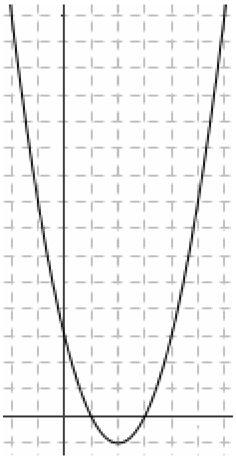
7. LO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO E LA RISOLUZIONE DI UNA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO

"STUDIARE IL SEGNO" DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO
significa chiedersi per quali valori della variabile il trinomio

- **assume valore positivo;**
- **si annulla;**
- **assume valore negativo**

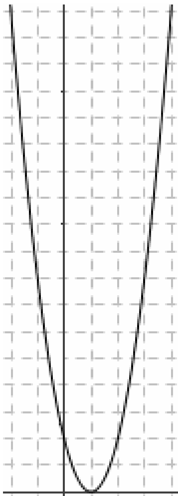
Ecco qui di seguito i grafici di alcuni trinomi di 2° grado, pensati come funzioni
(*l'unità di misura è 1 quadretto*):

x	y
-5	48
-4	35
-3	24
-2	15
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8



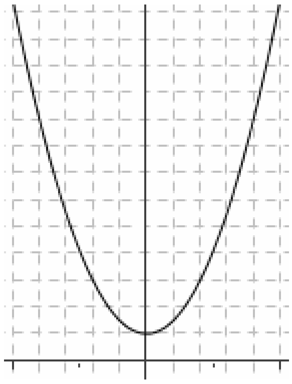
$y = x^2 - 4x + 3$

x	y
-5	72
-4	50
-3	32
-2	18
-1	8
0	2
1	0
2	2
3	8
4	18
5	32



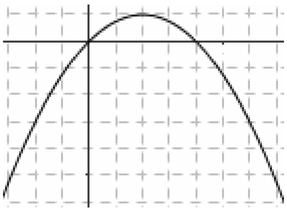
$y = 2x^2 - 4x + 2$

x	y
-5	13,5
-4	9
-3	5,5
-2	3
-1	1,5
0	1
1	1,5
2	3
3	5,5
4	9
5	13,5



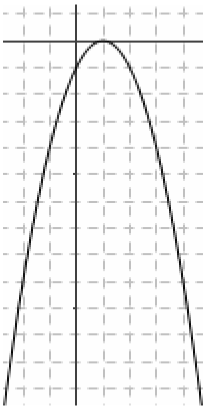
$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

x	y
-5	-11,25
-4	-8
-3	-5,25
-2	-3
-1	-1,25
0	0
1	0,75
2	1
3	0,75
4	0
5	-1,25



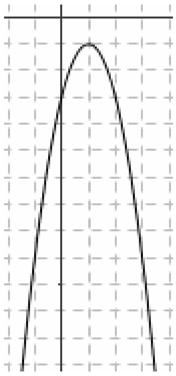
$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$

x	y
-5	-36
-4	-25
-3	-16
-2	-9
-1	-4
0	-1
1	0
2	-1
3	-4
4	-9
5	-16



$y = -x^2 + 2x - 1$

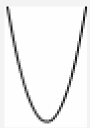
x	y
-5	-73
-4	-51
-3	-33
-2	-19
-1	-9
0	-3
1	-1
2	-3
3	-9
4	-19
5	-33



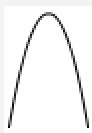
$y = -2x^2 + 4x - 3$

Come avevamo già avuto modo di evidenziare in precedenza,
il grafico di un trinomio di 2° grado, pensato come una funzione,
è costituito da una curva che ha un tipico andamento
"scendi-poi-sali", oppure "sali-poi-scendi",
chiamata "**parabola**".

Quando il **coefficiente di x^2** nel trinomio è **positivo**,
la parabola ha la **concavità** (la parte "cava")
rivolta verso l'alto →



mentre se il **coefficiente di x^2** è **negativo**,
la parabola ha la **concavità**
rivolta verso il basso →



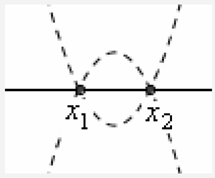
Lo studio del segno di un trinomio di 2° grado assegnato $\mathbf{ax^2+bx+c}$
si effettuerà disegnando “approssimativamente” la parabola $y=\mathbf{ax^2+bx+c}$
che rappresenta il grafico del trinomio dato, pensato come funzione,
poi andando a vedere per quali valori di *x* la *y* corrispondente
(ossia, il valore assunto dal trinomio) è positiva, nulla, negativa.

