

$$t_6 : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$$

a)

1)

Quanto vale la “costante di affinità” $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$?

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

2)

L'affinità in esame è diretta o è inversa?

E' inversa ($D < 0$)

3)

E' una isometria?

No.

4)

E' un “caso particolare” fra quelli del paragrafo 16

(traslazione, simmetria rispetto a un punto o a una parallela agli assi, omotetia ...)?

No.

b)

1)

Determina, tramite passaggi algebrici, le equazioni dell'affinità inversa.

L'inversa di $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$ si può ricavare coi passaggi seguenti:

$$\begin{cases} x + y = x' & (1) + (2) \\ 2x - y = y' + 1 & (1) \end{cases} \begin{cases} 3x = x' + y' + 1; & \boxed{x = \frac{x' + y' + 1}{3}} \\ x + y = x'; & \boxed{y = x' - x = x' - \frac{x' + y' + 1}{3} = \frac{3x' - x' - y' - 1}{3} = \frac{2x' - y' - 1}{3}} \end{cases}$$

Scambiando la coppia (x, y) con la (x', y') , si può scrivere come

$$\boxed{\begin{cases} x' = \frac{x + y + 1}{3} \\ y' = \frac{2x - y - 1}{3} \end{cases}}$$

2)

L'affinità in esame è involutoria?

No

3)

Nel caso l'affinità considerata fosse “particolare”, abbi cura di controllare se è confermato che

- l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
- l'inversa di un'omotetia di rapporto k è un'omotetia con lo stesso centro, e rapporto $1/k$;
- l'inversa di una simmetria (centrale o assiale) è la simmetria stessa

Non rientra fra i casi particolari del paragrafo 16.

c)

Determina l'immagine e poi la controimmagine:

1) della retta $r: y = 2x + 1$

Curva assegnata:

$$y = 2x + 1$$

Equazioni trasformazione inversa:

$$\begin{cases} x' = \frac{x + y + 1}{3} \\ y' = \frac{2x - y - 1}{3} \end{cases}$$

Equazione curva immagine:

$$\frac{2x - y - 1}{3} = 2 \cdot \frac{x + y + 1}{3} + 1$$

$$\cancel{2x} - y - 1 = \cancel{2x} + 2y + 2 + 3$$

$$-3y = 6$$

$$\boxed{y = -2}$$

Equazioni trasformazione diretta:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$$

Equazione curva controimmagine:

$$2x - y - 1 = 2 \cdot (x + y) + 1$$

$$\cancel{2x} - y - 1 = \cancel{2x} + 2y + 1$$

$$-3y = 2$$

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}}$$

2) della circonferenza $\gamma: x^2 + y^2 = 1$

Curva assegnata:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Equazioni trasformazione inversa:

$$\begin{cases} x' = \frac{x + y + 1}{3} \\ y' = \frac{2x - y - 1}{3} \end{cases}$$

Equazione curva immagine:

$$\left(\frac{x + y + 1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x - y - 1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y}{9} + \frac{4x^2 + y^2 + 1 - 4xy - 4x + 2y}{9} = 1$$

$$x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y + 4x^2 + y^2 + 1 - 4xy - 4x + 2y = 9$$

$$\boxed{5x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 4y - 7 = 0}$$

Equazioni trasformazione diretta:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$$

Equazione curva controimmagine:

$$(x + y)^2 + (2x - y - 1)^2 = 1$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 2y = 1$$

$$\boxed{5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 2y = 0}$$