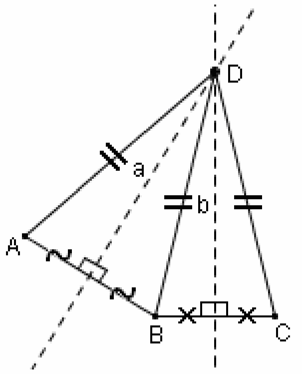
6.2 - TEOREMI FONDAMENTALI SULLA CIRCONFERENZA

TEOREMA
Per tre punti non allineati (cioè: che non giacciono su di una stessa retta)
passa una circonferenza ed una sola.



IPOTESI

A, B, C non allineati

TESI

Esiste
una
e una sola
circonferenza,
che passa per i tre punti A, B, C

Dimostrazione

ESISTENZA

Siano a, b gli assi dei due segmenti AB e BC.
Osserviamo che le due rette a, b devono per forza incontrarsi, perché sono perpendicolari a due rette incidenti.
Più in dettaglio: se, per assurdo, a e b fossero parallele, allora a, oltre ad esser perpendicolare ad AB, cadrebbe perpendicolarmente anche sul prolungamento di BC (in quanto parallela ad una perpendicolare a BC), e si formerebbe un triangolo con due angoli retti, il che è impossibile.
Sia dunque D il punto di incontro dei suddetti due assi a, b.
Ricordiamo che l'asse di un segmento (cioè, la perpendicolare a quel segmento nel suo punto medio) risulta essere il luogo geometrico dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento dato.
Perciò, poiché D appartiene all'asse di AB, avremo DA=DB;
e poiché D appartiene anche all'asse di BC, sarà pure DB=DC.
In definitiva, avremo DA=DB=DC e, di conseguenza, puntando il compasso in D con apertura DA, la circonferenza tracciata passerà anche per B e per C.
L'esistenza di una circonferenza passante per tutti e tre i punti A, B, C è così dimostrata.

UNICITA'

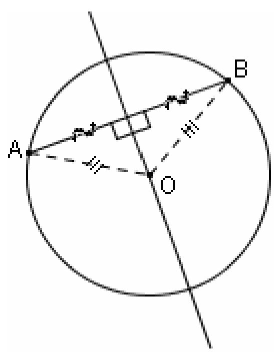
Tale circonferenza è poi unica, perchè la posizione del suo centro è univocamente determinata.
Infatti, esclusivamente il punto D della costruzione da noi effettuata
ha la proprietà di essere equidistante da A, B e C:
se un punto O è tale che OA=OB=OC, allora O deve stare sia sull'asse di AB (per il fatto che OA=OB)
che sull'asse di BC (per il fatto che OB=OC),
quindi deve per forza coincidere col punto di intersezione di tali due assi, ovvero con D.

- OSSERVAZIONE

  Il teorema precedente si potrebbe anche enunciare dicendo che
  "Tre punti non allineati INDIVIDUANO una circonferenza ed una sola".
  Il termine "individuare" in Matematica è adoperato per indicare che
  "ad un certa cosa si può associare, in modo unico, una certa altra cosa".
  Altri esempi:
  - *Due punti distinti su di un piano "individuano" una retta.*
  - *Una coppia ordinata di interi, il secondo dei quali* $\neq 0$*, "individua" un numero razionale*

TEOREMA
La perpendicolare ad una corda condotta dal centro
della circonferenza dimezza la corda stessa (quindi, ne è asse).

Per la dimostrazione, basta congiungere gli estremi della corda col centro: si forma un triangolo che è isoscele, perciò l'altezza relativa alla base fa anche da mediana.



TEOREMA
L'asse di ogni corda passa per il centro.

Conseguenza del teorema precedente.
Oppure, in modo ancora più diretto, si può ragionare così:
il centro è equidistante dagli estremi della corda, perciò appartiene all'asse di questa.