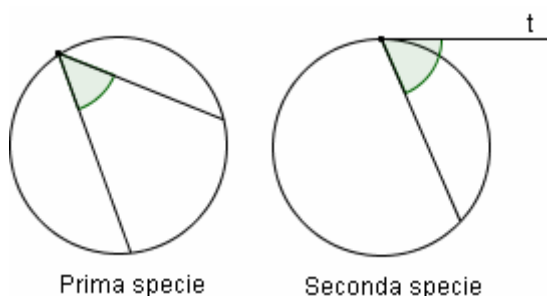


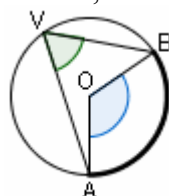
6.4 - ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA E ANGOLI AL CENTRO

Def. Si dice "**angolo alla circonferenza**" un angolo avente il **vertice sulla circonferenza**, e i lati

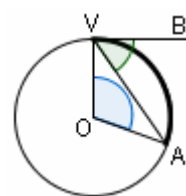
- ENTRAMBI SECANTI** la circonferenza (angolo alla circonferenza "di **prima specie**")
- oppure **UNO SECANTE E L'ALTRO TANGENTE** (angolo alla circ. "di **seconda specie**")



Per un angolo alla circonferenza,
l'angolo al centro "**CORRISPONDENTE**"
è quello che **contiene lo stesso arco**,
o, come si usa dire, che "**insiste sullo stesso arco**".



$\widehat{AVB}$ e $\widehat{AOB}$
sono
corrispondenti
←



$\widehat{AVB}$ e $\widehat{AOV}$
sono
corrispondenti
←

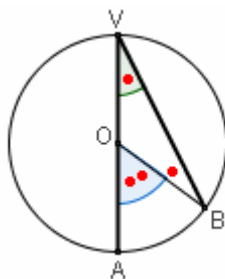
TEOREMA

Ogni angolo alla circonferenza è uguale a metà dell'angolo al centro corrispondente.

Per la **dimostrazione**, occorre **distinguere vari casi** (l'angolo alla circonferenza sarà sempre indicato con $\widehat{AVB}$).

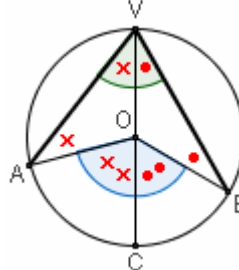
♫ **1° CASO:** $\widehat{AVB}$ sia di 1^a SPECIE; si possono avere TRE SOTTOCASI, a seconda che il centro:

1) appartenga a uno dei lati dell'angolo



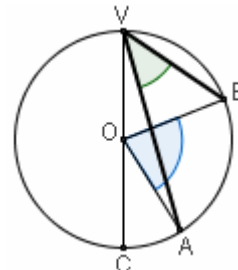
$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &= \widehat{AVB} + \widehat{B} &&= 2\widehat{AVB} \\ \text{teorema} &&& \text{OBV} \\ \text{angolo} &&& \text{isoscele} \\ \text{esterno,} &&& \text{quindi } \widehat{AVB} = \widehat{B} \\ \text{tr. OBV} &&& \\ \text{perciò} &&& \\ \widehat{AVB} &= \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

2) sia interno all'angolo



$$\begin{aligned} \widehat{AVC} &= \frac{1}{2} \widehat{AOC} \text{ (sottocaso prec.)} \\ \widehat{CVB} &= \frac{1}{2} \widehat{COB} \text{ (sottocaso prec.)} \\ \hline \widehat{AVB} &= \frac{1}{2} (\widehat{AOC} + \widehat{COB}) \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

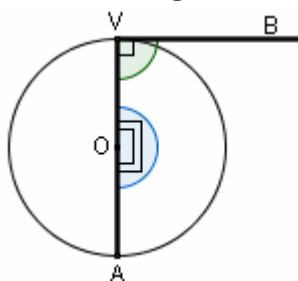
3) sia esterno all'angolo



Lasciata
al bravo lettore.
Per differenza
anziché per somma ...
La TH è
 $\widehat{AVB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$

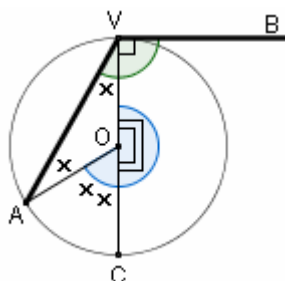
♫ **2° CASO:** $\widehat{AVB}$ sia di 2^a SPECIE; si possono avere TRE SOTTOCASI, a seconda che il centro:

1) appartenga a uno dei lati dell'angolo



Semplicissimo: $\widehat{AVB} = 90^\circ$
perché una tangente ad una circonferenza
è sempre perpendicolare al raggio
che va al punto di contatto;
ma $\widehat{AOV} = 180^\circ$;
pertanto $\widehat{AVB} = \frac{1}{2} \widehat{AOV}$ c.v.d.

