12. INVERSIONE DI UNA FUNZIONE NUMERICA

Consideriamo la funzione $y = x^3 + 1 = f(x)$.
Ci domandiamo:
è possibile ora, se si sceglie un valore di y, risalire al valore di x che ha generato quell' y?
Proviamoci.

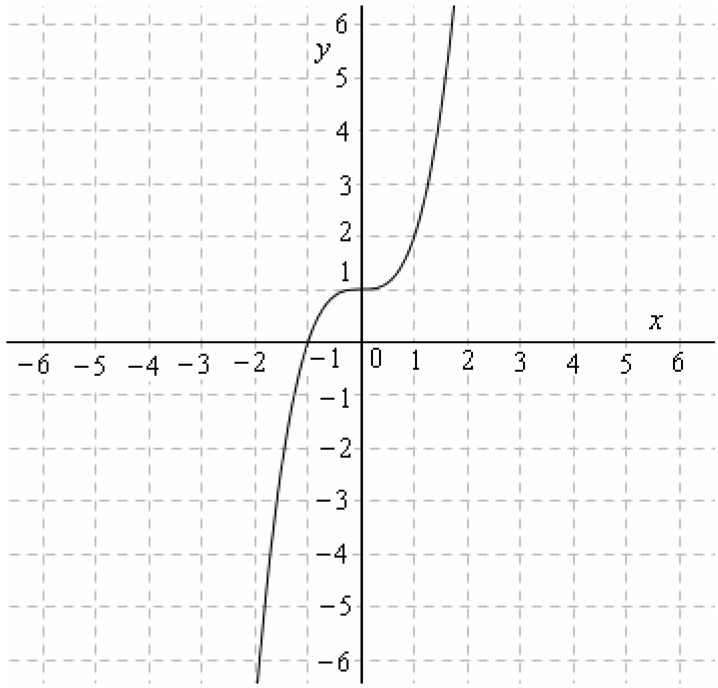
$$y = x^3 + 1; \quad x^3 + 1 = y; \quad x^3 = y - 1; \quad x = \sqrt[3]{y-1}$$

Ecco fatto: la legge $x = \sqrt[3]{y-1}$ è chiamata "**funzione inversa**" della $y = x^3 + 1$ e indicata col simbolo $f^{-1}(y)$.
Questa legge, questa "funzione inversa", permette di "tornare indietro":
a partire da y, si può risalire a quella che era la sua controimmagine x nella funzione diretta. Dunque:

$$y = x^3 + 1 = f(x)$$
$$x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y) \quad \textit{funzione inversa della } f$$

Supponiamo ora di voler rappresentare la funzione inversa appena ricavata, su di un riferimento cartesiano. Tutto sommato, la rappresentazione ce l'abbiamo già, se abbiamo tracciato il grafico della funzione diretta! Sì, perché se noi anziché guardare il grafico dal solito punto di vista, ruotiamo il foglio di 90° in senso antiorario, avremo la y in orizzontale e la x in verticale, quindi potremo seguire, al variare di y, come varia x, col solo fastidio che, contrariamente alle nostre abitudini, la variabile indipendente (che qui è y) assume valori crescenti allorquando ci spostiamo con lo sguardo verso sinistra e non verso destra.

Se guardo da qui, vedo sostanzialmente il grafico della funzione inversa $x = \sqrt[3]{y-1}$ col solo inconveniente che la variabile indipendente y cresce quando muovo lo sguardo nel verso opposto a quello al quale sono abituato.



Se guardo da qui, vedo normalmente la funzione diretta $y = x^3 + 1$

D'altra parte, potremmo anche decidere di considerare la funzione inversa come funzione "a sé stante", svincolata dalla funzione "diretta" dalla quale eravamo partiti.
In questo caso, poiché la consuetudine è di indicare la variabile indipendente col simbolo x
e la variabile dipendente con y, procederemo ad uno **scambio di variabili**.

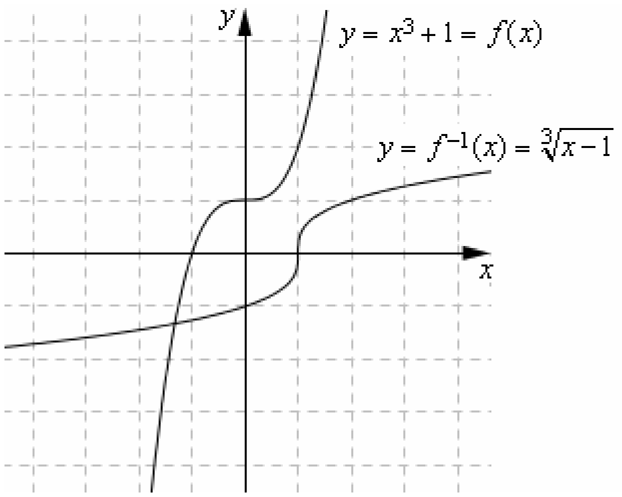
Vediamo di spiegarci meglio. Nel nostro esempio, eravamo partiti dalla funzione diretta $y = x^3 + 1 = f(x)$
e approdati alla funzione inversa $x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y)$.
Bene! La f^{-1} è dunque quella "macchinetta" che, quando "ingoia" un numero,
poi "sputa fuori" il numero ottenuto sottraendo 1 al numero di partenza ed estraendo una radice cubica.
Se ora, anziché indicare il numero di partenza con y e quello di arrivo con x,
indichiamo il numero di partenza con x e quello di arrivo con y, e scriviamo dunque $y = \sqrt[3]{x-1} = f^{-1}(x)$,
la macchinetta resta sempre la stessa, la legge che fa passare
dalla variabile indipendente alla variabile dipendente non cambia affatto!

