

15. SISTEMI DI DISEQUAZIONI

L'obiettivo di un **sistema** (di equazioni, di disequazioni, misto) è sempre di determinare per quali valori dell'incognita, o delle incognite, sono verificate **CONTEMPORANEAMENTE TUTTE** le condizioni che compongono il sistema.

Per risolvere un sistema di disequazioni,

A) PRIMA SI RISOLVERA' SEPARATAMENTE OGNI SINGOLA DISEQUAZIONE;

B) POI si tratterà uno SCHEMA "DI INTERSEZIONE",

che mostri in un quadro "sinottico" per quali valori è verificata ciascuna disequazione e permetta così di stabilire per quali valori sono verificate contemporaneamente tutte.

Esempio 1: NOTA

Due differenze fondamentali fra i sistemi di DISEquazioni e i sistemi di EQUazioni:

$$\begin{cases} (x-4)^2 \leq x^2 \\ \frac{x-1}{x-4} \leq 0 \end{cases}$$

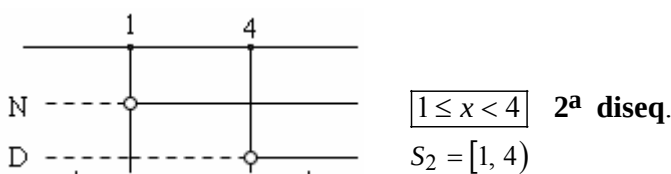
- 1) in un sistema di disequazioni abbiamo UNA SOLA incognita (disequazioni in più incognite, e sistemi con esse, si incontrano in determinati contesti, e si affrontano in generale con metodi grafici, ma noi qui non ce ne occuperemo)
- 2) in un sistema di disequazioni, queste non vengono fatte "interagire" fra loro, ma, come abbiamo detto, le si risolve separatamente, una per una.

1^a disequazione:

$$(x-4)^2 \leq x^2 \quad x^2 - 8x + 16 \leq x^2 \quad -8x \leq -16 \quad 8x \geq 16 \quad \boxed{x \geq 2} \quad \text{1^a diseq.} \quad S_1 = [2, +\infty)$$

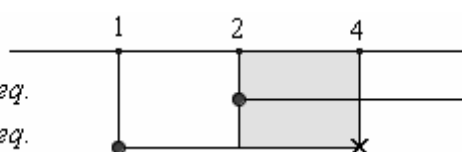
2^a disequazione:

$$\frac{x-1}{x-4} \leq 0 \quad \begin{array}{l} N > 0 \quad x-1 > 0 \quad x > 1 \\ D > 0 \quad x-4 > 0 \quad x > 4 \end{array}$$



SCHEMA DI SISTEMA
(= SCHEMA DI INTERSEZIONE):

1^a diseq.
2^a diseq.



SOLUZIONI DEL SISTEMA:

$$\boxed{2 \leq x < 4} \quad S = S_1 \cap S_2 = [2, 4)$$

♥ SIMBOLOGIA

IN UNO SCHEMA DI SISTEMA:

linea continua, pallino pieno
DISEQUAZIONE VERIFICATA
nessuna linea, crocetta di esclusione
DISEQUAZIONE NON VERIFICATA

Uno schema di sistema è anche chiamato "**schema di intersezione**": infatti l'insieme S delle soluzioni del sistema costituisce l'intersezione fra gli insiemi $S_1, S_2, \dots$ delle soluzioni delle singole condizioni che compongono il sistema.

Esempio 2:

$$\begin{cases} (x-1)^4 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \\ (x-2)^3 \leq 0 \end{cases}$$

1^a disequazione:

$$(x-1)^4 > 0 \quad x \neq 1$$

2^a disequazione:

$$x^2 - 2x < 0 \quad x(x-2) < 0 \quad 0 < x < 2$$

3^a disequazione:

$$(x-2)^3 \leq 0 \quad x-2 \leq 0 \quad x \leq 2$$



SOLUZIONI SISTEMA:

$$\boxed{0 < x < 2 \quad \text{ma } x \neq 1}$$

In forma insiemistica:

$$S_1 = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{opp.} \quad (-\infty, +\infty) - \{1\} \quad \text{opp.} \quad (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$S_2 = (0, 2)$$

$$S_3 = (-\infty, 2]$$

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (0, 2) - \{1\} \quad \text{oppure} \quad (0, 1) \cup (1, 2)$$

OSSERVAZIONI UTILI

- Se, nell'ambito di un sistema, si nota che **due delle condizioni sono "INCOMPATIBILI"** fra loro, ossia: **non possono essere verificate contemporaneamente**, allora si può immediatamente concludere che **il sistema è impossibile**.

