

## 4. LA PROPRIETA' INVARIANTIVA DEI RADICALI (esercizi a pag. 19)

$$(6) \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{PROPRIETA' INVARIANTIVA}$$

ossia:

- se il radicando è una potenza, il cui esponente è semplificabile con l'indice, è possibile effettuare la semplificazione: il valore del radicale non cambierà;
- e viceversa, leggendo da destra verso sinistra:
  - il valore di un radicale non cambia se si moltiplicano sia l'indice che l'esponente del radicando per uno stesso intero positivo  $k$ ;
  - o, in altre parole,
  - se si moltiplica l'indice per un intero positivo  $k$ , e contemporaneamente si eleva il radicando all'esponente  $k$ .

*Dimostrazione* della (6)

Il ragionamento dimostrativo si basa su di una proprietà dei numeri reali della quale ci serviremo in seguito anche per altre dimostrazioni, e che quindi appare opportuno denominare con un termine convenzionale. Chiameremo questa proprietà "principio E" ("E" come "Elevamento a potenza").

### Il "Principio E"

**Se elevando ad uno stesso esponente  $p \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  due numeri reali POSITIVI O NULLI, si ottengono risultati uguali, allora si era partiti da numeri uguali**

$$x^p = y^p \Rightarrow x = y \quad (x, y \text{ numeri reali non negativi, } p \text{ numero naturale non nullo})$$

Prendiamo dunque separatamente il primo e il secondo membro della uguaglianza (6) che vogliamo dimostrare, ed eleviamoli entrambi all'esponente  $nk$ .

Se così facendo otterremo risultati uguali,

ne dedurremo che eravamo partiti da numeri uguali, cioè che la (6) è corretta.

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^{nk} \stackrel{\text{identità (4)}}{=} \boxed{a^{mk}}$$

Poiché, elevando il 1° e il 2° m. dell'uguaglianza (6) da dimostrare al medesimo esponente  $nk$ , si è ottenuto lo stesso risultato  $a^{mk}$ , resta stabilito, in virtù del "principio E", che la (6) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^k \stackrel{\text{identità (4)}}{=} \left(a^m\right)^k = \boxed{a^{mk}}$$

OK!!! In virtù del "principio E", la (6) è corretta.

Esempi:

$$\sqrt[12]{x^{15}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{15}}} = \sqrt[4]{x^5}; \quad \sqrt[4]{9} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{3^2}} = \sqrt{3}; \quad \sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{49} \quad (\text{NOTA 1}); \quad \sqrt{x+y} = \sqrt[6]{(x+y)^3}$$

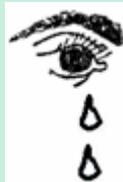
$$\sqrt[8]{9x^2y^4z^6} = \sqrt[4]{\sqrt[2]{(3xy^2z^3)^2}} = \sqrt[4]{3xy^2z^3} \quad \text{quindi, direttamente: } \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^2x^2y^4z^6}} = \sqrt[4]{3xy^2z^3} \quad (\text{NOTA 2})$$

$$\sqrt[6]{\frac{a^3b^6}{125}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{\left(\frac{ab^2}{5}\right)^2}} = \sqrt{\frac{ab^2}{5}} \quad \text{quindi, direttamente: } \sqrt[2]{\sqrt[3]{\frac{a^3b^6}{5^3}}} = \sqrt{\frac{ab^2}{5}} \quad (\text{NOTA 2})$$

NOTA 1 - L'applicazione della proprietà invariantiva "nel senso della moltiplicazione" si rende necessaria in determinate circostanze, ad esempio quando, per la moltiplicazione o divisione di due radicali, occorre preliminarmente portare i radicali in gioco allo stesso indice.

### ♥ NOTA 2 - ATTENZIONE BENE!

Semplificazioni indice-esponenti di questo tipo **si possono fare quando a radicando compaiono ESCLUSIVAMENTE moltiplicazioni e/o divisioni**, mentre sarebbero ERRORE GRAVE in presenza di addizioni e sottrazioni!



~~$\sqrt[3]{a^{10^2} + b^8}$~~   
**NO,  
PER  
CARITA' !!!**

Ad esempio,  
 $\sqrt[4]{3^4 + 4^4} =$   
 $= \sqrt[4]{337} = 4,28\dots$   
mentre  
 $\sqrt[2]{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$