19. SIGH! I PARAGRAFI 17) E 18) CI COSTRINGEREBBERO A RIMETTERE IN DISCUSSIONE I RISULTATI DI ALCUNI DEGLI ESERCIZI FATTI!

Negli esercizi con radicali proposti alle pagine precedenti, c'era un invito ad adottare un'ipotesi "di comodo":

"per semplicità, laddove compaiono espressioni letterali, sei autorizzato a supporre ≥ 0 *l'espressione stessa e più in generale la base di ciascuna potenza in gioco".*

E' giunto ora il momento di analizzare cosa accada se si lascia cadere questa supposizione.

Da qui in avanti, in TUTTO il nostro corso di Matematica,
il modo di utilizzare i radicali verrà generalizzato in DUE modi:
1) passeremo ad operare coi "radicali in $\mathbb{R}$" e non più solamente coi radicali assoluti
2) e **simultaneamente abbandoneremo**, appunto, **l'ipotesi che tutte le potenze in gioco siano a base ≥ 0.**

Andiamo dunque a riprendere alcuni esercizi già svolti
e **vediamo come si devono modificare i risultati, se si parte dalle premesse 1)+2).**

- Consideriamo ad esempio l'espressioncina $\sqrt[10]{4+4t+t^2}$ (pag. 19, n. 30).

  Si trattava di semplificare, tramite la proprietà invariantiva, e il risultato dichiarato era $\sqrt[5]{2+t}$.

  Ma ora, per le nuove premesse 1)+2) , dovremo scrivere invece, introducendo il valore assoluto,

  $$\sqrt[10]{4+4t+t^2}=\sqrt[10]{(2+t)^2}=\sqrt[5]{|2+t|}\ .$$

  Riflettiamo: poiché il valore assoluto di un numero è uguale
  a) al numero stesso, se questo è positivo (≥ 0)
  b) all'opposto del numero, se questo è negativo

  e poiché il numero $2+t$ è ≥ 0 quando $t\geq -2$, mentre è <0 quando $t<-2$,
  in definitiva avremo:

  $$\sqrt[10]{4+4t+t^2}=\sqrt[10]{(2+t)^2}=\sqrt[5]{|2+t|}=\begin{cases}\sqrt[5]{2+t} & \textit{quando } t\geq -2\\ \sqrt[5]{-(2+t)}=-\sqrt[5]{2+t} & \textit{quando } t<-2\end{cases}$$

- Un altro esercizio (pag. 21, n. 49) terminava col passaggio $\sqrt{2^3(x-3)^2}=2(x-3)\sqrt{2}$.

  Ora il passaggio finale verrebbe invece effettuato come segue:

  $$\sqrt{2^3(x-3)^2}=2|x-3|\sqrt{2}=\begin{cases}2(x-3)\sqrt{2} & \textit{nel caso } x\geq 3\ (a)\\ 2(3-x)\sqrt{2} & \textit{nel caso } x<3\ (b)\end{cases}$$

  (a) *quando è* $x-3\geq 0$, *cioé con* $x\geq 3$, *avremo* $|x-3|=x-3$
  (b) *quando è* $x-3<0$, *cioé con* $x<3$, *avremo* $|x-3|=-(x-3)=-x+3=3-x$

- Ripensiamo pure al semplice esercizietto $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{n^2}=n$ (pag. 19, n. 72).

  Qui invece nulla cambia, nemmeno con le nuove premesse 1) + 2), perché se fin dall'inizio troviamo $\sqrt{n}$, vuol dire che fin dall'inizio si suppone $n\geq 0$ (altrimenti la radice quadrata non sarebbe eseguibile).

  Dunque rimane pienamente confermata la catena $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{n^2}=n$ (se n è positivo, $|n|=n$).

- E $\sqrt[9]{27a^{27}}$? (pag. 19, n. 26)

  Beh, qui se a è positivo, allora lo è anche il radicando, se a è negativo lo è anche il radicando.

  Ma in un contesto di radicali in $\mathbb{R}$, tutto questo non ci interessa:
  - con indice dispari, il radicando può avere segno qualsiasi,
  - e la semplificazione con l'invariantiva quando l'indice è dispari non richiede mai il valore assoluto.

  Quindi è, anche ora, giusto scrivere $\sqrt[9]{27a^{27}}=\sqrt[9]{3^3a^{27}}=\sqrt[3]{3a^9}$.

- Inventiamo infine un'espressione "ad hoc" per dare una idea di situazioni più complicate:

  $$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-7)^2}=|x-3|+|x-7|=\begin{cases}x-3+x-7=2x-10 & \textit{se } x\geq 7\\ x-3+7-x=4 & \textit{se } 3\leq x<7\\ 3-x+7-x=10-2x & \textit{se } x<3\end{cases}$$

Appare chiaro da tutto questo non semplice discorso il motivo per cui fino ad ora avevamo sempre autorizzato lo studente a servirsi dell'ipotesi di positività delle basi di tutte le potenze in gioco: se infatti, caro lettore, ti avessimo fin dall'inizio sottoposto il carico di queste difficoltà, ti avremmo probabilmente indotto a sviluppare per i radicali una irreversibile antipatia, che speriamo di avere evitato.

E' sufficiente, a mio parere, l' "infarinatura" data in questa pagina, senza ulteriori esercizi, perché tu sia poi in grado di affrontare le problematiche esposte, nei contesti in cui si potranno ripresentare (es. "limiti", "studio di funzione").