

NUMERI COMPLESSI

1. "IMPOSSIBILE"? UAH, UAH!

Com'è noto, la **radice quadrata** è l'**operazione inversa** rispetto all'**elevamento al quadrato**; vale a dire, la radice quadrata di un numero x è quel numero y il quale, se elevato al quadrato, dà come risultato x (con la convenzione che, in caso di risultato "doppio", si prende solo quello positivo:

$$\sqrt{9} = 3 \text{ e NON } \sqrt{9} = \pm 3).$$

Ora, poiché elevando un numero al quadrato si ottiene sempre risultato positivo (o, al più, nullo), ne deriva che **l'estrazione di radice quadrata di un numero negativo è impossibile**.

In particolare, è dunque impossibile l'operazione

$$\boxed{\sqrt{-1}}.$$

D'altra parte, se provi a ripercorrere, per un istante, la tua "carriera" scolastica, ti verranno in mente **diversi casi di operazioni che in un primo tempo ritenevi impossibili, e che invece poi, con l'ampliarsi delle tue conoscenze, sono risultate possibili**.

a) Ad esempio:

quando frequentavi le elementari, e non avevi ancora sentito parlare né di frazioni, né di numeri con la virgola, ma ti limitavi a lavorare esclusivamente coi numeri interi, di fronte all'operazione $23 : 4$ (divisione, ossia operazione inversa della moltiplicazione) avresti detto: è un'operazione impossibile, se si cerca il risultato esatto! Infatti non esiste alcun numero intero il quale, moltiplicato per 4, dia come risultato 23.

Se la stessa operazione $23:4$ ti fosse stata, invece, proposta ai tempi della scuola media, avresti tratto una conclusione differente, affermando che l'operazione $23:4$ dà come risultato la frazione $\frac{23}{4}$ (o, il che è lo stesso, il numero $5,75$).

Ricapitolando e schematizzando:

l'operazione $23:4$ coinvolge due numeri interi, ma nell'ambito degli interi essa è priva di risultato (= impossibile). Nell'insieme, più vasto, dei numeri razionali (di cui gli interi sono casi particolari), l'operazione diventa invece possibile ed ha come risultato il numero $23/4$ (= $5,75$).

b) Anche per un'operazione come

$$5 - 7$$

accade qualcosa di simile.

Il bambino delle scuole elementari lavora esclusivamente coi numeri assoluti (= senza segno); egli non ha mai sentito parlare di numeri positivi e negativi.

Se, dunque, gli viene proposta l'operazione $5 - 7$, egli dirà che è impossibile.

Quando, alla fine della scuola media, lo stesso alunno avrà ampliato l'insieme dei numeri assoluti, affiancando ad essi i numeri negativi, e pervenendo così all'insieme più ampio dei numeri relativi, dirà invece che l'operazione è possibile e dà come risultato -2 .

c) E ancora: abbiamo dimostrato (pagg. 10-11) che non esiste alcun numero razionale che elevato al quadrato dia come risultato 2. Pertanto,

l'operazione $\sqrt{2}$ è impossibile nell'ambito dei numeri razionali; diventa possibile solo uscendo da tale insieme.

Se l'insieme \mathbb{Q} dei razionali viene ampliato, con l'aggiunta degli irrazionali, così da pervenire all'insieme più vasto \mathbb{R} (insieme dei numeri reali), allora all'operazione $\sqrt{2}$ si potrà attribuire un risultato. Bisognerà però, per forza, USCIRE da \mathbb{Q} .

\mathbb{R} = insieme dei numeri reali relativi (quelli che stanno sulla "number line")

\mathbb{Q} = insieme dei numeri razionali relativi (quelli che sono esprimibili sotto forma di frazione, ossia di rapporto fra due interi). Sono razionali tutti gli interi ($5 = 5/1$) e tutti quei numeri con la virgola che sono o finiti, o periodici.

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = insieme dei numeri irrazionali relativi. Sono irrazionali tutti i numeri con la virgola che sono illimitati non periodici.

