

4. SISTEMI RISOLUBILI CON ARTIFICI VARI O FATTORIZZAZIONI

- 1) $\begin{cases} x^3y^3 + x^2y^2 - 16xy = 16 \\ y - x + 2 = 0 \end{cases}$ La prima equazione è caratterizzata dal "blocco" xy .
Poniamo dunque $xy = z$ e determineremo i valori di xy .

$$x^3y^3 + x^2y^2 - 16xy = 16 \quad \boxed{xy = z} \quad z^3 + z^2 - 16z = 16 \quad (z+1)(z^2-16) = 0 \quad \boxed{z = -1; z = \pm 4}$$

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} xy = -1 \\ y - x + 2 = 0 \end{cases} & \begin{cases} xy = 4 \\ y - x + 2 = 0 \end{cases} & \begin{cases} xy = -4 \\ y - x + 2 = 0 \end{cases} \\ \dots & \dots & \dots \\ \begin{cases} y = x - 2 \\ (x-1)^2 = 0; \quad x = 1 \end{cases} & \begin{cases} y = x - 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} & \begin{cases} y = x - 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{1-4} \text{ imp. in } \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2 = -1 \end{cases} & \begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} \\ y = 1 - \sqrt{5} - 2 = -1 - \sqrt{5} \end{cases} & \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ y = 1 + \sqrt{5} - 2 = -1 + \sqrt{5} \end{cases} \end{array}$$

Le soluzioni reali del sistema dato sono dunque le tre coppie:

$$\boxed{(1, -1) \text{ soluzione "doppia"}; \quad \boxed{(1 - \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}); \quad \boxed{(1 + \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})}}$$

- 2) $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + xy = 17 \\ x + y - 2xy = -1 \end{cases}$ Questo è un sistema nel quale è possibile far comparire esclusivamente i due blocchi $x + y$, xy

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2) + xy = 17 \\ (x + y) - 2xy = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3[(x + y)^2 - 2xy] + xy = 17 \\ (x + y) - 2xy = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x + y)^2 - 6xy + xy = 17 \\ (x + y) - 2xy = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3(x + y)^2 - 5xy = 17 \\ (x + y) - 2xy = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x + y = s \\ xy = p \end{matrix}} \quad \begin{cases} 3s^2 - 5p = 17 \\ s - 2p = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = 2p - 1 \\ 3(2p - 1)^2 - 5p = 17 \end{cases}$$

$$3(4p^2 - 4p + 1) - 5p = 17; \dots \quad p_{1,2} = \frac{-7 \pm 12}{2}$$

$$\begin{cases} p = 2 \\ s = 2p - 1 = 4 - 1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} p = -7/12 \\ s = 2p - 1 = -7/6 - 1 = -13/6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = -7/12 \\ x + y = -13/6 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = \frac{-13 \pm \sqrt{253}}{12} \\ y = \frac{-13 \mp \sqrt{253}}{12} \end{matrix}}$$

- 3) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 + x + 2y = 24 \end{cases}$ Se fattorizziamo il primo membro della prima equazione, potremo spezzare il sistema dato in una coppia di sistemi più semplici.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x^2 + x + 2y = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 + x + 2y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ 4y^2 - 2y + 2y = 24; \quad y^2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 + 2y + 2y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = \pm\sqrt{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ y = 2 \vee y = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = -2y = -2\sqrt{6} \\ y = \sqrt{6} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} x = -2y = 2\sqrt{6} \\ y = -\sqrt{6} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} x = 2y = 4 \\ y = 2 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} x = 2y = -6 \\ y = -3 \end{matrix}}$$

ESERCIZI Correzioni →

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 11 \\ xy + xz + yz = -1 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x - y + z = a \\ x - 3y + 2z + 1 = 0 \\ x^2 + z^2 = 2(y^2 + 1) \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^2y + xy^2 = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + y - 6z = 0 \\ x^2 + y^2 + 36z^2 = 56 \\ xyz = 8 \end{cases}$$

SOLUZIONI

$$4) \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = a+1 \\ y = a \\ z = a-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = (a-3)/3 \\ y = (5a+6)/3 \\ z = (7a+9)/3 \end{cases}$$

$$6) \left(0, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$$

$$7) \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-6 \\ y=2 \\ z=-2/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \\ z=-2/3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-6 \\ y=4 \\ z=-1/3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=-6 \\ z=-1/3 \end{cases}$$