LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - PRIMA PARTE

1. CHE COS'È E COME SI RISOLVE UN' EQUAZIONE DI 2° GRADO

Si dice "di 2° grado", o "quadratica" (inglese: *quadratic* equation)**, un'equazione della forma**

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)}}$$

Casi particolari (equazioni "**incomplete**"):

$b = 0$ $\quad$ $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ $\quad$ equazione "**binomia pura**"

$c = 0$ $\quad$ $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ $\quad$ equazione "**binomia spuria**"

$b = c = 0$ $\quad$ $\mathbf{ax^2 = 0}$ $\quad$ equazione "**monomia**"

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

❑ BINOMIA PURA

Per risolvere una binomia pura, si isola x^2;
l'equazione potrà, a seconda dei casi, avere due soluzioni opposte, oppure essere impossibile.

$4x^2 - 9 = 0$

$4x^2 = 9$

$x^2 = \dfrac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \pm\dfrac{3}{2}$ $\rightarrow$ vedi NOTA

$4x^2 + 9 = 0$

$4x^2 = -9$

$x^2 = -\dfrac{9}{4}$ IMPOSSIBILE

$8x + 25 = (x+4)^2$

$\cancel{8x} + 25 = x^2 \cancel{+8x} + 16$

$-x^2 = -9;\ \ x^2 = 9;\ \ x = \pm 3$

NOTA Il DOPPIO SEGNO davanti alla radice è INDISPENSABILE.
Infatti il simbolo $\sqrt{9/4}$ indicherebbe il solo numero $3/2$,
quindi *senza il doppio segno perderemmo una delle due soluzioni.*

❑ BINOMIA SPURIA

Per risolvere una binomia spuria, si scompone in fattori raccogliendo *x*,
e si applica la "legge di annullamento del prodotto":

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO: $\quad \mathbf{a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0}$

$\Leftarrow$ *Se almeno uno dei fattori è nullo, il prodotto vale 0;*

$\Rightarrow$ *e viceversa: se un prodotto è uguale a 0, allora certamente almeno uno dei fattori è 0.*

In breve: **UN PRODOTTO E' UGUALE A 0 SE E SOLO SE ALMENO UNO DEI FATTORI E' 0**.

$5x^2 - 3x = 0$

$x(5x - 3) = 0$

$x = 0 \ \vee \ 5x - 3 = 0$

$5x = 3$

$x = \dfrac{3}{5}$

$5x^2 + 3x = 0$

$x(5x + 3) = 0$

$x = 0 \ \vee \ 5x + 3 = 0$

$5x = -3$

$x = -\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{(2x+1)(2x-1)}{4} = x - \dfrac{1}{4};\quad \dfrac{4x^2-1}{\cancel{4}} = \dfrac{4x-1}{\cancel{4}}$

$4x^2 \cancel{-1} = 4x \cancel{-1}$

$\cancel{4}x^2 - \cancel{4}x = 0$

$x^2 - x = 0 \quad x(x-1) = 0$

$x = 0 \ \vee \ x = 1$

Una binomia spuria ha sempre due soluzioni, di cui una nulla.

❑ MONOMIA

Un'equazione monomia ha sempre una sola soluzione, uguale a zero;
si può anche dire che ha "due soluzioni coincidenti, entrambe nulle".

$7x^2 = 0$

$x^2 = 0$

$x = 0 \ \ (x_1 = x_2 = 0)$

Si parla di "**due soluzioni coincidenti** $x_1 = x_2 = 0$"
per il fatto che, essendo $x^2 = x \cdot x$,
è come se la soluzione *x* = 0 venisse "trovata due volte";
e anche perché … (vedi NOTA)

$x^2 = 0$

$x \cdot x = 0$

$x = 0 \ \vee \ x = 0$

1° *fatt.* $\quad$ 2° *fatt.*

NOTA: $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2;\ \ x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2};\ \ x^2 = \dfrac{1}{100} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{10};\ \ x^2 = \dfrac{1}{1000000} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{1000};\ \ldots$

In $x^2 = k$, quanto più la costante non negativa *k* diminuisce, tanto più le due soluzioni si avvicinano l'una all'altra sulla *number line* … Se *k* diventasse 0, si può pensare a due soluzioni che a forza di avvicinarsi hanno finito per sovrapporsi, per coincidere.

ESERCIZI SVOLTI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

1)
$$9(x^2-2)=7$$
$$9x^2-18=7$$
$$9x^2=25$$
$$x^2=\frac{25}{9}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$$

Non c'è x, quindi questa equazione è **binomia pura**: va isolato x^2

2)
$$\frac{(x+4)^2}{8}-x=0$$
$$(x+4)^2-8x=0$$
$$x^2\cancel{+8x}+16\cancel{-8x}=0$$
$$x^2+16=0$$
$$x^2=-16$$
IMPOSSIBILE

3)
$$(4-x)(x-3)+12=0$$
$$4x\cancel{-12}-x^2+3x\cancel{+12}=0$$
$$-x^2+7x=0$$
$$x^2-7x=0 \quad (*)$$

Scompare il termine noto: si ha una **binomia spuria**

(*) ♥ **Quando il coeff. di x^2 è negativo, conviene cambiare tutti i segni!**

$$x(x-7)=0$$
$$x=0 \quad \vee \quad x=7$$

4)
$$15x^2+4x=3x^2$$
$$\overset{3}{\cancel{12}}x^2+\cancel{4}x=0$$
$$3x^2+x=0$$
$$x(3x+1)=0$$
$$x=0 \quad \vee \quad 3x+1=0$$
$$3x=-1$$
$$x=-\frac{1}{3}$$

In questo caso abbiamo semplificato l'equazione, dato che tutti i coefficienti erano divisibili per uno stesso numero (il 4).

