

14. ESPRESSIONI VARIE CON RADICALI (esercizi alle pagg. 26-27)

Presentiamo qualche esempio svolto.

a)
$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + \sqrt[6]{64x^3 + 128x^2 + 64x}$$

Dobbiamo moltiplicare i primi due radicali, dopo averli portati allo stesso indice; nell'ultimo radicale, invece, scomponiamo in fattori il radicando: potendosi raccogliere $64 = 2^6$, si potrà estrarre un fattore 2.

L'estrazione di un fattore, quando è possibile, è quasi sempre conveniente negli esercizi coi radicali.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + \sqrt[6]{64x^3 + 128x^2 + 64x} = \\ & = \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2}} + \sqrt[6]{64x(x^2 + 2x + 1)} = \\ & = \sqrt[6]{x^3 \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2}} + \sqrt[6]{64x(x+1)^2} = \sqrt[6]{x(x+1)^2} + 2\sqrt[6]{x(x+1)^2} = \underset{\text{radicali simili}}{3\sqrt[6]{x(x+1)^2}} \end{aligned}$$

b)
$$\frac{\sqrt{25a^2 - 25}}{\sqrt{4a+4} + \sqrt{9a+9}}$$

Innanzitutto raccogliamo ed estraiamo un fattore:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{25a^2 - 25}}{\sqrt{4a+4} + \sqrt{9a+9}} = \\ & = \frac{\sqrt{25(a^2 - 1)}}{\sqrt{4(a+1)} + \sqrt{9(a+1)}} = \frac{5\sqrt{a^2 - 1}}{2\sqrt{a+1} + 3\sqrt{a+1}} = \frac{\cancel{5}\sqrt{(a+1)(a-1)}}{\cancel{2}\sqrt{a+1}} = \underset{\text{quoziente di radicali con lo stesso indice}}{\sqrt{\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}}} = \sqrt{a-1} \end{aligned}$$

c)
$$\frac{\sqrt{15}}{7 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$$

Cominciamo a svolgere i calcoli a denominatore, poi vedremo.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{15}}{7 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} = \\ & = \frac{\sqrt{15}}{7 - (5 + 2 - 2\sqrt{10})} = \\ & = \frac{\sqrt{15}}{\cancel{7} \cancel{7} + 2\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15^3}{10^2}} \underset{\text{conviene spezzare il radicale}}{=} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

d)
$$\left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \right]$$

Questo esercizio si presta ad essere eseguito in due modi alternativi:

♫ *razionalizzando le prime due frazioni ...*

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} = \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} = \\ &= \frac{a-\cancel{\sqrt{ab}}-\cancel{\sqrt{ab}}-b+2\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1 \end{aligned}$$

♫ *... oppure scomponendo in fattori il denominatore della terza frazione*

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) - \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \\ &= \frac{a-\cancel{\sqrt{ab}}-\cancel{\sqrt{ab}}-b+2\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1 \end{aligned}$$

e)
$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + 1 \right) - \sqrt{x-1} \right]$$

In quest'altra espressione, è decisamente poco conveniente razionalizzare: converrà invece fare il denominatore comune entro ciascuna parentesi.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x-1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + 1 \right) - \sqrt{x-1} = \\ &= \frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} : \frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x-1} = \frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{1+\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x-1} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x-1} = \frac{\cancel{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x-1}}{\cancel{\sqrt{x+1}}} - \sqrt{x-1} = \cancel{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 0 \end{aligned}$$

f)
$$\left[\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} + \frac{10}{\sqrt{2}} \right]$$

Qui si potrà procedere razionalizzando, e spezzando i radicali doppi.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} + \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}} + \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} + \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)^2 - \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} + 5\sqrt{2} = \\ &= \cancel{2} \cancel{-1} \cancel{-2\sqrt{2}} \cancel{-2} \cancel{-1} \cancel{-2\sqrt{2}} + 5\sqrt{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$