

10. FUNZIONI QUADRATICHE ED EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Abbiamo detto che prendono il nome di “**quadratiche**” le funzioni di 2° grado, quelle della forma

$$y = ax^2 + bx + c.$$

E abbiamo illustrato con esempi il fatto che una funzione di questo tipo ha sempre come grafico una curva “scendi-e-poi-sali”, oppure “sali-e-poi-scendi”, chiamata “parabola” e disposta:

- con la concavità verso l’alto $\cup$ quando il numero a , coefficiente di x^2 , è >0
- con la concavità verso il basso $\cap$ quando il coefficiente di x^2 è <0 .

Abbiamo poi osservato che il **valore assoluto del coefficiente di x^2** si dice “**apertura**” perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola sia

- più “dolce” (valori di $|a|$ piccoli)
- o più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Infine, abbiamo

- indicato la formula $x_V = -\frac{b}{2a}$ per determinare l’ascissa del vertice a partire dai coeff. dell’equazione
- osservato che, nota l’ascissa, l’ordinata del vertice si può poi ottenere senza formule, semplicemente sostituendo x_V al posto di x nell’equazione della parabola per calcolare il valore corrispondente di y
- raccomandato, quando si deve disegnare una parabola, di individuare e segnare innanzitutto il vertice e la retta verticale per il vertice, per approfittare della simmetria della curva rispetto a questa retta.

Diciamo ora qualcosa in più.

Innanzitutto, l’equazione di una parabola dipende da 3 parametri (i coefficienti a, b, c) per cui la curva è individuata in modo unico quando sono date delle condizioni, a partire dalle quali si possano determinare in modo unico i valori di a, b e c . Ad esempio, se vengono dati tre punti, per cui la curva deve passare, ecco che, almeno in generale, ci sarà una e una sola parabola a soddisfare questa condizione.

Esempio: scrivere l’equazione della parabola passante per i tre punti $A(-1, 4)$; $B(1, 6)$; $C(3, 0)$.

Poniamo le condizioni di appartenenza di ciascuno dei tre punti alla curva di equazione $y = ax^2 + bx + c$, e risolviamo il sistema:

$$\begin{array}{l} A(-1, 4) \\ B(1, 6) \\ C(3, 0) \end{array} \begin{cases} 4 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 6 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases} \quad \begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + b + c = 6 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 6 \end{cases}$$

La nostra parabola ha dunque equazione

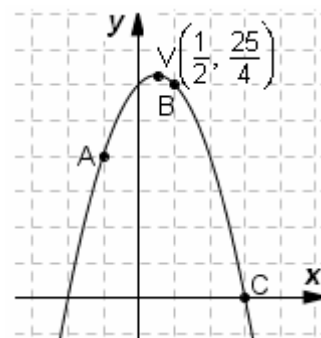
$$y = -x^2 + x + 6$$

da cui:

$$x_V = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y_V = -x_V^2 + x_V + 6 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$$

vale a dire $V\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$



ESERCIZI

Determina l’equazione della parabola che passa per i punti:

- 1) $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(2, 0)$ 2) $(0, 5)$; $(2, 1)$; $(3, 2)$ 3) $(-2, 0)$; $(1, -3)$; $(2, 0)$ 4) $(0, 8)$; $(1, 2)$; $(5, 18)$ 5) $(-1, 1)$; $(0, 2)$; $(1, 5)$

RISPOSTE

- 1) $y = -x^2 + 2x$ 2) $y = x^2 - 4x + 5$ 3) $y = x^2 - 4$ 4) $y = 2x^2 - 8x + 8$ 5) $y = x^2 + 2x + 2$

LA PARABOLA E L'EQUAZIONE DI 2° GRADO

Un’equazione di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$

può essere risolta tracciando il grafico della parabola $y = ax^2 + bx + c$

e poi determinando le sue intersezioni con la retta di equazione $y = 0$ (che coincide con l’asse delle x).

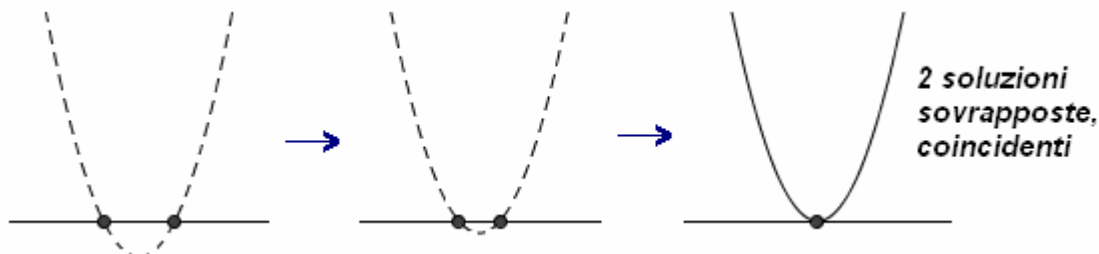
Consideriamo dapprima il caso $a > 0$.

Si potranno presentare tre possibili situazioni, e la nostra equazione potrà avere:

- 1) due soluzioni distinte (primo caso, parabola che taglia l’asse orizzontale):



II) una sola soluzione, o anche: due soluzioni che hanno finito per sovrapporsi, per coincidere (secondo caso, parabola tangente all'asse orizzontale):



III) oppure nessuna soluzione (terzo caso, parabola priva di intersezioni con l'asse orizzontale):



Tutto dipende quindi dall'*ordinata del vertice*:

- ❑ se questa è < 0 si ha il caso delle due soluzioni distinte,
- ❑ se è $= 0$ si hanno le soluzioni coincidenti,
- ❑ se è > 0 si ha l'impossibilità.

Ora, se noi partiamo dalla formula per l'*ascissa* del vertice $x_V = -\frac{b}{2a}$

potremo ricavare l'*ordinata* di V sostituendone il valore al posto di x nell'equazione della parabola:

$$y_V = \left[ax^2 + bx + c \right]_{x=-\frac{b}{2a}} = a \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Quindi, per quanto detto sopra,

$$-\frac{\Delta}{4a} < 0 \leftrightarrow \text{soluzioni distinte};$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = 0 \leftrightarrow \text{soluzioni coincidenti};$$

$$-\frac{\Delta}{4a} > 0 \leftrightarrow \text{nessuna soluzione}.$$

Ma le tre condizioni $-\frac{\Delta}{4a} < 0$, $-\frac{\Delta}{4a} = 0$, $-\frac{\Delta}{4a} > 0$, avendo noi supposto $a > 0$,

equivalgono rispettivamente a $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ e ciò dunque conferma

il ben noto ruolo del Δ nel determinare il numero delle soluzioni di un'equazione di 2° grado.

Se poi fosse $a < 0$ potremmo ripercorrere tutte le considerazioni fatte, adattandole al nuovo caso, e perverremmo alle stesse conclusioni.

ESERCIZI

Risolvi graficamente le seguenti equazioni:

6) $x^2 - 6x + 8 = 0$ 7) $x^2 - 6x + 9 = 0$ 8) $x^2 - 6x + 10 = 0$ 9) $-x^2 + x = 0$ 10) $-2x^2 = 0$ 11) $-x^2 + x + 6 = 0$

RISPOSTE

6) $x = 2, x = 4$ 7) $x = 3, x = 3$ 8) imposs. 9) $x = 0, x = 1$ 10) $x = 0, x = 0$ 11) $x = -2, x = 3$