3. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO: PRINCIPALI TIPOLOGIE

A) Equazioni risolubili per SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

1) $\boxed{x^3-4x=0}$

$x\left(x^2-4\right)=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$x=0 \vee x=-2 \vee x=2$

$\textit{equazione di } 3° \textit{ grado} \rightarrow 3 \textit{ soluzioni}: \ x_1=0, \ x_2=-2, \ x_3=2$

2) $\boxed{x^4+x^2-12=0}$

$\left(x^2-3\right)\left(x^2+4\right)=0$

$x^2-3=0 \quad x^2=3 \quad x=\pm\sqrt{3}$

$x^2+4=0 \quad x^2=-4 \quad \textit{impossibile in } \mathbb{R}; \ \textit{in } \mathbb{C}, \ x=\pm 2i$

$\textit{equazione di } 4° \textit{ grado} \rightarrow \textit{in } \mathbb{C}, \ 4 \textit{ soluzioni}: \ x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=\sqrt{3}, \quad x_3=-2i, \quad x_4=2i$

3) $\boxed{4x^3-8x^2-11x-3=0}$

Scomponendo con Ruffini si ottiene:

$(x-3)(2x+1)^2=0$

$x=3 \vee x=-\frac{1}{2}$ (*soluz. di molteplicità* 2)

$\textit{equazione di } 3° \textit{ grado} \rightarrow \textit{tenendo conto della molteplicità}, 3 \textit{ soluzioni}: \ x_1=3, \ x_2=x_3=-\frac{1}{2}$

4) $\boxed{6x^5-3x^4-2x^3+x^2=0}$

$x^2\left(6x^3-3x^2-2x+1\right)=0$

$x^2\left[3x^2(2x-1)-(2x-1)\right]=0$

$x^2(2x-1)\left(3x^2-1\right)=0$

$x^2=0 \rightarrow x=0 \ (\textit{molt. } 2)$

$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

$3x^2-1=0 \rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\boxed{x^2\left(x^2-1\right)=1-2x}$

$x^4-x^2=1-2x$

$x^4-x^2+2x-1=0$

$x^4-(x-1)^2=0$

$\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)=0$

$x^2+x-1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x^2-x+1=0 \ \textit{imposs. in } \mathbb{R} \ (\Delta<0); \ \textit{in } \mathbb{C}, \ x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

B) Equazioni BINOMIE $\boxed{ax^n + b = 0}$

1)

$\boxed{8x^3 - 125 = 0}$

$8x^3 = 125$

$x^3 = \dfrac{125}{8}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} = \dfrac{5}{2}$

Risolvendo per scomposizione in fattori,
si troverebbero anche le soluzioni complesse:

$8x^3 - 125 = 0$

$(2x-5)(4x^2+10x+25) = 0$

$x = \dfrac{5}{2};\quad x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-100}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{-75}}{4} =$

$= \dfrac{-5 \pm i\sqrt{75}}{4} = \dfrac{-5 \pm 5i\sqrt{3}}{4}$

2)

$\boxed{128x^3 + 6 = 0}$

Semplifico innanzitutto per 2 e ottengo

$64x^3 + 3 = 0$

$64x^3 = -3$

$x^3 = -\dfrac{3}{64}$

$x = \sqrt[3]{-\dfrac{3}{64}} = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{64}} = -\dfrac{\sqrt[3]{3}}{4}$

3)

$\boxed{81x^4 - 16 = 0}$

$81x^4 = 16$

$x^4 = \dfrac{16}{81}$

$x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \pm\dfrac{2}{3}$

Scomponendo in fattori:

$81x^4 - 16 = 0$

$(9x^2+4)(9x^2-4) = 0$

$9x^2 + 4 = 0;\quad x^2 = -\dfrac{4}{9}$ *imposs. in* $\mathbb{R}$; *in* $\mathbb{C}$, $x = \pm\dfrac{2}{3}i$

