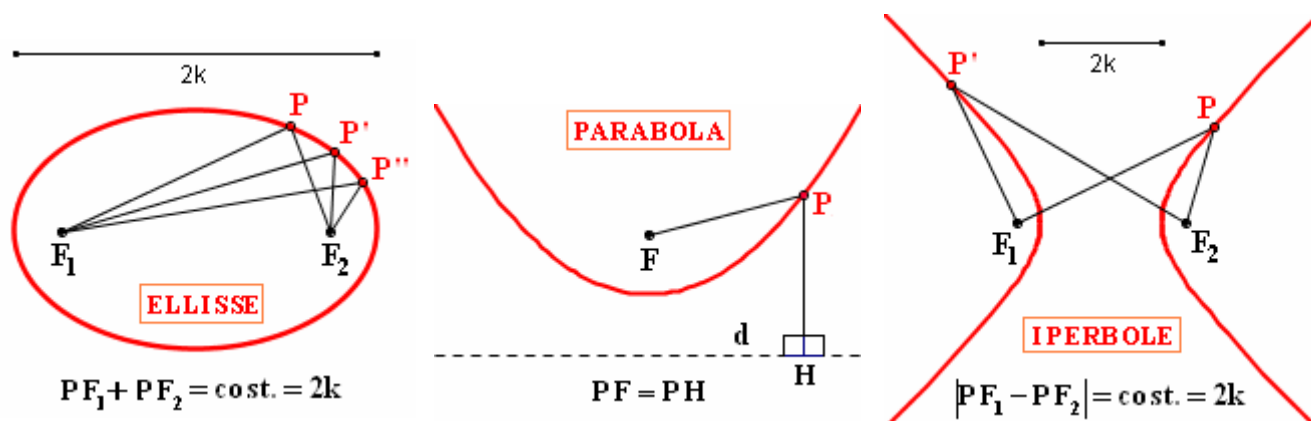


7. SIGNORI, LE CONICHE !!!

Si dicono “coniche” tre particolari curve
- o meglio: *tipologie* di curve -
chiamate, rispettivamente, *ellisse*, *parabola* e *iperbole*.

Eccone le definizioni.



Si dice “ellisse”
il luogo
dei punti del piano
per i quali è costante
la somma delle distanze
da due punti fissi,
detti “fuochi”

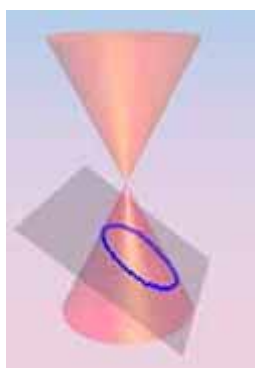
Si dice “parabola”
il luogo dei punti del piano,
equidistanti
da un punto fisso F
(detto “fuoco”)
e da una retta fissa d
(detta “direttrice”)

Si dice “iperbole”
il luogo
dei punti del piano
per i quali è costante
la differenza delle distanze
da due punti fissi,
detti “fuochi”

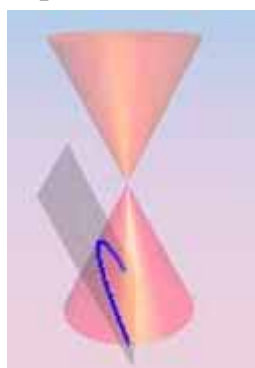
Ma cosa possono avere in comune
tre curve apparentemente così diverse fra loro?
E perché mai vengono chiamate “coniche”?

Bene:

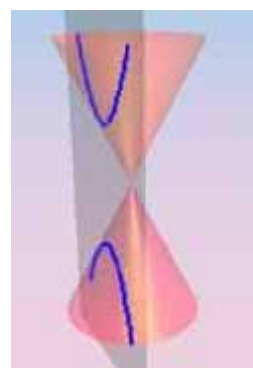
sezionando con un piano una doppia superficie conica
(illimitata da entrambe le parti)
si può ottenere,
a seconda dell’inclinazione del piano secante rispetto all’asse del cono:



una curva
chiusa...



oppure una curva
aperta,
ad un solo ramo ...



oppure una curva
aperta,
a due rami

Figure
tratte
dal sito
btc.montana.edu/ceres/
(Montana State
University)

Si può ora dimostrare che queste tre tipologie di curve, definite “tridimensionalmente”,
corrispondono proprio alle tre definizioni di “ellisse”, “parabola” e “iperbole” viste all’inizio,
definizioni le quali erano basate esclusivamente su considerazioni di “geometria piana” !!!