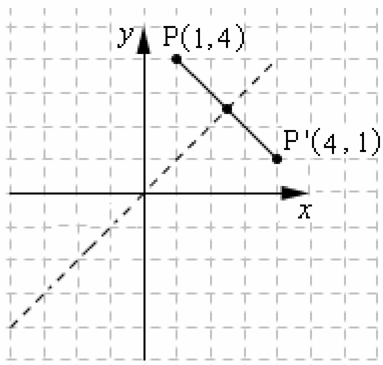
> **In una funzione, è essenziale soltanto il LEGAME fra variabile indipendente e dipendente,**
> **non hanno importanza i NOMI coi quali le due variabili sono indicate!**
> Ad esempio, le uguaglianze $x = \sqrt[3]{y-1}$, $y = \sqrt[3]{x-1}$, $z = \sqrt[3]{t-1}$ ecc. ecc. ...
> DEFINISCONO TUTTE LA STESSA FUNZIONE !!!

Pertanto, dopo esser partiti dall'uguaglianza $y = f(x)$ e averla "invertita",
isolando x a primo membro e ricavando così l'equazione della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$,
se lo riteniamo opportuno (a volte la convenienza c'è, altre volte no)
possiamo *scambiare i nomi delle due variabili*
riscrivendo la stessa funzione inversa sotto la forma equivalente $y = f^{-1}(x)$.

Se la funzione inversa f^{-1} è stata scritta sotto la forma $y = f^{-1}(x)$,
allora, rappresentandola sullo stesso riferimento cartesiano nel quale
avevamo tracciato il grafico della funzione diretta $y = f(x)$,
potremo notare una cosa interessante e curiosa:

i due grafici, quello della funzione diretta f e quello dell'inversa f^{-1} "scritta a variabili scambiate", sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante !!!





Ciò è dovuto al fatto che un certo punto (a, b) appartiene al grafico della $y = f^{-1}(x)$
se e solo se la coppia (a, b) è tale che $b = f^{-1}(a)$;
ma ciò avviene se e solo se $a = f(b)$ e perciò
se e solo se il punto (b, a) appartiene al grafico della $y = f(x)$.
Pertanto i singoli punti della curva grafico di $y = f^{-1}(x)$ si possono ottenere partendo
da ciascun punto del grafico della $y = f(x)$, e scambiandone le coordinate; il che equivale
(vedi la figura a destra) a simmetrizzare quel punto rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

Naturalmente, una funzione può essere invertita solo se è iniettiva (= a valori diversi di x, corrispondono sempre valori diversi di y = = non c'è nessun valore di y che abbia più di una controimmagine = = non c'è nessuna retta parallela all'asse delle x, che intersechi il grafico in più di un punto).

**Spesso una funzione $f(x)$ non è iniettiva considerandola su tutto il suo dominio,
ma è "iniettiva su di un intervallo" (vedi, per gli intervalli, pagina 127);
allora, si finisce per invertirla soltanto su tale intervallo.**

Es.: $y = f(x) = \dfrac{6}{1+x^2}$ non è iniettiva sul suo dominio $\mathbb{R}$ (basta osservare che a due valori di x opposti corrisponde lo stesso valore di y); ma lo è su $[0,+\infty)$. Si può perciò invertire su $[0,+\infty)$ ottenendo:

$$y = \frac{6}{1+x^2}\ (x \ge 0);\quad \frac{1+x^2}{6} = \frac{1}{y};\quad 1+x^2 = \frac{6}{y};\quad x^2 = \frac{6}{y} - 1;\quad x^2 = \frac{6-y}{y};\quad x = \sqrt{\frac{6-y}{y}}$$

non cè il ± davanti alla radice proprio per la condizione $x \ge 0$

NOTA:
se una funzione è strettamente monotòna (= strettamente crescente, oppure strettamente decrescente) su tutto un intervallo, allora è iniettiva (e quindi invertibile) su quell'intervallo.

