e) QUESITI SULLE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI 2° GRADO

E' data l'equazione

$$\boldsymbol{(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0}$$

Si chiede di determinare il parametro *m* in modo che:

- **i)** **la somma delle soluzioni valga 4**
- **ii)** **il prodotto delle soluzioni valga 2**
- **iii)** **le soluzioni siano coincidenti**
- **iv)** **una soluzione sia uguale a 2**
- **v)** **la somma dei quadrati delle soluzioni sia 10**
- **vi)** **le soluzioni siano reciproche l'una dell'altra**
- **vii)** **le soluzioni siano antireciproche**
- **viii)** **le soluzioni siano opposte**

i)

$$\boxed{?m/\ \ x_1+x_2=4}$$

$$-\frac{b}{a}=4$$

$$\frac{m+5}{m-1}=4$$

$$m+5=4m-4 \quad (m\neq 1)$$

$$-3m=-9$$

$$m=3$$

Sappiamo che in ogni equazione di 2° grado la somma delle soluzioni è sempre uguale a $-\frac{b}{a}$ (opposto del rapporto fra il secondo e il primo coefficiente). Porremo perciò la condizione $-\frac{b}{a}=4$, per poi cercare i valori del parametro che la soddisfano.

Abbiamo trovato m=3. Facciamo la verifica!
Andiamo a vedere cosa diventa la nostra equazione nel caso m=3,
e risolviamola, per controllare che la somma delle soluzioni valga proprio 4:

$$(3-1)x^2-(3+5)x+2\cdot 3=0;\quad \cancel{2}x^2-\cancel{8}^4x+\cancel{6}^3=0;\quad (x-1)(x-3)=0;\quad x=1\vee x=3\rightarrow 1+3=4,\ OK!$$

ii)

$$\boxed{?m/\ \ x_1x_2=2}$$

$$\frac{c}{a}=2$$

$$\frac{2m}{m-1}=2$$

$$\cancel{2m}=\cancel{2m}-2 \quad (m\neq 1)$$

$$0=-2 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

Sappiamo che in ogni equazione di 2° grado il prodotto delle soluzioni è sempre uguale a $\frac{c}{a}$ (rapporto fra il termine noto e il primo coefficiente). Porremo perciò la condizione $\frac{c}{a}=2$, per poi cercare i valori del parametro che la soddisfano.

Abbiamo trovato un'equazione, nell'incognita m, impossibile.
Ciò significa che non esiste alcun valore di m per cui il prodotto delle soluzioni valga 2.
Insomma, nella famiglia delle infinite equazioni $(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0$,
non ne esiste nemmeno una nella quale il prodotto delle soluzioni valga 2.

iii)

$$\boxed{?m/\ \ x_1=x_2}$$

$$\Delta=0 \quad (b^2-4ac=0)$$

$$(m+5)^2-8m(m-1)=0$$

$$m^2+10m+25-8m^2+8m=0$$

$$-7m^2+18m+25=0$$

$$7m^2-18m-25=0$$

MOLTO IMPORTANTE !!!
In un'equazione di 2° grado
le **SOLUZIONI** sono **COINCIDENTI** se e solo se $\boldsymbol{\Delta=0}$

Nel caso poi in cui b sia pari, converrà rimpiazzare questa condizione con $\boldsymbol{\Delta/4=0}$ (equivalente ma più comoda).
Ad esempio, l'equazione $x^2+2(2-k)x-(2+9k)=0$
ha soluzioni coincidenti quando $\frac{\Delta}{4}=(2-k)^2+(2+9k)=0$ ossia
$4-4k+k^2+2+9k=0;\ k^2+5k+6=0;\ \ldots\ k=-3\vee k=-2$

$$m_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+175}}{7}=\frac{9\pm\sqrt{256}}{7}=\frac{9\pm16}{7}=\left\langle\begin{array}{l}-1\\ 25/7\end{array}\right.$$

Verifica nel caso $m=-1$

$$(-1-1)x^2-(-1+5)x+2(-1)=0$$

$$-2x^2-4x-2=0;\quad x^2+2x+1=0;\quad (x+1)^2=0;$$

$x_1=x_2=-1\rightarrow$ *soluzioni coincidenti*, *OK*

Fai tu, caro studente, la verifica con m = 25/7.

… Certo, sarebbe pure possibile:
1) risolvere l'equazione, trovando x_1 e x_2 che sarebbero espressioni con *m* sotto radice
2) uguagliare le due espressioni, ottenendo *in questo modo* l'equazione finalizzata a determinare *m*.

