

ESERCIZI (quesiti sulle equazioni parametriche di 2° grado)

E' richiesto, in ciascun esercizio, dopo aver determinato il valore desiderato del parametro, di calcolare pure qual è il valore delle soluzioni nel caso specifico. Ciò servirà anche da verifica.

Nell'equazione ...	determinare il parametro (o i parametri) in modo che ...
1) $x^2 + 2ax + a + 6 = 0$	le soluzioni coincidano
2) $(b-1)x^2 + bx + (1-b) = 0$	$\sqrt{2}$ sia soluzione
3) $x^2 - 4mx + m - 1 = 0$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano reciproche 3. le soluzioni siano antireciproche 4. una soluzione sia nulla
4) $(2-a)x^2 + 2(3-a)x + 4 = 0$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano uguali 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche
5) $q(x^2 + 1) = 4x$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano reciproche 3. le soluzioni siano uguali 4. le soluzioni abbiano per somma 4
6) $x^2 - (3a + 2b + 1)x + a + b + 1 = 0$	le soluzioni siano i numeri 1 e 2
7) $(a-1)x^2 + ax + (a-1) = 0$	1. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$ 2. l'equazione data abbia una soluzione in comune con l'equazione $x^2 - 4x + 3 = 0$
8) $kx^2 + (5k-1)x + 4 = 0$	1. $x_1 \equiv x_2$ 2. $x_1^2 + x_2^2 = 65/4$ 3. una soluzione sia -4
9) $x^2 = \frac{4ax-3}{a}$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. una soluzione sia 3 4. la somma delle soluzioni sia 4 5. la somma delle soluzioni sia -4 6. $x_1 \cdot x_2 = 3$ 7. il prodotto delle soluzioni sia 6 8. le soluzioni siano reciproche
10) $kx^2 + (2k+1)x + k = 0$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche
11) $kx^2 + 2(k+1)x + (k+2) = 0$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche 5. la somma dei quadrati delle soluzioni sia 10
12) $(m+4)x^2 + (m-1)x - 1 = 0$	1. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ 2. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 10$
13) $cx^2 - cx + 2 = 0$	1. $x_1^3 + x_2^3 = 7$ 2. $x_1^4 + x_2^4 = \frac{1}{8}$
14) Per quali valori dei parametri a, b le due equazioni $2x^2 + 7x = 4$ e $(a+3b)x^2 + 2ax - (a+b+2) = 0$ hanno le stesse soluzioni?	
15) Scrivi un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni i due numeri -8 e 3 .	
16) Nell'equazione $x^2 - (k+5)x + 2(2k+1) = 0$ determina k in modo che le soluzioni siano una doppia dell'altra INDICAZIONE: si potrebbe risolvere, ottenendo le soluzioni come espressioni contenenti k , poi cercare i valori di k per cui risulti $x_1 = 2x_2$ oppure $x_2 = 2x_1$; tuttavia, le equazioni nell'incognita k ottenute in questo modo conterrebbero k sotto radice e sarebbero, dunque, equazioni "irrazionali"; ora, il discorso su tali tipi di equazioni, risolvendo le quali è possibile imbattersi in soluzioni "non accettabili", non è stato ancora trattato. C'è d'altra parte un metodo molto migliore: il sistema $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = k + 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 2(2k+1) \end{cases}$ porta a determinare x_1, x_2, k . Pur essendo il sistema di 2° grado, ci puoi provare: non è difficile.	
17) Nell'equazione $(h+1)x^2 + 3hx - 2h = 0$ determina h in modo che il rapporto delle soluzioni sia -4	
18) Nell'equazione $x^2 - 2(m+1)x + 4m + 3 = 0$ determina m in modo che $x_2 - x_1 = 2$ (vedi esercizio 16)	
19) Nell'equazione $x^2 - 2(m+1)x + 4m + 3 = 0$ determina m in modo che $ x_1 + x_2 = 10$	
20) Nell'equazione $rx^2 - 2rx - 24 = 0$ determina r in modo che le soluzioni: 1. siano uguali 2. siano opposte 3. siano reciproche 4. abbiano prodotto 3 5. abbiano rapporto 3	

