20. ESPONENTI FRAZIONARI

Come è ben noto, una potenza con esponente intero ≥ 2 è definita come un prodotto di fattori tutti uguali fra loro (tanti fattori uguali alla base quante sono le unità dell'esponente): $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ ...
Si introducono poi gli esponenti 1 e 0; noi abbiamo scritto che le rispettive definizioni

$a^1 = a$ ("un numero elevato a 1 è uguale a sé stesso")

$a^0 = 1$ ("un numero elevato a 0 è uguale a 1", con la sola eccezione $0^0 = \mathit{indeterminata}$)

vengono scelte in questo modo perché sono le uniche che consentano alla proprietà sottrattiva degli esponenti di continuare a valere (poi, con tali def., si dimostra che continuano ad essere valide *tutte* le "vecchie" proprietà).
Avremmo anche potuto introdurre i nuovi esponenti ragionando sull'opportunità che essi risultassero compatibili con la *additiva* degli esponenti:
insomma, se desidero che si abbia, ad es., $a^3 \cdot a^1 = a^{3+1} = a^4$, è evidente che dovrò accettare la def. $a^1 = a$
e se desidero che risulti $a^3 \cdot a^0 = a^{3+0} = a^3$ è ovvio che dovrò adottare la definizione $a^0 = 1$.

Le definizioni degli esponenti negativi: $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$ $\quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $\quad a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ $\quad \ldots$

sono motivate, sostanzialmente, dall'esigenza che si estenda anche a questi la validità delle "vecchie" proprietà, così che (tanto per fare un esempio), se desideriamo che risulti vera l'uguaglianza $\boxed{a^{-3} \cdot a^3} = a^{-3+3} = a^0 \boxed{=1}$,

siamo *necessariamente* condotti a porre, per definizione, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Dato che l'appetito vien mangiando, ci possiamo chiedere se possano avere un senso (e un'utilità) anche gli esponenti *frazionari*.

Ad esempio, che definizione sarà "logico" stabilire per una scrittura come $a^{\frac{1}{3}}$?
Beh, volendo attribuire a questa scrittura un significato compatibile con le proprietà già dimostrate valide in un ambito di esponenti interi, dovrà, in particolare, risultare

$$\boxed{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3} = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^1 \boxed{= a}$$

per cui la scrittura in esame dovrà indicare quel numero il cui cubo è a ...
ma questo numero è la radice cubica di a!

Dunque si porrà, per definizione, $\boxed{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}}$ e, in generale, $\boxed{a^{\frac{1}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a}}$.

Poi, sempre nell'ottica di adottare definizioni tali che non si perda la validità di nessuna delle "vecchie" proprietà, si pone

$\boxed{a^{\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a^m}}$ NOTA : ♥ **il denominatore diventa l'indice, il numeratore l'esponente!**

e infine

$\boxed{a^{-\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$ NOTA : ♥ *prima di tutto, la negatività dell'esponente trasferisce la potenza dall'altra parte della linea di frazione con esponente che viene reso positivo, poi si applica la definizione precedente*

Dunque, per fare qualche esempio specifico,

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, \quad y^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{y^3}, \quad z^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{z^2}}, \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2, \quad \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{16}{81}}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \quad \textit{o anche} \quad \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

RICAPITOLIAMO le definizioni date:

$$a^{\frac{1}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

In definitiva
le **POTENZE AD ESPONENTE FRAZIONARIO**
non sono altro che
un modo alternativo
di rappresentare
i **RADICALI**!

♥ **Con gli esponenti frazionari, qualche problematica insorge qualora la base della potenza sia <0.**

Ad esempio, per la scrittura $(-8)^{1/3}$ si potrebbero scrivere entrambe le catene

$$(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}=-2\,; \qquad (-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=+2$$

Per questo motivo, in generale gli esponenti frazionari m/n vengono utilizzati solo con m ed n primi fra loro.

Qualche testo, e qualche software, sceglie invece di impiegarli esclusivamente quando la base è positiva (≥ 0 se l'esponente frazionario è positivo, >0 se l'esponente è negativo).

