

## OLTRE LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

### 1. EQUAZIONI ALGEBRICHE, LORO SOLUZIONI E RISOLUBILITÀ

#### Definizioni

Un'equazione si dice "**algebraica**" se è riconducibile alla forma  $P(x) = 0$ , con  $P(x)$  polinomio

Dicesi "**grado**" di un'equazione algebrica  $P(x) = 0$ , il grado del polinomio  $P(x)$

#### □ QUANTE SOLUZIONI HA UN'EQUAZIONE ALGEBRICA ?

Alla domanda risponde il "Teorema Fondamentale dell'Algebra", di cui abbiamo già parlato a pag. 56, nel capitolo sui Numeri Complessi.

La prima dimostrazione del T.F.A. viene attribuita al tedesco Gauss (1777-1855) e datata 1799, anche se tale dimostrazione, non esente da pecche, dovette essere successivamente perfezionata ad opera del francese Jean Robert Argand (1768-1822) e dello stesso Friedrich Gauss.

#### Teorema Fondamentale dell'Algebra (T.F.A.)

♥ Un'equazione algebrica di grado  $n$  a coefficienti reali o complessi ammette esattamente  $n$  soluzioni, purché si intenda di cercare le soluzioni in campo complesso e si conti ciascuna soluzione con la "molteplicità" (NOTA) che le compete.

#### NOTA

La definizione di **molteplicità di una soluzione di un'equazione algebrica** (sinonimo di "soluzione" è "radice") può essere formulata in diversi modi equivalenti.

Ad esempio, possiamo dire che

una soluzione  $\alpha$  di un'equazione algebrica  $P(x) = 0$  ha molteplicità  $k$  se e solo se il fattore  $(x - \alpha)$  compare per esattamente  $k$  volte nella scomposizione del polinomio  $P$  in fattori di 1° grado.

Si può dimostrare (vedi pag. 56) che una scomposizione in fattori "lineari" (= di 1° grado) esiste certamente per ogni polinomio a coefficienti reali o complessi, anche se non è possibile costruire alcun algoritmo di carattere generale che permetta di effettuarla, "nella pratica", per un polinomio arbitrario.

#### □ Esempio 1

$$x^4 + 2x^3 - 15x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad (x \cdot x = 0) \rightarrow x_1 = x_2 = 0, \text{ o anche: " } x = 0 \text{ soluzione di molteplicità 2"}$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow x_3 = -5, x_4 = 3 \quad (\text{con la formula oppure per scomposizione})$$

Dunque abbiamo trovato **4 soluzioni, tante quant'è il grado**, a patto di tener conto che la soluzione  $x = 0$  "va contata 2 volte", "è soluzione doppia", "è soluzione di molteplicità 2".

#### □ Esempio 2

$$x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8 = 0$$

Scomponiamo con Ruffini ottenendo:

$$(x - 2)^3(x^2 + 1) = 0$$

da cui:

$$(x - 2)^3 = 0 \rightarrow x = 2 \quad (\text{molteplicità 3})$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione in } \mathbb{R}, \text{ ma in } \mathbb{C}: x^2 = -1, \text{ da cui } x = \pm i$$

Anche:

$$(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x + i)(x - i) = 0 \quad \text{in quanto } (x + i)(x - i) = x^2 - i^2 = x^2 - (-1) = x^2 + 1$$

In definitiva, le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 2 & (\text{molteplicità } 3) \\ x = -i & (\text{molteplicità } 1) \\ x = i & (\text{molteplicità } 1) \end{cases}$$

Volendo si può scrivere:  $x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = -i \quad x_5 = i$

**Le soluzioni risultano quindi essere 5, cioè esattamente tante quant'è il grado dell'equazione.**

Se invece avessimo lavorato esclusivamente in campo reale, avremmo trovato una sola soluzione ( $x = 2$ ) o, tenendo conto della molteplicità, 3 soluzioni  $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ .

