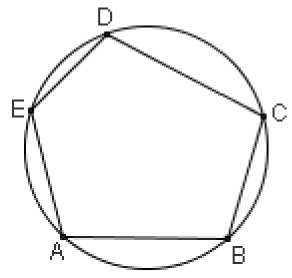
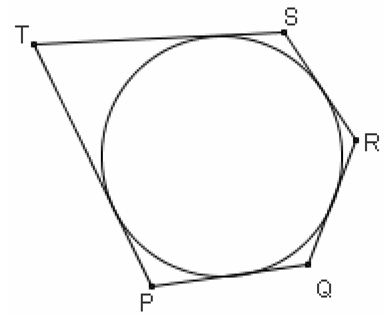
6.6 - POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI AD UNA CIRCONFERENZA

Definizione

Un poligono si dice:

"**inscritto** in una circonferenza" **se tutti i suoi vertici stanno sulla circonferenza**	"**circoscritto** ad una circonferenza" **se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza**





Se un poligono è **inscritto** in una circonferenza, si dice che questa circonferenza è "**circoscritta**" al poligono;
e se un poligono è **circoscritto** ad una circonferenza, questa si dirà "**inscritta**" nel poligono.

PROPRIETA' DEI QUADRILATERI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

TEOREMA
In un quadrilatero inscritto, o inscrivibile, in una circonferenza, gli angoli opposti sono supplementari.

IPOTESI ABCD inscritto (o inscrivibile) in una circonferenza

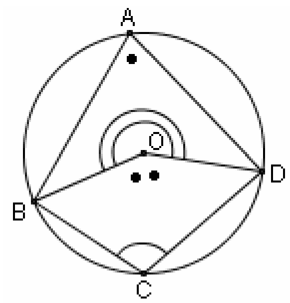
TESI $\widehat{A}+\widehat{C}=180°,\quad \widehat{B}+\widehat{D}=180°$

Dimostrazione

$\widehat{A}=\frac{1}{2}B\widehat{O}D_{convesso}$ (angolo alla circ., angolo al centro corrispondente)

$\widehat{C}=\frac{1}{2}B\widehat{O}D_{concavo}$ (")

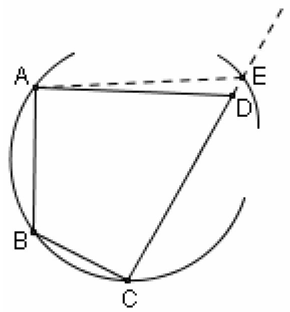
$$\widehat{A}+\widehat{C}=\frac{1}{2}B\widehat{O}D_{convesso}+\frac{1}{2}B\widehat{O}D_{concavo}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(B\widehat{O}D_{convesso}+B\widehat{O}D_{concavo}\right)=\frac{1}{2}\cdot 360°=180°$$



… e analogamente, tracciando OA e OC, per la somma $\widehat{B}+\widehat{D}$.

TEOREMA (inverso del precedente)
Un quadrilatero con gli angoli opposti supplementari è inscrivibile in una circonferenza.

IPOTESI ABCD ha gli angoli opposti supplementari: $\widehat{A}+\widehat{C}=180°;\ \widehat{B}+\widehat{D}=180°$
TESI ABCD è inscrivibile in una circonferenza
(= esiste una circonferenza, che passi per tutti e quattro i punti A, B, C, D)



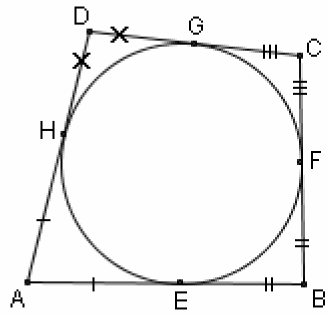
Dimostrazione
Consideriamo la circonferenza (certamente esistente, per un teorema noto)
che passa per i tre punti A, B, C: vogliamo dimostrare che essa contiene anche D.
Infatti, se, per assurdo, tale circonferenza NON passasse per D,
allora intersecherebbe la retta CD in un punto E, distinto da D (NOTA).

Il quadrilatero ABCE sarebbe dunque inscritto in una circonferenza, e di conseguenza, per il teorema diretto, avrebbe gli angoli opposti supplementari; in particolare, $A\widehat{E}C$ sarebbe supplementare di $\widehat{B}$.
Ma anche $A\widehat{D}C$ è, per ipotesi, supplementare di $\widehat{B}$, quindi si avrebbe $A\widehat{E}C=A\widehat{D}C$:
entreremmo così in contraddizione col Teorema dell'Angolo Esterno (applicato al triangolo AED).

NOTA:
il punto E potrebbe trovarsi all'interno del segmento CD, oppure su uno dei suoi prolungamenti; comunque il ragionamento da farsi è, in entrambi i casi, il medesimo.

