

5. PRODOTTO E QUOZIENTE DI RADICALI (esercizi a pag. 19)

Valgono le uguaglianze:

$$(7) \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (8) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Esse possono essere lette così:

- (7) **il prodotto di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice, e per radicando il prodotto dei radicandi;**
 (8) **il quoziente di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice, e per radicando il quoziente dei radicandi.**

Leggendo la (7) e la (8) da destra verso sinistra, otteniamo

$$(7') \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (8') \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

ossia:

- (7') **la radice di un prodotto è uguale al prodotto delle radici dei singoli fattori;**
 (8') **la radice di un quoziente è uguale al quoziente delle radici del dividendo e del divisore.**

Dimostrazione di (7), (8), (7'), (8').

Basterà dimostrare, ovviamente, la (7) e la (8).

Dimostriamo la (7); la tecnica dimostrativa per la (8) è identica.

Dunque, consideriamo i due membri della (7) ed applichiamo il "principio E", utilizzando n come esponente a cui elevare ambo i membri:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \stackrel{\substack{\text{identità} \\ (4), \\ \text{due volte}}}{=} \boxed{ab}$$

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n \stackrel{\substack{\text{identità} \\ (4)}}{=} \boxed{ab}$$

Poiché, elevando il 1° e il 2° membro dell'uguaglianza (7) da dimostrare al medesimo esponente n , si è ottenuto lo stesso risultato ab , resta stabilito, in virtù del "principio E", che la (7) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Esempi: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$; $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^3} = x$; $\sqrt[4]{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}$; $\sqrt{xy} : \sqrt{y} = \sqrt{xy : y} = \sqrt{x}$

Se vogliamo moltiplicare o dividere due radicali con indici diversi, dovremo prima portarli allo stesso indice applicando la proprietà invariantiva.

Come indice comune converrà assumere il m.c.m. degli indici, detto "minimo comune indice".

Esempi:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{8 \cdot 9} = \sqrt[12]{72}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{a^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{a^2}} = \sqrt[6]{a}$$

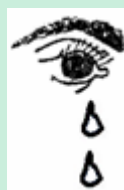
$$\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}} = \sqrt[4]{\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+2}} \cdot \frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)^{\cancel{2}}}} = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x+1}}$$

♥ **OCCHIO !!!**

Attento a non cadere in un "tipico" errore!

In generale, NON è vero che



$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

**NO,
PER
CARITA' !!!**

Ad esempio,

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{mentre } \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$