punti del piano cartesiano, la cui distanza dall'origine è uguale a 5 unità di misura.
Quindi un punto $P(x, y)$ del piano cartesiano apparterrà a γ se e soltanto se risulterà $PO = 5$.
Ma per quali valori della coppia (x, y) è verificata la relazione $PO = 5$?
Se noi traduciamo in coordinate la relazione $PO = 5$, otterremo (vedi figura qui a fianco)

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$$

che è perciò l'equazione cercata.
Un punto del piano cartesiano fa parte della circonferenza γ se e solo se la coppia (x, y) delle sue coordinate soddisfa a tale equazione.
Osserviamo che l'equazione in esame non definisce una funzione: se infatti provassimo a portare in forma esplicita, isolando y, otterremmo un doppio segno

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

che ci confermerebbe ciò che è già geometricamente evidente: non è vero che a un valore di x corrisponda un solo valore di y.



Nel Volume 1 avevamo visto che la distanza fra due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) nel piano cartesiano è data dalla formula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dunque

$$PO = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

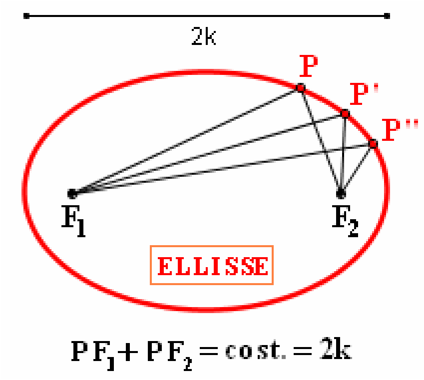
per cui si avrà $PO = 5$ se e solo se

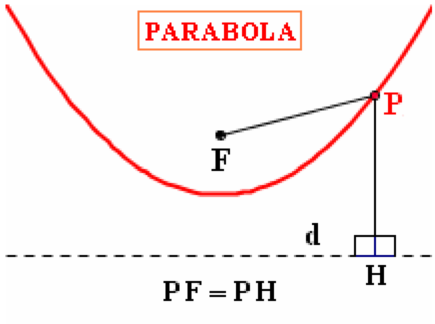
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \text{ o anche } \boxed{x^2 + y^2 = 25}$$

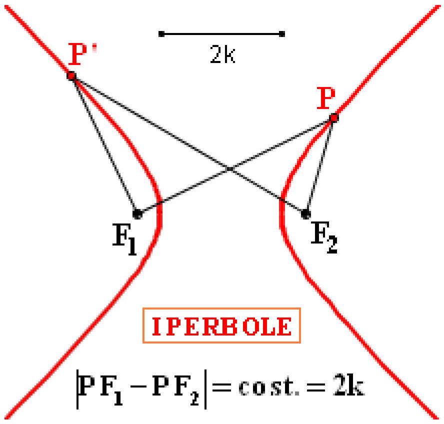
7. SIGNORI, LE CONICHE !!!

Si dicono "*coniche*" tre particolari *curve*
- o meglio: *tipologie* di curve -
chiamate, rispettivamente, *ellisse, parabola e iperbole*.

Eccone le definizioni.



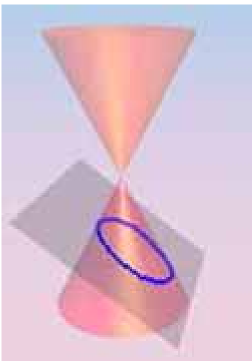




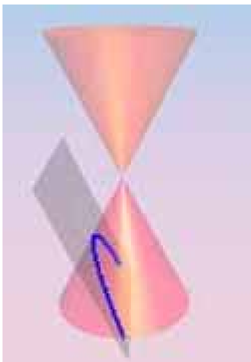
Si dice "ellisse" il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti "fuochi"	**Si dice "parabola" il luogo dei punti del piano, equidistanti da un punto fisso F (detto "fuoco") e da una retta fissa d (detta "direttrice")**	**Si dice "iperbole" il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi, detti "fuochi"**

Ma cosa possono avere in comune
tre curve apparentemente così diverse fra loro?
E perché mai vengono chiamate "*coniche*"?

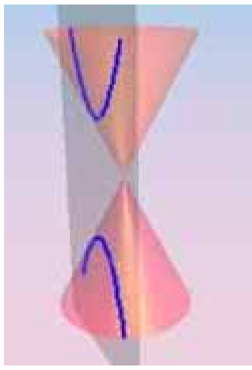
Bene:
sezionando con un piano una doppia superficie conica
(illimitata da entrambe le parti)
si può ottenere,
a seconda dell'inclinazione del piano secante rispetto all'asse del cono:



una curva chiusa…



oppure una curva aperta, ad un solo ramo …



oppure una curva aperta, a due rami

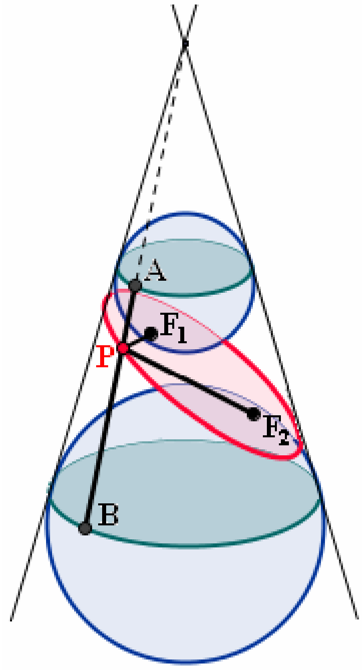
Figure tratte dal sito btc.montana.edu/ceres/ *(Montana State University)*

Si può ora dimostrare che queste tre tipologie di curve, definite "tridimensionalmente", corrispondono proprio alle tre definizioni di "ellisse", "parabola" e "iperbole" viste all'inizio, definizioni le quali erano basate esclusivamente su considerazioni di "geometria piana" !!!

Ad esempio, per quanto riguarda l'ellisse,
vale il seguente teorema (Dandelin, 1822):

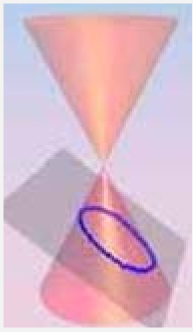
Quando l'intersezione fra una superficie conica e un piano
è una linea chiusa,
questa linea può essere pensata
come il luogo dei punti P del piano secante per i quali si ha
$PF_1 + PF_2 = \textit{costante}$,
dove:

F_1, F_2 sono i punti di contatto fra il piano secante e le due sfere della figura
(ciascuna delle quali è tangente al piano secante e alla superficie conica)
mentre la costante è la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze lungo le quali le sfere toccano la superficie conica.



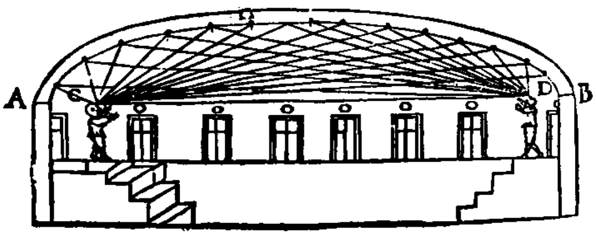
DIMOSTRAZIONE
(*senza approfondire i dettagli …*)

P, il generico punto della linea di cui ci stiamo
occupando, è tale che $PF_1 = PA$ e $PF_2 = PB$
(tangenti alla sfera da uno stesso punto esterno!), per cui
$PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB = \textit{costante}$
(costante perché AB ha sempre la stessa lunghezza:
la distanza, misurata lungo la superficie conica,
fra le due circonferenze, è sempre la medesima,
dovunque venga misurata).



Le coniche abbondano di sorprendenti e meravigliose PROPRIETA'

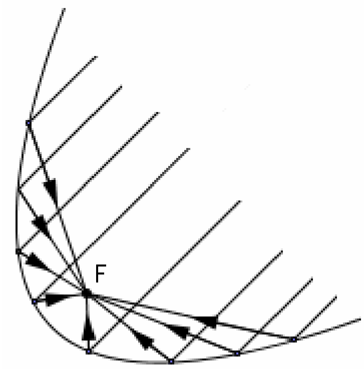
Citiamone una riguardante l'**ellisse**: si può dimostrare che
se un raggio - ad esempio di luce - uscente da un fuoco impatta sulla curva,
il raggio riflesso passerà per l'altro fuoco!



La volta di questa camera è un ellissoide di rotazione.
Se una persona bisbiglia piano piano
con la bocca in corrispondenza di uno dei fuochi,
un amico con l'orecchio nell'altro fuoco
potrà udire chiaramente ogni sua parola,
mentre tutti gli altri presenti nella stanza
non sentiranno nulla.

Una variante consiste
nel piazzare due fiammiferi nei due fuochi:
fregando uno di essi per accenderlo,
ecco che si accenderà istantaneamente pure quell'altro.

Anche la **parabola** gode di una proprietà notevole per quanto riguarda la riflessione.
Un raggio che viaggi parallelamente all'asse di simmetria della parabola,
quando impatta sulla curva, viene riflesso nel fuoco.



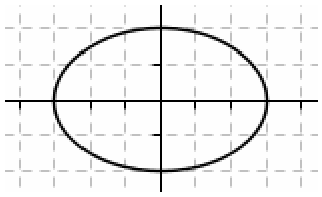
Questo fatto ha un'applicazione notevolissima in tecnologia:
le antenne paraboliche sono infatti caratterizzate
da una forma a paraboloide di rotazione;
le onde elettromagnetiche
provenienti da lontano
vengono concentrate nel fuoco,
dove è collocato il dispositivo di ricezione.

Le coniche sono le curve “associate a relazioni algebriche di secondo grado”.

La Geometria Analitica insegna che un’equazione della forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$,
ossia **un’equazione di secondo grado in due variabili**, **rappresenta sempre, nel piano cartesiano, una conica (eventualmente degenere)**,
e precisamente:

- una conica di tipo **ellittico** se $b^2-4ac<0$
- una conica di tipo **parabolico** se $b^2-4ac=0$
- una conica di tipo **iperbolico** se $b^2-4ac>0$

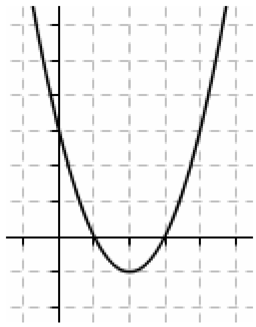
Esempi:



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ellisse,
con centro di simmetria nell’origine
e fuochi sull’asse delle x.

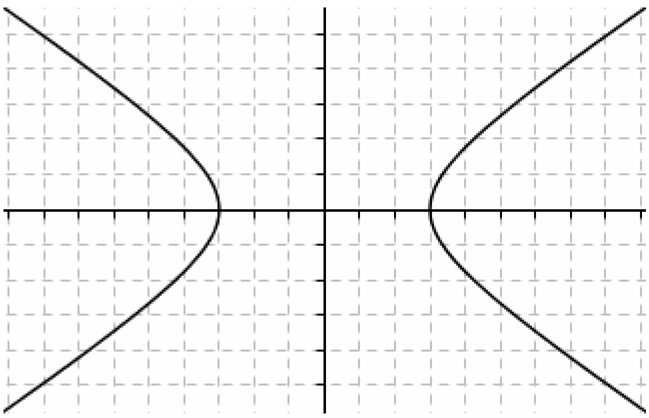
$$\begin{aligned}&\textit{Forma implicita dell'equazione}:\\&4x^2+9y^2-36=0\\&a=4,\ b=0,\ c=9,\ d=0,\ e=0,\ f=-36\\&b^2-4ac=-144<0\to \textit{tipo ellittico}\end{aligned}$$



$$y=x^2-4x+3$$

Parabola, con asse di simmetria parallelo all’asse y.

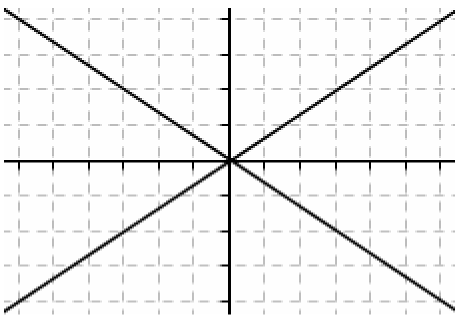
$$\begin{aligned}&\textit{Forma implicita dell'equazione}:\\&x^2-4x-y+3=0\\&a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=-4,\ e=-1,\ f=3\\&b^2-4ac=0\to \textit{tipo parabolico}\end{aligned}$$



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

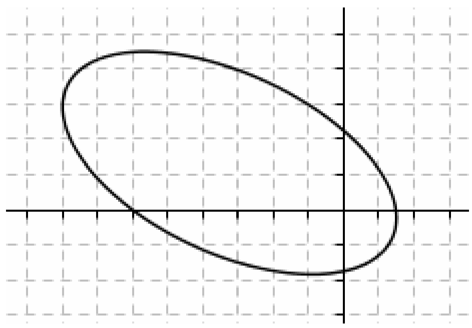
Iperbole,
con centro di simmetria nell’origine
e fuochi sull’asse delle x.

$$\begin{aligned}&\textit{Forma implicita dell'equazione}:\\&4x^2-9y^2-36=0\\&a=4,\ b=0,\ c=-9,\ d=0,\ e=0,\ f=-36\\&b^2-4ac=144>0\to \textit{tipo iperbolico}\end{aligned}$$



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \quad \left(4x^2-9y^2=0\right)$$

Iperbole degenere in una coppia di rette



$$\frac{x^2}{9}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$$

$$\left(8x^2+12xy+18y^2+36x-9y-72=0\right)$$

Ellisse
“traslata
e ruotata”

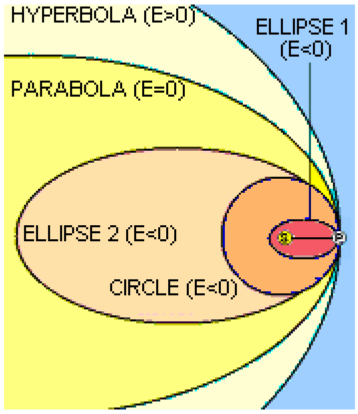
Le coniche hanno un'importanza straordinaria nel mondo fisico.

Ogniqualvolta un corpo celeste orbita intorno ad un altro
(la Luna intorno alla Terra,
i Pianeti intorno al Sole,
le Comete intorno al Sole …)
la traiettoria dell'orbita sarà sempre una conica !!!

Di norma si tratta di un'ellisse
(ad es., le orbite dei pianeti intorno al sole sono delle ellissi,
di cui il sole occupa sempre uno dei fuochi),
ma nel caso di una cometa potrebbe trattarsi
(se la cometa non è "periodica") anche di un ramo di iperbole:
la cometa passa in prossimità del sole una sola volta,
poi si allontana verso gli spazi stellari
e non si avvicinerà mai più.

Il tipo di orbita dipende dall' "energia totale"
(cinetica+potenziale) del corpo orbitante:

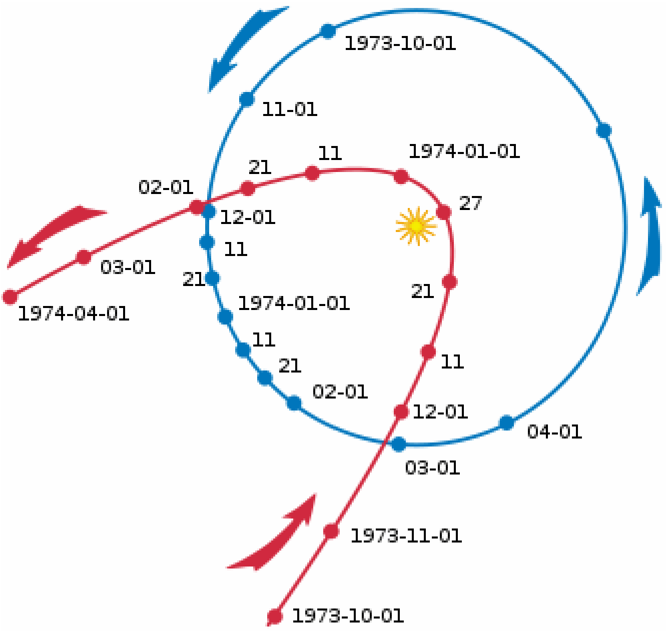
$E < 0 \rightarrow$ orbita ellittica
$E = 0 \rightarrow$ orbita parabolica
$E > 0 \rightarrow$ orbita iperbolica



La figura sopra riportata è tratta dal sito "[The Celestial Sphere]" di Vik Dhillon, Sheffield University, UK

Qui a fianco: l'orbita della cometa Kohoutek e l'orbita della Terra.

Questa cometa percorre un tragitto ellittico facendo un giro completo ogni circa 75.000 anni.



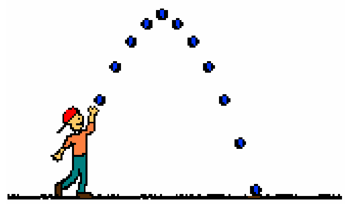
La cometa di Hale-Bopp fotografata da Philipp Salzgeber il 29 marzo 1997

Il fatto che l'attrazione gravitazionale generi traiettorie a forma di conica, è legato alla proprietà della forza F di attrazione gravitazionale di essere inversamente proporzionale al quadrato della distanza d delle due masse m_1, m_2 che si attraggono:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \quad \text{(G = "costante di gravitazione universale")}$$

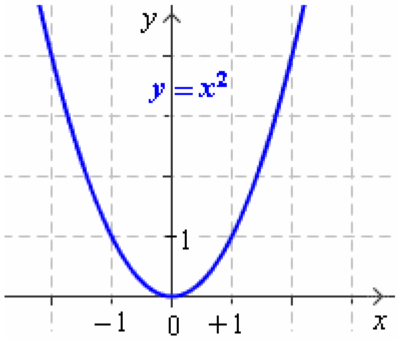
Se la forza responsabile del moto ha questa espressione, si può far vedere che le possibili traiettorie del moto sono esclusivamente le curve associate ad equazioni di 2° grado, ossia, come abbiamo visto, le coniche.

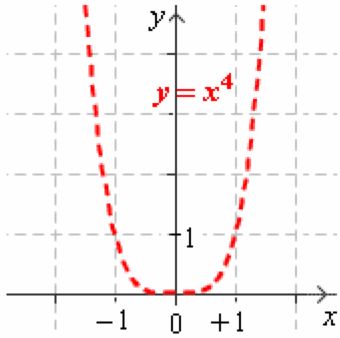
Se lanciamo un oggetto verso l'alto (non verticalmente) la forza di gravità lo porterà a muoversi lungo un arco di parabola.