Es.
$$\begin{cases} x > 6 \\ 1 < x < 8 \\ x < 4 \end{cases}$$
 La prima e la terza condizione sono in contraddizione fra loro, sono incompatibili: non c'è alcun valore di x che le possa soddisfare entrambe simultaneamente. Il sistema è impossibile.

- La presenza anche di una sola condizione IMPOSSIBILE, rende impossibile tutto il sistema.

Es.
$$\begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ x^2 > 8x + 7 \\ x^2 + 1 < 0 \end{cases}$$
 Si vede subito che la terza condizione è impossibile. Non perdiamo tempo: il sistema è impossibile.

- Invece una condizione SEMPRE VERIFICATA ($\forall x \in \mathbb{R}$) non pone alcun vincolo all'incognita, e di conseguenza è **irrilevante nell'ambito del sistema: essa può essere, volendo, eliminata** (se comunque la si tiene, nello schema finale ad essa corrisponderà una linea continua di "condizione sempre verificata", e tale linea continua sarà, ovviamente, ininfluyente).

Es.
$$\begin{cases} x^2 > 9 \\ 3(x+1) > 4(x-1) \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases}$$
 Si vede subito che la terza condizione è sempre verificata. Essa è allora irrilevante: se vogliamo, possiamo eliminarla dal sistema, e le soluzioni di questo non cambieranno.

- Sovente lo "schema di intersezione" è **superfluo**, perché (almeno in situazioni semplici) può essere **rimpiazzato da considerazioni elementari, che si possono fare a mente**.

♪ Ad esempio, è subito evidente che il sistema $\begin{cases} x > 2 \\ x < 5 \end{cases}$ ha come soluzioni: $2 < x < 5$

- ♪ **FRA DUE O PIÙ CONDIZIONI "EQUIVERSE", PREVALE LA PIÙ RESTRITTIVA**, ossia quella che lascia all'incognita minore "libertà":

$$\begin{cases} x > 1 \\ x > 4 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow x > 7$$
 Fra le tre condizioni con lo stesso verso, la più "restrittiva", quella che lascia meno libertà a x , è la $x > 7$, che "obbliga" x a stare "a destra del 7". Ciascuna delle altre due lascia a disposizione di x un piccolo spazio in più.

$$\begin{cases} x > 0 & * \\ x < 2 & ** \\ x > 1 & * \\ x < 3 & ** \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 & * \\ x < 2 & ** \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

DISEQUAZIONI SU INTERNET

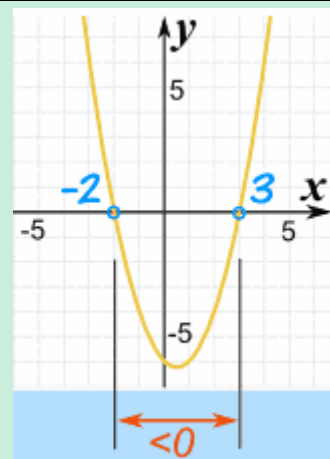
- ♪ Dal sito www.themathpage.com del professor [Lawrence Spector](http://www.themathpage.com):

INEQUALITIES ⇨

(The number line, "Or" versus "and", ... , Solving inequalities)

- ♪ Dal sito www.mathsisfun.com

(da cui è tratta l'immagine qui a fianco):

