GEOMETRIA   Cap. 7: MISURA DELLE GRANDEZZE

7.1 - MISURIAMO I SEGMENTI

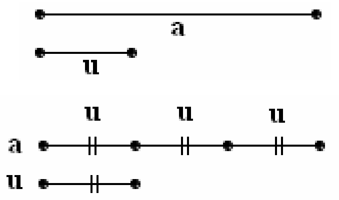
“**Misurare**” un segmento **a**
significa prendere un altro segmento di riferimento **u** (detto “unità di misura”)
e chiedersi quante volte **u** è contenuto in **a** .

A) QUANDO LA MISURA E’ INTERA

Se **u** è contenuto in **a** esattamente n volte (n numero intero non negativo), si potrà scrivere
$\mathbf{a} = n \cdot \mathbf{u}$ (generalmente il puntino di moltiplicazione si omette, scrivendo semplicemente: $\mathbf{a} = n\mathbf{u}$)
e si dirà che
“la misura del segmento **a** , rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura, è il numero **INTERO** n”.

La figura qui a fianco mostra due segmenti **a, u** .
a *è il segmento che si vuole misurare,*
u *è il segmento che si vuole utilizzare come unità di misura.*

Poiché **a** *risulta uguale alla somma di esattamente 3 segmentini, ciascuno uguale a* **u** *,*
possiamo scrivere $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}$
e affermare che “la misura di **a** *(rispetto a* **u** *) è 3”.*



B) QUANDO LA MISURA E’ RAZIONALE

Se il segmento **u** NON è contenuto un numero intero di volte in **a** ,
si ricorrerà ai cosiddetti “sottomultipli” di **u**
(vale a dire: la metà di **u** , la terza parte di **u** , la quarta parte di **u** , ecc. ecc.).
Dato un qualunque segmento **u** ,
si dice “sottomultiplo di **u** secondo n” ciascuno dei segmentini che si ottengono dividendo **u** in n parti uguali.
Il sottomultiplo di **u** secondo n si indica col simbolo $\frac{1}{n} \cdot \mathbf{u}$ (oppure $\frac{1}{n}\mathbf{u}$),
che si può leggere: *un n-esimo*, oppure: *l’n-esima parte*, di **u** .

Se l’n-esima parte dell’unità di misura **u** è contenuta esattamente m volte
nel segmento **a** che intendiamo misurare, potremo scrivere

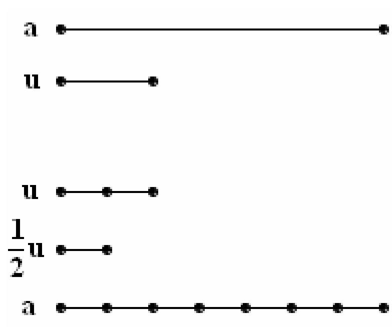
$$\mathbf{a} = m \cdot \frac{1}{n}\mathbf{u} = \frac{m}{n}\mathbf{u}$$

e diremo che
“la misura del segmento **a** , rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura,
è il numero **RAZIONALE** m/n”.

La figura qui a fianco mostra due segmenti **a, u** .
a *è il segmento da misurare,* **u** *svolge il ruolo di unità di misura.*

*Si osserva che **u non** è contenuto un numero **intero** di volte in* **a**
(3 volte è “troppo poco”, 4 volte è “troppo”).

Però, se dividiamo **u** *in due parti uguali*
(costruendo, così, il segmento $\frac{1}{2}\mathbf{u}$ *),*
vediamo che questo segmentino $\frac{1}{2}\mathbf{u}$
è contenuto esattamente 7 volte in **a** .



Poiché dunque **a** *risulta uguale alla somma di esattamente 7 segmentini, ciascuno uguale a* $\frac{1}{2}\mathbf{u}$,

possiamo scrivere $\mathbf{a} = 7 \cdot \frac{1}{2}\mathbf{u} = \frac{7}{2}\mathbf{u}$ *e affermare che “la misura di* **a** *(rispetto a* **u** *) è* $\frac{7}{2}$ *”.*

C) QUANDO LA MISURA E' IRRAZIONALE

Si scopre tuttavia – cosa che lasciò del tutto sconcertati gli studiosi greci i quali, nel VI o V secolo a. C., per primi se ne accorsero – che per certe coppie di segmenti **a**, **u**, non avviene

- né che **u** sia contenuto un numero esatto di volte in **a**
- né che esista un sottomultiplo di **u**, che sia contenuto un numero esatto di volte in **a**.

In questo caso si dice che **a**, **u** sono "**incommensurabili**".