Ora, **per tracciare approssimativamente la parabola** in questione **basterà**:

♪ **stabilire se la sua concavità è rivolta verso l’alto oppure verso il basso,** semplicemente **osservando il segno del coefficiente di x^2** nel trinomio;

a > 0 **a < 0**

♫ **stabilire se la parabola interseca l’asse *x*,**
e, in caso affermativo, DOVE lo interseca:
ma **ciò equivale a** chiedersi per quali valori di x risulta $y=0$,
cioè a **risolvere l’equazione $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$**
(detta “equazione associata” al trinomio considerato).



Studiamo, ad esempio, il segno del seguente trinomio di 2° grado: $\boxed{x^2-8x+12}$

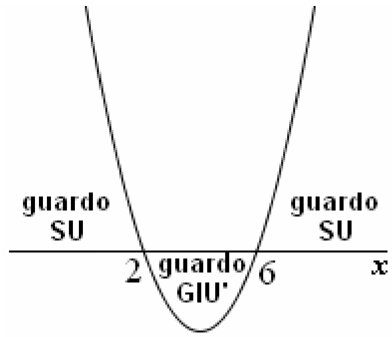
Si tratta di tracciare approssimativamente il grafico della parabola $y=x^2-8x+12$.

♪ Di essa sappiamo che ha la concavità rivolta verso l’alto, perché il coefficiente di x^2 è $1>0$.

♫ Ora stabiliremo per quali valori di x la parabola interseca l’asse orizzontale, risolvendo l’equazione $x^2-8x+12=0$.

Con la formula, o per scomposizione in fattori, si trova $x=2 \vee x=6$.

Allora il grafico sarà (ci interessa solo una “bozza”!)
il seguente:

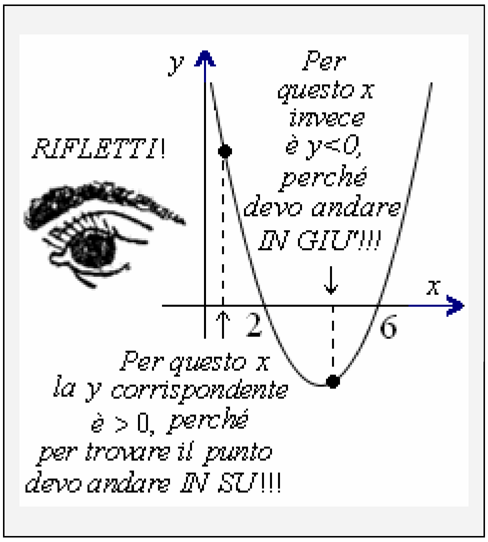


♥ Immagina di essere una FORMICHINA
che cammina sull’asse delle *x*.
I valori di x per cui è $y>0$ sono quelli
per i quali il punto sulla parabola
lo si vede guardando verso l’alto.

… e osservando il grafico
si traggono subito
le conclusioni (y esprime
il valore del trinomio):

$y>0$ *per* $x<2 \vee x>6$
$y=0$ *per* $x=2 \vee x=6$
$y<0$ *per* $2<x<6$

Ad es., con $x=5$
(5 è compreso fra 2 e 6)
il trinomio
dovrebbe assumere
valore negativo.
Controlla, sostituendo!
Troverai che con $x=5$
il trinomio vale -3



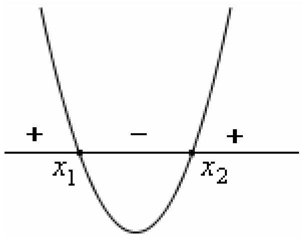
ESERCIZI. Studiare il segno dei trinomi seguenti (risposte subito a fianco):

1) $-x^2-x+20$	$y>0$ *per* $-5<x<4$ $y=0$ *per* $x=-5 \vee x=4$ $y<0$ *per* $x<-5 \vee x>4$	2) $2x^2-x$	$y>0$ *per* $x<0 \vee x>1/2$ $y=0$ *per* $x=0 \vee x=1/2$ $y<0$ *per* $0<x<1/2$
3) $x^2-14x+49$	$y>0$ *per* $x \neq 7$ $y=0$ *per* $x=7$ $y<0$ *per nessun valore di x*	4) x^2-x+1	$y>0$ *per tutti i valori di x* $y=0$ *per nessun valore di x* $y<0$ *per nessun valore di x*
5) $49-x^2$	$y>0$ *per* $-7<x<7$ $y=0$ *per* $x=-7 \vee x=7$ $y<0$ *per* $x<-7 \vee x>7$	6) $x^2-20x+64$	$y>0$ *per* $x<4 \vee x>16$ $y=0$ *per* $x=4 \vee x=16$ $y<0$ *per* $4<x<16$
7) $x^2-16x+64$	$y>0$ *per* $x \neq 8$ $y=0$ *per* $x=8$ $y<0$ *per nessun valore di x*	8) $x^2-12x+64$	$y>0$ *per tutti i valori di x* $y=0$ *per nessun valore di x* $y<0$ *per nessun valore di x*
9) $2x^2+2x-24$	$y>0$ *per* $x<-4 \vee x>3$ $y=0$ *per* $x=-4 \vee x=3$ $y<0$ *per* $-4<x<3$	10) $-x^2+2x+1$	$y>0$ *per* $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ $y=0$ *per* $x=1-\sqrt{2} \vee x=1+\sqrt{2}$ $y<0$ *per* $x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2}$