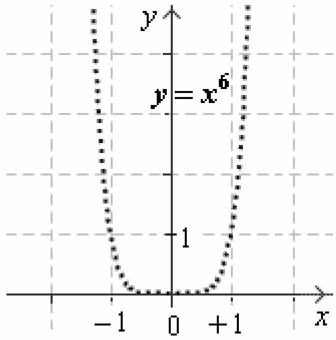


Un ultimo spunto, fra i tanti possibili, sulle coniche in Fisica:
si può osservare (e dimostrare) che
la figura d'interferenza ⇨, nel caso di due sorgenti d'onda puntiformi, è un'iperbole.
Guarda la bellissima animazione ⇨ !!! *(Ed Zobel, Zona Land)*

8. GRAFICI DI POTENZE E RADICI, e della funzione "VALORE ASSOLUTO" FUNZIONI PARI, DISPARI, NE' PARI NE' DISPARI







Nelle figure qui sopra riportate vediamo i grafici delle tre funzioni

$y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$.

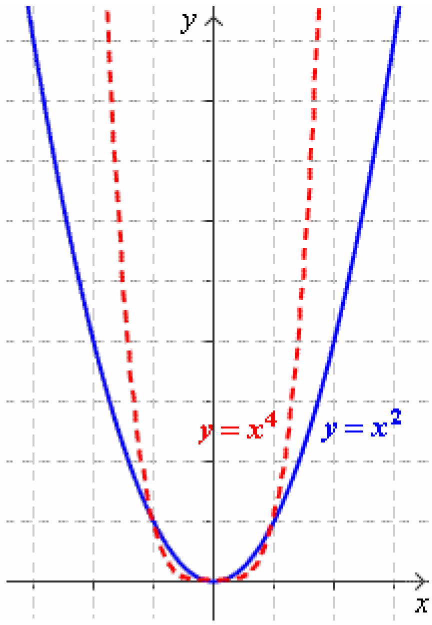
E' importante osservare un fatto piuttosto curioso:

♥ **quando è $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ $(0 < |x| < 1)$, si ha $x^6 < x^4 < x^2$.**

Ad esempio, con $x = \frac{1}{2}$, è $x^2 = \frac{1}{4}$, $x^4 = \frac{1}{16}$, $x^6 = \frac{1}{64}$.

Un numero compreso fra 0 e 1,
quando viene moltiplicato per sé stesso, diminuisce,
e se viene moltiplicato per sé stesso più volte,
produce un risultato che è tanto più piccolo
quanto più alto è il numero delle moltiplicazioni effettuate.

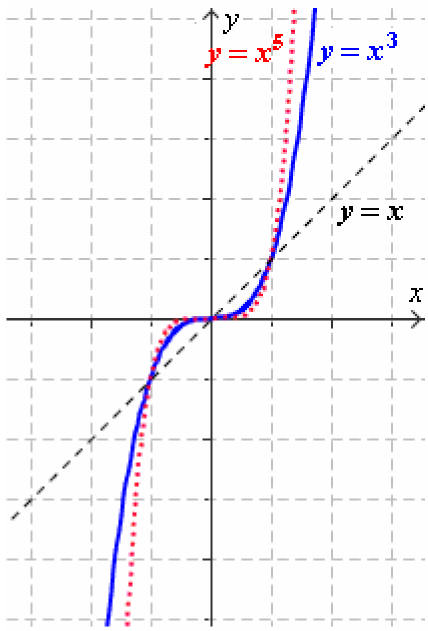
La figura qui a destra, ad esempio, confronta $y = x^2$ con $y = x^4$



Le funzioni della forma $y = x^{2n}$,
ossia le potenze ad esponente pari,
sono caratterizzate dal fatto che, dando a x due valori opposti,
si ottiene il medesimo valore di y:
insomma, **per ogni x**, è $\boxed{f(-x) = f(x)}$.

Le funzioni dotate di questa proprietà sono dette "funzioni $\boxed{\text{PARI}}$".

Le funzioni pari sono tutte e sole quelle
il cui **grafico** è **simmetrico rispetto all'asse delle ordinate**.
Un altro esempio di funzione pari è $y = |x|$.



La figura qui a fianco mostra i grafici delle tre funzioni

$y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$.

Le funzioni della forma $y = x^{2n+1}$,
ossia le potenze ad esponente dispari,
sono caratterizzate dal fatto che, dando a x due valori opposti,
si ottengono valori di y opposti:
insomma, **per ogni x**, è $\boxed{f(-x) = -f(x)}$.

Le funz. dotate di questa proprietà sono dette "funzioni $\boxed{\text{DISPARI}}$".

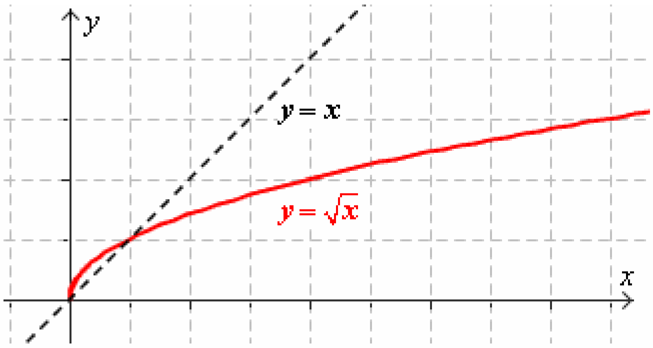
Le funzioni dispari sono tutte e sole quelle
il cui **grafico** è **simmetrico rispetto all'origine**.
Altri esempi di funzioni dispari: $y = 1/x$, $y = \sqrt[3]{x}$

Data una funzione $y = f(x)$, per stabilire se è PARI o DISPARI o NE' L'UNA NE' L'ALTRA COSA,
si va a calcolare $f(-x)$ come negli esempi che seguono:

$$f(x) = \frac{1}{x^4} - 3 \qquad f(-x) = \frac{1}{(-x)^4} - 3 = \frac{1}{x^4} - 3 = f(x) \quad \textit{PARI}$$

$$f(x) = x^3 + 2x \qquad f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x) \quad \textit{DISPARI}$$

$$f(x) = x^2 + x \qquad f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \quad \neq f(x) \;\; e \; \neq -f(x) \quad \textit{NE' PARI NE' DISPARI}$$

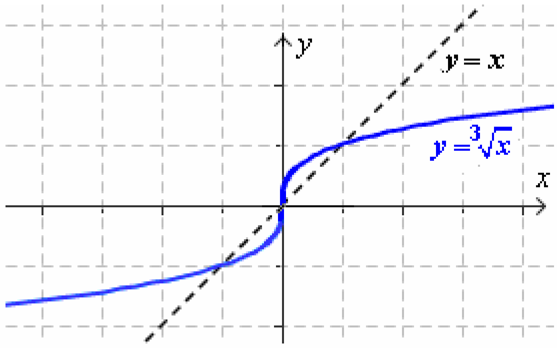


Ecco il grafico della funzione $\boldsymbol{y=\sqrt{x}}$,
che è definita solo per $x \ge 0$.

E' notevole il comportamento
fra l'ascissa 0 e l'ascissa 1:
se $0<x<1$, è $\sqrt{x}>x$

Più in dettaglio: $0<x<1 \ \to\ 0<x<\sqrt{x}<1$

♥ **La radice quadrata di un numero compreso fra 0 e 1 è maggiore del numero stesso!**



Ed ecco il grafico della funzione $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{x}}$,
il cui dominio è tutto $\mathbb{R}$.

Il grafico è simmetrico rispetto all'origine;
in effetti, in questo caso, la funzione è "dispari":
$f(-x)=-f(x)$.

Vale ancora quanto detto per la radice quadrata:
la radice cubica di un numero compreso fra 0 e 1 è maggiore del numero stesso.

Qui a fianco è rappresentata la funzione

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{x^2}}$$

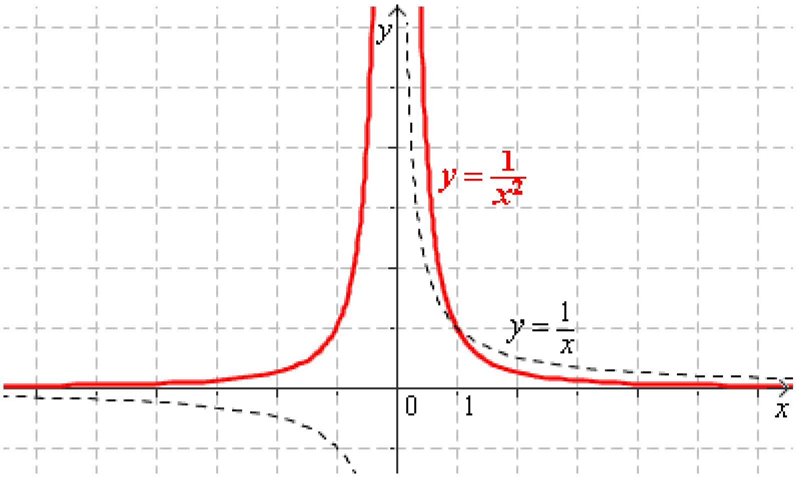
che abbiamo voluto confrontare
con la funzione tratteggiata $y=1/x$,
per evidenziare che:

quando è $x>1$

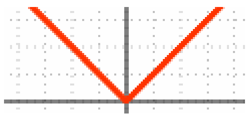
si ha $\dfrac{1}{x^2}<\dfrac{1}{x}$ (essendo $x^2>x$)

mentre quando è $0<x<1$

si ha $\dfrac{1}{x^2}>\dfrac{1}{x}$ (essendo $x^2<x$)



Ed ecco infine il grafico, dalla caratteristica forma a "V", della $\boldsymbol{y=|x|}$.
Si tratta di una funzione PARI perché $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$;
in effetti, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.



$\boldsymbol{y=|x|}$
In GeoGebra:
$\boldsymbol{y=abs(x)}$

♥ La funzione "**VALORE ASSOLUTO**"!!!

ESERCIZI

a) Utilizzando una macchinetta calcolatrice, compila la seguente tabella, finalizzata ad evidenziare che **quando un numero è compreso fra 0 e 1**,
- la sua radice quadrata, la sua radice cubica ecc. sono maggiori del numero stesso
- mentre il suo quadrato, il suo cubo ecc. sono minori del numero stesso

e invece **quando un numero è maggiore di 1**, avviene il viceversa.

$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{a}$	a	a^2	a^3	a^4
			0,5			
			2			

b) Fra le seguenti funzioni, stabilisci quali sono pari, quali dispari, quali né pari né dispari:

1) $y=x^3+\dfrac{1}{x}$ 2) $y=2x^2+1$ 3) $y=x^3+x^2$ 4) $y=2x^4+3|x|$ 5) $y=\sqrt[5]{x}+1$ 6) $y=\sqrt{x}$

c) Determina il valore dei seguenti limiti: 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=$ 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=$ 9) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x^2}=$ 10) $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x^2}=$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=$ 12) $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}=$ 13) $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x-2}{x-1}=$ 14) $\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x-2}{x-1}=$ 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x-1}=$

RISPOSTE 1 d 2 p 3 né… 4 p 5 né… 6 non ha senso chiederselo: il dominio non è simmetrico rispetto all'ascissa 0.
7 0^+ 8 0^+ 9 $+\infty$ 10 $+\infty$ 11 $+\infty$
12 0^+ 13 $-\infty$ 14 $+\infty$ 15 1

9. RISOLUZIONE GRAFICA DI UN'EQUAZIONE

Per risolvere graficamente un'equazione $\boxed{f(x)=g(x)}$

si rappresentano, in uno stesso riferimento cartesiano, le due funzioni $y=f(x)$; $y=g(x)$
e si vanno a ricercare quei valori di x per i quali la y corrispondente è la medesima.

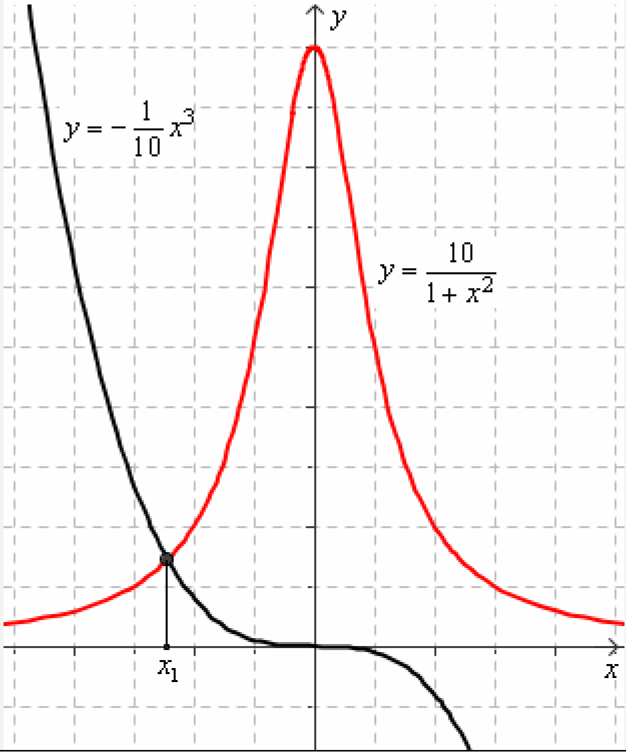
In altre parole,

♥ **si vanno a individuare i punti di intersezione fra le due curve $y=f(x)$, $y=g(x)$, e si prendono le ASCISSE di questi punti. Tali ascisse sono le soluzioni dell'equazione data.**

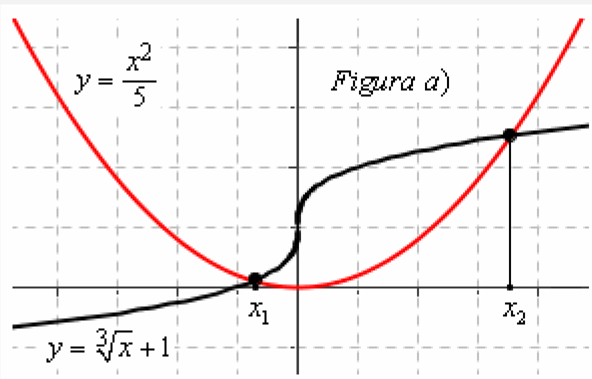
Di norma, la risoluzione grafica consente di determinare le soluzioni soltanto **in modo approssimato**.

$$\boxed{\frac{10}{1+x^2}=-\frac{1}{10}x^3}$$

La curva "a campana" è il grafico della funzione
$$y=\frac{10}{1+x^2}$$
mentre l'altra curva, quella "a serpentina", è il grafico della funzione
$$y=-\frac{1}{10}x^3.$$
La rappresentazione grafica mostra che l'equazione ha una e una sola soluzione:
$$-3<x_1<-2$$
Un grafico più preciso, tracciato magari su carta millimetrata, porterebbe a stabilire, più precisamente, che
$$-2,5<x_1<-2,4$$



x	1° membro y	2° membro y
–6	0,27	21,6
–5	0,38	12,5
–4	0,59	6,4
–3	1,00	2,7
–2	2,00	0,8
–1	5,00	0,1
0	10,00	0
1	5,00	0,1
2	2,00	0,8
3	1,00	2,7
4	0,59	6,4
5	0,38	12,5
6	0,27	21,6



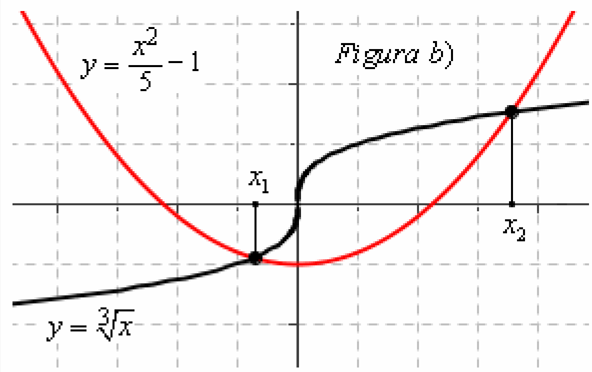
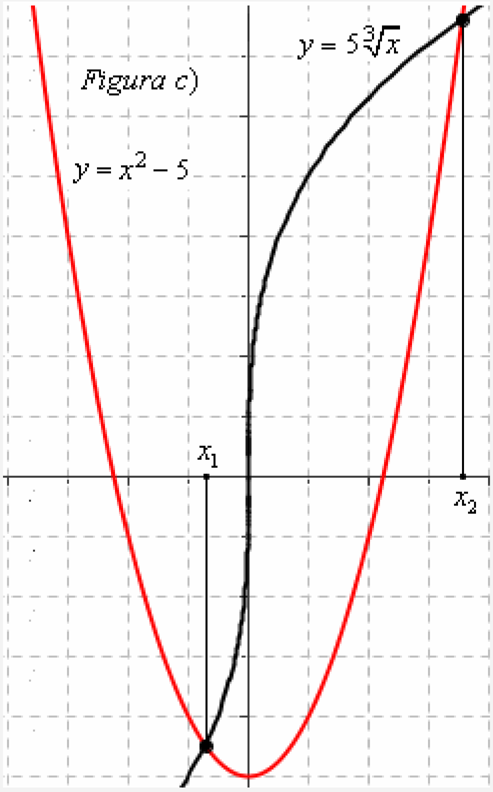


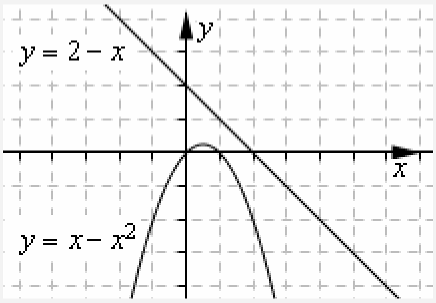
Figura a):
$$\boxed{\frac{x^2}{5}=\sqrt[3]{x}+1}$$

Figura b):
$$\boxed{\frac{x^2}{5}-1=\sqrt[3]{x}}$$

Figura c):
$$\boxed{x^2-5=5\sqrt[3]{x}}$$

Queste tre equazioni sono equivalenti: ciascuna ha le due soluzioni
$$-1<x_1<0$$
$$3<x_2<4$$





$$\boxed{x - x^2 = 2 - x}$$

Le due curve non si intersecano:
l'equazione è IMPOSSIBILE.

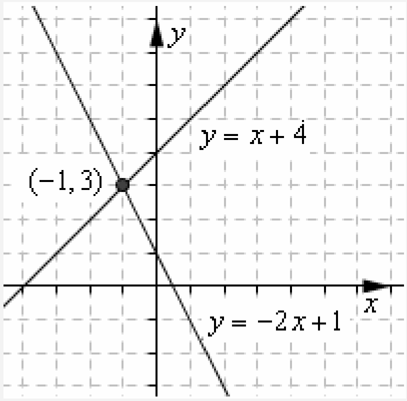
Questa figura risolve il SISTEMA IN DUE INCOGNITE

$$\boxed{\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}}$$

Lo si scrive nella forma

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

e si tracciano i grafici delle due rette. La soluzione del sistema è la coppia (x, y) delle coordinate del punto di intersezione.



ESERCIZI

1) Risolvi graficamente l'equazione $\sqrt{x} = (x-2)^2$
tracciando sullo stesso riferimento cartesiano i grafici delle due funzioni $y = \sqrt{x}$, $y = (x-2)^2$
Assegna alla variabile indipendente i seguenti valori:
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4
In tal modo, determinerai le soluzioni "a meno di 0,5", cioè:
con un errore di approssimazione inferiore a 0,5.