Ad esempio, per quanto riguarda l'ellisse, vale il seguente teorema (Dandelin, 1822):

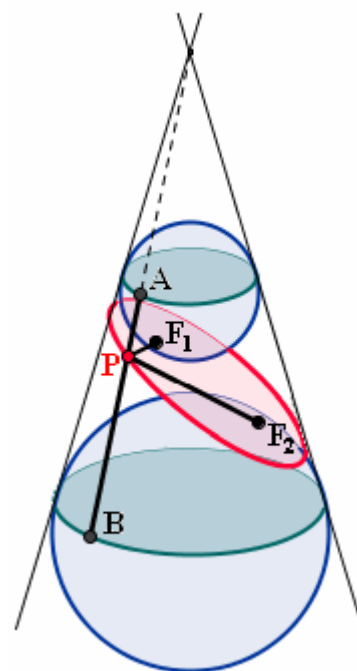
Quando l'intersezione fra una superficie conica e un piano è una linea chiusa, questa linea può essere pensata come il luogo dei punti P del piano secante per i quali si ha $PF_1 + PF_2 = costante$, dove:

F_1, F_2 sono i punti di contatto fra il piano secante e le due sfere della figura (ciascuna delle quali è tangente al piano secante e alla superficie conica) mentre la costante è la distanza, misurata lungo la superficie conica, fra le due circonferenze lungo le quali le sfere toccano la superficie conica.

DIMOSTRAZIONE

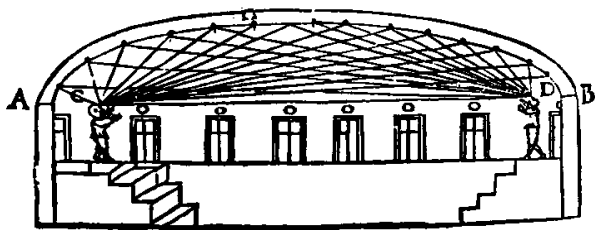
(senza approfondire i dettagli ...)

P, il generico punto della linea di cui ci stiamo occupando, è tale che $PF_1 = PA$ e $PF_2 = PB$ (tangenti alla sfera da uno stesso punto esterno!), per cui $PF_1 + PF_2 = PA + PB = AB = costante$ (costante perché AB ha sempre la stessa lunghezza: la distanza, misurata lungo la superficie conica, fra le due circonferenze, è sempre la medesima, dovunque venga misurata).



Le coniche abbondano di sorprendenti e meravigliose PROPRIETA'

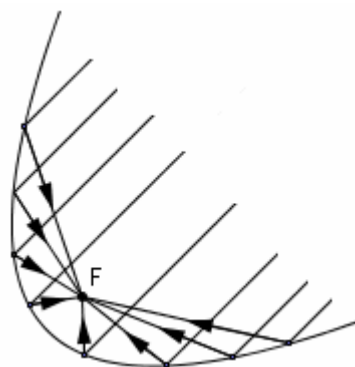
Citiamone una riguardante l'ellisse: si può dimostrare che **se un raggio - ad esempio di luce - uscente da un fuoco impatta sulla curva, il raggio riflesso passerà per l'altro fuoco!**



La volta di questa camera è un ellissoide di rotazione. Se una persona bisbiglia piano piano con la bocca in corrispondenza di uno dei fuochi, un amico con l'orecchio nell'altro fuoco potrà udire chiaramente ogni sua parola, mentre tutti gli altri presenti nella stanza non sentiranno nulla.

Una variante consiste nel piazzare due fiammiferi nei due fuochi: fregando uno di essi per accenderlo, ecco che si accenderà istantaneamente pure quell'altro.

Anche la parabola gode di una proprietà notevole per quanto riguarda la riflessione. **Un raggio che viaggia parallelamente all'asse di simmetria della parabola, quando impatta sulla curva, viene riflesso nel fuoco.**



Questo fatto ha un'applicazione notevolissima in tecnologia: le antenne paraboliche sono infatti caratterizzate da una forma a paraboloide di rotazione; le onde elettromagnetiche provenienti da lontano vengono concentrate nel fuoco, dove è collocato il dispositivo di ricezione.

