

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - SECONDA PARTE

NOTA - Preliminare a questi argomenti, è la conoscenza dei “numeri complessi” (capitolo precedente)

a) RELAZIONI FRA SOLUZIONI E COEFFICIENTI IN UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO

In ogni equazione di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

la somma e il prodotto delle soluzioni sono legati ai coefficienti dalle formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Esempio 1. Le soluzioni dell'equazione $2x^2 - 5x - 3 = 0$ hanno per somma $-\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$ e per prodotto $\frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$

Risolvi l'equazione e verificalo direttamente!

Esempio 2. Le soluzioni dell'equazione $x^2 + 4x + 5 = 0$ non esistono in campo reale;

sono due numeri complessi, la cui somma è $-\frac{b}{a} = -4$ e il cui prodotto è $\frac{c}{a} = 5$

b) TROVARE DUE NUMERI CONOSCENDONE LA SOMMA s E IL PRODOTTO p

Il problema si può risolvere in più modi (vedi \Rightarrow); tuttavia,

basta scrivere l'equazione di 2° grado $x^2 - sx + p = 0$ e risolverla.

Le soluzioni di questa equazione saranno i due numeri cercati!

Infatti, tali due soluzioni avranno per somma $-\frac{b}{a} = -\frac{-s}{1} = s$ e per prodotto $\frac{c}{a} = \frac{p}{1} = p$.

Esempio: trovare due numeri sapendo che la loro somma è $s = 4\sqrt{3}$ e il loro prodotto è $p = 11$.

$$x^2 - 4\sqrt{3} \cdot x + 11 = 0; \quad x_{1,2} = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 11} = \begin{cases} 2\sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

NOTA Se nell'equazione $x^2 - sx + p = 0$ è $\Delta = 0$, allora i due numeri sono uguali; se è $\Delta < 0$, i due numeri sono complessi: in \mathbb{R} , non esistono.

ESERCIZI (trovare due numeri conoscendone somma e prodotto)

- | | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $s = 134, p = 1353$ | 2) $s = 4, p = 1$ | 3) $s = 2, p = -575$ | 4) $s = 54, p = 729$ |
| 5) $s = \frac{7}{6}, p = \frac{1}{3}$ | 6) $s = -\frac{5}{6}, p = -1$ | 7) $s = 0, p = -5$ | 8) $s = 5, p = 5$ |
| 9) $s = 2\sqrt{3}, p = 1$ | 10) $s = -4\sqrt{3}, p = 12$ | 11) $s = 4k\sqrt{2}, p = 6k^2$ | 12) $s = a^2 + 2, p = a^3 + 1$ |

RISULTATI

- | | | | |
|---|---------------------------------|-----------------------------|---|
| 1) 11, 123 | 2) $2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$ | 3) -23, 25 | 4) 27, 27 |
| 5) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ | 6) $-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ | 7) $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ | 8) $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ |
| 9) $\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2}$ | 10) $-2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$ | 11) $k\sqrt{2}, 3k\sqrt{2}$ | 12) $a + 1, a^2 - a + 1$ |