2) Risolvi graficamente le seguenti equazioni, approssimando le soluzioni a meno di $0,5$:

a) $x^2 - x = x + 2$ b) $x^2 = 2x + 2$ c) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (NOTA)

Risolvi poi algebricamente le equazioni date
(che, come avrai notato, sono tutte equivalenti fra loro, quindi si riducono a una sola)
e verifica che le soluzioni determinate esattamente con la risoluzione algebrica
coincidono con quelle localizzate approssimativamente con la risoluzione grafica.

NOTA. Qui il 2° membro è 0, quindi la funzione corrispondente è la funzione costante $y = 0$,
il cui grafico coincide con l'asse delle ascisse

3) Risolvi graficamente le seguenti equazioni, approssimando le soluzioni a meno di un'unità:

a) $x^3 = x^2 + 1$ b) $\frac{1}{x} = 4 - x$ c) $1 - x^2 = \frac{4}{x}$ d) $x^3 = x^2 + 2x$ e) $-\frac{2}{x} = \sqrt{x} - 3$ f) $|x| = 2x + 3$

g) $|x| = \frac{1}{2}x + 4$ h) $\sqrt{x} = |x| - 1$ i) $x^4 = 5 - 2x$ l) $\frac{4}{x^2+1} = 1$ m) $\frac{1}{5}x + 1 = \sqrt{x}$ n) $2\sqrt{x} = 4x - x^2$

4) Risolvi graficamente le seguenti equazioni.
Confronta poi l'esito della risoluzione grafica, con la risoluzione algebrica.

a) $-\frac{1}{x} = 2x + 3$ b) $x^3 = 2x + 1$ c) $x^4 = x^2$ d) $x^2 = (x+1)^2$

e) $2x + 1 = 10 - x$ f) $2x + 1 = 2x + 3$ g) $\sqrt{x} = x$ h) $\sqrt[3]{x} = x$

i) $\frac{6}{x-1} = -x$ j) $2\sqrt{x} = x - 1$ k) $\sqrt{x+2} = x$ l) $\sqrt{x} + 2 = \frac{1}{x}$

5) Risolvi i seguenti sistemi di 1° grado in 2 incognite, isolando y in ciascuna equazione, disegnando le due rette su di uno stesso piano cartesiano, e individuando le coordinate del loro punto di intersezione.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 3 - x \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x \\ x + y = 0 \end{cases}$

RISPOSTE

1) $x_1 = 1$; $3 < x_2 < 3{,}5$ 2) Graf.: $-1 < x_1 < -0{,}5$; $2{,}5 < x_2 < 3$. Alg.: $x_1 = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}732$; $x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}732$
3) a) 1 *soluzione*: $1 < x < 2$ b) $0 < x_1 < 1$, $3 < x_2 < 4$ c) $-2 < x < -1$ d) $-1, 0, 2$
e) $x_1 = 1$, $7 < x_2 < 8$ f) $x = -1$ g) $-3 < x_1 < -2$, $x_2 = 8$ h) $2 < x < 3$ i) $-2 < x_1 < -1$, $1 < x_2 < 2$
l) $-2 < x_1 < -1$, $1 < x_2 < 2$ m) $1 < x_1 < 2$, $13 < x_2 < 14$ n) $x_1 = 0$, $0 < x_2 < 1$, $2 < x_3 < 3$
4, 5) Vedi risoluzione algebrica. Per 4l): $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) - 4x(x-1) = (x-1)(x^2 - 3x + 1)$

10. FUNZIONI QUADRATICHE ED EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Abbiamo detto che prendono il nome di "**quadratiche**" le funzioni di 2° grado, quelle della forma

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}\,.$$

E abbiamo illustrato con esempi il fatto che una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una curva "scendi-e-poi-sali", oppure "sali-e-poi-scendi", chiamata "parabola" e disposta:

- **con la concavità verso l'alto $\cup$ quando il numero *a*, coefficiente di x^2, è >0**
- **con la concavità verso il basso $\cap$ quando il coefficiente di x^2 è <0**.

Abbiamo poi osservato che **il valore assoluto del coefficiente di x^2 si dice "apertura**" perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola sia

- più "dolce" (valori di $|a|$ piccoli)
- o più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Infine, abbiamo

- indicato la formula $\boldsymbol{x_V = -\dfrac{b}{2a}}$ per determinare l'ascissa del vertice a partire dai coeff. dell'equazione
- osservato che, nota l'ascissa, l'ordinata del vertice si può poi ottenere senza formule, semplicemente sostituendo x_V al posto di x nell'equazione della parabola per calcolare il valore corrispondente di y
- raccomandato, quando si deve disegnare una parabola, di individuare e segnare innanzitutto il vertice e la retta verticale per il vertice, per approfittare della simmetria della curva rispetto a questa retta.

Diciamo ora qualcosa in più.

Innanzitutto, l'equazione di una parabola dipende da 3 parametri (i coefficienti a, b, c) per cui la curva è individuata in modo unico quando sono date delle condizioni, a partire dalle quali si possano determinare in modo unico i valori di a, b e c. Ad esempio, se vengono dati tre punti, per cui la curva deve passare, ecco che, almeno in generale, ci sarà una e una sola parabola a soddisfare questa condizione.

Esempio: scrivere l'equazione della parabola passante per i tre punti $\mathrm{A}(-1,4)$; $\mathrm{B}(1,6)$; $\mathrm{C}(3,0)$.

Poniamo le condizioni di appartenenza di ciascuno dei tre punti alla curva di equazione $y = ax^2 + bx + c$, e risolviamo il sistema:

$$\begin{array}{r} \mathrm{A}(-1,4) \\ \mathrm{B}(1,6) \\ \mathrm{C}(3,0) \end{array}\begin{cases} 4 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ 6 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ 0 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \end{cases} \quad \begin{cases} a-b+c=4 \\ a+b+c=6 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=6 \end{cases}$$

La nostra parabola ha dunque equazione

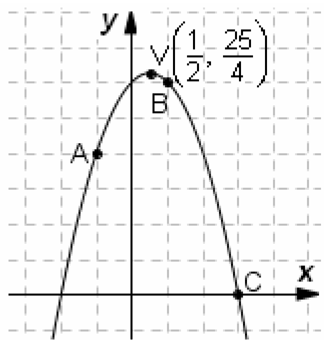
$$y = -x^2 + x + 6$$

da cui:

$$x_V = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y_V = -x_V^2 + x_V + 6 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$$

vale a dire $\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$



ESERCIZI

Determina l'equazione della parabola che passa per i punti:

1) $(0,0); (1,1); (2,0)$ 2) $(0,5); (2,1); (3,2)$ 3) $(-2,0); (1,-3); (2,0)$ 4) $(0,8); (1,2); (5,18)$ 5) $(-1,1); (0,2); (1,5)$

RISPOSTE

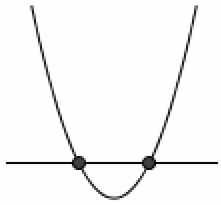
1) $y=-x^2+2x$ 2) $y=x^2-4x+5$ 3) $y=x^2-4$ 4) $y=2x^2-8x+8$ 5) $y=x^2+2x+2$

LA PARABOLA E L'EQUAZIONE DI 2° GRADO

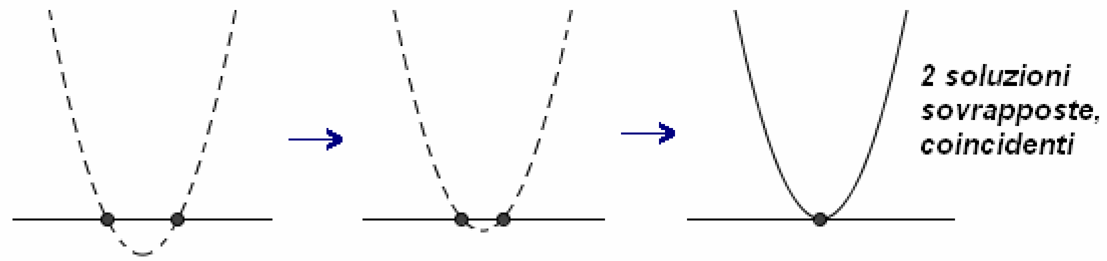
Un'equazione di 2° grado $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$
può essere risolta tracciando il grafico della parabola $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$
e poi determinando le sue intersezioni con la retta di equazione $\boldsymbol{y = 0}$ (che coincide con l'asse delle *x*).

Consideriamo dapprima il caso $\boldsymbol{a > 0}$.
Si potranno presentare tre possibili situazioni, e la nostra equazione potrà avere:

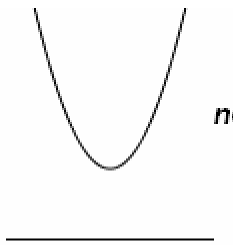
I) due soluzioni distinte (primo caso, parabola che taglia l'asse orizzontale):



II) una sola soluzione, o anche: due soluzioni che hanno finito per sovrapporsi, per coincidere (secondo caso, parabola tangente all'asse orizzontale):



III) oppure nessuna soluzione (terzo caso, parabola priva di intersezioni con l'asse orizzontale):



Tutto dipende quindi dall'*ordinata del vertice*:

- se questa è <0 si ha il caso delle due soluzioni distinte,
- se è $=0$ si hanno le soluzioni coincidenti,
- se è >0 si ha l'impossibilità.

Ora, se noi partiamo dalla formula per l'*ascissa* del vertice $x_V = -\frac{b}{2a}$

potremo ricavare l'ordinata di V sostituendone il valore al posto di x nell'equazione della parabola:

$$y_V = \left[ax^2+bx+c\right]_{x=-\frac{b}{2a}} =$$

$$= a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+c = \cancel{a}\cdot\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a}+c = \frac{b^2-2b^2+4ac}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Quindi, per quanto detto sopra,

$$-\frac{\Delta}{4a}<0 \leftrightarrow \text{soluzioni } \textit{distinte};$$

$$-\frac{\Delta}{4a}=0 \leftrightarrow \text{soluzioni } \textit{coincidenti};$$

$$-\frac{\Delta}{4a}>0 \leftrightarrow \textit{nessuna} \text{ soluzione.}$$

Ma le tre condizioni $\boxed{-\frac{\Delta}{4a}<0,\quad -\frac{\Delta}{4a}=0,\quad -\frac{\Delta}{4a}>0}$, avendo noi supposto $\boxed{a>0}$,

equivalgono rispettivamente a $\boxed{\Delta>0,\ \Delta=0,\ \Delta<0}$ e ciò dunque conferma

il ben noto ruolo del Δ nel determinare il numero delle soluzioni di un'equazione di 2° grado.

Se poi fosse $a<0$ potremmo ripercorrere tutte le considerazioni fatte, adattandole al nuovo caso, e perverremmo alle stesse conclusioni.

ESERCIZI

Risolvi graficamente le seguenti equazioni:

6) $x^2-6x+8=0$ 7) $x^2-6x+9=0$ 8) $x^2-6x+10=0$ 9) $-x^2+x=0$ 10) $-2x^2=0$ 11) $-x^2+x+6=0$

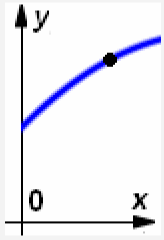
RISPOSTE

6) $x=2,\ x=4$ 7) $x=3,\ x=3$ 8) impossibile. 9) $x=0,\ x=1$ 10) $x=0,\ x=0$ 11) $x=-2,\ x=3$

Matematica e Problemi della Realtà

FUNZIONI QUADRATICHE E PROBLEMI REALI

DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA NOTE CERTE CONDIZIONI



Un atleta si cimenta nel **getto del peso**. Immaginiamo che, al momento del lancio, poggi i piedi sull'origine di un sistema di riferimento cartesiano, e che la sfera si stacchi dalla mano all'altezza di metri 1,5 dal suolo per raggiungere poi la sua altezza massima nel punto $(5;\,4)$.
Si domanda

a) che equazione avrà la curva descritta dalla sfera in movimento
b) e a che distanza dall'origine il peso toccherà terra.

a) Dunque: è noto che un "proiettile" (= un corpo lanciato) descrive una traiettoria parabolica.
La curva richiesta avrà perciò equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$,
dove dobbiamo determinare i tre parametri a, b, c quindi ci servono 3 condizioni.
Due di queste condizioni saranno il passaggio per il punto $(0;\,1{,}5)$ e quello per il punto $(5;\,4)$
e la condizione rimanente potrà essere quella sull'ascissa del vertice: $-\dfrac{b}{2a} = 5$.

Allora avremo: $\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1{,}5 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 4 \\ -\dfrac{b}{2a} = 5 \end{cases}$

Risolvi il sistema: troverai che l'equazione della curva in questione è $y = -0{,}1x^2 + x + 1{,}5$.

b) Rispondere al quesito b) è semplice: si tratta di stabilire qual è il valore di x per cui la y vale 0.

$$0 = -0{,}1x^2 + x + 1{,}5$$
$$0{,}1x^2 - x - 1{,}5 = 0; \quad x^2 - 10x - 15 = 0; \quad x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25+15} = 5 \pm \sqrt{40} \approx 5 \pm 6{,}3$$

e la soluzione che ci interessa è quella positiva: $\approx 11{,}3$. Il peso tocca terra a 11,3 metri circa dall'origine.

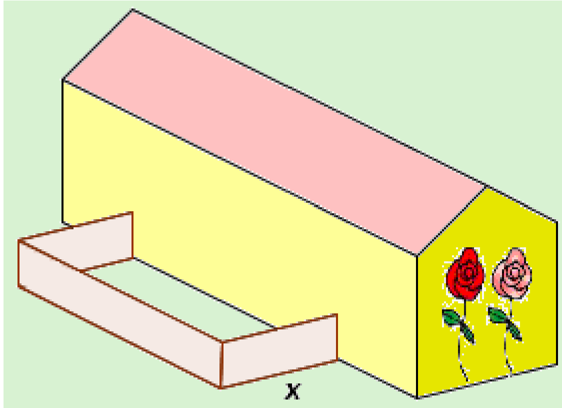
MASSIMO E MINIMO DI UNA QUANTITA' VARIABILE

Una **compagnia aerea** cerca di rendere appetibile una destinazione poco frequentata: le Boring Islands.
L'obiettivo è di invogliare qualche grossa comitiva a scegliere quella località per un viaggio collettivo.
In quest'ottica, si ipotizza di offrire **uno sconto, per ogni partecipante, che sia calcolato in proporzione al numero dei partecipanti stessi.**
Il biglietto andata e ritorno a prezzo intero costerebbe 600 dollari a turista; bene, si può pensare di accordare a ciascuna persona un abbuono ottenibile moltiplicando la cifra fissa di 5 dollari per il numero totale dei viaggiatori.
Uno dei responsabili della compagnia, però, fa subito notare che **oltre una determinata quantità di adesioni, i ricavi in questo modo finirebbero per diminuire**; tant'è vero che **al di là di un certo numero ottimale di iscritti, non sarebbe più conveniente accettarne altri.**
Qual è questo numero ottimale? E qual è il ricavo massimo ottenibile con questo piano di sconti?

Riflettiamo.
Se $\begin{array}{l} \textit{prezzo ordinario per ogni persona} = 600 \textit{ dollari} \\ \textit{sconto per ogni persona} = 5 \textit{ dollari moltiplicato il numero di persone nel gruppo} \end{array}$
allora si avrà
$$\textit{ricavo per } x \textit{ persone} = x(600 - 5x) = -5x^2 + 600x$$
Si tratta ora di stabilire per quale valore di x questa quantità $-5x^2 + 600x$ va a toccare il suo massimo.
Ora, la curva di equazione $y = -5x^2 + 600x$ è una parabola
che, per via del coefficiente di x^2 negativo, ha la concavità rivolta verso il basso: $\cap$.
Il punto in cui si raggiunge la y più alta è dunque il vertice, e tale vertice ha ascissa $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{600}{-10} = 60$.

Il numero ottimale di iscritti, in relazione a questa offerta, è perciò 60.
Superare questo numero di iscrizioni sarebbe controproducente, perché il ricavo si ridurrebbe.
Con 60 iscritti, la compagnia andrebbe a incassare dollari $\left[-5x^2 + 600x\right]_{x=60} = 18000$

ESERCIZI (risposte a pag. 113)



1) Le galline di Bastiano sono libere di razzolare beate nel grande prato per tutto il giorno, ma di notte è bene che non escano da un recinto rettangolare, delimitato su tre lati da una rete lunga complessivamente 16 metri, e sul lato restante dalla parete della cascina.

   Quanto dovrebbe misurare il lato x perpendicolare al muro (vedi figura), se si desidera che la superficie a disposizione delle galline sia la più ampia possibile?

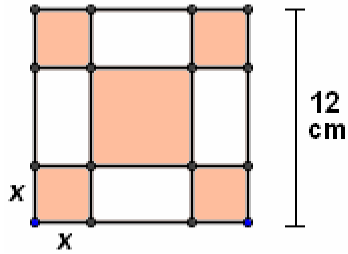
   E di quanti m^2 sarebbe questa superficie massima?

2) Il bagnino Arturo, in Riviera, dà in noleggio i suoi pedalò a 8 € all'ora. E mediamente ogni giorno riesce a impegnare le imbarcazioni per complessive 10 ore, incassando da questa attività 80 euro: non male! Riflettendo se sia il caso di aumentare i prezzi, si fa l'idea che pressappoco, qualora decidesse di ritoccare al rialzo la tariffa oraria, ad ogni aumento di 50 centesimi le ore richieste diminuirebbero, rispetto alla situazione attuale, del 10%. Cerca allora di stabilire, sotto questa ipotesi, quale incremento potrebbe apportare alla tariffa per riuscire a massimizzare i suoi guadagni, e a tale scopo sottopone il problema alla figlia Marina, che frequenta, con ottimo profitto in matematica, la classe seconda liceo scientifico. Tuttavia, quando Marina gli presenta i suoi calcoli, Arturo resta "spiazzato" dalle deduzioni della figliola. Come mai?

3) *Quali sono quei due numeri, la cui somma è uguale a 100, e il cui prodotto è massimo?*

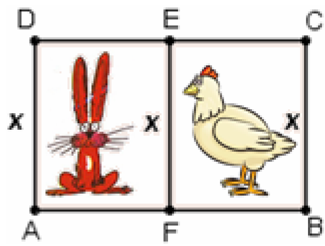
4) *Dimostra che fra tutte le coppie di numeri che danno per somma un numero positivo fissato, quella che realizza il prodotto massimo ha i due elementi uguali fra loro, quindi uguali alla metà del numero dato.*

5) *Fra tutte le coppie di interi relativi* x, y*, che differiscono di 1000 unità, sapresti determinare quella per la quale il prodotto* $x \cdot y$ *è minimo?*



6) *Il quadrato più grande nella figura qui a fianco ha il lato di 12 cm.* →
   Per quale valore di x la superficie ombreggiata è minima?