TEOREMA. In un quadrilatero circoscritto, o circoscrivibile, ad una circonferenza, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

IPOTESI ABCD circoscritto (o circoscrivibile) ad una circonferenza
TESI AB+DC = AD+BC

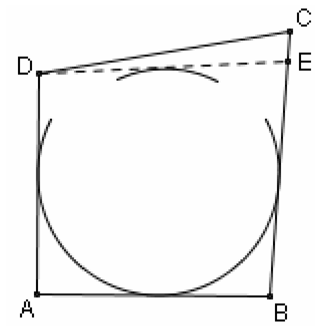


Dimostrazione
Molto semplice, basata sul "teorema del Cappello", quello secondo il quale i due segmenti di tangente condotti a una circonferenza da un punto esterno sono uguali.

$$
\begin{aligned}
AE &= AH\\
BE &= BF\\
CG &= CF\\
DG &= DH\\
\hline
\underbrace{AE+BE+CG+DG}_{AB+DC} &= \underbrace{AH+BF+CF+DH}_{AD+BC}
\end{aligned}
$$

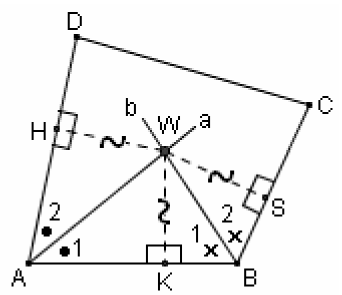
TEOREMA (inverso del precedente)
Un quadrilatero in cui la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due, è circoscrivibile ad una circonferenza.

IPOTESI AB+DC = AD+BC
TESI ABCD è circoscrivibile ad una circonferenza
(= esiste una circonf., che sia tangente a tutti e quattro i lati di ABCD)



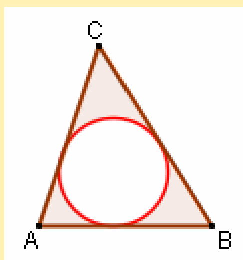
Dimostrazione
Consideriamo la circonferenza tangente a TRE dei quattro lati, ad esempio ai lati AD, AB e BC (NOTA);
vogliamo dimostrare che tale circonferenza è tangente anche al lato rimanente DC.
Infatti, se, per assurdo, la circonferenza in questione *non* fosse tangente a DC, allora, conducendo da D l'altra tangente (oltre a DA) alla circonferenza, tale tangente sarebbe una retta distinta da DC, e, quindi, andrebbe a intersecare la retta BC in un punto E, distinto da C.
Il quadrilatero ABED risulterebbe, dunque, circoscrivibile ad una circonf., e di conseguenza, per il teor. diretto, la somma di due suoi lati opposti sarebbe uguale alla somma degli altri due: $AB+DE=AD+BE$.
Tuttavia si ha anche, per ipotesi, $AB+DC=AD+BC$ …
… quindi da quanto scritto seguirebbe, sottraendo membro a membro, che $DC-DE=BC-BE$.
Ma $BC-BE=CE$, e allora nel triangolo CDE un lato sarebbe uguale alla differenza degli altri due: assurdo.

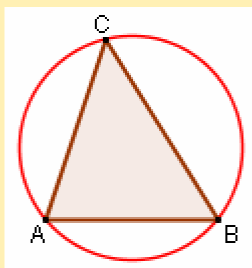
NOTA Occorre però, se si vuol esser rigorosi, dimostrare l'ESISTENZA di detta circonferenza.
A tale scopo, consideriamo la bisettrice a dell'angolo $\hat{A}$ e la bisettrice b dell'angolo $\hat{B}$.
Ciascuno dei due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ è minore di un angolo piatto;
quindi la somma delle loro metà è minore della somma di due retti, ossia minore di un piatto.



Insomma, $\hat{A}_1+\hat{B}_1<180°$ e quindi le due rette a e b, non formando angoli coniugati interni supplementari, non sono parallele: si devono incontrare.
Indichiamo con W il loro punto di intersezione, e proiettiamo W su AD, AB, BC.
Poiché W appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$, avremo $WH=WK$, e poiché W appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, avremo pure $WK=WS$.
In definitiva, è $WH=WK=WS$. Se noi ora puntiamo il compasso in W con apertura uguale a $WH=WK=WS$, la circonferenza che tracceremo:
I) passerà per H, K, S;
II) e sarà tangente, in questi punti, alle tre rette AD, AB e BC, per il fatto che ciascuna di queste tre rette è perpendicolare ad un raggio nel suo estremo.
La nostra tesi (l'esistenza di una circonf., tangente a tutte e tre le rette AD, AB, BC) resta così provata.

TEOREMA
Per ogni TRIANGOLO, esistono sempre sia la circonf. inscritta che la circonf. circoscritta.
- ♪ **Il centro della circonferenza INSCRITTA coincide col punto di incontro delle BISETTRICI, ossia con l' INCENTRO;**
- ♫ **il centro della circonferenza CIRCOSCRITTA coincide col punto di incontro degli ASSI, ossia col CIRCOCENTRO.**





La dim. è basata su enunciati già acquisiti … comunque, puoi vederla a pag. 185.