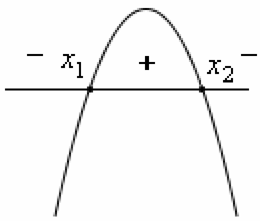
Volendo, si possono enunciare le seguenti **REGOLE**:

Un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c
con $\boxed{\Delta>0}$
ha **segno concorde con quello del suo 1° coeff. per valori** di x **esterni** all'intervallo delimitato dalle due soluzioni dell'equazione associata (cioè, per $x<x_1 \vee x>x_2$)
mentre ha **segno discorde** rispetto a quello del suo 1° coefficiente **per valori interni** (cioè, per $x_1<x<x_2$)

$\Delta>0,\ a>0$

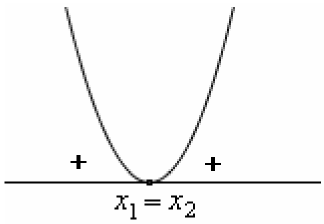


$\Delta>0,\ a<0$

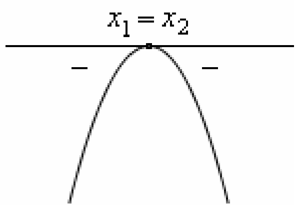


Un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c
con $\boxed{\Delta=0}$
ha **quasi sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, con una sola eccezione**:
per $x=x_1$,
con $x_1\ (=x_2)$ soluzione dell'equazione associata,
il trinomio si annulla.

$\Delta=0,\ a>0$

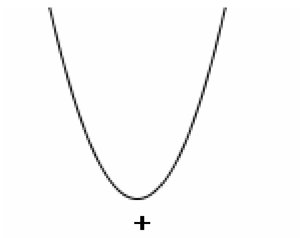


$\Delta=0,\ a<0$

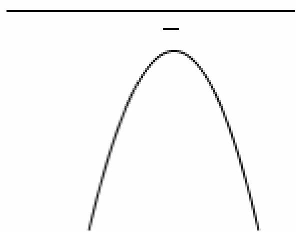


Un trinomio di 2° grado ax^2+bx+c
con $\boxed{\Delta<0}$
ha **sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, senza eccezioni.**

$\Delta<0,\ a>0$



$\Delta<0,\ a<0$



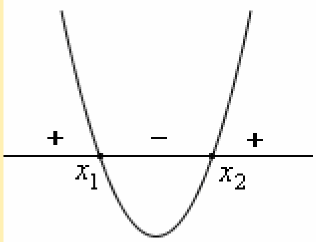
Quando si risolve una disequazione di 2° grado, si ha sempre la possibilità di lavorare con un trinomio col 1° coefficiente positivo: infatti, se così non fosse, si potrebbero sempre cambiare segni e verso. E' perciò molto comodo, oltre che conoscere bene le regole sopra riportate, tenere anche presente cosa dicono **LE STESSE REGOLE**, quando vengono **PARTICOLARIZZATE AL CASO** $\mathbf{a>0}$:

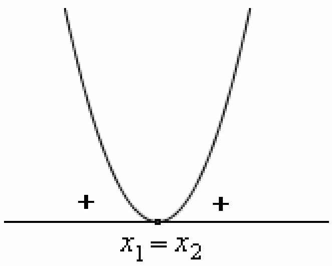
♥ **UN TRINOMIO DI 2° GRADO ax^2+bx+c CON 1° COEFFICIENTE POSITIVO ($\boxed{a>0}$)**

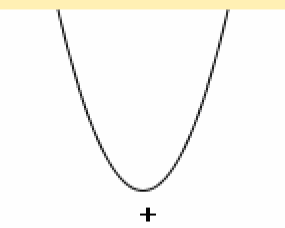
se ha $\boxed{\Delta>0}$
è **positivo per valori esterni**
$x<x_1 \vee x>x_2$
e **negativo per valori interni**
$x_1<x<x_2$

se ha $\boxed{\Delta=0}$
è **positivo per ogni valore di x, con una sola eccezione**:
è nullo per $x=x_1\ (=x_2)$

se ha $\boxed{\Delta<0}$
è **positivo per ogni valore di x, senza eccezioni**.







Rimpiazzando, in questo schema, "positivo/negativo" con "concorde/discorde, in segno, rispetto al segno del 1° coefficiente", ecco che si torna alle regole generali.

