2. EQUAZIONI DI 2° GRADO LETTERALI

1) $\boxed{3x^2-25kx+8k^2=0}$

Si tratta di un'equazione di 2° grado "letterale", o "parametrica".
x è l'incognita, mentre k è un numero noto, che va a far parte dei coefficienti.
I $\boxed{\text{coefficienti}}$ *di questa equazione sono dunque:* $\boxed{a=3}$ $\boxed{b=-25k}$ $\boxed{c=8k^2}$

$$\boxed{x_{1,2}=}\frac{25k\pm\sqrt{625k^2-96k^2}}{6}=\frac{25k\pm\sqrt{529k^2}}{6}=\underset{\text{(NOTA)}}{\frac{25k\pm 23k}{6}}=\begin{cases}\dfrac{25k-23k}{6}=\dfrac{2k}{6}=\boxed{\dfrac{1}{3}k}\\[2mm]\dfrac{25k+23k}{6}=\dfrac{48k}{6}=\boxed{8k}\end{cases}$$

Anche per FATTORIZZAZIONE:

$3x^2-25kx+8k^2=0$
$3x^2-kx-24kx+8k^2=0$
$x(3x-k)-8k(3x-k)=0$
$(3x-k)(x-8k)=0$
$3x-k=0 \quad \vee \quad x-8k=0$
$x=\frac{k}{3}=\boxed{\frac{1}{3}k} \qquad x=\boxed{8k}$

NOTA
Per la precisione, sarebbe
$\sqrt{529k^2}=23|k|$;
ma il valore assoluto è reso inutile
dalla presenza del doppio segno $\pm$.
Si deve comunque osservare che in questo modo,
ogniqualvolta il parametro assumesse un valore NEGATIVO,
la soluzione che abbiamo scritto per prima
NON risulterebbe più la *minore* tra le due.

2) $(x-a)^2+a(a+2b)=(a+b)^2$ *Qui evidentemente i parametri "a" e "b" dell'esercizio non vanno confusi con le lettere "a" e "b" della teoria!*

$x^2-2ax\cancel{+a^2}+a^2\cancel{+2ab}=\cancel{a^2}\cancel{+2ab}+b^2$
$x^2-2ax+a^2-b^2=0$
$\boxed{x^2-2ax+(a^2-b^2)=0}$ $\boxed{1°\ coeff.=1;\ \ 2°\ coeff.=-2a;\ \ 3°\ coeff.=a^2-b^2}$

$$x_{1,2}\underset{\substack{\text{con la}\\ \text{RIDOTTA}}}{=}a\pm\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}=a\pm\sqrt{\cancel{a^2}\cancel{-a^2}+b^2}=a\pm b=\begin{cases}\boxed{a-b}\\ \boxed{a+b}\end{cases}$$

3) $x^2+3(x+2m^2)+2=m(5x+7)$
(NOTA)
$x^2+3x+6m^2+2=5mx+7m$
$x^2+3x-5mx+6m^2-7m+2=0$
$\boxed{x^2+(3-5m)x+(6m^2-7m+2)=0}$

NOTA
♥ In un'equazione di 2° grado letterale, in generale occorre
1) svolgere i calcoli
2) portare tutto a 1° membro
3) ordinare (termini con x^2; termini con x; costanti)
4) raccogliere x^2
fra tutti i termini che contengono x^2
(in questo caso, però, ce n'è uno solo)
5) raccogliere x
fra tutti i termini che contengono x
6) … e a questo punto applicare la formula.

$$x_{1,2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{(3-5m)^2-4(6m^2-7m+2)}}{2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{9-30m+25m^2-24m^2+28m-8}}{2}=$$

$$=\frac{-3+5m\pm\sqrt{m^2-2m+1}}{2}=\frac{-3+5m\pm\sqrt{(m-1)^2}}{2}=\frac{-3+5m\pm(m-1)}{2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-3+5m-m+1}{2}=\dfrac{4m-2}{2}=\dfrac{\cancel{2}(2m-1)}{\cancel{2}}=\boxed{2m-1}\\[2mm]\dfrac{-3+5m+m-1}{2}=\dfrac{6m-4}{2}=\dfrac{\cancel{2}(3m-2)}{\cancel{2}}=\boxed{3m-2}\end{cases}$$

EQUAZIONI … CON LA "CODA"

4)

$$(x+1)\left[a(x-2)+3\right]+2a=2x(x+2)$$

$$(x+1)\left[ax-2a+3\right]+2a=2x^2+4x \qquad ax^2\underline{-2ax}\ \underline{\underline{+3x}}\ \underline{+ax}\ \cancel{-2a}+3\cancel{+2a}=2x^2\underline{\underline{+4x}} \qquad ax^2-2x^2-ax-x+3=0$$

$$\boxed{(a-2)x^2-(a+1)x+3=0}$$

$$x_{1,2} \underset{\boxed{a\neq 2}}{=} \frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-12(a-2)}}{2(a-2)} \qquad \text{NOTA}: \begin{array}{l} \textit{nel calcolo del } \Delta=b^2-4ac, \textit{ per via dell'esponente 2} \\ \textit{è indifferente usare } -b \textit{ anziché } b!\ \ b^2-4ac=(-b)^2-4ac \end{array}$$

