18. RADICALI E VALORI ASSOLUTI

Consideriamo l'espressione $\sqrt{a^2}$.

Essa ha significato qualunque sia il segno di a (quindi: sia per $a>0$, che per $a<0$ o $a=0$), perché, qualunque sia il segno della base, un quadrato è sempre positivo o nullo (mai negativo) e perciò la radice quadrata di un quadrato si può sempre estrarre.

Chiediamoci ora: è sempre giusto scrivere $\sqrt{a^2}=a$?

Beh, è giusto solo se $a \ge 0$, perché se invece il numero a è negativo, sarebbe sbagliato !!!

Ad es., nel caso $a=-5$, l'uguaglianza $\underbrace{\sqrt{a^2}}_{\substack{\sqrt{(-5)^2}\\ \sqrt{25}}} = \underbrace{a}_{-5}$ non "funziona", perché $\sqrt{25}$ vale $+5$ e non -5.

Riflettendo bene, l'uguaglianza che vale sia per $a \ge 0$ che per $a<0$, è la seguente:

♥ **(14)** $\boxed{\sqrt{a^2}=|a|}$ **MOLTO IMPORTANTE l'introduzione del simbolo di VALORE ASSOLUTO !**

Osserviamo che invece con una radice ad indice dispari (ad esempio, una radice cubica)
NON avremmo dovuto introdurre le stanghette di valore assoluto;
insomma, vale, *qualunque sia* il segno del numero reale a, l'uguaglianza

(15) $\sqrt[3]{a^3}=a$

(ricordiamo ancora una volta che nel caso di un radicale con indice dispari,
sia il radicando che il risultato possono essere positivi, nulli o negativi
e il risultato ha sempre lo stesso segno del radicando).

Analogamente, avremo, qualunque sia il segno del numero a:

(16) $\boxed{\sqrt{a^2 b}=|a|\sqrt{b} \quad (b \ge 0)}$

La (16) è ricavabile dalla (14) con la catena $\sqrt{a^2 b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}$.

Anche qui, in situazioni affini che però portino una radice cubica al posto della quadrata,
le stanghette *non* vanno introdotte:

(17) $\sqrt[3]{a^3 b}=a\sqrt[3]{b}$

Osservazione - E' chiaro che nella (14) e nella (16) possiamo fare a meno delle stanghette di val. assoluto in tutti quei casi in cui si sa per certo che il numero indicato con a è ≥ 0.

Ancora:
il radicale $\sqrt{ab}$ ha significato sia quando a, b sono entrambi positivi, sia quando sono entrambi negativi.
Ma l'uguaglianza $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ vale soltanto nel primo caso ($a \ge 0,\ b \ge 0$).
L'uguaglianza che vale anche con a, b entrambi negativi è

(18) $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$

Il problema *non* sussiste con indice dispari: qualunque siano i segni di a, b, è sempre

(19) $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$

Generalizzando, si vede che vale la seguente comoda REGOLA:

LE STANGHETTE DI VALORE ASSOLUTO VANNO INTRODOTTE NEI CASI IN CUI, OPERANDO CON UN RADICALE AD INDICE PARI, A PARTIRE DA UN FATTORE DI GRADO PARI SI PASSA AD UNO – O PIU' – FATTORI DI GRADO DISPARI per effetto

- di una semplificazione indice-esponente (proprietà invariantiva)
- o dell'estrazione di un fattore dal segno di radice
- o dello "spezzamento" di un radicale con la regola per la radice di un prodotto o di un quoziente.

Il simbolo di "modulo" (= di valore assoluto) si può evitare, in questi casi, solo se il numero che andrebbe a finire entro le stanghette è ≥ 0 .