\mathbb{Z} = insieme dei numeri interi relativi (è un sottoinsieme di \mathbb{Q} , che a sua volta è un sottoinsieme di \mathbb{R})

2. NUMERI IMMAGINARI, NUMERI COMPLESSI

RIASSUNTO

- La divisione fra i due interi 23 e 4 (cioè, l'operazione $23 : 4$) è impossibile (a meno che non ci si accontenti di un risultato approssimato) nell'insieme degli interi. Tuttavia, USCENDO da tale insieme si riesce a trovarne il risultato: è la frazione $23/4$, che appartiene NON all'insieme degli interi, ma al suo AMPLIAMENTO \mathbb{Q} .
- La differenza fra i due numeri assoluti 5 e 7 presi in quest'ordine (vale a dire, l'operazione $5 - 7$) è impossibile nell'insieme dei numeri assoluti. Diventa però possibile se si ESCE da tale insieme, passando all'insieme, PIU' AMPIO, dei numeri relativi. In esso si trova finalmente il risultato: -2 .
- La radice quadrata del numero razionale 2 (ossia, $\sqrt{2}$) è un'operazione impossibile in \mathbb{Q} . Essa diventa possibile solo a patto di USCIRE da \mathbb{Q} . Il risultato di tale operazione non appartiene a \mathbb{Q} ma al suo AMPLIAMENTO \mathbb{R} .

In tutti e tre i casi, il risultato di una certa operazione fra numeri di un dato insieme è stato trovato uscendo dall'insieme considerato e passando ad un insieme più vasto; ampliando, insomma, la famiglia dei numeri con cui si lavorava.

Per l'operazione $\sqrt{-1}$ in Algebra si percorre una strada analoga.

Tale operazione coinvolge un numero reale, ma non ha risultato nell'insieme \mathbb{R} .

Allora **AMPLIEREMO** l'insieme \mathbb{R} ,

passando ad un insieme più vasto nel quale l'operazione sia possibile.

Procediamo.

Indicheremo col simbolo i il risultato dell'operazione $\sqrt{-1}$.

Il numero i verrà detto "unità immaginaria". La sua proprietà fondamentale sarà dunque $i^2 = -1$.

i non appartiene, non può appartenere, all'insieme \mathbb{R} ;

i è invece il "capostipite" di una nuova famiglia di numeri, **ESTERNI AL "RECINTO" \mathbb{R}** .

Moltiplicando l'unità immaginaria i per i numeri reali si ottengono nuove entità numeriche, che vengono dette **NUMERI IMMAGINARI**.

Esempi: $3i$ $-5i$ $\frac{2}{9}i$ $\sqrt{3}i$

Sottolineiamo subito che le operazioni con queste nuove entità numeriche vengono definite in modo tale che restino valide tutte le proprietà di cui le analoghe operazioni godono in \mathbb{R} .

Se noi ora prendiamo, ad esempio, il numero $3i$ e lo eleviamo al quadrato, avremo

$$(3i)^2 = 3^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

Quindi il numero $3i$ risolve il problema di trovare un risultato per la radice quadrata del numero negativo -9 !

Anzi, è pure

$$(-3i)^2 = (-3)^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

e quindi, nell'insieme dei numeri immaginari,

il numero negativo -9 si trova ad avere ben DUE radici quadrate:

il numero immaginario $3i$ e il numero immaginario $-3i$.

A ben guardare, la stessa operazione dalla quale avevamo preso le mosse, ossia $\sqrt{-1}$, si ritrova ad avere DUE risultati: i e $-1 \cdot i$ (che si abbrevia in $-i$):

$$\sqrt{-1} = \pm i \quad (\text{NOTA})$$

NOTA: quando il simbolo di radice è utilizzato con l'intesa

di poter uscire dal campo dei numeri reali per trovare il risultato dell'operazione, allora non si "scarta" più nessun risultato,

e si parla di "radici" (al plurale) del numero considerato.

Generalizzando,

i numeri immaginari sono caratterizzati dal fatto che il loro quadrato è sempre un numero reale <0 ; essi risolvono perciò il problema di estrarre la radice quadrata di un numero reale negativo qualsiasi:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} = \pm i \cdot 5 = \pm 5i$$

La somma indicata di un numero reale con un numero immaginario prende il nome di **NUMERO COMPLESSO**.