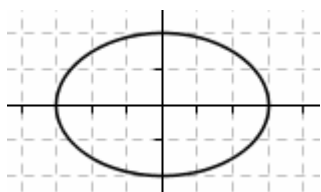
Le coniche sono le curve “associate a relazioni algebriche di secondo grado”.

La Geometria Analitica insegna che un'equazione della forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$,
ossia **un'equazione di secondo grado in due variabili, rappresenta sempre, nel piano cartesiano,
una conica (eventualmente degenera),**

e precisamente:

- una conica di tipo **ellittico** se $b^2 - 4ac < 0$
- una conica di tipo **parabolico** se $b^2 - 4ac = 0$
- una conica di tipo **iperbolico** se $b^2 - 4ac > 0$

Esempi:



$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

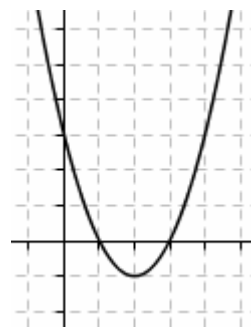
Ellisse,
con centro di simmetria nell'origine
e fuochi sull'asse delle x .

Forma implicita dell'equazione:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

$$a = 4, b = 0, c = 9, d = 0, e = 0, f = -36$$

$$b^2 - 4ac = -144 < 0 \rightarrow \text{tipo ellittico}$$



$$y = x^2 - 4x + 3$$

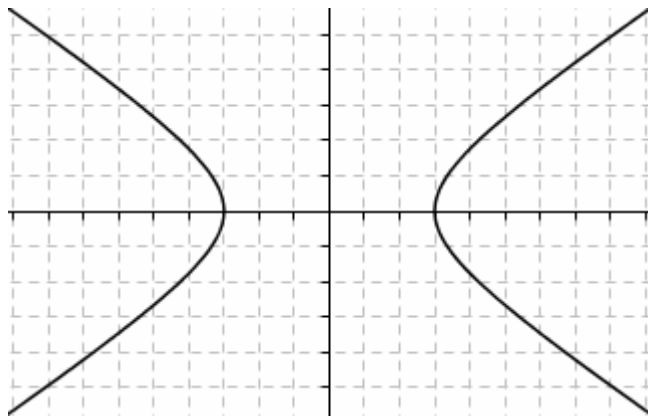
Parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse y .

Forma implicita dell'equazione:

$$x^2 - 4x - y + 3 = 0$$

$$a = 1, b = 0, c = 0, d = -4, e = -1, f = 3$$

$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow \text{tipo parabolico}$$



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

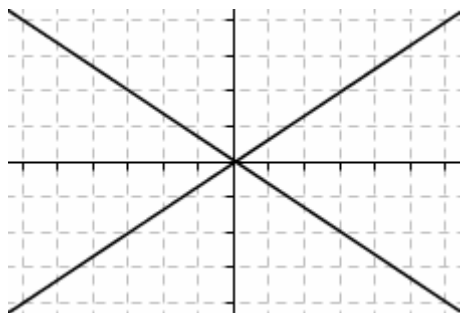
Iperbole,
con centro di simmetria nell'origine
e fuochi sull'asse delle x .

Forma implicita dell'equazione:

$$4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$$

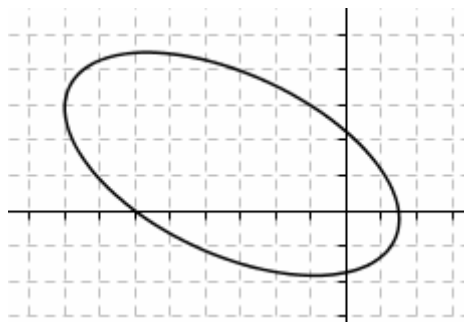
$$a = 4, b = 0, c = -9, d = 0, e = 0, f = -36$$

$$b^2 - 4ac = 144 > 0 \rightarrow \text{tipo iperbolico}$$



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0 \quad (4x^2 - 9y^2 = 0)$$

Iperbole degenera in una coppia di rette



$$\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{y}{8} = 1$$

$$(8x^2 + 12xy + 18y^2 + 36x - 9y - 72 = 0)$$

Ellisse
“traslata
e ruotata”

Le coniche hanno un'importanza straordinaria nel mondo fisico.