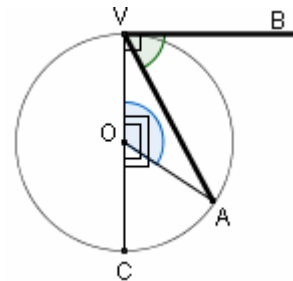
2) sia interno all'angolo



$$\begin{aligned} \widehat{AVC} &= \frac{1}{2} \widehat{AOC} \text{ (1° caso, 1° sott.)} \\ \widehat{CVB} &= \frac{1}{2} \widehat{COV} \text{ (2° caso, 1° sott.)} \\ \hline \widehat{AVB} &= \frac{1}{2} (\widehat{AOC} + \widehat{COV}) \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

$\widehat{AOV}_{\text{concavo}}$

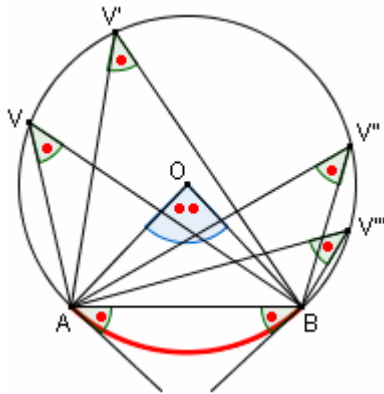
3) sia esterno all'angolo



Lasciata
al diligente lettore.
Per differenza
anziché per somma ...
La tesi è $\widehat{AVB} = \frac{1}{2} \widehat{AOV}$

COROLLARIO 1

Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco sono uguali.



Infatti sono tutti uguali a metà dello stesso angolo al centro!

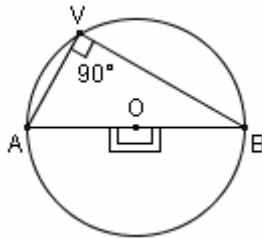
Nella figura:

$$\widehat{V} = \widehat{V}' = \widehat{V}'' = \widehat{V}''' = \dots$$

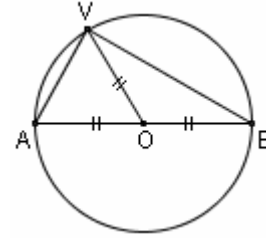
perché sono tutti uguali a $\frac{1}{2} \widehat{AOB}$.

COROLLARIO 2

Un angolo alla circonferenza che insiste su di una semicirconferenza (o, come si preferisce dire, che "è inscritto" in una semicirconferenza; o, come si suole anche dire seppure impropriamente, che "insiste su un diametro"), è RETTO.



Nella figura, l'angolo alla circonferenza $\widehat{AVB}$ "insiste" sulla semicirconferenza che va da A fino a B, e NON passa per V; si può anche dire (e, in effetti, *si preferisce* dire) che "è **inscritto**" nell'**altra** semicirconferenza (quella che va da A fino a B, passando per V). Bene! $\widehat{AVB}$ è retto, perché è metà dell'angolo al centro corrispondente $\widehat{AOB}$ che è piatto.

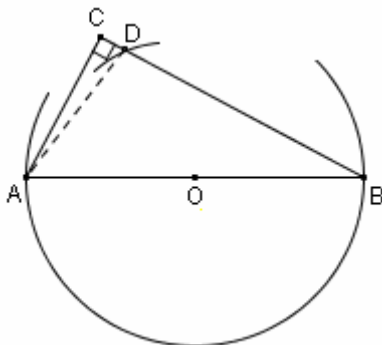


IN ALTERNATIVA, la dimostrazione dello stesso enunciato si potrebbe anche effettuare applicando, al triangolo ABV, il teorema secondo cui "se in un triangolo la mediana relativa ad un lato è metà del lato stesso, allora il triangolo è rettangolo (e, precisamente, l'angolo retto è quello opposto al lato in questione)".

COROLLARIO 3

In un triangolo rettangolo, la circonferenza avente per diametro l'ipotenusa passa per il vertice dell'angolo retto.

Questo teorema, che può essere pensato come l'inverso del precedente corollario 2, si può dimostrare in diversi modi. Ad esempio, è bella la seguente dimostrazione per assurdo.



Sia ABC un triangolo rettangolo in C; se la circonferenza di diametro AB non passasse per C, allora intersecherebbe il lato BC (o il suo prolungamento) in un punto D distinto da C. Perciò l'angolo $\widehat{ADB}$ sarebbe retto perché inscritto in una semicirconferenza, ed essendo pure retto (per ipotesi) l'angolo $\widehat{ACB}$, dal punto A si potrebbero condurre alla retta BC due distinte perpendicolari, mentre sappiamo che la perpendicolare per un punto dato a una retta data è unica.

L'assurdo trovato dimostra la tesi.