SOLVING QUADRATIC INEQUALITIES ⇨

ESERCIZI SUI SISTEMI DI DISEQUAZIONI

1) $\begin{cases} x^2 < 3x \\ 2x \geq x+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x-5}{x+5} < 0 \\ x^2 \leq x(x+1) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 < 2x-3 \\ x^2 < 3x-2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 > x+6 \\ 3(x-1) < 3x-2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{2x-5}{x-1} \geq 1 \\ 7x \geq x^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 > x+2 \\ \frac{x-7}{x} \leq 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x-3}{2} < \frac{x}{3} \\ 3(x+2) < 5x \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ 2x < x+3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x \leq 5 \\ x < 5 \\ x \leq 4 \\ x < 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{4-x}{x} \geq 0 \\ \frac{6-x}{2-x} \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4-x}{x} \geq 0 \\ \frac{6-x}{2-x} \leq 0 \end{cases}$ si può riscrivere, se si preferisce, come $-\frac{x-4}{x} \geq 0$ e quindi come $\frac{x-4}{x} \leq 0$
 si può riscrivere, volendo, come $\frac{x-6}{x-2} \leq 0$ perché se si cambiano simultaneamente di segno sia il numeratore che il denominatore, una frazione non varia

12) $\begin{cases} 2x^2 < 2x+3 \\ 2x-1 > \frac{x}{3} \end{cases}$ 13) $\begin{cases} \frac{x-5}{x-1} < 0 \\ x^2-9 > 0 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x+1 \geq 3x-1 \\ x \leq 2(x+2) \\ x^2+3x < 10 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \frac{3x-4}{x-6} \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x} \leq 0 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x^4 > 2x^3 \\ \frac{x^3-4}{x^4-4} < 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 16x^4+3 > 0 \\ 16x^4-3 \geq 0 \\ 3x^4+16 > 16x^2 \\ \frac{1}{x^2} \geq 0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \frac{x-3}{7-x} \leq 0 \\ \frac{4x}{x+4} \leq 0 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} 8x^6-7x^3-1 > 0 \\ x^4(16x^4+15) \geq 1 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 2x^2+3 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \\ 2x < 2x^2+4 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x^2+2 \geq 3x \\ 1 \geq \frac{x}{2} \\ 2x^2+1 > x \end{cases}$

SOLUZIONI

1) $2 \leq x < 3$ 2) $0 \leq x < 5$ 3) **imposs.** 4) $x < -2 \vee x > 3$ 5) $0 \leq x < 1 \vee 4 \leq x \leq 7$ 6) $2 < x \leq 7$

7) $\begin{cases} 3 < x < 9 \\ S = (3, 9) \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \leq -2 \vee 2 \leq x < 3 \\ S = (-\infty, -2] \cup [2, 3) \end{cases}$ 9) $1 \leq x < 4$ 10) $x \geq 1$

11) $2 < x \leq 4$ 12) $\frac{3}{5} < x < \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ 13) $3 < x < 5$ 14) $-4 \leq x < 2$

15) 1^a diseq.: $-1 \leq x < 6$ $S_1 = [-1, 6)$ 16) 1^a diseq.: $x < 0 \vee x > 2$
 2^a diseq.: $x \leq -1 \vee 0 < x \leq 1$ $S_2 = (-\infty, -1] \cup (0, 1]$
 Sistema: $\begin{cases} x = -1 \vee 0 < x \leq 1 \\ S = S_1 \cap S_2 = \{-1\} \cup (0, 1] \end{cases}$
 Sistema: $\begin{cases} x < -\sqrt{2} \\ S = (-\infty, -\sqrt{2}) \end{cases}$

17) 1^a diseq.: $\forall x \in \mathbb{R}$ 2^a diseq.: $x \leq -\frac{\sqrt[4]{3}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ 18)
 3^a diseq.: $x < -2 \vee -\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}} \vee x > 2$ 4^a diseq.: $x \neq 0$
 Sistema: $S = (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt[4]{3}}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup (2, +\infty)$
 1^a diseq.: $x \leq 3 \vee x > 7$
 2^a diseq.: $-4 < x \leq 0$
 Sistema: $-4 < x \leq 0: S = (-4, 0]$

19) 1^a diseq.: $x < -\frac{1}{2} \vee x > 1$ 20) $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ x \leq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$
 2^a diseq.: $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}$
 Sistema: $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \vee x > 1 \\ S = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \end{cases}$
 Sistema: $\begin{cases} x \neq 2 \\ S = \mathbb{R} - \{2\} = \\ = (-\infty, +\infty) - \{2\} = \\ = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \end{cases}$
 Sistema: $\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ S = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \end{cases}$