Tale procedimento sarebbe però inutilmente lungo e ingombrante!

iv)

$\boxed{?m\,/\;\; x=2}$

Sostituiamo...

$$(m-1)\cdot 2^2-(m+5)\cdot 2+2m=0$$
$$4m-4\cancel{-2m}-10\cancel{+2m}=0$$
$$4m=14$$
$$m=7/2$$

BANALE, MA IMPORTANTE:
una data equazione ammette come soluzione un determinato numero se e solo se, sostituendo quel numero al posto dell'incognita, si ottiene un'uguaglianza vera.

Verifica tu, caro lettore, che con m=7/2 l'equazione ammette le due soluzioni x=7/5 e, appunto, x=2.

v)

$\boxed{?m\,/\; x_1^2+x_2^2=10}$

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$$
$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=10$$
$$\left(\frac{m+5}{m-1}\right)^2-2\frac{2m}{m-1}=10$$
$$(m+5)^2-4m(m-1)=10(m-1)^2 \quad (m\neq 1)$$
$$\dots\; 13m^2-34m-15=0$$
$$m_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289+195}}{13}=\frac{17\pm 22}{13}=\begin{cases}-\dfrac{5}{13}\\[2mm] \dfrac{39}{13}=3\end{cases}$$

La verifica, in ciascuno dei due casi, è lasciata allo studente.

Con $m=-\dfrac{5}{13}$

le due soluzioni sono irrazionali; tuttavia, come si constata col calcolo, la somma dei loro quadrati dà proprio 10.

♥ **LE FORMULE DI WARING**

Vale l'identità $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$
che ci permette di ricondurre la somma dei quadrati alla somma e al prodotto delle basi.

Abbiamo, in pratica, utilizzato la prima di una sequenza di formule, chiamate **formule di Waring**, le quali **permettono di esprimere una somma di due potenze di ugual grado** (quadrati, cubi, …) **in funzione della somma delle basi e del loro prodotto.**

$$\boxed{x^2+y^2}=x^2+2xy+y^2-2xy=\boxed{(x+y)^2-2xy}$$

$$\boxed{x^3+y^3}=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2=$$
$$=\boxed{(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

$$\boxed{x^4+y^4}=(x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3=$$
$$=(x+y)^4-4xy\left(x^2+y^2\right)-6x^2y^2=$$
$$=(x+y)^4-4xy\left[(x+y)^2-2xy\right]-6x^2y^2=$$
$$=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+8x^2y^2-6x^2y^2=$$
$$=\boxed{(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2}$$

...

vi)

$\boxed{?m\,/\; x_1=\dfrac{1}{x_2}}$

$$x_1x_2=1$$
$$\frac{c}{a}=1$$
$$\frac{2m}{m-1}=1$$
$$\dots\; m=-1$$

Ricordiamo che due numeri si dicono "reciproci" se il loro prodotto è 1 quindi se ognuno di essi è uguale a "1 fratto l'altro".
Ad esempio, sono reciproci i numeri

4 e $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{3}{2}$; $-\dfrac{3}{5}$ e $-\dfrac{5}{3}$

vii)

$\boxed{?m\,/\; x_1=-\dfrac{1}{x_2}}$

$$x_1x_2=-1$$
$$\frac{c}{a}=-1$$
$$\frac{2m}{m-1}=-1$$
$$\dots\; m=1/3$$

"Antireciproco" significa "l'opposto del reciproco".
Ad es., sono antireciproci i due numeri $\dfrac{2}{3}$ e $-\dfrac{3}{2}$.

Due numeri sono antireciproci se e solo se hanno per prodotto -1.

viii)

$\boxed{?m/\,x_1=-x_2}$

$$x_1+x_2=0$$
$$-\frac{b}{a}=0$$
$$\frac{m+5}{m-1}=0$$
$$\dots\; m=-5$$

Molto semplice: due numeri sono opposti se e solo se la loro somma è 0.

Verifica. La nostra equazione $(m-1)x^2-(m+5)x+2m=0$ *diventa, con* $m=-5$,

$$(-5-1)x^2-(-5+5)x+2(-5)=0;\quad -6x^2-10=0;\quad 3x^2+5=0$$

Ora, in campo reale questa equazione NON ha soluzioni opposte, come si desiderava, bensì è impossibile; tuttavia, sconfinando in campo complesso si può scrivere:

$x^2=-\dfrac{5}{3};\quad x=\pm\sqrt{-\dfrac{5}{3}}=\pm i\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ *quindi si ottengono due soluzioni effettivamente opposte.*

Ricapitolando, il valore richiesto di m

- *non esiste se intendiamo che le soluz. debbano obbligatoriamente appartenere a* $\mathbb{R}$,
- *esiste ed è m=–5 se ammettiamo che le soluzioni possano essere cercate in tutto* $\mathbb{C}$.