7) Bertoldo dispone di una rete lunga 20 m e sta pensando di servirsene per delimitare una coppia di territori rettangolari affiancati (vedi figura): → in uno di questi ci metterà poi i conigli, in quello a fianco le galline. Ora, è razionale determinare la lunghezza indicata con x in maniera tale che la superficie disponibile per gli animali sia massima! Ti andrebbe di aiutarlo a risolvere il problema?



7') Se invece Bertoldo decidesse di tenere sia i conigli che le galline in un unico recinto rettangolare, senza la suddivisione intermedia, quali misure dovrebbe scegliere per le dimensioni del rettangolo col contorno di 20 metri, sempre per massimizzarne l'area?

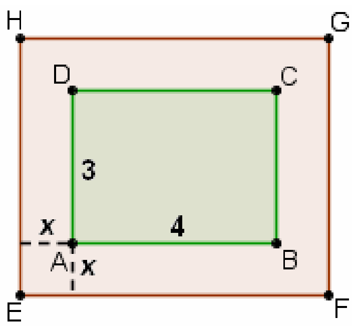
   In generale, fra tutti i rettangoli di perimetro $2p$ assegnato, qual è quello caratterizzato da area massima?

8) Intorno a una aiuola di un grande giardino, delle dimensioni di 3 m per 4, si costruisce uno spazio per passeggiare, che verrà lastricato con mattonelle quadrate (non spezzabili) di 25 cm di lato.

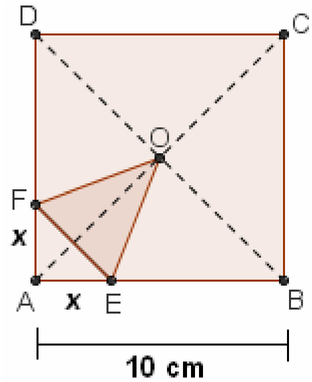
   a) Esprimi l'area M della superficie da ricoprire con le mattonelle, in funzione di x (x è una misura in metri)

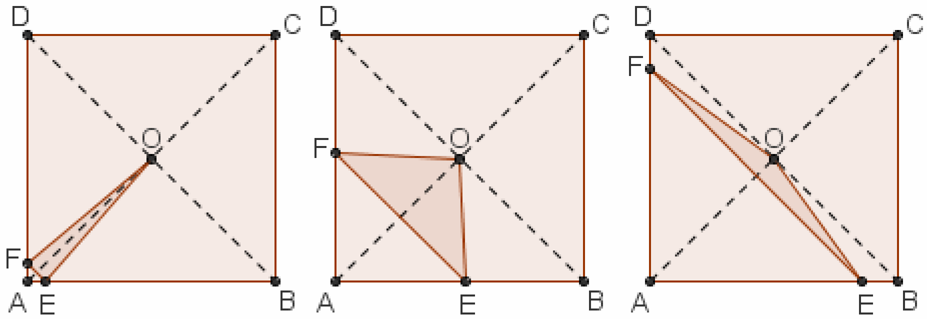
   b) Traccia, col software GEOGEBRA, la curva corrispondente $y = \mathrm{M}(x)$

   c) Risolvi, prima graficamente poi algebricamente, l'equazione che porta a stabilire quale valore di x occorre scegliere se si hanno a disposizione 220 mattonelle di lato 25 cm e dì, in definitiva, se, dovendo realizzare la passeggiata con quella provvista di mattonelle, sceglieresti x di metri 0,75 oppure 1,00.

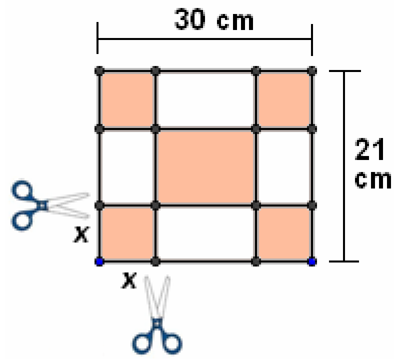


9) *La figura qui a destra mostra un quadrato ABCD di lato 10 cm con le sue diagonali AC e BD che si intersecano in O.
Sui lati AB e AD sono stati presi due segmenti uguali fra loro* $AE = AF = x$ *ed è stato poi disegnato il triangolo EFO.
Ora, come mostra il "cartone animato" sottostante, se x cresce a partire da* 0 *l'area di questo triangolo fino a un certo punto aumenta, dopodiché comincia a diminuire.
Essa toccherà quindi un valore massimo …
Quanto varrà mai quest'area massima di EFO?*



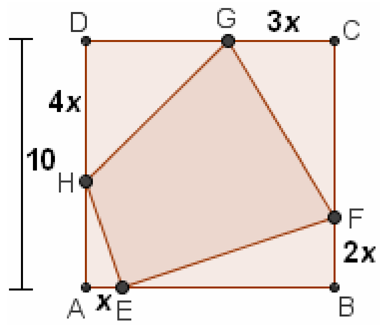


10) Simonetta, a partire da un rettangolo di cartoncino delle dimensioni di 30 cm e 21 cm, paragonabili quindi a quelle di un foglio A4, ritaglia, agli angoli, quattro quadrati fra loro uguali (vedi figura)→ e ripiega poi il cartoncino in modo da formare una scatoletta, che desidera all'esterno decorare inaugurando i colori a olio ricevuti in regalo per il compleanno.
Si domanda perciò quanto dovrebbe misurare il lato x di ogni quadrato affinché la superficie esterna di questa scatola, tolta la base che non verrà pitturata, sia la massima possibile.
Vuoi essere così gentile da aiutarla?
E di stabilire anche il valore di questa superficie massima?



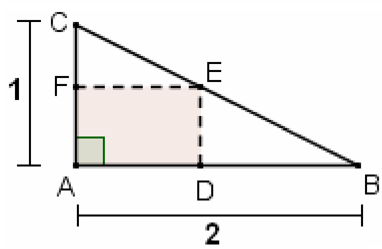
10') Stesso es. precedente, desiderando però massimizzare il *volume* anziché la superficie della scatola.
L'espressione contenente x corrispondente al volume non sarà più di 2° grado ma di 3°, per cui è richiesto di *approssimare all'intero*, anziché calcolare esattamente, il valore di x per il quale il volume della scatola è massimo, facendo calcolare ad un foglio elettronico i valori di $V = V(x)$ per $x = 1, x = 2, \ldots, x = 10$.
Quanto vale, pressappoco, in cm^2 e in m^2, questo volume massimo?

11) *Sui lati AB, BC, CD, DA di un quadrato ABCD di lato 10 cm si prendono quattro segmenti AE, BF, CG, DH tali che* $AE = x$, $BF = 2x$, $CG = 3x$, $DH = 4x$ *(figura a fianco)* →
*Per quale valore di x l'area del quadrilatero EFGH sarà
a) minima? b) massima?*

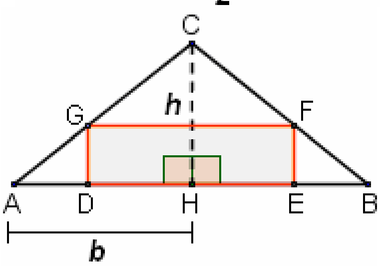


12) *(Richiede le similitudini fra triangoli)
Fra tutti i rettangoli inscritti in un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 1 e 2, e con un vertice sovrapposto al vertice dell'angolo retto (vedi figura)* →
*a) qual è quello di area massima?
b) qual è quello la cui diagonale è minima?*

NOTA - Riguardo al quesito b), per il quale comunque c'è più di un possibile approccio, può essere utile tener presente che un segmento è minimo quando è minimo il suo quadrato …



13) *(Richiede le similitudini fra triangoli)
In un triangolo isoscele di base 2b e altezza h si inscrive un rettangolo (vedi figura)* →
Dimostra che, affinché l'area del rettangolo risulti massima, quel rettangolo deve avere il lato sovrapposto alla base del triangolo isoscele, uguale a metà della base stessa.



14) Da www.beaconlearningcenter.com

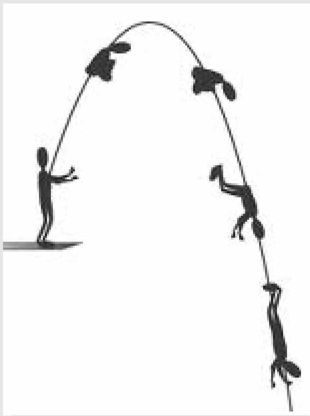
An auditorium has seats for 1200 people.
For the past several days, the auditorium has been filled to capacity for each show.
Tickets currently cost \$5.00 and the owner wants to increase the ticket prices.
He estimates that for each \$0.50 increase in price, 100 fewer people will attend.
What ticket price will maximize the profit?

15) Da www.beaconlearningcenter.com

A grocer sells 50 loaves of bread a day. The cost is \$0.65 a loaf. The grocer estimates that for each \$0.05 price increase, 2 fewer loaves of bread will be sold. What cost will maximize the profit?

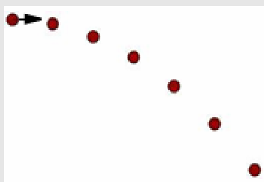
16) Un'impresa di trasporti deve inviare il suo preventivo a un club milanese di appassionati di matematica, per un congresso scientifico a Roma. Il club ha comunicato che si prevedono non più di 50 viaggiatori: l'agenzia pensa dunque di impegnare un autobus da 50 posti, proponendo la sua offerta in un modo che possa risultare simpaticamente allettante per quel tipo particolare di clientela. Si decide per un costo-base di 20 € a persona, diminuito però di uno sconto, per ogni viaggiatore, calcolato in proporzione al numero di viaggiatori. Insomma, lo sconto da accordare a ogni partecipante sarà ottenuto moltiplicando una piccola cifra fissa s per il numero x dei partecipanti. Ora, in questo modo, come si è visto da esercizi precedenti, l'incasso sarebbe destinato a diminuire (anziché aumentare) se si oltrepassa un certo numero di adesioni; ma il responsabile commerciale della ditta, anch'egli appassionato di matematica, ha scelto s in modo che l'incasso totale, relativo a quella scelta di s, venga proprio a massimizzarsi con $x = 50$.
Qual è il valore di s? E quanto sarebbe in definitiva il costo individuale, in caso di autobus pieno?

MOTI SOTTO L'EFFETTO DELLA GRAVITA'



17) Quando si lancia un corpo verso l'alto da un "livello zero", la Fisica insegna che la sua altezza h dopo t secondi dal lancio è data da $\boxed{h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$,
dove v_0 è la velocità iniziale in metri al secondo,
mentre g è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre,
che vale circa 9,8 metri al secondo per secondo.
La formula può quindi essere riscritta come $\boxed{h \approx v_0 t - 4{,}9 t^2}$.
Trascurando gli effetti della resistenza dell'aria,
a) a che altezza si troverà, dopo 1 s dallo sparo, una pallottola che esce verticalmente dalla bocca di un fucile alla velocità iniziale di 300 m/s?
b) Quale altezza massima raggiungerà?
c) E dopo quanto tempo la pallottola ritornerà alla stessa altezza da cui era stata fatta partire?

18) Supponiamo di trovarci ad una data altezza h dal suolo,
ad esempio sulla terrazza alla sommità di un edificio alto h metri,
e di lanciare un oggetto in direzione *orizzontale*.
Allora, come è noto dalla Fisica, il nostro proiettile descriverà
(se non si tiene conto, per semplicità, della resistenza dell'aria)
una traiettoria risultante dalla sovrapposizione di due moti:

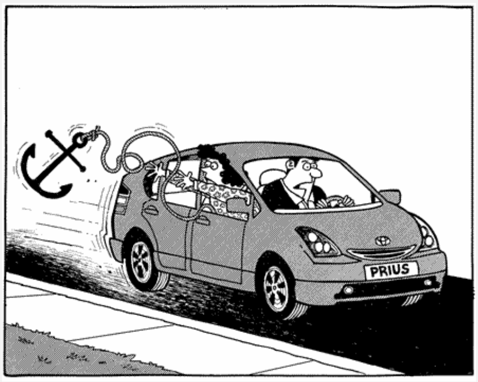


- uno orizzontale uniforme (= a velocità costante) $\boxed{x = v_0 t}$
- l'altro verticale uniformemente accelerato, secondo la legge $\boxed{y = h - \frac{1}{2} g t^2}$

Quale sarà la traiettoria del moto?
Già sappiamo trattarsi di una parabola, ma quale sarà l'equazione di questa parabola?
E' semplice ricavarla: basta isolare t nella prima equazione e sostituire nella seconda.
Avremo così $t = \frac{x}{v_0}$ dopodiché $y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$ ossia $\boxed{y = h - \frac{g}{2 v_0^2} x^2}$ (ricorda che $g \approx 9{,}8\ m/s^2$)

a) Se un cretino spara orizzontalmente un proiettile con una pistola da un balcone a 15 metri dal suolo, e il colpo esce dalla canna a 300 m/s, a che distanza dall'edificio toccherà terra la pallottola?
b) E se invece una pallottola, sparata nelle medesime condizioni, tocca terra a metri 300 dall'edificio, qual era la velocità con cui era uscita dalla canna della pistola?
c) Sapresti, in generale, ricavare la formula della "gittata", ossia dello spazio orizzontale percorso, nel caso di un proiettile lanciato orizzontalmente dall'altezza h e con velocità iniziale v_0 ?

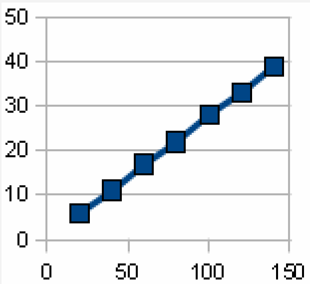
FRENA !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

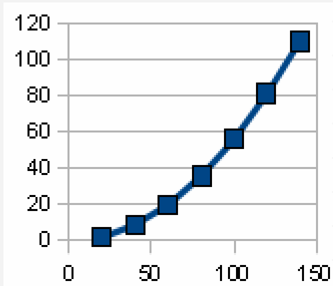


19) Immaginiamo un guidatore che, accorgendosi di un ostacolo sulla strada, freni per arrestare il veicolo.
Beh, innanzitutto, fra l'istante in cui il conducente percepisce il pericolo e quello in cui interviene sul pedale del freno, passa un intervallino di tempo, un "tempo di reazione", che grossomodo sarà dell'ordine del secondo per un guidatore sobrio e vigile.
E nel frattempo il veicolo procede, percorrendo una distanza che viene chiamata "spazio di reazione".
Lo "spazio di frenata" è invece quello che il veicolo percorre dal momento in cui inizia l'azione sui freni fino all'arresto; esso dipende dalla velocità e dalle condizioni del fondo stradale.
La somma fra lo "spazio di reazione" e lo "spazio di frenata" dà la "distanza di arresto".
In un sito Internet compare la seguente tabella,
riferita ad un'automobile con un conducente "medio" in buone condizioni psicofisiche:

velocità (km/h)	**140**	**120**	**100**	**80**	**60**	**40**	**20**
spazio di reazione (m)	39	33	28	22	17	11	6
spazio di frenata (m)	110	81	56	36	20	9	2
distanza di arresto (m)	149	114	84	58	37	20	8

Se, con l'aiuto di un foglio elettronico, facciamo un grafico velocità-spazio di reazione e un altro grafico velocità-spazio di frenata, i due diagrammi ci appariranno pressappoco così:





♪ Il primo grafico ha una forma suppergiù rettilinea, e possiamo capire bene il perché: durante il tempo di reazione, il guidatore non interviene sui freni e l'auto continua a muoversi alla sua ordinaria velocità costante; per un dato tempo di reazione (uguale, poniamo a 1 secondo) gli spazi percorsi saranno proporzionali alla velocità dell'automobile.

a) Controlla: se l'auto procede ai 140 km/h, in 1 secondo percorrerà, arrotondando all'intero, m …
b) Anche gli altri valori sulla riga "spazio di reazione" vanno d'accordo con questa trasformazione da km/h a m/s e con un tempo di reazione ipotizzato di 1 secondo? …
c) Chi ha compilato la tabella ha fatto degli arrotondamenti? …

♫ Il secondo diagramma sembrerebbe invece avere l'aspetto di una parabola. In effetti, sul sito dell'ACI (Automobile Club Italiano) leggiamo che "la formula dello spazio di frenata è: spazio di frenata = velocità (*in metri al secondo*) al quadrato, diviso per il prodotto di 2 moltiplicato per l'accelerazione di gravità (circa 9,8 m al secondo per secondo) moltiplicato per il coeff. di attrito. Il coefficiente di attrito varia da 0,8 (strada asciutta e fondo ruvido) a 0,05 (strada ghiacciata)"

d) Verifica che la nostra tabella applica proprio questa formula, con un coeff. di attrito dato da …
e) Quindi il grafico più a destra corrisponde, pressappoco, alla parabola che ha equazione [indica le due variabili con s (spazio in metri) e v (velocità in metri al secondo)] …
f) Data questa proporzionalità dello spazio di reazione a v, e dello spazio di frenata a v^2, se la velocità raddoppia lo spazio di reazione … mentre lo spazio di frenata …
e se la velocità triplica lo spazio di reazione … mentre lo spazio di frenata …

❑ La formula fornita dal Ministero dei Trasporti, per lo spazio di frenata, non è $s_F = \dfrac{v^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot f} \approx \dfrac{v^2}{20 \cdot f}$

con la velocità espressa in metri al secondo: è invece $s_F = \dfrac{v^2}{250 \cdot f}$ con la velocità in km/h.

g) Verifica che le due formule sono in buon accordo tra loro
h) Con la formula del Ministero, stabilisci la velocità cui presumibilmente procedeva un'auto che prima di fermarsi, su strada in buone condizioni (c.a. 0,8), ha lasciato un segno di frenata di 70 m

RISPOSTE

1) Il massimo dell'area $y = S(x) = x(16-2x) = -2x^2+16x$ si ha quando $x = 4\,\text{m} \to y = S_{MAX} = 32\,\text{m}^2$

2) x = numero di aumenti di 0,50 euro applicati. Se il prezzo di 8 euro venisse aumentato di 0,50 euro per x volte, si porterebbe a euro $8 + x \cdot 0,50$; le ore giornaliere in compenso passerebbero, in media (stando alle previsioni di Arturo), da 10 a $10 - x \cdot 1$ (1 è il 10% di 10) e il ricavo giornaliero ipotizzato sarebbe mediamente di euro

$$(8+x\cdot 0,50)(10-x\cdot 1) = \left(8+\frac{1}{2}x\right)(10-x) = 80-8x+5x-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2-3x+80$$

La parabola $y = -\frac{1}{2}x^2-3x+80$ ha il suo massimo in corrispondenza dell'ascissa $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{-1} = -3$.

Arturo scopre quindi che per massimizzare i guadagni dovrebbe apportare non un rincaro, bensì uno *sconto* di $3\cdot 0,50 = 1,50$ euro al prezzo dei suoi pedalò, fissandolo a euro $8-1,50 = 6,50$ all'ora …

Certo, tutto questo è basato su di un'ipotesi "tanto al chilo" quindi la previsione dell'efficacia dello sconto va presa con molta cautela … Tuttavia, forse per Arturo varrebbe la pena provare!