Esempi di numeri complessi sono: $3+7i$ $-\frac{1}{2}+\sqrt{2} \cdot i$ $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}i$ $12,3-7,2i$

R I C A P I T O L I M O	Si dice UNITA' IMMAGINARIA un numero, indicato con il simbolo i ,
	il quale elevato al quadrato dà come risultato -1 : $i^2 = -1$.
	Si dicono NUMERI IMMAGINARI
	i numeri ottenuti moltiplicando l'unità immaginaria i per un numero reale.
	Si dicono NUMERI COMPLESSI
	i numeri che sono una somma indicata di un numero reale con un numero immaginario, ossia i numeri della forma $a+bi$ (con a, b numeri reali; i unità immaginaria)
	<ul style="list-style-type: none"> • a viene detta "parte reale"; • bi viene detta "parte immaginaria"; • b è chiamato il "coefficiente dell'immaginario".

L'insieme dei numeri complessi viene indicato col simbolo \mathbb{C} .

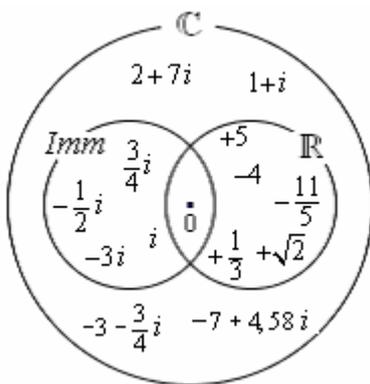
Per $a = 0$, l'espressione $a+bi$ diventa semplicemente bi ;

dunque possiamo considerare i numeri immaginari come casi particolari di numeri complessi.

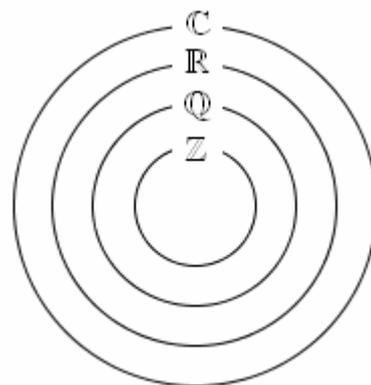
Ma per $b = 0$, l'espressione $a+bi$ diventa semplicemente a ;

quindi, anche i numeri reali possono essere visti come particolari numeri complessi,

e in definitiva, dal punto di vista insiemistico, la situazione è la seguente:



*Il numero 0
può essere
anche scritto
come $0 \cdot i$,
quindi è
l'unico numero
reale
ed immaginario
al tempo stesso.*



$\mathbb{C} = \{\text{complessi}\}$
 $\mathbb{R} = \{\text{reali}\}$
 $\mathbb{Q} = \{\text{razionali}\}$
 $\mathbb{Z} = \{\text{interi relativi}\}$

Abbiamo anticipato che **le operazioni coi numeri complessi vengono definite in modo tale che si conservino tutte le proprietà valide in campo reale.**

Di conseguenza, per svolgere una qualunque operazione coi numeri complessi, basterà basarsi sulle ordinarie regole del calcolo algebrico e letterale, applicandole nel modo consueto (tutto ciò che occorre è semplicemente di ricordarsi che $i^2 = -1$). Ad esempio:

$$(3+2i) + (-5+i) = 3+2i-5+i = -2+3i$$

$$(3+2i) - (-5+i) = 3+2i+5-i = 8+i$$

$$(3+2i)(-5+i) = -15+3i-10i+2i^2 = -15-7i+2 \cdot (-1) = -15-7i-2 = -17-7i$$

$$(-5+i)^2 = 25-10i+i^2 = 25-10i-1 = 24-10i$$

Per quanto riguarda la divisione, essa può essere effettuata scrivendo la frazione corrispondente, e moltiplicandone i termini per un medesimo numero (proprietà invariantiva delle frazioni), scelto in modo tale da far sì che, dopo l'operazione, il denominatore "perda" l'unità immaginaria e diventi quindi un numero reale:

$$(2-i) : (3+2i) = \frac{2-i}{3+2i} = \frac{2-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{6-4i-3i+2i^2}{9-4i^2} = \frac{6-7i-2}{9+4} = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$