RISPOSTE

1) $a = -2$ (in questo caso $x_1 = x_2 = 2$) oppure $a = 3$ (in questo caso $x_1 = x_2 = -3$) Ricorda che la condizione da porre è, per le soluzioni coincidenti, $\Delta = 0$; qui è meglio, dato che il “b” è pari, $\frac{\Delta}{4} = 0$	2) $b = \sqrt{2} - 1$ L'altra soluzione è $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	3) 1. $m = 0$ ($x = \pm 1$) 2. $m = 2$. In questo caso si ha $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$, e questi numeri sono fra loro reciproci in quanto - moltiplicandoli, si ottiene 1 (verificalo!) - oppure, facendo ad es. il calcolo $1/x_1$, si ottiene, dopo razionalizzazione, x_2 3. $m = 0$ ($x = \pm 1$) 4. $m = 1$ (l'altra soluz. vale 4)
4) 1. $a = 3$ 2. $a = 1$ 3. $a = -2$ 4. $a = 6$ 5) 1. Impossibile, nessun valore di q 2. Qualsiasi valore di q eccetto 0 3. $q = \pm 2$ 4. $q = 1$ 6) $a = 0$, $b = 1$ Sostituendo al posto di x prima il valore 1, poi 2, si hanno due condizioni, di cui si fa il sistema.		
7) 1. $a = 2/3$. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} \dots$ 2. $a = 2/3$, $a = 10/13$	8) 1. $k = 1$ ($x_{1,2} = -2$) $\vee$ $k = 1/25$ ($x_{1,2} = 10$) 2. $k = 2$ ($x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{1}{2}$) $\vee$ $k = \frac{2}{35}$ ($x_{1,2} = \frac{25 \pm 3i\sqrt{55}}{4}$) 3. $k = 2$ (l'altra soluzione è $-1/2$)	
9) 1. $a = 3/4$ 2. nessun valore di a 3. $a = 1$ 4. qualsiasi valore di a , tranne 0 5. nessun valore di a 6. $a = 1$ 7. $a = 1/2$. In questo caso le soluz. sono due numeri complessi, $2 - i\sqrt{2}$ e $2 + i\sqrt{2}$, il cui prodotto è appunto 6. 8. $a = 3$. In questo caso le soluzioni sono due numeri irrazionali, $2 - \sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$, appunto reciproci fra loro: puoi constatarlo ♫ moltiplicandoli (otterrai 1, e due numeri sono reciproci se e solo se il loro prodotto è 1) ♫ oppure eseguendo per esempio il calcolo $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$		
10) 1. $k = -1/4$ 2. $k = -1/2$ (ma in questo caso le soluzioni sono complesse; in $\mathbb{R}$, il problema è impossibile) 3. Qualsiasi valore di k , tranne 0 4. Impossibile, nessun valore di k		
11) 1. Impossibile 2. $k = -1$ 3. Impossibile 4. $k = -1$ 5. $k = 1$, $k = -1/2$	12) 1. $m = 2$ 2. $m = \pm 1$ Denom. comune, innanzitutto ...	13) 1. $c = -1$ 2. $c = 8$ ($x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$) $\vee$ $c = \frac{8}{7}$ (soluz. complesse) Si utilizzano le formule di Waring, pag. 65.
14) $a = 7$, $b = -1$		
15) Si potrebbe pensare alla generica equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e imporre che $-8, 3$ ne siano soluzioni; si otterrebbe così il sistema $\begin{cases} 64a - 8b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$ che non ha una sola soluzione, bensì ne ha infinite, perché è verificato da tutte le terne a, b, c per le quali $b = 5a$, $c = -24a$, con a qualsiasi. Ad esempio, una terna che “va bene” è $a = 1, b = 5, c = -24$; un'altra è $a = -3, b = -15, c = 72$... Moltiplicando tutti i coefficienti di un'equazione per uno stesso numero, le soluzioni non cambiano! Tuttavia, c'è un modo molto veloce ed efficace per scrivere un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni due numeri assegnati: nel nostro caso, l'equazione cercata è semplicemente $(x + 8)(x - 3) = 0$ (anche tutte le equazioni ottenibili moltiplicando quella per una costante risolverebbero il problema).		
♥ In generale: un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni due valori assegnati r, s è semplicemente la $(x - r)(x - s) = 0$. Altro es.: un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni $-\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ è $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0$ che si può riscrivere come $(3x + 2)(4x - 3) = 0$.		
16) $k = 4$ 17) $h = 1$ (perché $h = 0$ non va bene?) 18) $m = -1$, $m = 3$ 19) $m = 4$, $m = -6$ 20) 1. $r = -24$ 2. nessun valore di r 3. $r = -24$ 4. $r = -8$ (però con soluzioni complesse) 5. $r = -32$		

Puoi andare a vedere come
sono spiegate le equazioni di 2° grado
sul bel sito www.themathpage.com
di Lawrence Spector

TheMathPage
Lawrence Spector

Di equazioni di 2° grado
si parla anche nel capitolo su
"Grafici e risoluzioni grafiche"
(da pag. 106 a pag. 113)