3) 50 e 50: la quantità $x(100-x)$ è massima quando $x = 50 \to 100-x = 50$ (in questo caso il prodotto è 2500)

4) La quantità $x(s-x) = -x^2+sx$ è massima quando $x = -b/2a = s/2 \to s-x = s-s/2 = s/2$

5) $x(x+1000) = x^2+1000x$ tocca il suo minimo quando $x = -500 \to x+1000 = +500$. Il minimo è -250000.

6) *Area superficie ombreggiata* $= 4x^2+(12-2x)^2 = 8x^2-48x+144$; è minima per $x = 3$ cm

7) $\frac{20-3x}{2}\cdot x = -\frac{3}{2}x^2+10x \quad x_V = 3,333... = \text{m}\left(3+\frac{1}{3}\right)$

7') 5 m per entrambe le dimensioni; il quadrato

8) $220\cdot 25^2\ \text{cm}^2 = 137500\ \text{cm}^2 = 13,75\ \text{m}^2$ Area da piastrellare $= x^2\cdot 4+4\cdot x\cdot 2+3\cdot x\cdot 2 = 4x^2+14x \quad 4x^2+14x = 13,75$

$4x^2+14x-13,75 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49+55}}{4} = \frac{-7\pm\sqrt{104}}{4} \approx 0,80$ m. Fra le scelte prospettate, l'unica possibile è m 0,75.

9) $x = 5$ cm; $S_{MAX} = \text{cm}^2\,12,5$

10) Il ritaglio, se si vuole massimizzare la superficie esterna della scatola, dovrà essere di 6,375 cm.
L'ordinata corrispondente, ossia la superficie massima in questione, vale

$$\left[-8x^2+102x\right]_{x=\frac{51}{8}} = -8\cdot\frac{2601}{64}+102\cdot\frac{51}{8} = \frac{-2601+5202}{8} = \frac{2601}{8} = 325,125\ \text{cm}^2$$

10') $V(x) = (30-2x)\cdot(21-2x)\cdot x = 4x^3-102x^2+630x$. Il vol. max si ha con $x \approx 4$ cm e vale circa $1144\,\text{cm}^3$

11) L'area minima per EFGH si ha con $x = \text{cm}\ 25/12 = \text{cm}(2+1/12)$ e vale $\text{cm}^2\ 575/12$
mentre l'area massima si ha con $x = 0$ e vale $100\ \text{cm}^2$

12) a) Posto $CF = x$, sarà $FE = 2x$ e $S(x) = 2x(1-x)$ … ; si ottiene $x_{MAX} = 1/2$ da cui $S_{MAX} = 1/2$.
b) $(2x)^2+(1-x)^2$ è minimo con $x = 1/5$.
Il rettangolo con diagonale minima ha quindi dimensioni 4/5 (verticale), 2/5 (orizzontale).
L'alternativa, per determinarlo, era la seguente:
la diagonale AE è minima quando E è il punto, su BC, che ha la minima distanza da A.
Ma tale punto è allora la proiezione di A su BC …
AE è dunque minima quando coincide con l'altezza relativa all'ipotenusa.

13) Se $AD = x$, allora $DG = \frac{h}{b}x$, $S(x) = (2b-2x)\cdot\frac{h}{b}x = 2hx-\frac{2h}{b}x^2$; $x_V = -\frac{2h}{2\cdot(-2h/b)} = \frac{b}{2} \to DE = b$

14) The profit is maximized when the owner makes one \$0.50 increase. Maximum income = \$6050

15) The profit is maximized when the owner makes six \$0.05 increases. Maximum income = \$36.10

16) 0,20 €;
10 € a persona

17) a) A circa 295 metri di altezza sopra l'altezza iniziale della bocca del fucile
b) ≈ 4592 metri + l'altezza iniziale della bocca del fucile c) Dopo ≈ 1 min. e 1 secondo

18) a) Il calcolo dà 525 m circa b) Il calcolo dà ≈ 171 m/sec c) $\sqrt{\frac{2{v_0}^2h}{g}} = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$

19) a) 39 circa b) Sì! c) Sì, ha arrotondato tutti i valori all'unità più vicina
d) La tabella applica la formula $s_F = \frac{v^2}{2\cdot 9,8\cdot f}$ (v velocità in m/s) con un coeff. di attrito dato da 0,7
e) Il grafico più a destra corrisponde, pressappoco, alla parabola di equazione $s_F = v^2/13,72$ (v in m/s)
f) Se la velocità raddoppia lo spazio di reazione raddoppia mentre lo spazio di frenata diventa il quadruplo e se la velocità triplica lo spazio di reazione triplica, lo spazio di frenatura diventa 9 volte tanto
h) Con $s_F = 70\,\text{m}$ e $f = 0,8$ la formula del Ministero porta a una velocità ipotizzata di circa 118 km/h

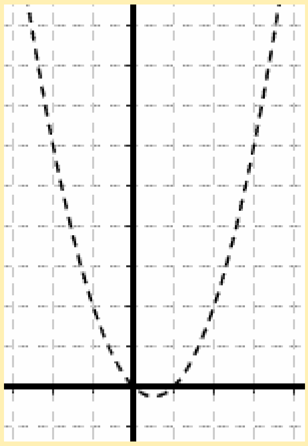
11. MANIPOLAZIONI DI GRAFICI

Partiamo dal grafico di una funzione fissata

$\boxed{y = f(x)}$.

Per meglio fissare le idee,
le nostre figure si riferiranno
sempre allo stesso esempio
di funzione di partenza:
abbiamo scelto la

$$y = f(x) = x^2 - x$$



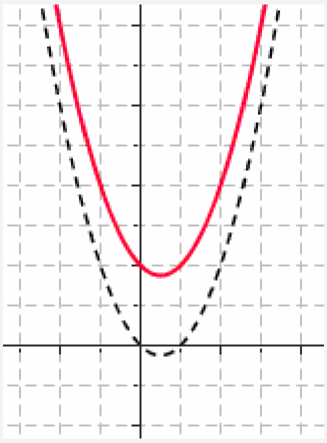
Vedremo come, semplicemente "manipolando" il grafico della **funzione "madre"**, è possibile ottenere i grafici delle seguenti **funzioni "figlie"** (essendo ***k*** una **costante positiva**):

$$f(x)+k \qquad f(x)-k \qquad kf(x) \qquad -f(x)$$
$$f(x+k) \qquad f(x-k) \qquad f(kx) \qquad f(-x)$$
$$|f(x)| \qquad f(|x|)$$
$$[f(x)]^2 \qquad \sqrt{f(x)} \qquad \frac{1}{f(x)}$$

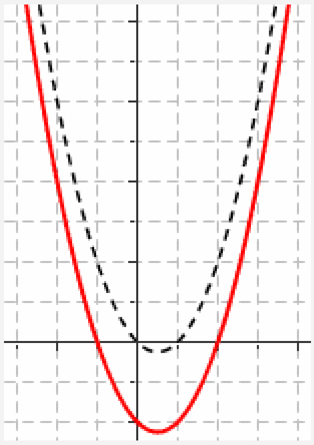
$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{y = f(x) = x^2 - x} \\ \textbf{\textit{funzione "madre"}} \end{array}}$$

$\boxed{f(x) \to f(x) \pm k}$

traslazione
verticale
di k unità
verso l'alto se c'è il $+$,
verso il basso se c'è il $-$



$y = f(x) + 2 = x^2 - x + 2$

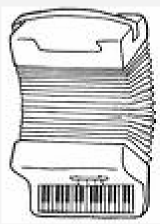


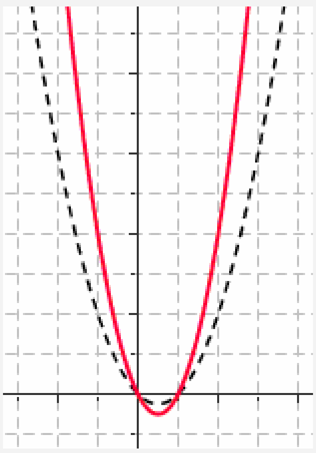
$y = f(x) - 2 = x^2 - x - 2$

$\boxed{f(x) \to kf(x)}$

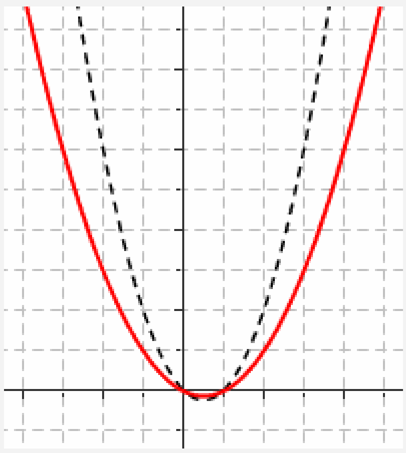
dilatazione
$(k > 1)$
o contrazione
$(0 < k < 1)$
in senso
verticale,
coi punti
sull'asse x
che rimangono
fermi:

"effetto
fisarmonica"
verticale.

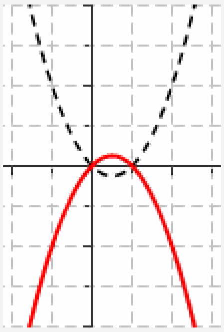




$y = 2f(x) = 2\left(x^2 - x\right)$



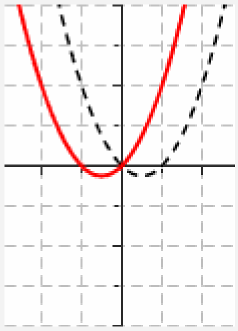
$y = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right) = \frac{x^2 - x}{2}$



$y = -f(x) = -\left(x^2 - x\right) = -x^2 + x$

$\boxed{f(x) \to -f(x)}$

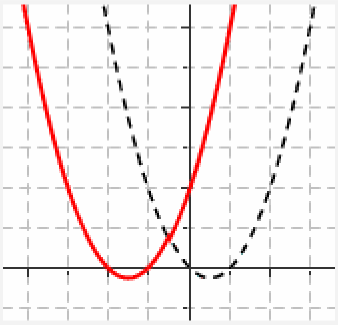
ribaltamento rispetto all'asse orizzontale



$y = f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$

$\boxed{f(x) \to f(-x)}$

simmetrizzazione rispetto all'asse verticale



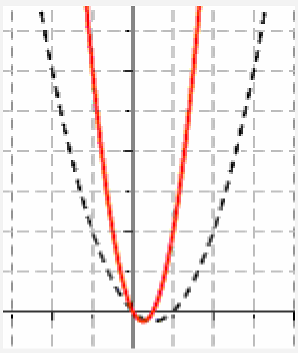
$y = f(x+2) = (x+2)^2 - (x+2)$

$y = f(x-2) = (x-2)^2 - (x-2)$

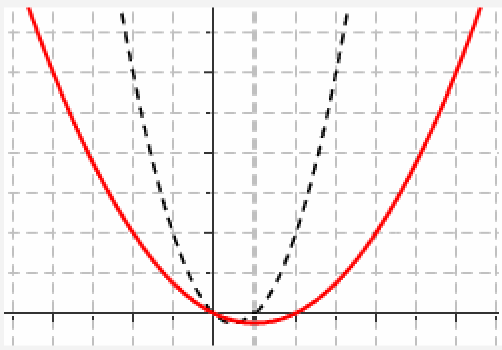
$\boxed{f(x) \to f(x \pm k)}$

traslazione orizzontale, con "EFFETTO BASTIAN CONTRARIO":
verso *sinistra* se c'è il $+$, verso *destra* se c'è il $-$

Perché mai questo "effetto bastian contrario"?
Consideriamo il caso della coppia $f(x)$ e $f(x+2)$, e riflettiamo.
Prendo la funzione $f(x)$, do un valore a x, ad es. $x = 3$, e calcolo la y corrispondente:
ottengo un certo numero $y = f(3)$.
Ora, se voglio ottenere la stessa ordinata con l'altra funzione $f(x+2)$, che valore dovrò dare a x?
Dovrò dare a x il valore 1, in modo da avere $f(1+2) = f(3)$.
Quindi, la $f(x+2)$ assume gli stessi valori della $f(x)$, ma … 2 unità più a *sinistra*!!!



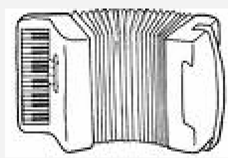
$y = f(2x) = (2x)^2 - 2x$

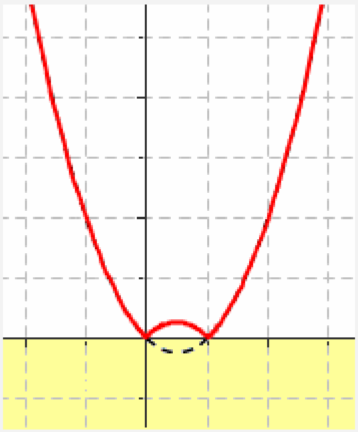


$y = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{2}x$

$\boxed{f(x) \to f(kx)}$

dilatazione o contrazione orizzontale, coi punti sull'asse y
che rimangono fermi: **"effetto fisarmonica" orizzontale**.
Attenzione, **anche qui c'è un "EFFETTO BASTIAN CONTRARIO":**
si ha una contrazione con $k > 1$, una dilatazione con $0 < k < 1$.

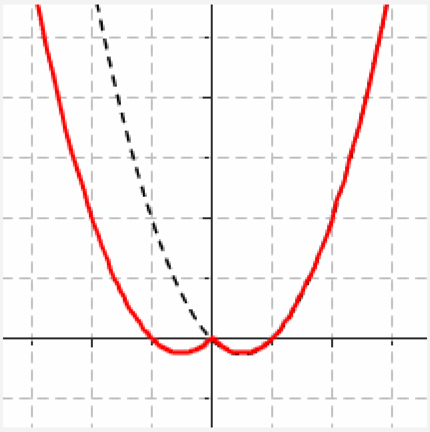




$$y = |f(x)| = |x^2 - x|$$

$$\boxed{f(x) \to |f(x)|}$$

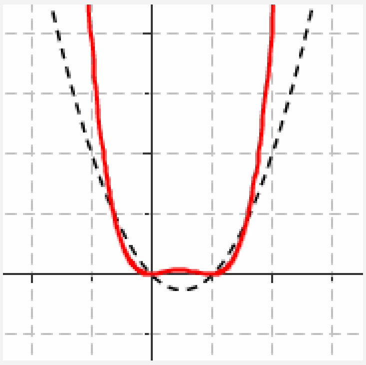
La parte del grafico della $f(x)$
che ha ordinate negative
viene sostituita
con la sua simmetrizzazione
rispetto all'asse orizzontale.



$$y = f(|x|) = |x|^2 - |x|$$

$$\boxed{f(x) \to f(|x|)}$$

La parte del grafico della $f(x)$
che ha ascisse negative
viene cancellata e buttata via.
La parte con ascisse positive viene riconfermata,
e completata con la sua simmetrica rispetto all'asse verticale.

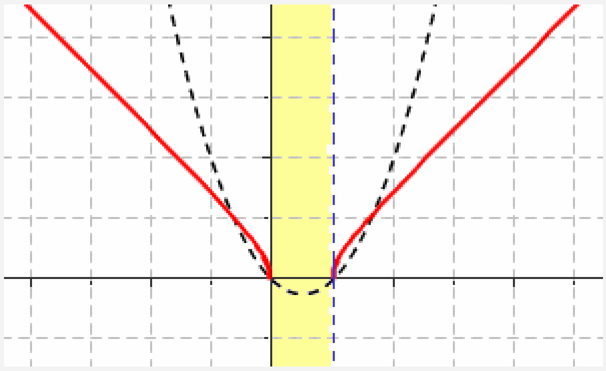


$$y = [f(x)]^2 = (x^2 - x)^2$$

$$\boxed{f(x) \to [f(x)]^2}$$

Per ogni ascissa,
l'ordinata corrispondente
viene elevata al quadrato.
Ora, occorre tener presente che
un numero compreso fra -1 e 1,
quando viene elevato alla seconda,
produce un numero positivo,
il cui valore assoluto
è MINORE
del valore assoluto
del numero di partenza.

Ad esempio,
elevando al quadrato
il numero 0,5
si ottiene 0,25
ed è 0,25<0,5.



$$y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - x}$$

$$\boxed{f(x) \to \sqrt{f(x)}}$$

La parte del grafico con ordinate negative
viene buttata via.
Ciascun punto con ordinata positiva
viene sostituito da un punto
che ha ordinata uguale alla radice quadrata di quella iniziale
(mentre, naturalmente, l'ascissa rimane la stessa).
In particolare:
i punti di ordinata 0 e di ordinata 1 rimangono fissi;
se un punto ha ordinata maggiore di 1, si abbassa:

$$y > 1 \ \to \ \sqrt{y} < y$$

se un punto ha ordinata compresa fra 0 e 1,
si alza leggermente
(pur restando sempre al di sotto dell'ordinata 1):

$$0 < y < 1 \ \to \ 0 < y < \sqrt{y} < 1$$

$$\boxed{f(x) \to \frac{1}{f(x)}}$$

Per ogni ascissa, si prende l'ordinata corrispondente e se ne fa il reciproco.

Ma se un'ordinata è nulla, il suo reciproco non esiste! Quindi con $x=0$, $x=1$ (valori per cui si annulla il denominatore) la funzione $y=\dfrac{1}{x^2-x}$ non esiste.

Inoltre, le ordinate vicine a 0, quando se ne fa il reciproco, si mutano in ordinate molto grandi in valore assoluto .

Invece le ordinate molto grandi, facendone il reciproco, si mutano in ordinate molto piccole.

Le ordinate uguali a $+1$ oppure a -1, quando se ne fa il reciproco, restano invariate.

$$y=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2-x}=-\infty$$

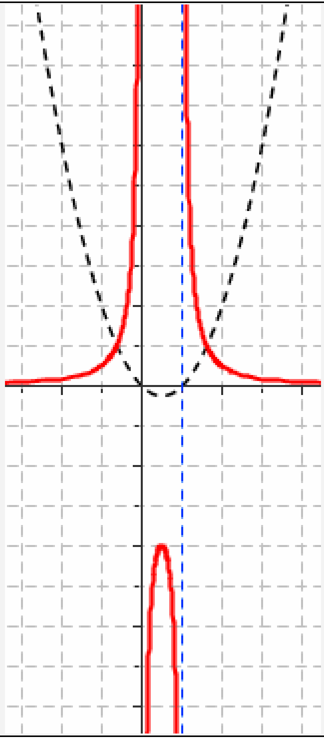
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2-x}=0^+$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2-x}=0^+$$

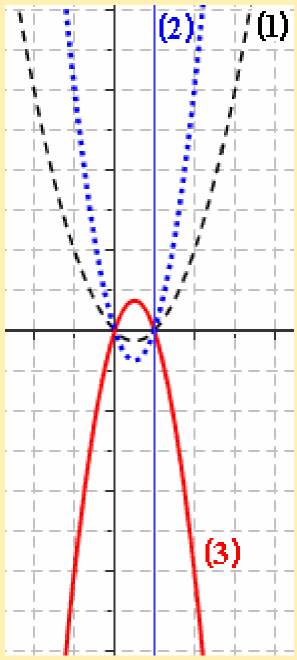
Le due rette verticali $x=0$ *e* $x=1$, *e la retta orizzontale* $y=0$, *sono dette "asintoti" per la funzione*



ALTRE MANIPOLAZIONI possono effettuarsi SPEZZANDO IL PROCEDIMENTO GRAFICO IN PIÙ FASI.