$9x^2 - 4 = 0;\quad x^2 = \dfrac{4}{9}\quad x = \pm\dfrac{2}{3}$

4) $\boxed{81x^4 + 16 = 0}$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

5)

$\boxed{x^5 - 32 = 0}$

$x^5 = 32$

$x = \sqrt[5]{32} = 2$

6)

$\boxed{x^5 + 32 = 0}$

$x^5 = -32$

$x = \sqrt[5]{-32} = -2$

7)

$\boxed{x^6 - 1 = 0}$

$x^6 = 1$

$x = \pm\sqrt[6]{1} = \pm 1$

8)

$\boxed{x^6 + 1 = 0}$

$x^6 = -1$

impossibile in $\mathbb{R}$

9)

$\boxed{x^7 + 5x^4 = 0}$

$x^4(x^3+5) = 0$

$x^4 = 0 \rightarrow x = 0$

$x^3 + 5 = 0 \rightarrow x^3 = -5 \rightarrow x = \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$

Uno SCHEMA GENERALE per le equazioni binomie

Se p è una costante positiva (p > 0)

- *esponente pari:* $\left[\begin{array}{l} x^{2n} = p \quad \rightarrow x = \pm\sqrt[2n]{p} \text{ (2 soluzioni opposte in } \mathbb{R}) \\ x^{2n} = -p \quad \rightarrow \text{impossibile in } \mathbb{R} \end{array}\right.$

- *esponente dispari:* $\left[\begin{array}{l} x^{2n+1} = p \quad \rightarrow x = \sqrt[2n+1]{p} \text{ (1 soluzione in } \mathbb{R}) \\ x^{2n+1} = -p \quad \rightarrow x = \sqrt[2n+1]{-p} = -\sqrt[2n+1]{p} \text{ (1 soluzione in } \mathbb{R}) \end{array}\right.$

C) Eq. TRINOMIE $\boxed{ax^{2n}+bx^n+c=0}$ e, in particolare, BIQUADRATICHE $\boxed{ax^4+bx^2+c=0}$

1)

$$\boxed{8\underbrace{x^6}_{(x^3)^2}-7x^3-1=0}$$

$x^3=t$

$8t^2-7t-1=0$

$$t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{7\pm 9}{16}=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{1}{8}\\ 1\end{array}\right.$$

$t=-\frac{1}{8}\ \vee\ t=1,\ \textit{da cui}:$

$$x^3=-\frac{1}{8}\rightarrow\boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

$$x^3=1\rightarrow\boxed{x=1}$$

♥ La posizione $x^3=t$ si può evitare: basta
" operare come se al posto di x
ci fosse il blocco x^3 "

$$(x^3)_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{7\pm 9}{16}=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{1}{8}\\ 1\end{array}\right.$$

$$x^3=-\frac{1}{8}\rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$x^3=1\rightarrow x=1$$

2)

$$\boxed{4\underbrace{x^4}_{(x^2)^2}-11x^2-3=0}$$ EQUAZIONE BIQUADRATICA (cioè, trinomia con n = 2)

$$(x^2)_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121+48}}{8}=\frac{11\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{11\pm 13}{8}=\left\langle\begin{array}{l}-\frac{1}{4}\\ 3\end{array}\right.$$

$x^2=-\frac{1}{4}$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

$x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

3)

$$\boxed{x^4-11x^2+18=0}$$

Come prima, oppure per scomposizione in fattori:

$(x^2-9)(x^2-2)=0$

$x^2-9=0\ \rightarrow\ x^2=9;\ x=\pm 3$

$x^2-2=0\ \rightarrow\ x^2=2;\ x=\pm\sqrt{2}$

Uno SCHEMA GENERALE per le equazioni biquadratiche

$ax^4+bx^2+c=0$

Se $\Delta<0$, *non si ha nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$

Se $\Delta\ge 0$: $(x^2)_{1,2}=\ldots=\left\langle\begin{array}{l}h\\ k\end{array}\right.$