Le funzioni strettamente crescenti (rispettivamente: decrescenti)
sono quelle che presentano un grafico "in salita" (rispettivamente: "in discesa"),
ossia un grafico che, quando lo si guarda da sinistra verso destra,
"va sempre verso l'alto" (o, rispettivamente, "verso il basso"),
come illustrato dalle definizioni e dalle figure nel riquadro della pagina successiva.

FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI (= MONOTÒNE) SU DI UN INTERVALLO

Sia f una funzione reale di variabile reale (vale a dire, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$);
indichiamone il dominio con D.
Sia poi I un intervallo o comunque un insieme, incluso nel dominio della funzione: $\mathrm{I}\subseteq \mathrm{D}$.
Si pongono allora le seguenti definizioni:

$$f \textit{ strettamente crescente su } \mathrm{I} \xleftrightarrow{def.} \forall x_1,\, x_2 \in \mathrm{I},\quad x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$$

$$f \textit{ strettamente decrescente su } \mathrm{I} \xleftrightarrow{def.} \forall x_1,\, x_2 \in \mathrm{I},\quad x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$$

$$f \textit{ crescente in senso lato } (= \textit{non decrescente}) \textit{ su } \mathrm{I} \xleftrightarrow{def.} \forall x_1,\, x_2 \in \mathrm{I},\quad x_1 < x_2 \to f(x_1) \le f(x_2)$$

$$f \textit{ decrescente in senso lato } (= \textit{non crescente}) \textit{ su } \mathrm{I} \xleftrightarrow{def.} \forall x_1,\, x_2 \in \mathrm{I},\quad x_1 < x_2 \to f(x_1) \ge f(x_2)$$

f strettamente crescente	f strettamente decrescente	f crescente in senso lato	f decrescente in senso lato

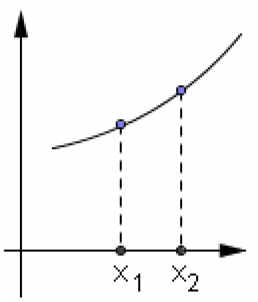
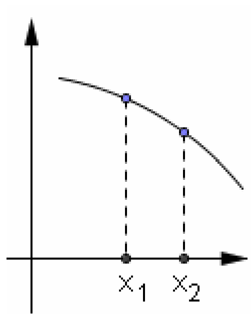
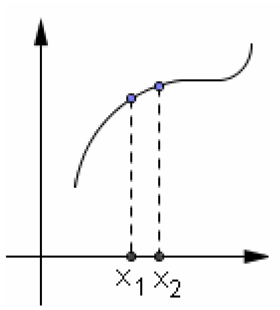
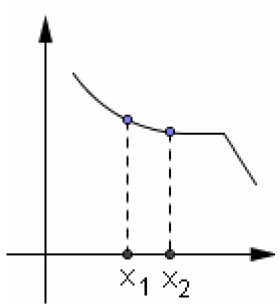

			

grafico saliente	grafico discendente	grafico saliente con eventuali tratti orizzontali	grafico discendente con eventuali tratti orizzontali

OSSERVAZIONI

Le funzioni aventi carattere crescente o decrescente su di un intervallo
si dicono "**monotòne**" (osserva che l'accento è sull'ultima "o") su quell'intervallo.

Se si trova scritto solamente "crescente", o "decrescente", o "monotòna", senza altra specificazione,
allora di norma si deve intendere "in senso STRETTO".

Una funzione, che sia strettamente monotòna su di un intervallo,
è certamente iniettiva (e, quindi, invertibile) su quell'intervallo
(iniettiva = valori della variabile indipendente distinti hanno sempre immagini distinte).

Si può anche dire:
"condizione sufficiente (sebbene non necessaria)
affinché una funzione sia iniettiva su di un intervallo,
è che sia ivi monotòna in senso stretto".

ESERCIZI (risposte a pag. 126)

Per ciascuna delle funzioni 1) … 8) :

a) ricava l'espressione della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$
b) scambia i nomi delle variabili pervenendo alla forma equivalente $y = f^{-1}(x)$
c) servendoti di GeoGebra, rappresenta f ed f^{-1} su di uno stesso riferimento cartesiano, per constatare la simmetria delle due curve rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

1) $y = f(x) = x+2$ 2) $y = f(x) = 2x-3$

3) $y = f(x) = x^2 \ su\ [0,+\infty)$ 4) $y = f(x) = x^2-2x \ su\ [1,+\infty)$

5) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 6) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1} \ su\ [0,+\infty)$

7) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}+1$ 8) $y = f(x) = \sqrt{x}+1$

13. COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Quando abbiamo considerato, alle pagine 114 … 117, i grafici di $y = f(x)+2$, $y = f(2x)$, $y=\sqrt{f(x)}$ … abbiamo trafficato con funzioni, frutto della "composizione" di altre funzioni.

Per "**composizione**" (si dice anche "prodotto") di due funzioni, si intende la loro "**applicazione successiva**".

Vediamo un esempio.