Ad esempio, il passaggio dal grafico di $y=f(x)$ a quello di $y=-3f(x)$ può essere organizzato secondo le "tappe" (vedi figura qui a destra):

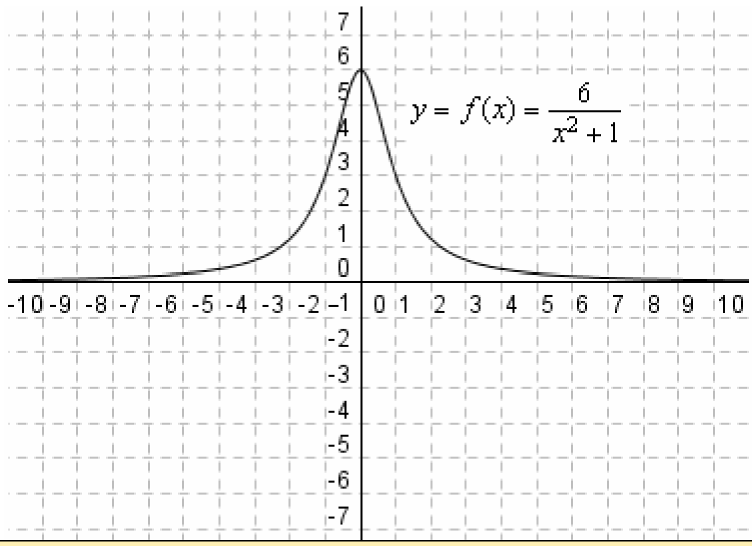
$$\underbrace{f(x)}_{(1)} \to \underbrace{3f(x)}_{(2)} \to \underbrace{-3f(x)}_{(3)}.$$



ESERCIZI (consigliabile però svolgere prima quelli alle pagine successive)
Clicca sulla freccia ⇨ per le correzioni degli esercizi di questa pagina

1) Dal grafico di $y=f(x)=\dfrac{6}{x^2+1}$, qui rappresentato, ricava i seguenti:

a) $1-f(x)$ b) $|f(x)-2|$ (fallo tratteggiato, questo!)



Per controllare la correttezza dei grafici tracciati, puoi servirti di **GEOGEBRA.**

Ma **occhio alle parentesi**!

Ad es. $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{2x^2+1}$ si scrive $x\,\hat{}\,(1/4)/(2x\,\hat{}\,2+1)$

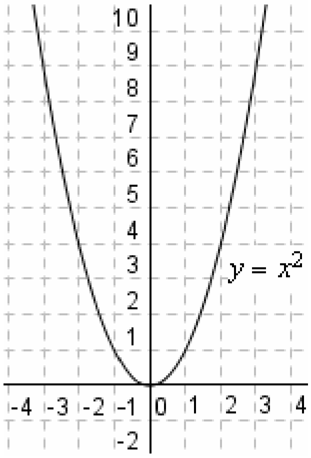
Risolvi prima graficamente, poi algebricamente, le seguenti equazioni:

2) $x^3+1=(x+1)^2$ 3) $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{2x}$ 4) $x^2=\dfrac{1}{x+2}$

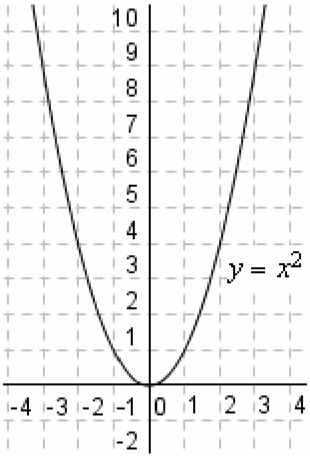
5) $-x/2=(x^2+1)^{-1}$ 6) $\sqrt[3]{4x}=x$ 7) $\sqrt{x}+3=x\sqrt{3}$

8) Verifica che l'equazione $|x-4|=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ha tre soluzioni: $0<x_1<1$, $3<x_2<4$, $4<x_3<5$

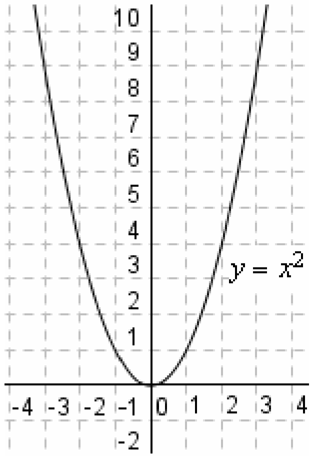
ESERCIZI: su ciascuna delle funzioni rappresentate, esegui le manipolazioni indicate.



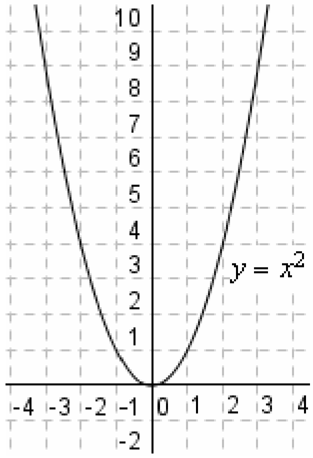
$f(x) \to f(x) - 1$



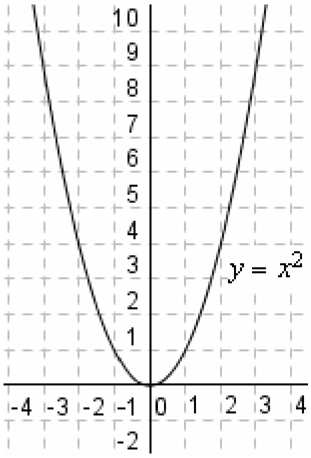
$f(x) \to f(x-1)$



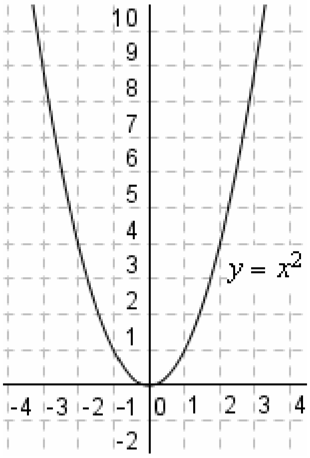
$f(x) \to 2f(x)$



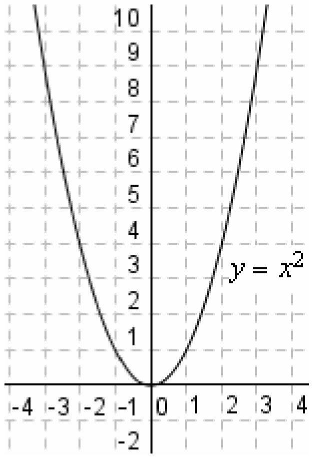
$f(x) \to f(2x)$



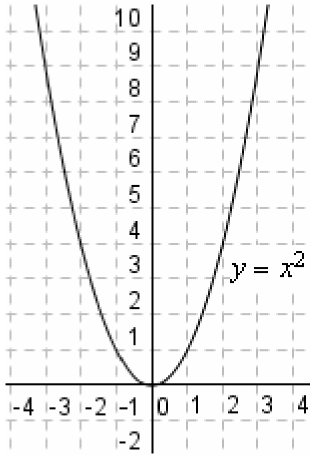
$f(x) \to \dfrac{1}{f(x)}$



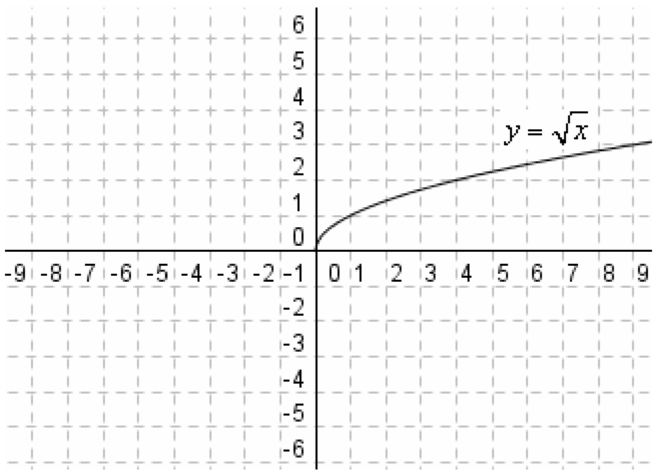
$f(x) \to \sqrt{f(x)}$



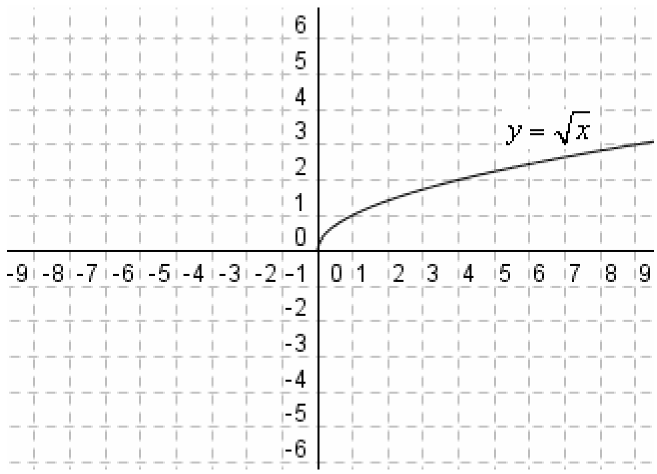
$f(x) \to [f(x)]^2$



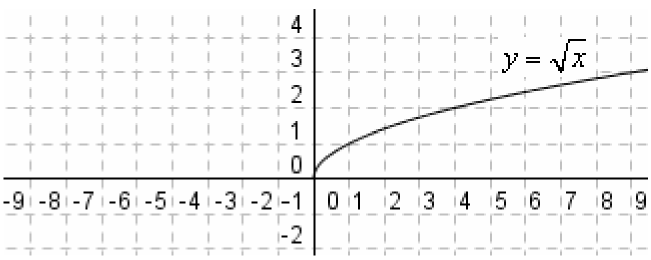
$f(x) \to f(x+2)$



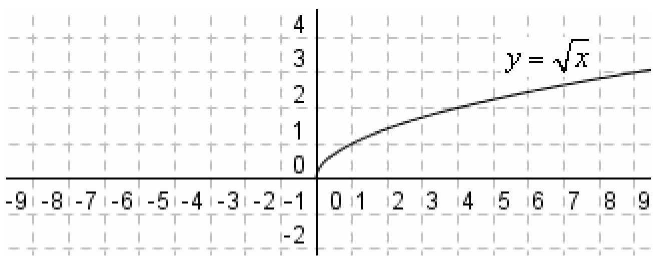
$f(x) \to f(x) + 3$ e $f(x) \to f(x+3)$



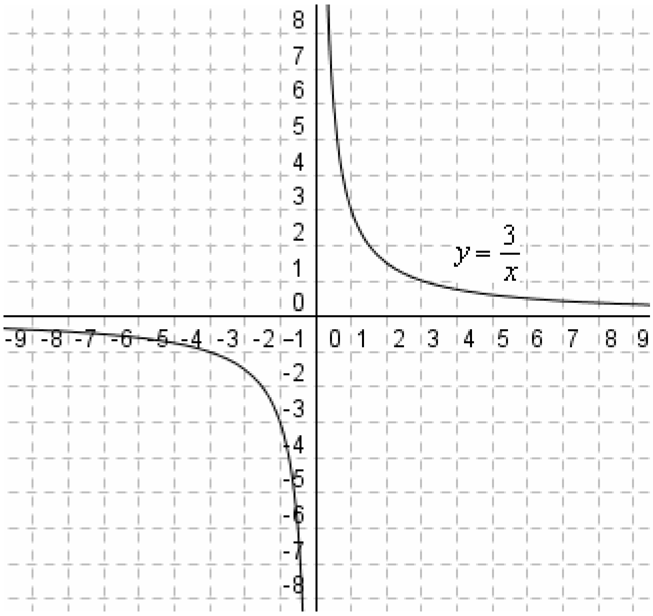
$f(x) \to -f(x)$ e $f(x) \to f(-x)$



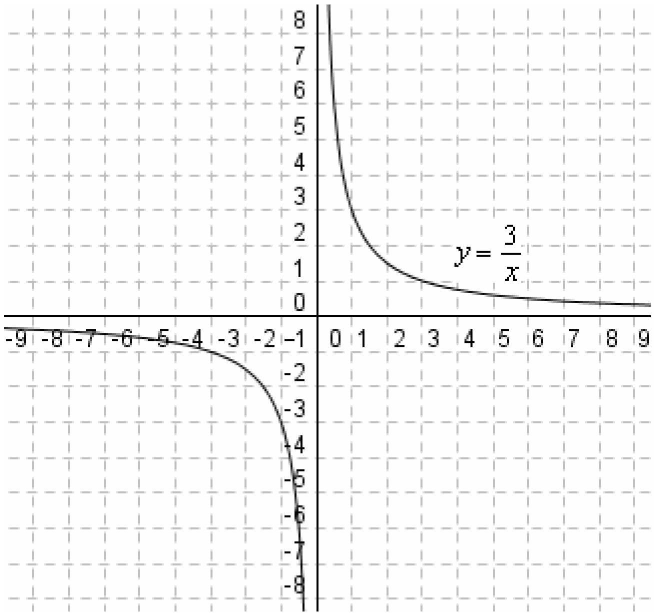
$f(x) \to \dfrac{1}{f(x)}$ e $f(x) \to f(x-1)$



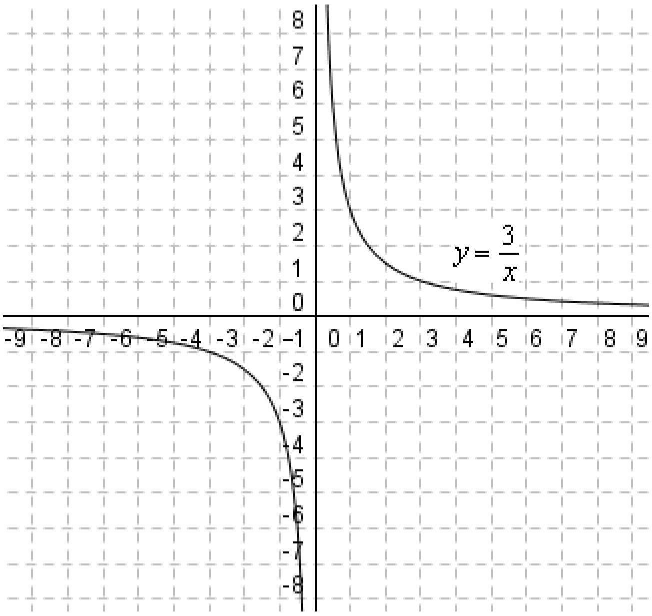
$f(x) \to \dfrac{1}{2} f(x)$ e $f(x) \to f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$



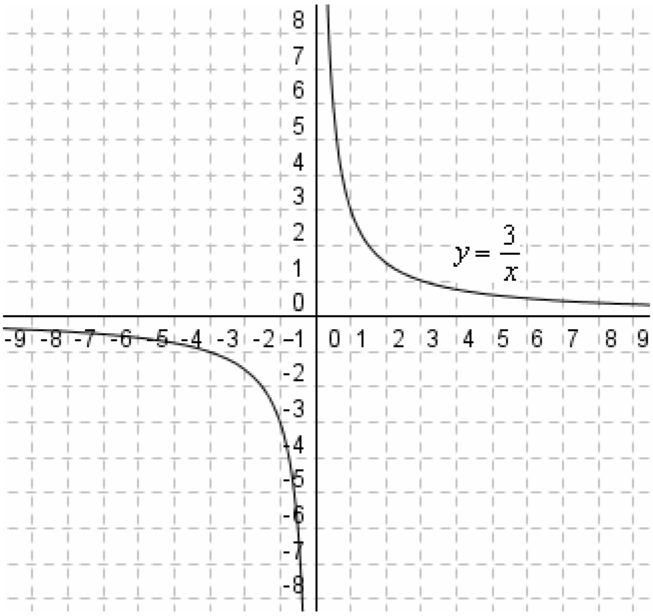
$f(x) \to f(x)-1$ e $f(x) \to f(x)+2$



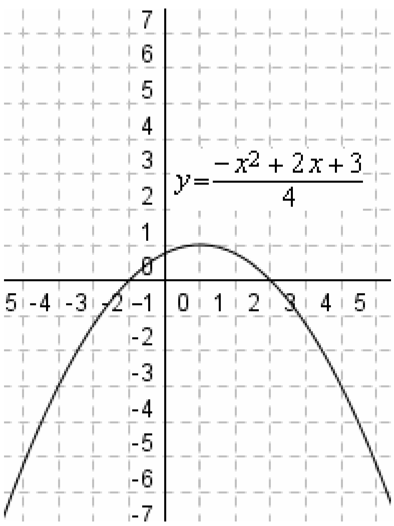
$f(x) \to f(x-1)$ e $f(x) \to f(x+2)$



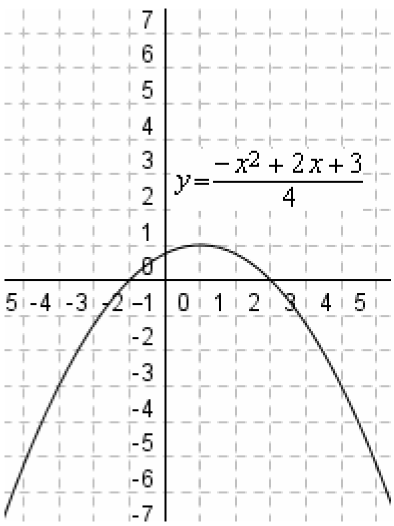
$f(x) \to \dfrac{1}{f(x)}$ e $f(x) \to [\,f(x)]^2$



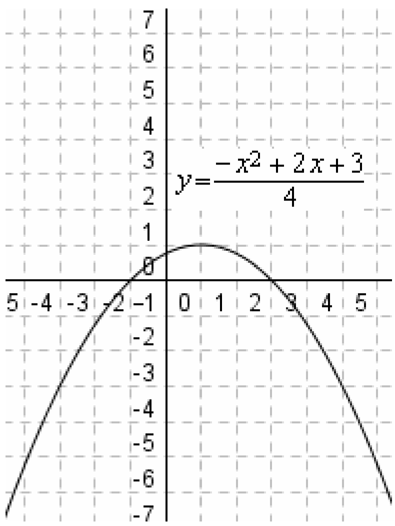
$f(x) \to |f(x)|$ e $f(x) \to \sqrt{f(x)}$



$f(x) \to |f(x)|$



$f(x) \to 1/\,f(x)$



$f(x) \to f(-x)$

CORREZIONI degli esercizi ⇨

12. INVERSIONE DI UNA FUNZIONE NUMERICA

Consideriamo la funzione $y = x^3 + 1 = f(x)$.
Ci domandiamo:
è possibile ora, se si sceglie un valore di *y*, risalire al valore di *x* che ha generato quell' *y*?
Proviamoci.