Ora,

se $h>0,\ k>0$ *4 soluzioni in* $\mathbb{R}$	*se* $h<0,\ k<0$ *nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$	*se* h, k *discordi* *2 soluzioni in* $\mathbb{R}$

Nel caso particolare $h=k\ (\Delta=0)$,

se $h=k>0$ *4 soluzioni,* *a due a due coincidenti, in* $\mathbb{R}$	*se* $h=k<0$ *nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$

D) Equazioni risolubili con ARTIFICI (= posizioni)

1) $\boxed{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=2}$

$\boxed{\frac{x-1}{x-2}=t}$

$t^4+t^2=2;\quad t^4+t^2-2=0;\quad \left(t^2\right)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$

$t^2=-2$ *imposs. in* $\mathbb{R}$; $t^2=1\rightarrow\boxed{t=\pm 1}$

$\frac{x-1}{x-2}=\boxed{-1}\ \rightarrow\ x-1=-x+2\ (x\neq 2);\ 2x=3;\ \boxed{x=3/2}$

$\frac{x-1}{x-2}=\boxed{1}\ \rightarrow\ \cancel{x}-1=\cancel{x}-2\ (x\neq 2)$ *impossibile*

2) $\boxed{\left(x^2+3x+1\right)^3=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x}$

Converrà addizionare 1 *ad ambo i membri, per ottenere*:

$\left(x^2+3x+1\right)^3+1=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x+1$

dopodiché:

$x^2+3x+1=z$

$z^3+1=z^2+z;\quad z^3-z^2-z+1=0;\quad z^2(z-1)-(z-1)=0;$

$(z-1)\left(z^2-1\right)=0;\quad (z-1)(z+1)(z-1)=0;\quad (z-1)^2(z+1)=0;\quad z=1\ \vee\ z=-1$

$x^2+3x\cancel{+1}=\cancel{1}$; $x(x+3)=0;\ x=0\vee x=-3$

$x^2+3x+1=-1$; $x^2+3x+2=0;\ \ldots\ x=-1\vee x=-2$

Le soluzioni sono, in definitiva:

$\boxed{x=-3,\ x=-2,\ x=-1,\ x=0}$

In alternativa:

$\left(x^2+3x+1\right)^3=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x+1-1$

$x^2+3x+1=z$, ecc.

3) $\boxed{x^6-5x^2+2=0}$

Lasciando così, non si riesce a scomporre; ponendo invece $x^2=t$ *si ha* $t^3-5t+2=0$ *ed è possibile scomporre con Ruffini in quanto si osserva che* $P(2)=0$. *Si ottiene*:

$(t-2)\left(t^2+2t-1\right)=0$

$t=2\rightarrow x^2=2;\ \boxed{x=\pm\sqrt{2}}$

$t=-1-\sqrt{2}\rightarrow x^2=-1-\sqrt{2}<0$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

$t=-1+\sqrt{2}\rightarrow x^2=-1+\sqrt{2};\ \boxed{x=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

ALTRI ESEMPI DI QUESTO TIPO

4) $\left(\frac{x}{1-x}\right)^3+7\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+14\cdot\frac{x}{1-x}+8=0$ $\quad\left[x=2,\ x=\frac{4}{3}\right]$

5) $\left(x\sqrt{2}+1\right)^{-3}-\left(x\sqrt{2}+1\right)^{-2}-3\left(\frac{1}{x\sqrt{2}+1}-1\right)-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{2}+1}-1\right)=0$

uh, qui si può trovare una soluzione "per strada", semplificando! $\quad\left[x=0,\ x=-1,\ x=1-\sqrt{2}\right]$

6) $\left(x^2-2x-3\right)^2-2\left(x^2-2x\right)+3=0$ $\quad\left[x=1\pm\sqrt{3},\ x=1\pm\sqrt{7}\right]$