## ❑ ESISTONO FORMULE PER LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO SUPERIORE AL 2°?

Abbiamo visto che le equazioni di 2° grado  $ax^2 + bx + c = 0$  ammettono una formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI 2° GRADO

Anche le equazioni di 1° grado  $ax + b = 0$

ammettono un procedimento risolutivo, che, volendo, si può sintetizzare in una formula:

$$ax + b = 0; \quad ax = -b;$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI 1° GRADO

Già 4000 anni fa circa, i babilonesi sapevano affrontare un'equazione di 2° grado (purché avesse almeno una soluzione positiva),

con procedimenti che sostanzialmente equivalevano all'applicazione della formula da noi attualmente usata.

Bene!

♥ **Pure le equazioni di 3° e di 4° grado ammettono la loro formula risolutiva;**

tali formule furono scoperte nel XVI secolo

(apparvero per la prima volta in un testo del 1545, l' "Ars Magna" dell'italiano **Girolamo Cardano**).

♥ **E' stato invece dimostrato che le equazioni di 5° grado e di grado superiore al 5° non ammettono formula risolutiva;** cioè, che non può esistere alcuna formula

la quale permetta di calcolare, mediante un numero finito di operazioni sui coefficienti, le soluzioni di una generica equazione di 5° grado, o di 6° grado, ecc.

Tale dimostrazione di impossibilità si deve ai due studiosi

- Niels Henrik **Abel** (norvegese, 1802-1829)
- ed Évariste **Galois** (francese, 1811-1832, ritenuto uno dei matematici più geniali di tutti i tempi).

**Purtuttavia, per le equazioni di 5° grado o di grado superiore al 5°**

**esistono metodi che consentono di approssimare le soluzioni**

**(vale a dire, di calcolarle non proprio esattamente, ma comunque con la precisione desiderata).**

Tali metodi, la cui applicazione al giorno d'oggi è facilitata dall'uso dei computer,

fanno parte di quella branca della Matematica che prende il nome di "**calcolo numerico**".

Per approfondimenti sulla storia delle equazioni algebriche

puoi ad esempio consultare un bell'articolo del professor Dario Palladino [⇨](#)

In queste pagine non presenteremo le formule risolutive delle equazioni di 3° e di 4° grado, e neppure i metodi di "calcolo numerico" cui accennavo prima; tuttavia

- vedremo rapidamente alcuni metodi per la risoluzione di certe equazioni algebriche che costituiscono "**casi particolari**" (eq. "binomie", "trinomie", risolubili "per fattorizzazione" o "con artifici")
- riprenderemo il **metodo grafico**, già presentato nel Volume 1, che permette di visualizzare e di approssimare le soluzioni di un'equazione qualsiasi (anche non algebrica!).  
Bisogna innanzitutto imparare a tracciare bene questi grafici con carta e matita; volendoli poi realizzare al computer, ci si può servire ad esempio dell'ottimo freeware *GeoGebra*.

## TERMINOLOGIA

❑ **Quando si parla di equazioni, talvolta al posto di "SOLUZIONE" si usa il sinonimo "RADICE".**

Per fare un esempio, l'equazione  $3x - 7 = 0$  ha una sola *radice*: il numero  $7/3$ .

Ancora: l'equazione  $x^2 - 4x - 5 = 0$  ha due radici, che sono  $-1$  e  $5$ .

❑ **Si dice "ZERO" di un polinomio ogni numero che, sostituito al posto della variabile del polinomio, rende quest'ultimo uguale a 0.**

Ad esempio, gli "zeri" del polinomio  $x^3 - x$  sono i numeri  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ .

Insomma, schematicamente:  $\alpha$  è uno zero del polinomio  $P(x)$  se e solo se risulta  $P(\alpha) = 0$ .

Ovviamente, dato un polinomio  $P(x)$ , i suoi zeri non sono altro che le soluzioni o radici dell'equazione  $P(x) = 0$  (quest'ultima si dice "l'equazione associata al polinomio  $P$ ").

Insomma, **gli zeri di un polinomio sono le soluzioni (= "radici") dell'equazione associata.**

E' lecito comunque, anche se un tantino improprio, parlare di "radici" (inglese: *roots*) pure con riferimento a un polinomio, anziché impiegare il termine "zeri".