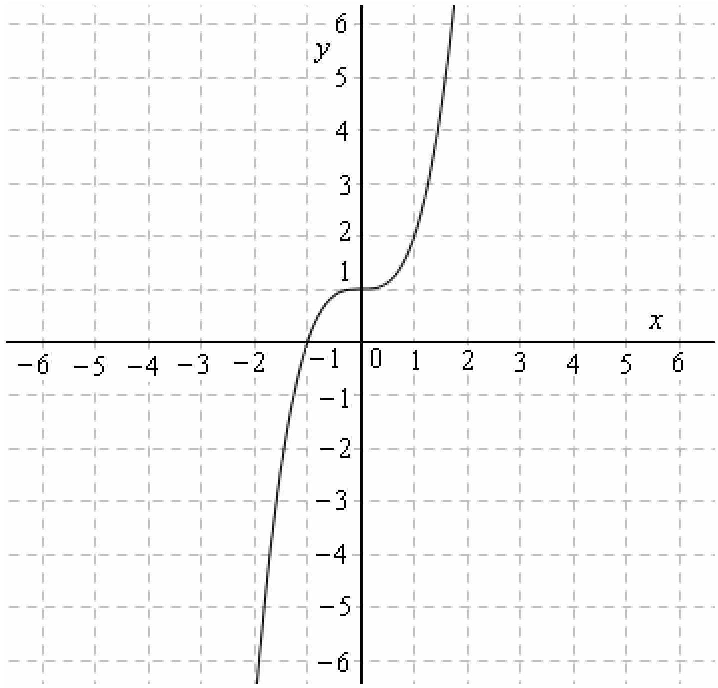
$$y = x^3 + 1; \quad x^3 + 1 = y; \quad x^3 = y - 1; \quad x = \sqrt[3]{y-1}$$

Ecco fatto: la legge $x = \sqrt[3]{y-1}$ è chiamata "**funzione inversa**" della $y = x^3 + 1$ e indicata col simbolo $f^{-1}(y)$.
Questa legge, questa "funzione inversa", permette di "tornare indietro":
a partire da *y*, si può risalire a quella che era la sua controimmagine *x* nella funzione diretta. Dunque:

$$y = x^3 + 1 = f(x)$$
$$x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y) \quad \textit{funzione inversa della } f$$

Supponiamo ora di voler rappresentare la funzione inversa appena ricavata, su di un riferimento cartesiano. Tutto sommato, la rappresentazione ce l'abbiamo già, se abbiamo tracciato il grafico della funzione diretta! Sì, perché se noi anziché guardare il grafico dal solito punto di vista, ruotiamo il foglio di 90° in senso antiorario, avremo la *y* in orizzontale e la *x* in verticale, quindi potremo seguire, al variare di *y*, come varia *x*, col solo fastidio che, contrariamente alle nostre abitudini, la variabile indipendente (che qui è *y*) assume valori crescenti allorquando ci spostiamo con lo sguardo verso sinistra e non verso destra.

Se guardo da qui, vedo sostanzialmente il grafico della funzione inversa $x = \sqrt[3]{y-1}$ *col solo inconveniente che la variabile indipendente y cresce quando muovo lo sguardo nel verso opposto a quello al quale sono abituato.*



Se guardo da qui, vedo normalmente la funzione diretta $y = x^3 + 1$

D'altra parte, potremmo anche decidere di considerare la funzione inversa come funzione "a sé stante", svincolata dalla funzione "diretta" dalla quale eravamo partiti.
In questo caso, poiché la consuetudine è di indicare la variabile indipendente col simbolo *x* e la variabile dipendente con *y*, procederemo ad uno **scambio di variabili**.

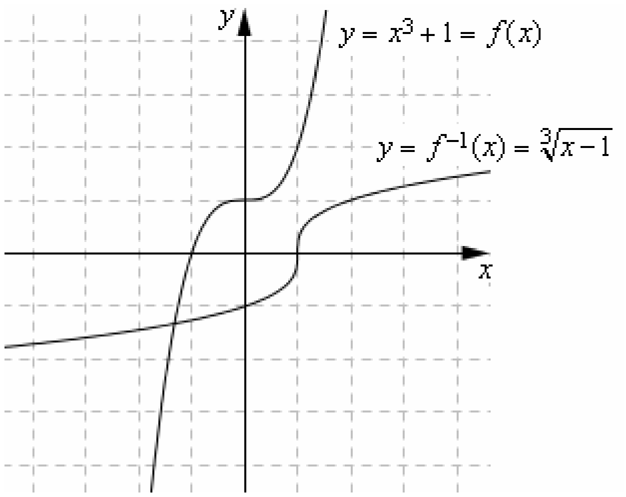
Vediamo di spiegarci meglio. Nel nostro esempio, eravamo partiti dalla funzione diretta $y = x^3 + 1 = f(x)$ e approdati alla funzione inversa $x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y)$.
Bene! La f^{-1} è dunque quella "macchinetta" che, quando "ingoia" un numero, poi "sputa fuori" il numero ottenuto sottraendo 1 al numero di partenza ed estraendo una radice cubica.
Se ora, anziché indicare il numero di partenza con *y* e quello di arrivo con *x*, indichiamo il numero di partenza con *x* e quello di arrivo con *y*, e scriviamo dunque $y = \sqrt[3]{x-1} = f^{-1}(x)$, la macchinetta resta sempre la stessa, la legge che fa passare dalla variabile indipendente alla variabile dipendente non cambia affatto!

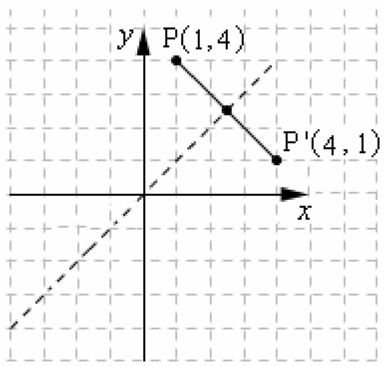
In una funzione, è essenziale soltanto il LEGAME fra variabile indipendente e dipendente, non hanno importanza i NOMI coi quali le due variabili sono indicate!
Ad esempio, le uguaglianze $x = \sqrt[3]{y-1}$, $y = \sqrt[3]{x-1}$, $z = \sqrt[3]{t-1}$ ecc. ecc. ...
DEFINISCONO TUTTE LA STESSA FUNZIONE !!!

Pertanto, dopo esser partiti dall'uguaglianza $y = f(x)$ e averla "invertita",
isolando x a primo membro e ricavando così l'equazione della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$,
se lo riteniamo opportuno (a volte la convenienza c'è, altre volte no)
possiamo *scambiare i nomi delle due variabili*
riscrivendo la stessa funzione inversa sotto la forma equivalente $y = f^{-1}(x)$.

Se la funzione inversa f^{-1} è stata scritta sotto la forma $y = f^{-1}(x)$,
allora, rappresentandola sullo stesso riferimento cartesiano nel quale
avevamo tracciato il grafico della funzione diretta $y = f(x)$,
potremo notare una cosa interessante e curiosa:

i due grafici, quello della funzione diretta f
e quello dell'inversa f^{-1} "scritta a variabili scambiate",
sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante !!!





Ciò è dovuto al fatto che un certo punto (a, b) appartiene al grafico della $y = f^{-1}(x)$
se e solo se la coppia (a, b) è tale che $b = f^{-1}(a)$;
ma ciò avviene se e solo se $a = f(b)$ e perciò
se e solo se il punto (b, a) appartiene al grafico della $y = f(x)$.
Pertanto i singoli punti della curva grafico di $y = f^{-1}(x)$ si possono ottenere partendo
da ciascun punto del grafico della $y = f(x)$, e scambiandone le coordinate; il che equivale
(vedi la figura a destra) a simmetrizzare quel punto rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Naturalmente, una funzione può essere invertita solo se è iniettiva
(= a valori diversi di x, corrispondono sempre valori diversi di y =
= non c'è nessun valore di y che abbia più di una controimmagine =
= non c'è nessuna retta parallela all'asse delle x, che intersechi il grafico in più di un punto).

Spesso una funzione $f(x)$ non è iniettiva considerandola su tutto il suo dominio,
ma è "iniettiva su di un intervallo" (vedi, per gli intervalli, pagina 127);
allora, si finisce per invertirla soltanto su tale intervallo.

Es.: $y = f(x) = \dfrac{6}{1+x^2}$ non è iniettiva sul suo dominio $\mathbb{R}$ (basta osservare che a due valori di x opposti

corrisponde lo stesso valore di y); ma lo è su $\left[0,+\infty\right)$. Si può perciò invertire su $[0,+\infty)$ ottenendo:

$$y=\frac{6}{1+x^2}\ (x\ge 0);\quad \frac{1+x^2}{6}=\frac{1}{y};\quad 1+x^2=\frac{6}{y};\quad x^2=\frac{6}{y}-1;\quad x^2=\frac{6-y}{y};\quad x=\sqrt{\frac{6-y}{y}}$$

non cè il ± davanti alla radice proprio per la condizione $x \ge 0$

NOTA:
se una funzione è strettamente monotòna (= strettamente crescente, oppure strettamente decrescente)
su tutto un intervallo, allora è iniettiva (e quindi invertibile) su quell'intervallo.

Le funzioni strettamente crescenti (rispettivamente: decrescenti)
sono quelle che presentano un grafico "in salita" (rispettivamente: "in discesa"),
ossia un grafico che, quando lo si guarda da sinistra verso destra,
"va sempre verso l'alto" (o, rispettivamente, "verso il basso"),
come illustrato dalle definizioni e dalle figure nel riquadro della pagina successiva.

FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI (= MONOTÒNE) SU DI UN INTERVALLO

Sia f una funzione reale di variabile reale (vale a dire, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$);
indichiamone il dominio con D.
Sia poi I un intervallo o comunque un insieme, incluso nel dominio della funzione: $\mathrm{I}\subseteq \mathrm{D}$.
Si pongono allora le seguenti definizioni:

f *strettamente crescente su* I $\xleftrightarrow{def.}$ $\forall x_1,\, x_2\in \mathrm{I},\quad x_1<x_2\to f(x_1)<f(x_2)$

f *strettamente decrescente su* I $\xleftrightarrow{def.}$ $\forall x_1,\, x_2\in \mathrm{I},\quad x_1<x_2\to f(x_1)>f(x_2)$

f *crescente in senso lato* (= *non decrescente*) *su* I $\xleftrightarrow{def.}$ $\forall x_1,\, x_2\in \mathrm{I},\quad x_1<x_2\to f(x_1)\le f(x_2)$

f *decrescente in senso lato* (= *non crescente*) *su* I $\xleftrightarrow{def.}$ $\forall x_1,\, x_2\in \mathrm{I},\quad x_1<x_2\to f(x_1)\ge f(x_2)$

f strettamente crescente	f strettamente decrescente	f crescente in senso lato	f decrescente in senso lato

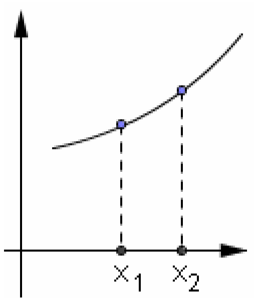
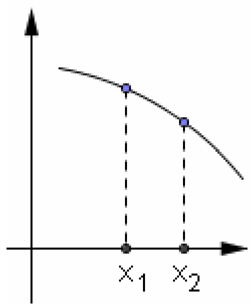
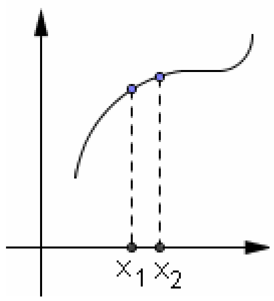
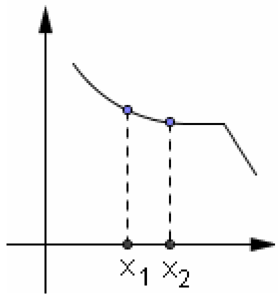

			

grafico saliente	grafico discendente	grafico saliente con eventuali tratti orizzontali	grafico discendente con eventuali tratti orizzontali

OSSERVAZIONI

Le funzioni aventi carattere crescente o decrescente su di un intervallo
si dicono “**monotòne**” (osserva che l’accento è sull’ultima “o”) su quell’intervallo.

Se si trova scritto solamente “crescente”, o “decrescente”, o “monotòna”, senza altra specificazione,
allora di norma si deve intendere “in senso STRETTO”.

**Una funzione, che sia strettamente monotòna su di un intervallo,
è certamente iniettiva (e, quindi, invertibile) su quell’intervallo**
(iniettiva = valori della variabile indipendente distinti hanno sempre immagini distinte).

Si può anche dire:
“condizione sufficiente (sebbene non necessaria)
affinché una funzione sia iniettiva su di un intervallo,
è che sia ivi monotòna in senso stretto”.

ESERCIZI (risposte a pag. 126)

Per ciascuna delle funzioni 1) … 8) :

a) ricava l’espressione della funzione inversa $x=f^{-1}(y)$
b) scambia i nomi delle variabili pervenendo alla forma equivalente $y=f^{-1}(x)$
c) servendoti di GeoGebra, rappresenta f ed f^{-1} su di uno stesso riferimento cartesiano, per constatare la simmetria delle due curve rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

1) $y=f(x)=x+2$
2) $y=f(x)=2x-3$
3) $y=f(x)=x^2\ su\ [0,+\infty)$
4) $y=f(x)=x^2-2x\ su\ [1,+\infty)$
5) $y=f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$
6) $y=f(x)=\dfrac{x^2}{2x+1}\ su\ [0,+\infty)$
7) $y=f(x)=\sqrt[3]{x}+1$
8) $y=f(x)=\sqrt{x}+1$

13. COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Quando abbiamo considerato, alle pagine 114 … 117, i grafici di $y = f(x)+2$, $y = f(2x)$, $y=\sqrt{f(x)}$ … abbiamo trafficato con funzioni, frutto della "composizione" di altre funzioni.

Per "**composizione**" (si dice anche "prodotto") di due funzioni, si intende la loro "**applicazione successiva**".

Vediamo un esempio.

La funzione "TRIPLO" prende un numero e me lo triplica;
la funzione "QUADRATO" prende un numero e me lo eleva al quadrato.

Se parto da un numero x e applico successivamente prima la funzione "TRIPLO" poi, *al numero ottenuto*, la funzione "QUADRATO", così facendo ho "composto" le due funzioni considerate.

$$x \xrightarrow{3(\bullet)} 3x \xrightarrow{(\bullet)^2} (3x)^2 = 9x^2$$

Osserviamo subito che **la composizione di due funzioni non è commutativa**: se, ad esempio, a partire dal numero x, applicassi prima la funzione "QUADRATO" e poi la funzione "TRIPLO", otterrei:

$$x \xrightarrow{(\bullet)^2} x^2 \xrightarrow{3(\bullet)} 3x^2$$

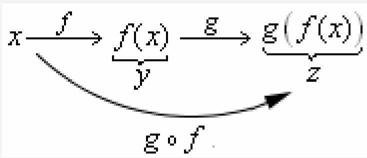
che è un risultato diverso dal precedente. In generale:

se ho una funzione $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ e una seconda funzione $g: \mathrm{B} \to \mathrm{C}$
posso, preso un oggetto (NOTA) $x \in \mathrm{A}$, applicargli dapprima la funzione f, ottenendo l'oggetto $f(x) \in \mathrm{B}$, poi a questo oggetto $f(x)$ applicare la funzione g, pervenendo all'oggetto definitivo $g\left(f(x)\right)$

$$f: \mathrm{A} \to \mathrm{B} \qquad g: \mathrm{B} \to \mathrm{C} \qquad x \xrightarrow{f} \underbrace{f(x)}_{y} \xrightarrow{g} \underbrace{g\left(f(x)\right)}_{z}$$

la funzione composta $g \circ f$ è quella che fa passare direttamente da x a z

La funzione composta, quella che fa saltare direttamente da x a $z = g\left(f(x)\right)$, viene di solito indicata col simbolo $g \circ f$:
$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$



$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)}$$

E' molto importante osservare che viene scritta per prima la funzione che viene applicata per ultima.

NOTA - Usiamo qui la parola "oggetto" anziché "numero" per sottolineare che questo discorso si può riferire non solo alle funzioni numeriche, ma più in generale a *tutte* le funzioni.

- Esempio: $f: x \to x-1; \quad g: x \to x^3$
  - Se applico successivamente prima la f poi la g, ottengo: $x \xrightarrow{f} x-1 \xrightarrow{g} (x-1)^3$
    La funzione composta $g \circ f$ prende dunque "in input" x e restituisce "in output" il numero $(x-1)^3$; vale a dire, $g \circ f$ è la funzione tale che $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = (x-1)^3$
  - Se applico successivamente prima la g poi la f, ottengo: $x \xrightarrow{g} x^3 \xrightarrow{f} x^3-1$
    La funzione composta $f \circ g$ prende dunque "in input" x e restituisce "in output" il numero x^3-1; vale a dire, $f \circ g$ è la funzione tale che $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = x^3-1$

- Altro esempio: $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} \qquad g(x) = 3x \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$

$$\left(g \circ f\right)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 3 \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x+3}{x+2} \quad \text{mentre} \quad \left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(3x\right) = \frac{3x+1}{3x+2}$$

OSSERVAZIONE:
componendo una funzione f con la sua inversa f^{-1}, si ottiene la cosiddetta "funzione identica" $i(x) = x$.

ESERCIZI (risposte a pag. 127)

1) $f(x) = 3x \qquad g(x) = x+2 \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
2) $f(x) = x-1 \qquad g(x) = \dfrac{1}{x} \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
3) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = x-1 \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
4) $f(x) = x^3 \qquad g(x) = x^2 \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
5) $f(x) = x^3 + x \qquad g(x) = x^2 + x \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
6) $f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad g(x) = x+3 \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$

14. DETERMINAZIONE DEL DOMINIO E DEL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE

(NOTA: questo paragrafo fa parte del capitolo su "grafici e risoluzioni grafiche" perché ne costituisce un naturale completamento, e tuttavia in esso compaiono semplici DISEQUAZIONI e SISTEMI DI DISEQUAZIONI, e vi si parla di "INTERVALLI" … Il discorso dovrebbe essere comprensibile perché le situazioni proposte sono elementari, in ogni caso tali argomenti sono trattati estensivamente in un capitolo successivo. Riguardo agli "intervalli", per comodità del lettore ne riportiamo una breve descrizione a pagina 127).

DOMINIO

Il dominio di una funzione reale di variabile reale, individuata da un'equazione della forma

$y = espressione\ contenente\ x$,

si determina andando a vedere per quali valori di *x* sono effettuabili i calcoli che permettono di ricavare la *y* corrispondente.

