

SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1°

1. GRADO DI UN SISTEMA. METODI GENERALI DI RISOLUZIONE

Si dice “grado” di un sistema il prodotto fra i gradi delle sue equazioni.

$$\begin{aligned} \square & \begin{cases} 4x^3 + y^3 = 3 & (3^\circ \text{ grado}) \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 & (2^\circ \text{ grado}) \end{cases} \rightarrow \text{sistema di } 6^\circ \text{ grado} \\ \square & \begin{cases} x - y = 7 & (1^\circ \text{ grado}) \\ 2x + z = 11 & (1^\circ \text{ grado}) \\ xz = -6 & (2^\circ \text{ grado}) \end{cases} \rightarrow \text{sistema di } 2^\circ \text{ grado} \end{aligned}$$

Va detto che a volte un sistema “appare” di grado n , mentre in realtà il “vero” grado è inferiore.

Ad esempio, il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

appare di 2° grado, ma un semplice passaggio mostra che è invece sostanzialmente di 1° grado.

$$\begin{cases} (x + y)(x - y) = 48 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12(x - y) = 48 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

La problematicità, dato un sistema, di stabilire a priori quale sia il suo grado effettivo, rende ardua l’enunciazione, per i sistemi, di un teorema analogo a quello che è, per le equazioni, il “Teorema Fondamentale dell’Algebra”.

E’ possibile, comunque, affermare che

un sistema di grado n non può avere più di n soluzioni

(eccettuati i casi in cui il sistema risulti indeterminato).

E’ chiaro che questo discorso sul “grado” si può riferire esclusivamente a quei sistemi nei quali le equazioni in gioco sono tutte algebriche (ossia, della forma “polinomio = 0”).

♥ Importante tener presente che,

quando si dice “**SOLUZIONE**” con riferimento a un sistema, si intende:

- una **COPPIA ORDINATA** di numeri, **se il sistema ha due incognite**;
- una **TERNA ORDINATA** di numeri, **se il sistema ha tre incognite**;
- ecc.

Il metodo più generale per la risoluzione di un sistema è quello di **sostituzione**;

è possibile comunque applicare anche “**riduzione**”,

ossia rimpiazzare un’equazione, quando lo si ritenga conveniente,

con una **combinazione lineare** (NOTA) dell’equazione stessa con una o più fra le altre.

NOTA: “combinazione lineare” di due o più oggetti matematici (equazioni, vettori, ...)

è ciò che si ottiene sommandoli algebricamente,

dopo aver eventualmente moltiplicato ciascuno di essi per una costante numerica.

Vedremo ora un paio di ESEMPI.

Comunque, lo vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO? DAVVERO UTILISSIMO?**

ALLA FINE della risoluzione di un sistema, **FAI SEMPRE LA VERIFICA**,

sostituendo, nel sistema iniziale, al posto delle singole incognite,

i valori rispettivamente trovati, per controllare se **TUTTE** le uguaglianze sono esatte.

Metodo comodo, rapido, efficace

per essere certi di aver fatto giusto, o per scoprire che c’è l’errore!!!



$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 3y + 1; \quad x = \frac{3y+1}{2} \\ \left(\frac{3y+1}{2}\right)^2 - y^2 = 3; \quad \frac{9y^2+6y+1}{4} - y^2 = 3; \quad 9y^2+6y+1-4y^2=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3y+1}{2} \\ 5y^2+6y-11=0; \quad y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+55}}{5} = \frac{-3 \pm \sqrt{64}}{5} = \frac{-3 \pm 8}{5} = \left\langle -\frac{11}{5} \right\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{3y+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = -\frac{11}{5} \\ x = \frac{3\left(-\frac{11}{5}\right)+1}{2} = \frac{-\frac{33}{5}+1}{2} = -\frac{28}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{14}{5} \end{cases}$$

Il sistema assegnato, che era di 2° grado, ammette dunque le 2 soluzioni: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -14/5 \\ y = -11/5 \end{cases}$

$$2) \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 11 \\ xy = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \quad (x \neq 0) \\ 2x^2 + \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 11; \quad 2x^2 + \frac{9}{x^2} = 11; \quad 2x^4 + 9 = 11x^2; \quad 2x^4 - 11x^2 + 9 = 0; \end{cases}$$

Il passaggio in cui si isola y è effettuabile solo supponendo $x \neq 0$; d'altra parte, una coppia (x, y) con $x = 0$ non potrebbe verificare la condizione $xy = -3$ quindi non potrebbe essere soluz. del sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ (x^2)_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{11 \pm 7}{4} = \left\langle \frac{9}{2} \right\rangle \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = \frac{9}{2} \rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{x} = -\frac{3}{1} = -3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{3}{x} = -\frac{3}{-1} = 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{3}{x} = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{3}{x} = \sqrt{2} \end{cases}$$

ESERCIZI (sistemi di grado superiore al 1°) Vai alle correzioni dei n. 3, 4, 9, 12, 14 

$$3) \begin{cases} 3x - y = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ xy + 4 = 0 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 27 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} y + 1 = 2x \\ x^2 - y + 3 = 0 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} y^2 + x + y = 88 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{x+y}{5} \\ (x-1)(x+1) = 14 - xy \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(sottrarre} \\ \text{innanzitutto} \\ \text{membro a membro)} \end{matrix} \quad 10) \begin{cases} x + 2y + x^2 + y^2 = 5 \\ 2x + y - x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - y = 1 \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy = a(2a-1) \end{cases} \quad 13) \begin{cases} x^2 - y^2 = 4k \\ x + y = 2k \end{cases} \quad 14) \begin{cases} bx + ay = 2ab \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

SOLUZIONI

$$3) \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = -\frac{13}{5} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \mp 3 \end{cases} \quad 6) \text{ Imp. (in } \mathbb{R} \text{)}$$

$$7) \begin{cases} x = -2 \\ y = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 44/25 \\ y = 44/5 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \quad 10) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x = -\frac{1}{10} \\ y = -\frac{7}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x = a \\ y = a-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1-2a}{2} \\ y = -\frac{1+2a}{2} \end{cases} \quad 13) \begin{cases} x = k+1 \\ y = k-1 \end{cases} \quad 14) \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{a(3b^2 - a^2)}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{b(3a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$