La funzione "TRIPLO" prende un numero e me lo triplica;
la funzione "QUADRATO" prende un numero e me lo eleva al quadrato.

Se parto da un numero *x* e applico successivamente prima la funzione "TRIPLO" poi, *al numero ottenuto*, la funzione "QUADRATO", così facendo ho "composto" le due funzioni considerate.

$$x \xrightarrow{3(\bullet)} 3x \xrightarrow{(\bullet)^2} (3x)^2 = 9x^2$$

Osserviamo subito che **la composizione di due funzioni non è commutativa**: se, ad esempio, a partire dal numero *x*, applicassi prima la funzione "QUADRATO" e poi la funzione "TRIPLO", otterrei:

$$x \xrightarrow{(\bullet)^2} x^2 \xrightarrow{3(\bullet)} 3x^2$$

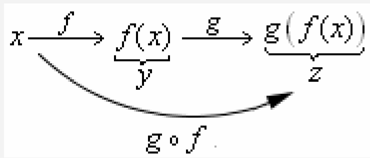
che è un risultato diverso dal precedente. In generale:

se ho una funzione $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ e una seconda funzione $g: \mathrm{B} \to \mathrm{C}$
posso, preso un oggetto (NOTA) $x \in \mathrm{A}$, applicargli dapprima la funzione *f*, ottenendo l'oggetto $f(x) \in \mathrm{B}$,
poi a questo oggetto $f(x)$ applicare la funzione *g*, pervenendo all'oggetto definitivo $g\big(f(x)\big)$

$$f: \mathrm{A} \to \mathrm{B} \qquad g: \mathrm{B} \to \mathrm{C} \qquad x \xrightarrow{f} \underbrace{f(x)}_{y} \xrightarrow{g} \underbrace{g\big(f(x)\big)}_{z}$$

la funzione composta $g \circ f$ è quella che fa passare direttamente da x a z

La funzione composta, quella che fa saltare direttamente da x a $z = g\big(f(x)\big)$, viene di solito indicata col simbolo $g \circ f$:
$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$



$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$$

E' molto importante osservare che viene scritta per prima la funzione che viene applicata per ultima.

NOTA - Usiamo qui la parola "oggetto" anziché "numero" per sottolineare che questo discorso si può riferire non solo alle funzioni numeriche, ma più in generale a *tutte* le funzioni.

- Esempio: $f: x \to x-1; \quad g: x \to x^3$
  - Se applico successivamente prima la f poi la g, ottengo: $x \xrightarrow{f} x-1 \xrightarrow{g} (x-1)^3$
    La funzione composta $g \circ f$ prende dunque "in input" x e restituisce "in output" il numero $(x-1)^3$; vale a dire, $g \circ f$ è la funzione tale che $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = (x-1)^3$
  - Se applico successivamente prima la g poi la f, ottengo: $x \xrightarrow{g} x^3 \xrightarrow{f} x^3-1$
    La funzione composta $f \circ g$ prende dunque "in input" x e restituisce "in output" il numero x^3-1; vale a dire, $f \circ g$ è la funzione tale che $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = x^3-1$

- Altro esempio: $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} \qquad g(x) = 3x \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 3 \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x+3}{x+2} \quad \text{mentre} \quad \big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(3x\big) = \frac{3x+1}{3x+2}$$

OSSERVAZIONE:
componendo una funzione f con la sua inversa f^{-1}, si ottiene la cosiddetta "funzione identica" $i(x) = x$.

ESERCIZI (risposte a pag. 127)

1) $f(x) = 3x \qquad g(x) = x+2 \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
2) $f(x) = x-1 \qquad g(x) = \dfrac{1}{x} \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
3) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = x-1 \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
4) $f(x) = x^3 \qquad g(x) = x^2 \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
5) $f(x) = x^3 + x \qquad g(x) = x^2 + x \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$
6) $f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad g(x) = x+3 \qquad g \circ f = ? \quad f \circ g = ?$

14. DETERMINAZIONE DEL DOMINIO E DEL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE REALE DI VARIABILE REALE

(NOTA: questo paragrafo fa parte del capitolo su "grafici e risoluzioni grafiche" perché ne costituisce un naturale completamento, e tuttavia in esso compaiono semplici DISEQUAZIONI e SISTEMI DI DISEQUAZIONI, e vi si parla di "INTERVALLI" … Il discorso dovrebbe essere comprensibile perché le situazioni proposte sono elementari, in ogni caso tali argomenti sono trattati estensivamente in un capitolo successivo. Riguardo agli "intervalli", per comodità del lettore ne riportiamo una breve descrizione a **pagina 127****).**

DOMINIO

Il dominio di una funzione reale di variabile reale, individuata da un'equazione della forma

$y =$ *espressione contenente* x ,

si determina andando a vedere per quali valori di x
sono effettuabili i calcoli che permettono di ricavare la y **corrispondente**.