Ogniqualvolta un corpo celeste orbita intorno ad un altro

(la Luna intorno alla Terra,
i Pianeti intorno al Sole,
le Comete intorno al Sole ...)

la traiettoria dell'orbita sarà sempre una conica !!!

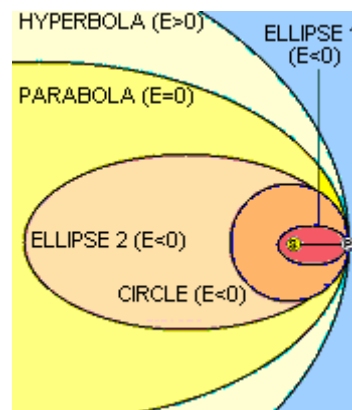
Di norma si tratta di un'ellisse
(ad es., le orbite dei pianeti intorno al sole sono delle ellissi,
di cui il sole occupa sempre uno dei fuochi),
ma nel caso di una cometa potrebbe trattarsi
(se la cometa non è "periodica") anche di un ramo di iperbole:
la cometa passa in prossimità del sole una sola volta,
poi si allontana verso gli spazi stellari
e non si avvicinerà mai più.

**Il tipo di orbita dipende dall' "energia totale"
(cinetica+potenziale) del corpo orbitante:**

$E < 0 \rightarrow$ orbita ellittica

$E = 0 \rightarrow$ orbita parabolica

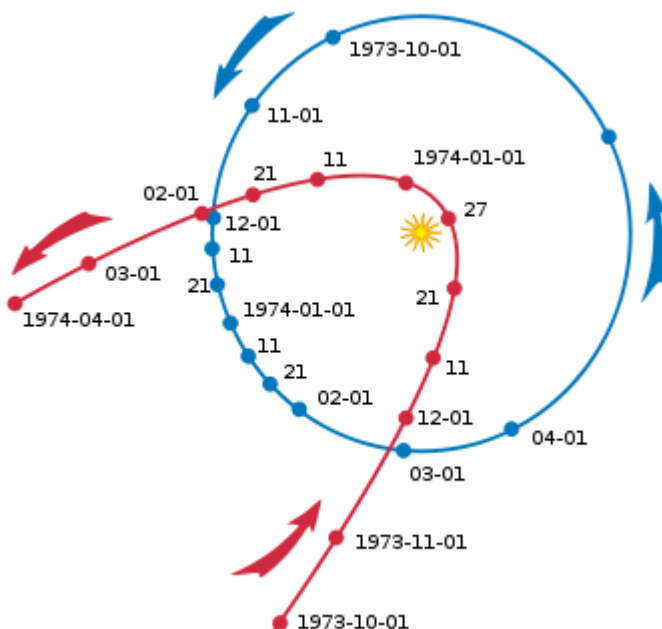
$E > 0 \rightarrow$ orbita iperbolica



La figura sopra riportata
è tratta dal sito
"The Celestial Sphere"
di Vik Dhillon,
Sheffield University, UK

Qui a fianco:
l'orbita
della cometa
Kohoutek
e l'orbita
della Terra.

Questa cometa
percorre
un tragitto
ellittico
facendo
un giro
completo
ogni circa
75.000 anni.



La cometa di Hale-Bopp
fotografata
da Philipp Salzgeber
il 29 marzo 1997

**Il fatto che l'attrazione gravitazionale generi traiettorie
a forma di conica, è legato alla proprietà
della forza F di attrazione gravitazionale
di essere inversamente proporzionale al quadrato
della distanza d delle due masse m_1, m_2 che si attraggono:**

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \quad (G = \text{"costante di gravitazione universale"})$$

**Se la forza responsabile del moto ha questa espressione,
si può far vedere che le possibili traiettorie del moto
sono esclusivamente le curve associate ad equazioni
di 2° grado, ossia, come abbiamo visto, le coniche.**

**Se lanciamo un oggetto
verso l'alto
(non verticalmente)
la forza di gravità
lo porterà a muoversi
lungo un arco di parabola.**



Un ultimo spunto, fra i tanti possibili, sulle coniche in Fisica:
si può osservare (e dimostrare) che
la figura d'interferenza \Rightarrow , nel caso di due sorgenti d'onda puntiformi, è un'iperbole.
Guarda la bellissima animazione \Rightarrow !!! (Ed Zobel, Zona Land)