

6. TRASPORTO DI UN FATTORE DENTRO E FUORI DAL SEGNO DI RADICE

La catena $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ mostra che vale l'uguaglianza

(esercizi a pag. 21)

$$(9) \quad a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a, b \geq 0)$$

Un fattore POSITIVO, che moltiplica un radicale, può essere fatto FILTRARE SOTTO IL SEGNO DI RADICE, PURCHE' LO SI ELEVI ad un esponente uguale all'indice.

Esempi: $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$; $(a-b)\sqrt{a-b} = \sqrt{(a-b)^2(a-b)} = \sqrt{(a-b)^3}$

Sovente è invece utile, ai fini del calcolo, percorrere il CAMMINO INVERSO; ossia, ESTRARRE UN FATTORE da un radicale il cui radicando è un prodotto. Ciò è possibile solo se uno dei fattori del prodotto che sta a radicando è elevato ad un esponente maggiore o uguale all'indice della radice.

♥ A tale scopo (estrazione di un fattore dal segno di radice) non è necessario imparare regole particolari (NOTA); **basterà procedere "per tentativi"**, ponendosi sempre, a cose fatte, la seguente domanda: **"e se adesso riportassi dentro il fattore che ho estratto, ritroverei l'espressione di partenza?"** In caso di risposta affermativa, tutto è OK!

NOTA. La regola - non indispensabile, ripeto - direbbe che un fattore interno ad un radicale, e avente esponente non inferiore all'indice, può essere estratto dal segno di radice con esponente uguale al QUOZIENTE della *divisione intera* ESPONENTE:INDICE, e rimanere all'interno della radice con esponente uguale al RESTO della stessa divisione.

Es.: $\sqrt[3]{x^3 y} = x\sqrt[3]{y}$; $\sqrt[7]{a^{14} b} = a^2 \sqrt[7]{b}$; $\sqrt[5]{x^{23}} = x^4 \sqrt[5]{x^3}$; $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$ *PSST ... Guarda pure gli "esercizi svolti" di pag. 21!*

7. RADICE DI UN RADICALE (esercizi a pag. 21)

$$(10) \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

La radice di un radicale è un radicale che ha per radicando lo stesso radicando, e per indice il prodotto degli indici.

Dimostrazione di (10). Col "Principio E":

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} &= \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right]^k && \stackrel{\text{identità (4)}}{=} \left[\sqrt[k]{a}\right]^k && \stackrel{\text{identità (4)}}{=} a \\ \left(\sqrt[nk]{a}\right)^{nk} &= a && \stackrel{\text{identità (4)}}{=} \end{aligned}$$

Poiché, elevando il 1° e il 2° membro dell'uguaglianza (10) da dimostrare al medesimo esponente nk, si è ottenuto lo stesso risultato a, resta stabilito, per il "principio E", che la (10) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Esempi: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[12]{6}$; $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[8]{x}$; $\sqrt[3]{\sqrt[121]{a}} = \sqrt[6]{121} = \sqrt[3]{11^2} = \sqrt[3]{11}$

8. POTENZA DI UN RADICALE (esercizi a pag. 21)

$$(11) \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Per elevare a potenza un radicale, basta elevare a quell'esponente il radicando, mantenendo invariato l'indice. In altre parole: **un esponente esterno può essere fatto "filtrare sotto il simbolo di radice".**

Dim. di (11): lasciata al lettore. Col "Principio E", elevando allo stesso esponente n ambo i membri.

Esempi: $(\sqrt[7]{2})^3 = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$; $(\sqrt[15]{a})^6 = \sqrt[15]{a^6} = \sqrt[5]{a^2}$ (NOTA 1); $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$ (NOTA 2)

NOTA 1 - Si capisce allora che si può semplificare direttamente l'indice con l'esponente esterno,

facendo poi filtrare questo all'interno soltanto alla fine: $(\sqrt[15]{a})^6 = \sqrt[5]{a^2}$

NOTA 2 - Nell'eseguire $\sqrt{3^4}$ si può pensare all'applicazione diretta della definizione di radice quadrata (qual è quel numero che elevato al quadrato dà come risultato 3^4 ? Evidentemente, è 3^2);

oppure

a una semplificazione che fa diventare l'indice uguale a 1, quindi fa scomparire il radicale (per definizione, un radicale con indice 1 lascia invariato il radicando e pertanto ... è come se non ci fosse):

$$\sqrt{3^4} = \sqrt[1]{3^4} = \sqrt[1]{3^2} = 3^2$$