Ad esempio:

- se x compare a denominatore, dobbiamo tener presente che la y sarà calcolabile solo a condizione che il denominatore stesso sia diverso da zero;
- se x compare sotto radice quadrata, affinché la y sia calcolabile il radicando dovrà essere ≥ 0

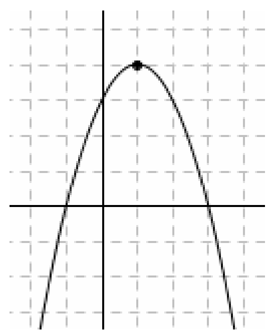
Funzione	$y=\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}$	$y=\sqrt{10-x}$	$\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{x-2}}{x-5}$	$\sqrt[3]{x-4}$
Condizione per la calcolabilità della y	$x \neq 2 \wedge x \neq 3$	$10-x \geq 0$ cioè $x \leq 10$	$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$ cioè $x \geq 2$ ma $x \neq 5$	Nessuna condizione
Dominio	$\mathbb{R}-\{2, 3\}$	$(-\infty, 10]$	$[2, +\infty)-\{5\}$	$\mathbb{R}=(-\infty, +\infty)$

CODOMINIO

Supponiamo ora che sia assegnata una funzione e che sia richiesto di determinarne il **codominio** (**= l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla variabile dipendente**).
Spesso si può rispondere ad un quesito di questo tipo semplicemente tracciando un grafico della funzione in esame.

ESEMPIO 1: trovare il codominio della funzione $y=-x^2+2x+3$.

Poiché sappiamo (essendo il secondo membro un'espressione di II° grado) che il grafico è una parabola, potremmo disegnare questa parabola, tenendo conto che:



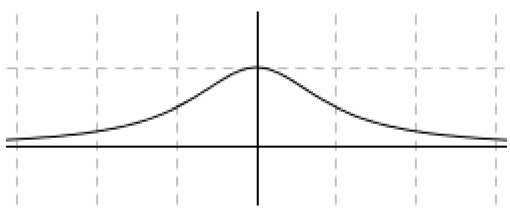
- $x_V=-\dfrac{b}{2a}=1 \rightarrow \quad y_V=y(1)=-1+2+3=4$
- la concavità è rivolta verso il basso (essendo <0 il coefficiente di x^2)

e andare a vedere quali sono i valori effettivamente assunti dalla y:
si tratta dei valori $y \leq 4$, ossia il codominio risulta essere l'intervallo $C=(-\infty, 4]$

ESEMPIO 2: determinare il codominio della funzione $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Facile tracciare il grafico di questa funzione:

- il dominio è tutto $\mathbb{R}$ (infatti il denominatore non si può mai annullare);
- con $x=0$ abbiamo $y=1$;
- per valori opposti di x abbiamo lo stesso valore di y, cioè, per ogni x, $f(-x)=f(x)$, ad es. $f(-2)=f(2)\ldots$ quindi il grafico sarà simmetrico rispetto all'asse verticale;
- quando x, a partire da 0, cresce, la quantità $1+x^2$ cresce e quindi il suo reciproco decresce, schiacciandosi verso lo zero per valori positivi.



Il grafico è dunque quello rappresentato in figura, da cui emerge che l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla y, ossia il codominio, è l'intervallo $(0, 1]$

Un altro metodo per determinare il codominio
è basato su passaggi algebrici anziché sul tracciamento di grafici.

Il codominio è l'insieme dei valori di y che hanno almeno una controimmagine;
quindi prenderemo l'equazione che definisce la funzione
e cercheremo di risolverla rispetto a x,
per trovare la legge che permetta di ritornare da y a x …
insomma, proveremo ad INVERTIRE la funzione …
fatti i vari passaggi, ad un certo punto risulterà chiaro
quali sono i valori di y per i quali si può risalire a x,
insomma: ad un certo punto si capirà quali sono i valori di y che hanno almeno una controimmagine.
L'insieme di questi valori di y costituirà il codominio della funzione.

Beninteso: se troveremo che qualche valore di y ha PIU' DI UNA controimmagine, allora ne dedurremo che la funzione non è invertibile non essendo iniettiva (perlomeno, sul dominio considerato);
ma il nostro scopo non è qui di stabilire se la funzione sia invertibile o no,
il nostro scopo è di determinare il codominio!

Vediamo qualche esempio.