L'applicazione della formula comporta in questo caso la divisione per la quantità $2(a-2)$.
Ma una divisione è effettuabile soltanto a patto che il numero per cui si intende dividere sia diverso da 0.
Pertanto, la catena $x_{1,2}=\dots$ vale a condizione che sia $2(a-2)\neq 0$, ossia $a\neq 2$.
Il caso particolare $a=2$ andrà valutato a parte; ce ne occuperemo in coda all'esercizio.

$$x_{1,2} \underset{a\neq 2}{=} \frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-12(a-2)}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm\sqrt{a^2+2a+1-12a+24}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm\sqrt{a^2-10a+25}}{2(a-2)}=$$

$$=\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a-5)^2}}{2(a-2)}=\frac{(a+1)\pm(a-5)}{2(a-2)}=\dots \quad x_1=\boxed{\frac{3}{a-2}},\ x_2=\boxed{1}$$

CODA: COSA ACCADE NEL CASO $\boxed{a=2}$ PROVVISORIAMENTE LASCIATO DA PARTE ?

Con $a=2$ non è possibile applicare la formula (si otterrebbe infatti una divisione per 0, che non ha senso!).
Abbandoniamo dunque, per quanto riguarda il caso $a=2$, l'uso della formula e chiediamoci direttamente cosa diventa l'equazione, quando al parametro a si attribuisce il valore 2. Essa diventa

$$\cancel{(2-2)x^2}-(2+1)x+3=0; \qquad -3x+3=0; \qquad -3x=-3; \qquad x=1$$

Abbiamo quindi scoperto che nel caso particolare $a=2$ l'equazione si abbassa di grado (non è più di secondo grado, ma di primo) e ammette una sola soluzione: $x=1$.
Ricapitolando, l'equazione data possiede in generale due soluzioni, e precisamente $x_1=\frac{3}{a-2};\ x_2=1$
e soltanto nel caso particolare $a=2$ si abbassa di grado,
"perdendo" una soluzione e "conservando" come $\boxed{\textit{unica soluzione } x=1}$.

5)

$$\underset{k(x+1)}{\frac{x}{kx+k}}+\underset{(x+1)(x+2)}{\frac{k}{x^2+3x+2}}=2\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{x(x+2)+k^2}{\cancel{k(x+1)(x+2)}}=\frac{2k(x+1)}{\cancel{k(x+1)(x+2)}} \qquad \boxed{k\neq 0}\ \text{COND. PRELIMINARE: questa equazione NON ha significato con } k=0!$$

$$\boxed{x\neq -1,\ x\neq -2}\ \text{CONDIZIONI DI ACCETTABILITA'}$$

$$x^2+2x+k^2=2kx+2k; \qquad x^2+2x-2kx+k^2-2k=0$$

$$x^2-2(k-1)x+k^2-2k=0$$

$$x_{1,2}=k-1\pm\sqrt{(k-1)^2-(k^2-2k)}=k-1\pm\sqrt{\cancel{k^2}\cancel{-2k}+1\cancel{-k^2}\cancel{+2k}}=k-1\pm 1=\left\langle \begin{array}{ll}\boxed{k-2} & (x_1)\\ \boxed{k} & (x_2)\end{array}\right.$$

CODA (ESISTONO VALORI DEL PARAMETRO PER CUI UNA SOLUZIONE RISULTA NON ACCETTABILE, IN QUANTO UGUALE A -1 OPPURE A -2 ?)

x_1: $k-2=-1$ *con* $\boxed{k=1}$; $k-2=-2$ *con* $k=0$ (*però con $k=0$ l'eq. perde significato!*);

x_2: $k=-1$, *banalmente, con* $\boxed{k=-1}$; $k=-2$, *banalmente, con* $\boxed{k=-2}$

In definitiva, i valori $k=0,\ k=1,\ k=-1,\ k=-2$ sono notevoli in quanto:

con $k=0$ l'equazione è priva di significato
con $k=1$ non è accettabile la soluzione $k-2$, mentre l'altra (k) è accettabile e vale 1
con $k=-1$ non è accettabile la soluzione k, mentre l'altra $(k-2)$ è accettabile e vale -3
con $k=-2$ non è accettabile la soluzione k, mentre l'altra $(k-2)$ è accettabile e vale -4

ESERCIZIO A
Riprendi dal principio l'es. 4 e sostituisci $a=2$ nell'eq. iniziale, poi risolvi.

ESERCIZIO B
Fai lo stesso nell'esempio 5, con $k=-2$.

ESERCIZIO C
Verifica che per l'equazione
$$\frac{mx(mx-2)}{2x-1}=2x+1$$
si hanno 4 casi nei quali la soluzione è unica:
$m=2\ (x=1/4)$,
$m=-2\ (x=-1/4)$,
$m=0\ (x=-1/2)$,
$m=4\ (x=1/6)$.