

L'EQUAZIONE DI 2° GRADO COMPLETA

Per risolvere un'equazione completa, si può:

a) scomporre in fattori ed applicare la **legge di annullamento del prodotto**:

$$\begin{aligned}x^2 - 13x - 30 &= 0 \\(x-15)(x+2) &= 0 \\x &= 15 \vee x = -2\end{aligned}$$

b) oppure utilizzare il “metodo del completamento del quadrato”:

$$\begin{aligned}4x^2 - 12x + 3 &= 0 \\4x^2 - 12x + 9 - 6 &= 0 \\(2x-3)^2 &= 6\end{aligned}$$

$$2x-3 = \pm\sqrt{6} \begin{cases} 2x-3 = \sqrt{6}; & x = \frac{3+\sqrt{6}}{2} \\ 2x-3 = -\sqrt{6}; & x = \frac{3-\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

In realtà, questo metodo è rarissimamente utilizzato e lo presentiamo soltanto perché si utilizza per "costruire" la formula risolutiva di cui al successivo punto c)

c) oppure ancora, servirsi della seguente **formula risolutiva**:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esempio di applicazione della formula:

$$\begin{aligned}3x^2 + x - 2 &= 0 \quad (a=3, b=1, c=-2) \\x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} \frac{-1-5}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \\ \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

La formula considerata è valida anche per le equazioni incomplete; per queste ultime, però, sono di gran lunga più veloci i metodi “specifici” visti in precedenza.

Come è stata ricavata la formula risolutiva?

Sostanzialmente, applicando all'equazione "generale"
 $ax^2 + bx + c = 0$ il metodo del *completamento del quadrato*.
Si tratta di trovare la maniera di far comparire, a primo membro, un quadrato di binomio della forma $(x + \dots)^2$.

Ecco i passaggi:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0; \quad x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0; \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a};$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}; \quad x + \frac{b}{2a} \stackrel{\text{NOTA 1}}{=} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}};$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \stackrel{\text{NOTA 2}}{=} -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

NOTA 1

Questo passaggio vale a condizione che la quantità di cui si vuole estrarre la radice sia ≥ 0 . Poiché il denominatore $4a^2$ è positivo in quanto è un quadrato, in definitiva dovrà essere $b^2 - 4ac \geq 0$ perché il passaggio sia effettuabile. A dire il vero, dopo l'introduzione dei cosiddetti “numeri complessi”, questo vincolo di positività verrà a cadere ...

NOTA 2

Nell'estrarre il fattore ci vorrebbero le stanghette di valore assoluto, ma sono rese superflue dalla presenza del doppio segno.

IL “DELTA” E IL NUMERO DI SOLUZIONI

La quantità $b^2 - 4ac$ che sta sotto radice quadrata nella formula risolutiva, è chiamata “delta” o “discriminante” e indicata col simbolo Δ (la lettera greca “delta” maiuscola).

Sono possibili tre casi:

- se $\Delta > 0$, l'equazione ha due soluzioni distinte
- se $\Delta = 0$, l'equazione ha una sola soluzione (si può anche dire che ha “due soluzioni coincidenti”)
- se $\Delta < 0$, l'equazione non ha nessuna soluzione (= è impossibile)

ESERCIZI SVOLTI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE

1) $6(x^2 + 1) = x(x - 13)$ Svolgo i calcoli...

$6x^2 + 6 = x^2 - 13x$... e ora, dato che l'equazione è completa, porto tutto a primo membro

$6x^2 + 6 - x^2 + 13x = 0$... dopodiché, riduco i termini simili scrivendoli nell'ordine corretto

$5x^2 + 13x + 6 = 0$ Posso a questo punto applicare la formula:

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6}}{2 \cdot 5} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 120}}{10} = \frac{-13 \pm \sqrt{49}}{10} = \frac{-13 \pm 7}{10} = \begin{cases} \frac{-13-7}{10} = -\frac{20}{10} = -2 \\ \frac{-13+7}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

2) $16x^2 + 25 = 40x$

$16x^2 - 40x + 25 = 0$ Nel calcolo del $\Delta = b^2 - 4ac$, è indifferente se si prende $-b$ anziché b ! $b^2 - 4ac = (-b)^2 - 4ac$

$$x_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4 \cdot 16 \cdot 25}}{32} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1600}}{32} = \frac{40 \pm 0}{32} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}$$

Risoluzione più "brillante":

$$16x^2 - 40x + 25 = 0$$

$$(4x - 5)^2 = 0$$

$$x = \frac{5}{4} \quad \left(x_1 = x_2 = \frac{5}{4} \right)$$

3) $-\frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$

$$\frac{-x^2 + 5x + 3}{15} = \frac{10}{15}$$

$$-x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$x^2 - 5x + 7 = 0 \text{ (NOTA)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ IMP. } (\Delta < 0)$$

NOTA:

♥ quando il coefficiente di x^2 è < 0 , è davvero conveniente cambiare tutti i segni!

4) $12 - x = x^2$

$x^2 + x - 12 = 0$ (per avere immediatamente il 1° coefficiente positivo, ho portato tutto a 2° membro, e scambiato i membri fra loro)

$$(x - 3)(x + 4) = 0 \text{ (NOTA)}$$

$$x = 3 \vee x = -4$$

Verifica che le soluzioni trovate sono corrette, sostituendole nell'uguaglianza iniziale!

NOTA:

♥ quando la risoluzione per fattorizzazione è facile, è la via più rapida e comoda

ESERCIZI (alcuni si prestano, volendo, all'applicazione dalla "formula ridotta" di cui alla pag. seguente)

5) $15x^2 - 22x + 8 = 0$

6) $12x^2 + 7x - 12 = 0$

7) $x^2 - 4x - 5 = 0$

8) $x^2 - 4x + 5 = 0$

9) $x^2 - 4x + 4 = 0$

10) $x^2 + 19x + 90 = 0$

11) $x^2 + 8x - 2 = 0$

12) $3x(2 - 3x) = 1$

13) $15x = 2(x^2 + 11)$

14) $3(x^2 + 4) = 7x$

15) $13x^2 + 40x + 27 = 0$

16) $(23x - 11)(19x - 31) = 0$

17) $5x^2 + 4x + 1 = 0$

18) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

19) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

20) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

21) $2 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{6}x^2$

22) $x = \frac{(x+3)(x-3)}{8}$

23) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{32} = \frac{9}{4}x^2 - \frac{x}{32}$

24) $(2x - 3)^2 = (x - 2)^2$

SOLUZIONI (l'insieme delle soluzioni è indicato con S)

5) $S = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{5} \right\}$

6) $S = \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{3}{4} \right\}$

7) $S = \{-1, 5\}$

8) $S = \emptyset$

9) $S = \{2\}$

10) $S = \{-10, -9\}$

11) $S = \{-4 - 3\sqrt{2}, -4 + 3\sqrt{2}\}$

12) $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

13) $S = \left\{ 2, \frac{11}{2} \right\}$

14) $S = \emptyset$

15) $S = \left\{ -\frac{27}{13}, -1 \right\}$

16) $S = \left\{ \frac{11}{23}, \frac{31}{19} \right\}$

17) $S = \emptyset$

18) $S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

19) $S = \left\{ -1, -\frac{1}{3} \right\}$

20) $S = \left\{ \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \right\}$

21) $S = \{-6, 2\}$

22) $S = \{-1, 9\}$

23) $S = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \right\}$

24) $S = \left\{ 1, \frac{5}{3} \right\}$