- Individuare il codominio della funzione $y=\dfrac{x-2}{x-7}$.

  $$y=\frac{x-2}{x-7} \;\rightarrow\; xy-7y=x-2 \;\;(x\neq 7) \;\rightarrow\; xy-x=7y-2;\;\; \boxed{x(y-1)=7y-2}$$

  Ora, quest'ultima equazione si può risolvere rispetto a x solo per $\boxed{y\neq 1}$; in tal caso, si ottiene

  $$x=\frac{7y-2}{y-1}$$

  Abbiamo stabilito così che il codominio della funzione (= l'insieme dei valori effettivamente assunti da y = l'insieme dei valori di y che hanno almeno una controimmagine) è $\boxed{\mathbb{R}-\{1\}}$

- Altro esempio (già trattato graficamente): determinare il codominio della funzione $y=\dfrac{1}{1+x^2}$

  $$y=\frac{1}{1+x^2} \;\rightarrow\; 1+x^2=\frac{1}{y} \;\;(y\neq 0) \;\rightarrow\; x^2=\frac{1}{y}-1;\;\; \boxed{x^2=\frac{1-y}{y}}$$

  A questo punto, possiamo risalire a x soltanto se il 2° membro è maggiore o uguale a 0, ossia $\boxed{\dfrac{1-y}{y}\geq 0}$.

  Risolvendo la disequazione, si ottiene $\boxed{0<y\leq 1}$:
  perciò sono dotati di controimmagine tutti e soli i valori di y tali che $0<y\leq 1$,
  e ciò significa che il codominio della nostra funzione è l'intervallo $\boxed{C=(0,1]}$.

  Osserviamo che ogni valore di y appartenente a C ha DUE controimmagini: $x^2=\dfrac{1-y}{y} \rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1-y}{y}}$

  Questo ci dice che la funzione considerata non è iniettiva, quindi non è invertibile …
  … Ma a noi non interessava la questione se la funzione in esame fosse o non fosse invertibile:
  ci interessava soltanto trovare i valori di y che avevano almeno una controimmagine,
  e ormai abbiamo riconosciuto trattarsi dell'intervallo $C=(0,1]$.

  Se poi fossimo interessati anche all'*inversione* della funzione,
  potremmo dire che è invertibile soltanto qualora si vada a *restringere l'insieme di partenza*
  ad un intervallo nel quale ogni y del codominio abbia UNA SOLA controimmagine.
  Ad esempio, se imponiamo a x di essere positiva, ossia se assumiamo come insieme di partenza soltanto l'intervallo $[0,+\infty)$ anziché tutto $\mathbb{R}$, il doppio segno davanti alla radice se ne andrà, e avremo

  $$x\in[0,+\infty) \quad x^2=\frac{1-y}{y} \;\rightarrow\; x=\sqrt{\frac{1-y}{y}}\;.$$

  Ogni y del codominio $C=(0,1]$ avrà così UNA SOLA controimmagine, e la funzione risulterà invertibile.

  Perciò possiamo dire che la funzione $y=\dfrac{1}{1+x^2}$
  stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $[0,+\infty)$ e l'insieme $(0,1]$.

ESERCIZIO (risposte a pag. 127)

Determina sia il dominio che il codominio delle funzioni che seguono:

a) $y = x+7$ b) $y = x^2$ c) $y = x^3$ d) $y = \sqrt{x}$ e) $y = \sqrt[3]{x}$ f) $y = x^2 - x$

g) $y = (x-2)^4 + 3$ h) $y = \dfrac{1}{x}$ i) $y = \dfrac{1}{x-3}$ j) $y = \dfrac{1}{x^2}$ k) $y = x^4 + x^2 + 1$

l) $y = -4x^2 + 16x$. Come va ristretto l'insieme di partenza, se si vuole che la funzione sia invertibile?

m) $y = \dfrac{x+4}{x}$ n) $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$ o) $y = x^4 - 2x^2$

15. RISPOSTE AGLI ESERCIZI DELL'ULTIMA PARTE

RISPOSTE agli esercizi di pag. 122

1) $y = f(x) = x+2 \quad x = y-2 = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = x-2 = f^{-1}(x)}$

2) $y = f(x) = 2x-3 \quad x = \dfrac{y+3}{2} = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = \dfrac{x+3}{2} = f^{-1}(x)}$

3) $y = f(x) = x^2 \; su \; [0,+\infty) \quad x = \sqrt{y} = f^{-1}(y) \quad \left[x = \sqrt{y} \; e \; NON \; x = \pm\sqrt{y} \;\; \begin{matrix} perché \; x \in [0,+\infty) \\ quindi \; x \ge 0 \end{matrix}\right] \quad \boxed{y = \sqrt{x} = f^{-1}(x)}$

4) $y = f(x) = x^2 - 2x \; su \; [1,+\infty) \quad x^2 - 2x - y = 0 \quad x = 1 \pm \sqrt{1+y} \; da \; cui \; x = 1 + \sqrt{1+y} \;\; perché \; deve \; essere \; x \ge 1$

$x = 1 + \sqrt{1+y} = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = 1 + \sqrt{1+x} = f^{-1}(x)}$

5) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} \quad xy - y = 2x+1 \quad xy - 2x = y+1 \quad (y-2)x = y+1$