LA CONSERVAZIONE DELLE PROPRIETA'

Per le potenze a esponente frazionario sopra introdotte, si può dimostrare che conservano la loro validità proprio *tutte* le proprietà che si era abituati ad applicare con esponente intero, nessuna esclusa.

Tali dimostrazioni si effettuano utilizzando le già dimostrate proprietà dei radicali.

- Verifichiamo, tanto per fare un esempio, che continua a valere la additiva degli esponenti (accontentandoci di considerare il caso in cui questi non siano negativi):

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}\cdot a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

Comprendiamo a questo punto che un'espressione coi radicali potrebbe anche essere trasformata in espressione con esponenti frazionari, svolta utilizzando le proprietà delle potenze, e magari conclusa ritornando ai radicali.

- Un esempio: $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}=x^{\frac{6+4-9}{12}}=x^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{x}$ Prova a rifare l'espressione applicando le proprietà dei *radicali*: uscirà il *medesimo* risultato!

- Dài, un altro! $\sqrt{\sqrt{ab}}:\sqrt[8]{b}=\left[(ab)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{8}}=(ab)^{\frac{1}{4}}:b^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}}:b^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{8}}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{b}$

LE POTENZE AD ESPONENTE FRAZIONARIO E IL COMPUTER

♥ **Di solito in un software scientifico l'elevamento a potenza si indica con l'accento circonflesso ^** … ma **ATTENZIONE! Occorre anche saper utilizzare in modo opportuno le PARENTESI!**

- Ad esempio, se lavorando con un software matematico o con un foglio elettronico io digito $x\,\hat{}\,1/3$, non otterrò $\sqrt[3]{x}$, bensì $x/3$! … **Per ottenere $\sqrt[3]{x}$ devo digitare** infatti $\mathbf{x\,\hat{}\,(1/3)}$, in quanto se scrivo $x\,\hat{}\,1/3$ il software eleverà x all'esponente 1, poi dividerà per 3.
- E per ottenere $\sqrt{\mathbf{x^2+1}}$ si digita $\mathbf{(x\,\hat{}\,2+1)\,\hat{}\,(1/2)}$, o anche **sqrt$(x\,\hat{}\,2+1)$** **[sqrt = SQuare RooT]**

ESERCIZI Vai alle risoluzioni ⇨

a) Determina il valore delle seguenti espressioni numeriche:

1) $8^{\frac{2}{3}}+9^{\frac{1}{2}}$ 2) $4^{\frac{3}{2}}-8^{\frac{1}{3}}-3\cdot16^{\frac{1}{4}}$ 3) $\left[30\left(25^{-\frac{1}{2}}+9^{-\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$ 4) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 5) $64^{\frac{5}{6}}-81^{\frac{3}{4}}$

6) $2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}$ 7) $3^{\frac{1}{4}}\cdot27^{\frac{1}{4}}$ 8) $5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{6}}$ 9) $\left(81^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 10) $2^{-\frac{2}{3}}\cdot4^{-\frac{2}{3}}$

b) Esegui le seguenti espressioni con radicali trasformando in potenze con esponente frazionario:

11) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$ 12) $\dfrac{\sqrt[4]{b^5}}{b\cdot\sqrt[8]{b}}$ 13) $\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^3}}\cdot\sqrt[3]{x}}{x}\right)^{12}$ 14) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt{a}}}$

15) $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)$ 16) $\dfrac{y^2\cdot\sqrt{3x}\cdot\sqrt[4]{9xy}}{\sqrt[3]{y^2}}$ 17) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{2}-1}}$ 18) $\sqrt[13]{\left(\sqrt{t+1}\right)^3\cdot\sqrt[3]{(t+1)^2}}$

RISULTATI

1) 7 2) 0 3) 2 4) 1 5) 5 6) $3/\sqrt{2}=3\sqrt{2}/2$ 7) 3 8) 5 9) $1/3$ 10) $1/4$

11) $a^{\frac{23}{12}}$ 12) $b^{\frac{1}{8}}$ 13) x 14) 1 15) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ 16) $3x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{19}{12}}$ 17) $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 18) $(t+1)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{t+1}$