

12. RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

L'esperienza mostra che in parecchi casi (non sempre, ma con grande frequenza), quando in una frazione compare il **SEGNO DI RADICE a DENOMINATORE**, tale segno di radice **“dà fastidio”**: (esercizi a pag. 23)

- può essere scomodo ai fini della valutazione del valore numerico del risultato,
- o per le esigenze del calcolo letterale,
- oppure può influire negativamente sulla compattezza e/o eleganza dell'espressione.

E' spesso conveniente, dunque, **operare sulla frazione (senza alterarne, beninteso, il valore)**, in modo da **cacciar via il segno di radice dal denominatore**.

Tale procedimento prende il nome di **“razionalizzazione del denominatore”**.

Esso si effettua applicando la **PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI**, ossia **moltiplicando sia “sopra” che “sotto” per uno stesso numero, da scegliersi opportunamente** (= da scegliersi in modo tale che, una volta eseguite le moltiplicazioni, **il nuovo denominatore non contenga più il segno di radice**).

Due esempi:

$$\text{♪ } \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{♪ } \frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2}{3+\sqrt{7}} \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{3^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{9-7} = \frac{\cancel{2}(3-\sqrt{7})}{\cancel{2}} = 3-\sqrt{7}$$

Il fattore per cui moltiplicare ambo i termini della frazione, onde eliminare il segno di radice dal denominatore, prende il nome di **“fattore razionalizzante”**.

Passiamo ora in rassegna le casistiche più rilevanti di razionalizzazione.

$$\square \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{15}}{\cancel{\sqrt{15}}^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}; \quad \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{xy}}{3y}$$

$$\text{Regola 1: } \frac{1}{a\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{ab}$$

$$\square \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{\cancel{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\cancel{2}} = 2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}-3} \cdot \frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}+3} = \frac{2\sqrt{2}+3}{(2\sqrt{2})^2 - 3^2} = \frac{2\sqrt{2}+3}{8-9} = \frac{2\sqrt{2}+3}{-1} = -(2\sqrt{2}+3)$$

$$\text{Regola 2: } \frac{1}{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}} \cdot \frac{a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}}{a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}} = \frac{a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}}{a^2b - c^2d}$$

$$\square \frac{1}{\sqrt[4]{a}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \cdot \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}; \quad \frac{xy}{3\sqrt[5]{x^4y^2t}} = \frac{xy}{3\sqrt[5]{x^4y^2t}} \cdot \frac{\sqrt[5]{xy^3t^4}}{\sqrt[5]{xy^3t^4}} = \frac{xy\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3\sqrt[5]{x^5y^5t^5}} = \frac{\cancel{xy}\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3\cancel{xy}t} = \frac{\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3t}$$

Regola 3:

$$\frac{1}{x\sqrt[n]{a^m b^p c^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m} b^{n-p} c^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-m} b^{n-p} c^{n-k}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m} b^{n-p} c^{n-k}}}{x\sqrt[n]{a^m b^p c^k}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m} b^{n-p} c^{n-k}}}{x \cdot abc} \quad (m, p, k < n)$$

NOTA

NOTA: se così non fosse, si estrarrebbero innanzitutto uno o più fattori e ci si ricondurrebbe a questo caso

$$\square \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\cancel{2} + \cancel{3} + 2\sqrt{6} \cancel{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

L'ultimo esempio illustra la

Regola 4:

Quando a denominatore abbiamo la somma algebrica di tre termini con radicali quadratici, prima di tutto si raggruppano due fra i termini entro parentesi, poi si moltiplica per l'espressione che permette di ottenere il prodotto notevole

$$(a+b)(a-b),$$

tenendo presente che in questo caso occorrono

DUE FASI SUCCESSIVE per completare la razionalizzazione.

Vediamo un'altra situazione analoga:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}-(\sqrt{5}-1)} \cdot \frac{2\sqrt{2}+(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}+(\sqrt{5}-1)} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5}-1)^2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{8-(5-2\sqrt{5}+1)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{8-5+2\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{2+2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{2(1+\sqrt{5})} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1)(1-\sqrt{5})}{2(1-5)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1-2\sqrt{10}-5+\sqrt{5}}{2 \cdot (-4)} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-6}{-8} = -\frac{\cancel{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}-3)}{\cancel{8}_4} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$$

- $\square \frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}$ Questo caso, bizzarro ma rilevante, si affronta nel modo seguente:
 si "tratta" l'espressione $(\sqrt[3]{5}+7)$ come un binomio $(a+b)$
 che verrà moltiplicato per un'opportuna espressione,
 in modo da ottenere come risultato a^3+b^3 e mandar via così le radici cubiche.
 Ma questa espressione è il trinomio (a^2-ab+b^2) !
 Infatti è noto che $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
 Dunque, nel nostro esempio,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}+7} \cdot \frac{(\sqrt[3]{5})^2 - 7\sqrt[3]{5} + 49}{(\sqrt[3]{5})^2 - 7\sqrt[3]{5} + 49} = \frac{(\sqrt[3]{5})^2 - 7\sqrt[3]{5} + 49}{(\sqrt[3]{5})^3 + 7^3} = \frac{\sqrt[3]{25} - 7\sqrt[3]{5} + 49}{5+343} = \frac{\sqrt[3]{25} - 7\sqrt[3]{5} + 49}{348}$$

Ancora due razionalizzazioni del medesimo tipo:

$$\text{♪} \frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2}{(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}}{\underbrace{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{4})^3}_{=5-4=1}} = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + 2\sqrt[3]{2}$$

$$\text{♪} \frac{4}{5-3\sqrt[3]{2}} = \frac{4}{5-3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}} = \frac{4(25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4})}{125-54} = \frac{4(25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4})}{71}$$

Regola 5: $\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b}$
--