$x = \dfrac{y+1}{y-2} = f^{-1}(y) \quad \begin{matrix} y \ne 2: ma \; si \; potrebbe \; dimostrare \; che \\ non \; c'è \; nessun \; valore \; di \; x \; per \; cui \\ la \; y \; possa \; assumere \; il \; valore \; 2 \end{matrix} \quad \boxed{y = \dfrac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)}$

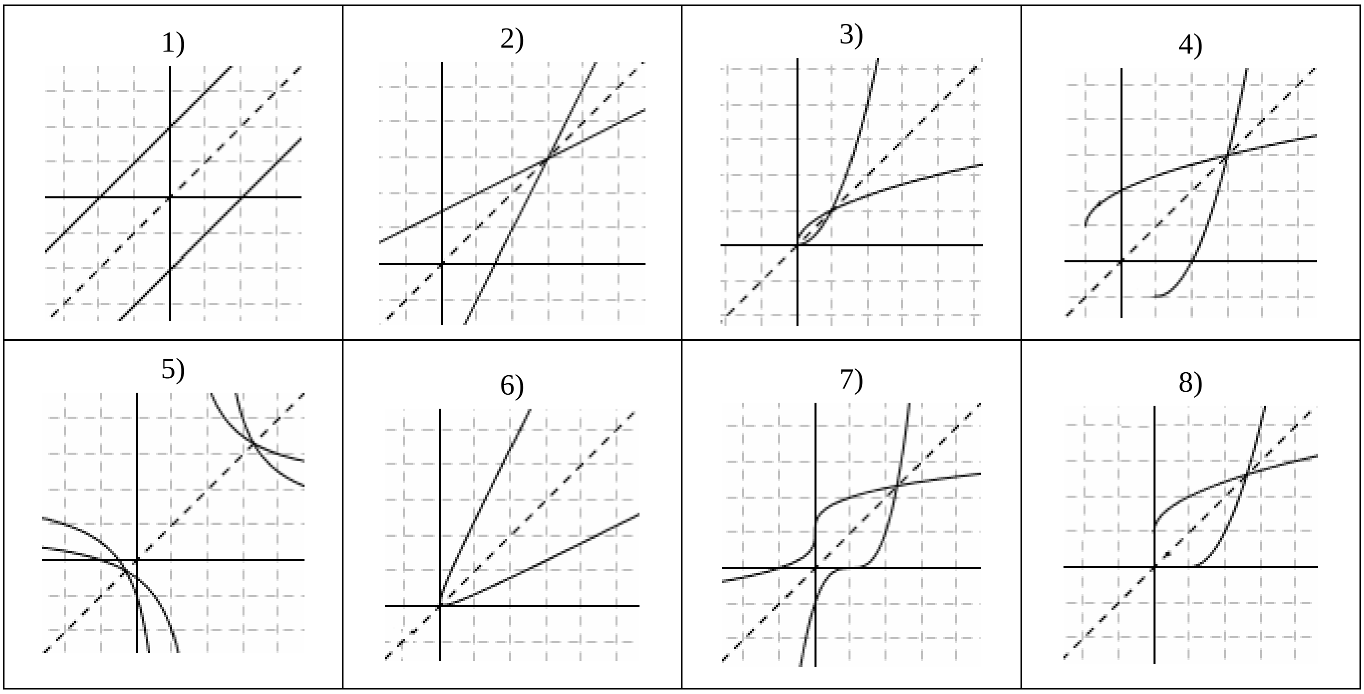
6) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1} \; su \; [0,+\infty) \; (*) \quad 2xy + y = x^2 \quad x^2 - 2xy - y = 0 \quad x = y \pm \sqrt{y^2+y} \; da \; cui \; x = y + \sqrt{y^2+y} \;\; \begin{matrix} [condiz. \\ x \ge 0] \end{matrix}$

(*) *Osserviamo che essendo* $x \ge 0$ *anche* $y \ge 0$ $\quad x = y + \sqrt{y^2+y} = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = x + \sqrt{x^2+x} = f^{-1}(x)} \quad [con \; x \ge 0]$

7) $y = f(x) = \sqrt[3]{x} + 1 \quad \sqrt[3]{x} = y-1 \quad x = (y-1)^3 = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = (x-1)^3 = f^{-1}(x)}$

8) $y = f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad \sqrt{x} = y-1 \; (x \ge 0, \; y \ge 1) \quad x = (y-1)^2 = f^{-1}(y) \quad \boxed{y = (x-1)^2 = f^{-1}(x)} \quad [x \ge 1]$

Ecco qui sotto i grafici relativi agli esercizi precedenti:



RISPOSTE agli esercizi di pag. 123

1) $f(x)=3x \quad g(x)=x+2 \quad (g\circ f)(x)=3x+2 \quad (f\circ g)(x)=3(x+2)$

2) $f(x)=x-1 \quad g(x)=\dfrac{1}{x} \quad (g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x-1} \quad (f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x}-1$