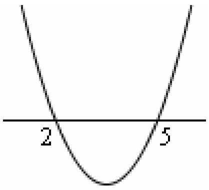
Una DISEQUAZIONE DI 2° GRADO ci chiede di rispondere a uno solo dei tre punti in cui consiste lo studio del segno di un trinomio di 2° grado. Vediamo alcuni ESEMPI SVOLTI.

$\boxed{x^2-7x+10<0}$

Equazione associata:

$$x^2-7x+10=0$$
$$(x-2)(x-5)=0$$
$$x=2 \vee x=5$$

Il grafico della parabola $y=x^2-7x+10$
è il seguente ($a>0$, quindi concavità verso l'alto):



La disequazione (che ha verso $<$)
è perciò verificata per: $\boxed{2<x<5}$

$\boxed{2x+1<8x^2}$

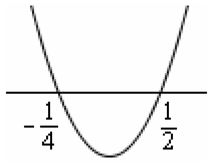
$$-8x^2+2x+1<0$$

1° coefficiente negativo: conviene cambiare segni e verso

$$8x^2-2x-1>0$$

Penso all'equazione associata e la risolvo: $x_{1,2}=\ldots=\left\langle\begin{matrix}-1/4\\ 1/2\end{matrix}\right.$

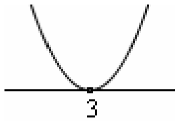
Il grafico della parabola $y=8x^2-2x-1$ è:



La disequazione (il cui verso *definitivo* è $>$)
risulta quindi verificata per: $\boxed{x<-1/4 \vee x>1/2}$

$\boxed{x^2-6x+9>0}$

L'equazione associata è: $x^2-6x+9=0$
con le soluzioni $x_1=x_2=3$
Il grafico della parabola $y=x^2-6x+9$ è:



La disequazione è perciò verificata per $\boxed{x\neq 3}$

Anche (meglio!) con ragionamento più diretto:

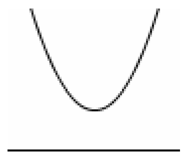
$$x^2-6x+9>0 \leftrightarrow (x-3)^2>0$$

La disequazione ci chiede dunque di stabilire
per quali valori di x il quadrato $(x-3)^2$
è strettamente positivo.
Ma un quadrato è **quasi sempre** strettamente positivo:
l'unica eccezione si ha quando il quadrato si annulla,
il che avviene quando si annulla la sua base.
Perciò la disequazione proposta è verificata
"quasi sempre", purché sia $x-3\neq 0,\ \ x\neq 3$.

$\boxed{x<\dfrac{x^2+5}{4}}$

$$4x<x^2+5$$
$$-x^2+4x-5<0$$
$$x^2-4x+5>0$$

Passando all'equazione associata, si vede che è $\Delta<0$
per cui tale equazione è impossibile.
Ciò significa che non esiste nessun valore di x
per il quale si abbia $y=x^2-4x+5=0$:
la parabola $y=x^2-4x+5$
è priva di intersezioni con l'asse delle x e il suo grafico è



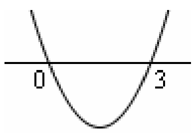
La disequazione è perciò verificata $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}}$

$\boxed{x^2>3x}$

$$x^2-3x>0$$
$$x(x-3)>0$$

Mutando ora nella nostra mente
il > in =
per pensare all'equazione associata,
vediamo che le soluzioni di questa
sono $x=0 \vee x=3$

Grafico:



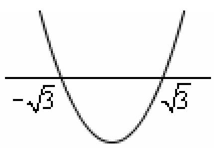
Soluzioni della disequazione:

$\boxed{x<0 \vee x>3}$

$\boxed{x^2>3}$

$$x^2-3>0$$

Eq. associata: $x^2-3=0$,
con le soluzioni $x=\pm\sqrt{3}$.



Soluzioni della disequazione:

$\boxed{x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3}}$

NOTA
Sarebbe stato possibile
risolvere questa disequazione
anche in un altro modo, sullo stile
dell'Esempio 1 di pagina 148

$\boxed{x^2+3>0}$

Si vede subito che la disequazione
è sempre verificata, $\forall x\in\mathbb{R}$. Infatti
il 1°membro è la somma di due termini,
il primo dei quali è ≥ 0 per ogni x
e il secondo dei quali è una costante >0.
E' quindi evidente che la somma
di tali due termini sarà >0 per ogni x.

$$\underbrace{\overbrace{x^2}^{\geq 0,\forall x}\ \ \overbrace{+3}^{>0}}_{>0,\ \forall x}$$

Volendo risolvere in modo "standard",
si trova un'eq. ass. impossibile, quindi
un grafico "tutto sopra" rispetto all'asse x,
e la conclusione è la medesima:
disequazione verificata $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}}$