Ad esempio:

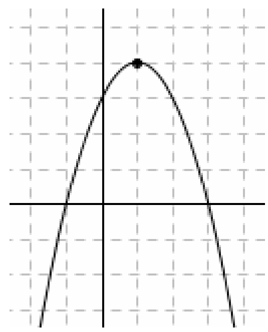
- se x compare a denominatore, dobbiamo tener presente che la y sarà calcolabile solo a condizione che il denominatore stesso sia diverso da zero;
- se x compare sotto radice quadrata, affinché la y sia calcolabile il radicando dovrà essere ≥ 0

Funzione	$y = \dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}$	$y = \sqrt{10-x}$	$\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{x-2}}{x-5}$	$\sqrt[3]{x-4}$
Condizione per la calcolabilità della y	$x \neq 2 \wedge x \neq 3$	$10-x \geq 0$ cioè $x \leq 10$	$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$ cioè $x \geq 2$ ma $x \neq 5$	Nessuna condizione
Dominio	$\mathbb{R} - \{2, 3\}$	$(-\infty, 10]$	$[2, +\infty) - \{5\}$	$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

CODOMINIO

Supponiamo ora che sia assegnata una funzione e che sia richiesto di determinarne il **codominio** (**= l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla variabile dipendente**).
Spesso si può rispondere ad un quesito di questo tipo semplicemente tracciando un grafico della funzione in esame.

ESEMPIO 1: trovare il codominio della funzione $y = -x^2 + 2x + 3$.



Poiché sappiamo (essendo il secondo membro un'espressione di II° grado) che il grafico è una parabola, potremmo disegnare questa parabola, tenendo conto che:

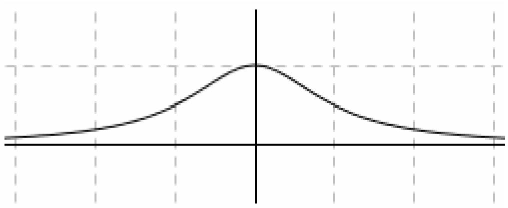
- $x_V = -\dfrac{b}{2a} = 1 \rightarrow \quad y_V = y(1) = -1+2+3 = 4$
- la concavità è rivolta verso il basso (essendo <0 il coefficiente di x^2)

e andare a vedere quali sono i valori effettivamente assunti dalla y: si tratta dei valori $y \leq 4$, ossia il codominio risulta essere l'intervallo $C = (-\infty, 4]$

ESEMPIO 2: determinare il codominio della funzione $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Facile tracciare il grafico di questa funzione:

- il dominio è tutto $\mathbb{R}$ (infatti il denominatore non si può mai annullare);
- con $x = 0$ abbiamo $y = 1$;
- per valori opposti di x abbiamo lo stesso valore di y, cioè, per ogni x, $f(-x) = f(x)$, ad es. $f(-2) = f(2)\ldots$ quindi il grafico sarà simmetrico rispetto all'asse verticale;
- quando x, a partire da 0, cresce, la quantità $1+x^2$ cresce e quindi il suo reciproco decresce, schiacciandosi verso lo zero per valori positivi.



Il grafico è dunque quello rappresentato in figura, da cui emerge che l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla y, ossia il codominio, è l'intervallo $(0, 1]$

Un altro metodo per determinare il codominio
è basato su passaggi algebrici anziché sul tracciamento di grafici.

Il codominio è l'insieme dei valori di y che hanno almeno una controimmagine;
quindi prenderemo l'equazione che definisce la funzione
e cercheremo di risolverla rispetto a x,
per trovare la legge che permetta di ritornare da y a x …
insomma, proveremo ad INVERTIRE la funzione …
fatti i vari passaggi, ad un certo punto risulterà chiaro
quali sono i valori di y per i quali si può risalire a x,
insomma: ad un certo punto si capirà quali sono i valori di y che hanno almeno una controimmagine.
L'insieme di questi valori di y costituirà il codominio della funzione.

Beninteso: se troveremo che qualche valore di y ha PIU' DI UNA controimmagine, allora ne dedurremo che la funzione non è invertibile non essendo iniettiva (perlomeno, sul dominio considerato);
ma il nostro scopo non è qui di stabilire se la funzione sia invertibile o no,
il nostro scopo è di determinare il codominio!

Vediamo qualche esempio.

- Individuare il codominio della funzione $y=\frac{x-2}{x-7}$.

  $$y=\frac{x-2}{x-7} \;\to\; xy-7y=x-2 \;\; (x\neq 7) \;\to\; xy-x=7y-2; \;\; \boxed{x(y-1)=7y-2}$$

  Ora, quest'ultima equazione si può risolvere rispetto a x solo per $\boxed{y\neq 1}$; in tal caso, si ottiene

  $$x=\frac{7y-2}{y-1}$$

  Abbiamo stabilito così che il codominio della funzione (= l'insieme dei valori effettivamente assunti da y = l'insieme dei valori di y che hanno almeno una controimmagine) è $\boxed{\mathbb{R}-\{1\}}$

- Altro esempio (già trattato graficamente): determinare il codominio della funzione $y=\frac{1}{1+x^2}$

  $$y=\frac{1}{1+x^2} \;\to\; 1+x^2=\frac{1}{y} \;\; (y\neq 0) \;\to\; x^2=\frac{1}{y}-1; \;\; \boxed{x^2=\frac{1-y}{y}}$$

  A questo punto, possiamo risalire a x soltanto se il 2° membro è maggiore o uguale a 0, ossia $\boxed{\frac{1-y}{y}\geq 0}$.

  Risolvendo la disequazione, si ottiene $\boxed{0<y\leq 1}$:
  perciò sono dotati di controimmagine tutti e soli i valori di y tali che $0<y\leq 1$,
  e ciò significa che il codominio della nostra funzione è l'intervallo $\boxed{C=(0,1]}$.

  Osserviamo che ogni valore di y appartenente a C ha DUE controimmagini: $x^2=\frac{1-y}{y} \to x=\pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$

  Questo ci dice che la funzione considerata non è iniettiva, quindi non è invertibile …
  … Ma a noi non interessava la questione se la funzione in esame fosse o non fosse invertibile:
  ci interessava soltanto trovare i valori di y che avevano almeno una controimmagine,
  e ormai abbiamo riconosciuto trattarsi dell'intervallo $C=(0,1]$.

  Se poi fossimo interessati anche all'*inversione* della funzione,
  potremmo dire che è invertibile soltanto qualora si vada a *restringere l'insieme di partenza*
  ad un intervallo nel quale ogni y del codominio abbia UNA SOLA controimmagine.
  Ad esempio, se imponiamo a x di essere positiva, ossia se assumiamo come insieme di partenza soltanto l'intervallo $[0,+\infty)$ anziché tutto $\mathbb{R}$, il doppio segno davanti alla radice se ne andrà, e avremo

  $$x\in[0,+\infty) \quad x^2=\frac{1-y}{y} \;\to\; x=\sqrt{\frac{1-y}{y}}\;.$$

  Ogni y del codominio $C=(0,1]$ avrà così UNA SOLA controimmagine, e la funzione risulterà invertibile.

  Perciò possiamo dire che la funzione $y=\frac{1}{1+x^2}$
  stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $[0,+\infty)$ e l'insieme $(0,1]$.

ESCERCIZIO (risposte a pag. 127)

Determina sia il dominio che il codominio delle funzioni che seguono:

a) $y=x+7$ b) $y=x^2$ c) $y=x^3$ d) $y=\sqrt{x}$ e) $y=\sqrt[3]{x}$ f) $y=x^2-x$

g) $y=(x-2)^4+3$ h) $y=\dfrac{1}{x}$ i) $y=\dfrac{1}{x-3}$ j) $y=\dfrac{1}{x^2}$ k) $y=x^4+x^2+1$

l) $y=-4x^2+16x$. Come va ristretto l'insieme di partenza, se si vuole che la funzione sia invertibile?

m) $y=\dfrac{x+4}{x}$ n) $y=\dfrac{x+2}{2x+1}$ o) $y=x^4-2x^2$

15. RISPOSTE AGLI ESERCIZI DELL'ULTIMA PARTE

RISPOSTE agli esercizi di pag. 122

1) $y=f(x)=x+2 \quad x=y-2=f^{-1}(y) \quad \boxed{y=x-2=f^{-1}(x)}$

2) $y=f(x)=2x-3 \quad x=\dfrac{y+3}{2}=f^{-1}(y) \quad \boxed{y=\dfrac{x+3}{2}=f^{-1}(x)}$

3) $y=f(x)=x^2$ *su* $[0,+\infty) \quad x=\sqrt{y}=f^{-1}(y) \quad \left[x=\sqrt{y}\text{ e NON }x=\pm\sqrt{y}\ \ \begin{matrix}\text{perché } x\in[0,+\infty)\\ \text{quindi } x\ge 0\end{matrix}\right] \quad \boxed{y=\sqrt{x}=f^{-1}(x)}$

4) $y=f(x)=x^2-2x$ *su* $[1,+\infty) \quad x^2-2x-y=0 \quad x=1\pm\sqrt{1+y}$ *da cui* $x=1+\sqrt{1+y}$ *perché deve essere* $x\ge 1$

$x=1+\sqrt{1+y}=f^{-1}(y) \quad \boxed{y=1+\sqrt{1+x}=f^{-1}(x)}$

5) $y=f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1} \quad xy-y=2x+1 \quad xy-2x=y+1 \quad (y-2)x=y+1$

$x=\dfrac{y+1}{y-2}=f^{-1}(y) \quad \begin{matrix}y\ne 2\text{: ma si potrebbe dimostrare che}\\ \text{non c'è nessun valore di } x \text{ per cui}\\ \text{la } y \text{ possa assumere il valore } 2\end{matrix} \quad \boxed{y=\dfrac{x+1}{x-2}=f^{-1}(x)}$

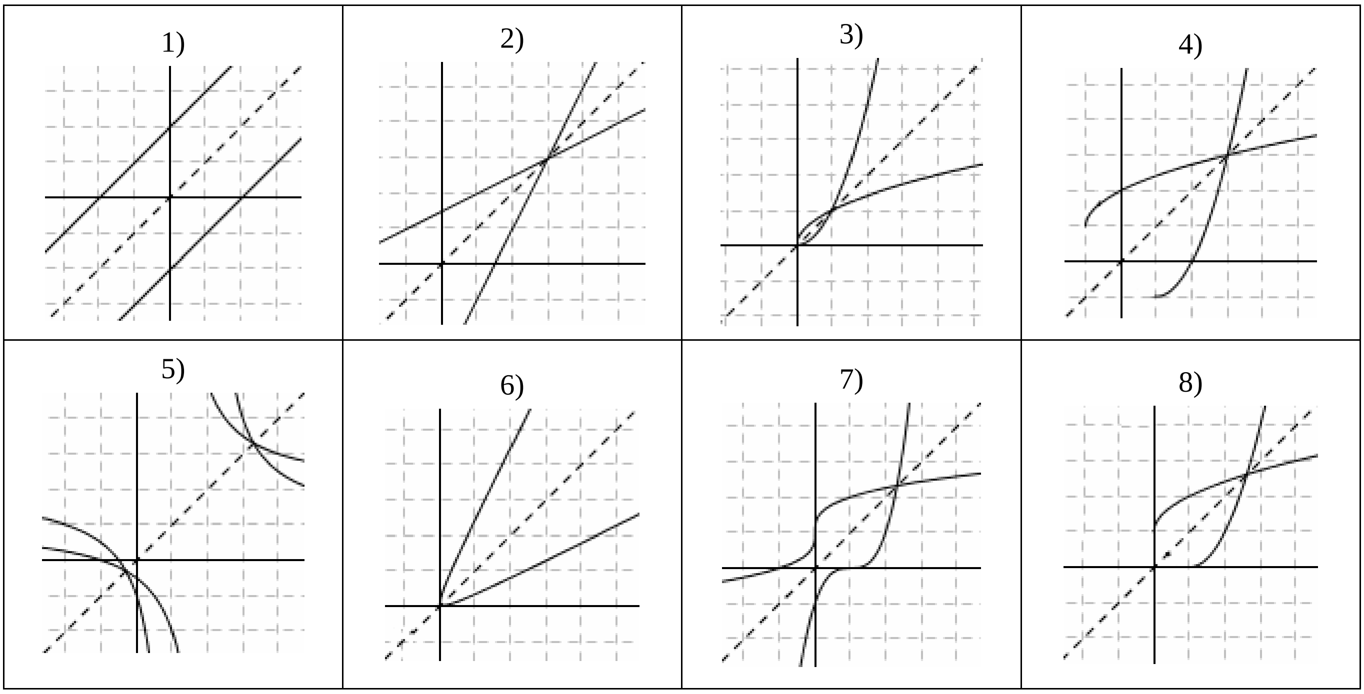
6) $y=f(x)=\dfrac{x^2}{2x+1}$ *su* $[0,+\infty)$ (*) $\quad 2xy+y=x^2 \quad x^2-2xy-y=0 \quad x=y\pm\sqrt{y^2+y}$ *da cui* $x=y+\sqrt{y^2+y}$ [*condiz.* $x\ge 0$]

(*) *Osserviamo che essendo* $x\ge 0$ *anche* $y\ge 0 \quad x=y+\sqrt{y^2+y}=f^{-1}(y) \quad \boxed{y=x+\sqrt{x^2+x}=f^{-1}(x)}$ [*con* $x\ge 0$]

7) $y=f(x)=\sqrt[3]{x}+1 \quad \sqrt[3]{x}=y-1 \quad x=(y-1)^3=f^{-1}(y) \quad \boxed{y=(x-1)^3=f^{-1}(x)}$

8) $y=f(x)=\sqrt{x}+1 \quad \sqrt{x}=y-1\ (x\ge 0,\ y\ge 1) \quad x=(y-1)^2=f^{-1}(y) \quad \boxed{y=(x-1)^2=f^{-1}(x)}$ $[x\ge 1]$

Ecco qui sotto i grafici relativi agli esercizi precedenti:



RISPOSTE agli esercizi di pag. 123

1) $f(x)=3x$ $\quad g(x)=x+2$ $\quad (g\circ f)(x)=3x+2$ $\quad (f\circ g)(x)=3(x+2)$

2) $f(x)=x-1$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad (g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\quad (f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x}-1$

3) $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=x-1$ $\quad (g\circ f)(x)=x^2-1$ $\quad (f\circ g)(x)=(x-1)^2$

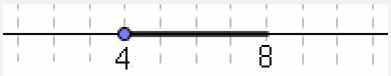
4) $f(x)=x^3$ $\quad g(x)=x^2$ $\quad (g\circ f)(x)=x^6$ $\quad (f\circ g)(x)=x^6$

5) $f(x)=x^3+x$ $\quad g(x)=x^2+x$ $\quad (g\circ f)(x)=x^6+2x^4+x^3+x^2+x$ $\quad (f\circ g)(x)=x^6+3x^5+3x^4+x^3+x^2+x$

6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad g(x)=x+3$ $\quad (g\circ f)(x)=\sqrt[3]{x}+3$ $\quad (f\circ g)(x)=\sqrt[3]{x+3}$

INTERVALLI

Si chiamano "**intervalli**" **particolari insiemi numerici**. Un intervallo è l'insieme di tutti i numeri reali compresi fra il "primo estremo" e il "secondo estremo" dell'intervallo stesso.

Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$: 

- contiene il 4 (la parentesi quadra sta a indicare che quell'estremo è compreso);
- contiene TUTTI i numeri, **NON SOLO** interi **MA ANCHE** "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- NON contiene l'8 (la parentesi tonda sta a indicare che quell'estremo è escluso).

Un intervallo può anche essere "illimitato", se uno dei suoi estremi è "$+$infinito" ($+\infty$) o "$-$infinito" ($-\infty$) … e in questo caso corrisponde, sulla *number line*, a una semiretta anziché ad un segmento.
Ad esempio, $(-\infty, 5)$ è l'insieme di tutti i numeri reali relativi che, sulla *number line*, si trovano a sinistra del 5 (il 5 non fa parte dell'intervallo, per via della tonda).

$(-\infty, 0)$ è l'insieme dei numeri reali <0 ("strettamente negativi", negativi *in senso stretto*)
$(-\infty, 0]$ è l'insieme dei numeri reali ≤ 0 (negativi o nulli, negativi *in senso lato*)
$(0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali >0 ("strettamente positivi", positivi *in senso stretto*)
$[0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali ≥ 0 (positivi o nulli, positivi *in senso lato*)
$(-\infty, +\infty)=\mathbb{R}$ (questo intervallo riempie tutta la *number line*)

RISPOSTE all'esercizio di pag. 126

a) D = $\mathbb{R}$; C = $\mathbb{R}$ $\quad$ b) D = $\mathbb{R}$; C = $[0,+\infty)$ $\quad$ c) D = $\mathbb{R}$; C = $\mathbb{R}$ $\quad$ d) D = $[0,+\infty)$; C = $[0,+\infty)$

e) D = $\mathbb{R}$; C = $\mathbb{R}$ $\quad$ f) D = $\mathbb{R}$; C = $\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ $\quad$ g) D = $\mathbb{R}$; C = $[3,+\infty)$ $\quad$ h) D = $\mathbb{R}-\{0\}$; C = $\mathbb{R}-\{0\}$

i) D = $\mathbb{R}-\{3\}$; C = $\mathbb{R}-\{0\}$ $\quad$ j) D = $\mathbb{R}-\{0\}$; C = $(0,+\infty)$ $\quad$ k) D = $\mathbb{R}$; C = $[1,+\infty)$

l) D = $\mathbb{R}$; C = $(-\infty, 16]$. Deve diventare l'intervallo $[2,+\infty)$ o, in alternativa, l'intervallo $(-\infty, 2]$

m) D = $\mathbb{R}-\{0\}$; C = $\mathbb{R}-\{1\}$ $\quad$ n) D = $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$; C = $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad$ o) D = $\mathbb{R}$; C = $[-1,+\infty)$

Da www.purplemath.com:

Finding the Inverse of a Function

Find the inverse of $y = 3x - 2$

Here's how the process works:

Here's my original function:	$y=3x-2$
Now I'll try to solve for "x =":	$y+2=3x$ $x=\dfrac{y+2}{3}$
Once I have "x =", I'll switch x and y; the "y =" is the inverse.	$y=\dfrac{x+2}{3}$

Then **the inverse is** $y=\dfrac{x+2}{3}$

Composition of Functions

Given $f(x) = 2x + 3$ and $g(x) = -x^2 + 5$, find $(f \text{ o } g)(x)$

In this case, I am not trying to find a certain numerical value.
Instead, I am trying to find the formula that results from plugging the formula for $g(x)$ into the formula for $f(x)$.
I will write the formulas at each step, using parentheses to indicate where the inputs should go:

$(f \text{ o } g)(x) = f(g(x))$
$= f(-x^2 + 5)$
$= 2(\qquad) + 3$
... setting up to insert the input formula
$= 2(-x^2 + 5) + 3$
$= -2x^2 + 10 + 3$
$= \mathbf{-2x^2 + 13}$