3) $f(x)=x^2 \quad g(x)=x-1 \quad (g\circ f)(x)=x^2-1 \quad (f\circ g)(x)=(x-1)^2$

4) $f(x)=x^3 \quad g(x)=x^2 \quad (g\circ f)(x)=x^6 \quad (f\circ g)(x)=x^6$

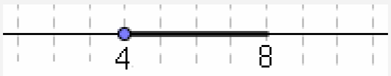
5) $f(x)=x^3+x \quad g(x)=x^2+x \quad (g\circ f)(x)=x^6+2x^4+x^3+x^2+x \quad (f\circ g)(x)=x^6+3x^5+3x^4+x^3+x^2+x$

6) $f(x)=\sqrt[3]{x} \quad g(x)=x+3 \quad (g\circ f)(x)=\sqrt[3]{x}+3 \quad (f\circ g)(x)=\sqrt[3]{x+3}$

INTERVALLI

Si chiamano "**intervalli**" **particolari insiemi numerici**. Un intervallo è l'insieme di tutti i numeri reali compresi fra il "primo estremo" e il "secondo estremo" dell'intervallo stesso.

Ad esempio, l'intervallo $[4,8)$:



- contiene il 4 (la parentesi quadra sta a indicare che quell'estremo è compreso);
- contiene TUTTI i numeri, **NON SOLO** interi **MA ANCHE** "con la virgola", compresi fra 4 e 8;
- NON contiene l'8 (la parentesi tonda sta a indicare che quell'estremo è escluso).

Un intervallo può anche essere "illimitato", se uno dei suoi estremi è "$+$infinito" ($+\infty$) o "$-$infinito" ($-\infty$) … e in questo caso corrisponde, sulla *number line*, a una semiretta anziché ad un segmento.
Ad esempio, $(-\infty, 5)$ è l'insieme di tutti i numeri reali relativi che, sulla *number line*, si trovano a sinistra del 5 (il 5 non fa parte dell'intervallo, per via della tonda).

$(-\infty, 0)$ è l'insieme dei numeri reali <0 ("strettamente negativi", negativi *in senso stretto*)
$(-\infty, 0]$ è l'insieme dei numeri reali ≤ 0 (negativi o nulli, negativi *in senso lato*)
$(0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali >0 ("strettamente positivi", positivi *in senso stretto*)
$[0, +\infty)$ è l'insieme dei numeri reali ≥ 0 (positivi o nulli, positivi *in senso lato*)
$(-\infty, +\infty)=\mathbb{R}$ (questo intervallo riempie tutta la *number line*)

RISPOSTE all'esercizio di pag. 126

a) D = $\mathbb{R}$; C = $\mathbb{R}$ b) D = $\mathbb{R}$; C = $[0,+\infty)$ c) D = $\mathbb{R}$; C = $\mathbb{R}$ d) D = $[0,+\infty)$; C = $[0,+\infty)$

e) D = $\mathbb{R}$; C = $\mathbb{R}$ f) D = $\mathbb{R}$; C = $\left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$ g) D = $\mathbb{R}$; C = $[3,+\infty)$ h) D = $\mathbb{R}-\{0\}$; C = $\mathbb{R}-\{0\}$

i) D = $\mathbb{R}-\{3\}$; C = $\mathbb{R}-\{0\}$ j) D = $\mathbb{R}-\{0\}$; C = $(0,+\infty)$ k) D = $\mathbb{R}$; C = $[1,+\infty)$

l) D = $\mathbb{R}$; C = $(-\infty, 16]$. Deve diventare l'intervallo $[2,+\infty)$ o, in alternativa, l'intervallo $(-\infty, 2]$

m) D = $\mathbb{R}-\{0\}$; C = $\mathbb{R}-\{1\}$ n) D = $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$; C = $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ o) D = $\mathbb{R}$; C = $[-1,+\infty)$

Da www.purplemath.com:

Finding the Inverse of a Function

Find the inverse of $y = 3x - 2$

Here's how the process works:

Here's my original function:	$y = 3x - 2$
Now I'll try to solve for "x =":	$y + 2 = 3x$ $x = \dfrac{y+2}{3}$
Once I have "x =", I'll switch x and y; the "y =" is the inverse.	$y = \dfrac{x+2}{3}$

Then **the inverse is** $y = \dfrac{x+2}{3}$

Composition of Functions

Given $f(x) = 2x + 3$ and $g(x) = -x^2 + 5$, find $(f \circ g)(x)$

In this case, I am not trying to find a certain numerical value.
Instead, I am trying to find the formula that results from plugging the formula for $g(x)$ into the formula for $f(x)$.
I will write the formulas at each step, using parentheses to indicate where the inputs should go:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(-x^2 + 5)$
$= 2(\qquad) + 3$
... setting up to insert the input formula
$= 2(-x^2 + 5) + 3$
$= -2x^2 + 10 + 3$
$= \mathbf{-2x^2 + 13}$