Domanda: sarebbe lecito semplificare pure per x?

… NO, perché così facendo "perderemmo" la soluzione $x=0$.
Se ne riparlerà comunque a pag. 71.

5)
$$\frac{4x-3}{3}=\frac{1-x}{x}$$
$$x(4x-3)=3(1-x)$$
$$(x\neq 0)$$
$$4x^2\cancel{-3x}=3\cancel{-3x}$$
$$x^2=\frac{3}{4}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La condizione $x\neq 0$ è dovuta al fatto che moltiplicando per $3x$ se n'è andato il denominatore. E' come se avessimo fatto il den. comune $3x$ in entrambi i membri e poi lo avessimo eliminato.

6)
$$\frac{x+8}{x^2-4x}+\frac{x+4}{2x}=\frac{x}{x-4} \qquad \frac{x+8}{x(x-4)}+\frac{x+4}{2x}=\frac{x}{x-4}$$
$$\frac{2(x+8)+(x-4)(x+4)}{2x\cancel{(x-4)}}=\frac{2x^2}{2x\cancel{(x-4)}} \qquad \begin{array}{l} x\neq 0 \\ x\neq 4 \end{array}$$
$$2x\cancel{+16}+x^2\cancel{-16}=2x^2$$
$$2x+x^2-2x^2=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$x^2-2x=0$ (**Quando il coefficiente di x^2 è negativo, è conveniente cambiare tutti i segni**)
$$x(x-2)=0$$
$\cancel{x=0}$ NON ACCETTABILE; $\boxed{x=2}$

7)
$$\frac{2}{5}x=\frac{3}{2}x^2$$
$4x=15x^2$ (NOTA 1)
$15x^2-4x=0$ (NOTA 2)
$$x(15x-4)=0$$
$$x=0 \vee x=4/15$$

NOTA 1
Abbiamo moltiplicato per 10 per sbarazzarci dei denominatori

NOTA 2
Qui, allo scopo di far sì che x^2 avesse subito coefficiente positivo, abbiamo portato tutto a 2° membro, e simultaneamente abbiamo scambiato i due membri fra loro

ESERCIZI

8) $x^2-4x=0$	**9)** $x^2-4=0$	**10)** $-4x^2=0$	**11)** $x^2+4=0$	**12)** $x^2+4x=0$
13) $x^2-3=0$	**14)** $x^2+3=0$	**15)** $x^2=3x$	**16)** $4x^2-3x=0$	**17)** $4x^2-3=0$
18) $x^2=\frac{1}{2}x$	**19)** $\frac{3}{4}x=\frac{6}{7}x^2$	**20)** $1-\frac{1}{9}x^2=0$	**21)** $-\frac{1}{9}x^2=0$	**22)** $\frac{1}{3}x^2=-3x$
23) $25-16x^2=0$	**24)** $25+16x^2=0$	**25)** $25x+16x^2=0$	**26)** $3x^2=2$	**27)** $7x=6x^2$
28) $15x^2-30=0$	**29)** $15x^2-30x=0$	**30)** $(x+1)^2=1$	**31)** $(x+1)^2=2x$	**32)** $(x+1)^2=x+1$

SOLUZIONI (l'insieme delle soluzioni è indicato con S)

8) $S=\{0,4\}$	**9)** $S=\{-2,2\}$	**10)** $S=\{0\}$	**11)** $S=\varnothing$	**12)** $S=\{0,-4\}$
13) $S=\{-\sqrt{3},+\sqrt{3}\}$	**14)** $S=\varnothing$	**15)** $S=\{0,3\}$	**16)** $S=\{0,3/4\}$	**17)** $S=\{-\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2\}$
18) $S=\{0,1/2\}$	**19)** $S=\{0,7/8\}$	**20)** $S=\{-3,3\}$	**21)** $S=\{0\}$	**22)** $S=\{0,-9\}$
23) $S=\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$	**24)** $S=\varnothing$	**25)** $S=\left\{0,-\frac{25}{16}\right\}$	**26)** $S=\left\{-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$	**27)** $S=\left\{0,\frac{7}{6}\right\}$
28) $S=\{-\sqrt{2},+\sqrt{2}\}$	**29)** $S=\{0,2\}$	**30)** $S=\{0,-2\}$	**31)** $S=\varnothing$	**32)** $S=\{0,-1\}$