DEF. Due **segmenti a, u** si dicono "**incommensurabili**" se **non hanno nessun sottomultiplo comune.**

Ad esempio, si può dimostrare il seguente importantissimo

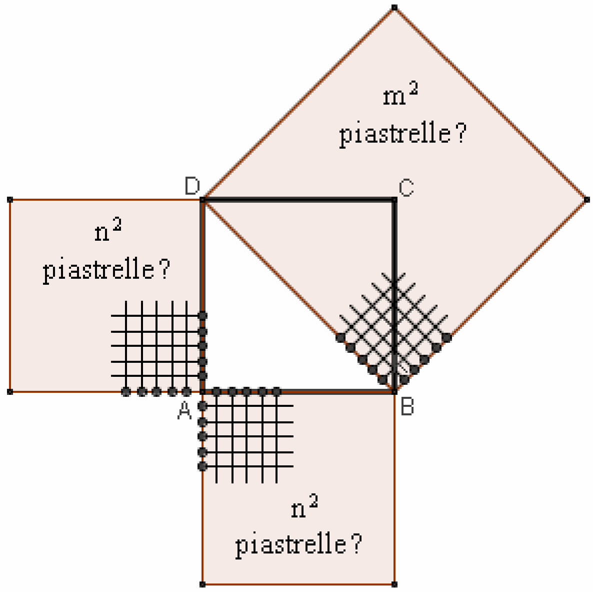
TEOREMA - **Il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili.**

La *dimostrazione* è molto interessante: vediamola.

Se, per assurdo, esistesse un sottomultiplo **s** del lato AB del quadrato ABCD, contenuto un numero esatto di volte nella diagonale BD dello stesso quadrato, allora esisterebbero due numeri interi n, m, tali che
AB = n**s**, BD = m**s**
I quadrati costruiti sui lati uguali AB e AD potrebbero allora essere suddivisi ciascuno in una griglia di n^2 quadratini di lato **s** , mentre il quadrato costruito sulla diagonale BD potrebbe essere suddiviso in una griglia di m^2 quadratini di lato **s** .
D'altra parte, per il Teorema di Pitagora, il quadrato costruito su BD è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AB e AD, e questo comporta che il numero totale di quadratini che "piastrellano" i due quadrati costruiti sui due lati AB e AD, sia uguale al numero dei quadratini che "piastrellano" il quadrato costruito sulla diagonale BD.
Dunque si avrà $n^2 + n^2 = m^2$ ossia $2n^2 = m^2$ per cui gli interi n ed m saranno tali che

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 .$$

Ma è possibile dimostrare (Teorema nel riquadro sottostante) che non può esistere alcuna frazione (=rapporto di due interi) la quale elevata al quadrato dia come risultato 2.
L'assurdo trovato dimostra la tesi.



Il segmentino s:
Supponiamo, per assurdo, che AB=AD sia costituito da n di questi segmentini, mentre BD sia costituito da m di questi segmentini...

TEOREMA
Non esiste nessuna frazione (rapporto fra due interi) la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2

Dimostrazione
Per assurdo. Supponiamo, per assurdo, che esista una frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

Detta, per fissare le idee, $\frac{m}{n}$ tale frazione, avremo: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Riduciamo la frazione m/n ai minimi termini, se già non lo è; otterremo una frazione p/q, con p e q primi fra loro (cioè: privi di divisori comuni; in altre parole: non più semplificabili), tale che $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Si potrà scrivere quindi la seguente catena di deduzioni:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \rightarrow \quad p^2 = 2q^2 \rightarrow \text{ il numero } p^2 \text{ è pari } \rightarrow \boxed{p \text{ è PARI}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \text{esiste un INTERO } p' \text{ tale che } p = 2p' \quad \rightarrow \quad (2p')^2 = 2q^2 \quad \rightarrow \quad 4p'^2 = 2q^2 \quad \rightarrow \quad q^2 = 2p'^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \text{il numero } q^2 \text{ è pari} \quad \rightarrow \quad \boxed{q \text{ è PARI}}$$

Ora, nel corso di tale catena abbiamo dedotto che p e q sono entrambi PARI, cioè entrambi divisibili per 2, mentre eravamo partiti dal presupposto che la frazione p/q fosse ridotta ai minimi termini, vale a dire non più semplificabile.
Ricapitoliamo: supponendo che esistesse una frazione m/n tale che $(m/n)^2=2$, siamo pervenuti a conclusioni assurde.

Non esiste perciò alcuna frazione che elevata al quadrato dia 2.

Se i due segmenti **a**, **u** sono incommensurabili,

non esiste dunque nessun numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che risulti $\mathbf{a} = \frac{m}{n}\mathbf{u}$:

per qualunque numero razionale $\frac{m}{n}$, il segmento $\frac{m}{n}\mathbf{u}$,

ossia il segmento ottenuto mettendo in fila m segmenti ciascuno uguale all'n-esima parte di **u**,

potrà magari discostarsi pochissimo dal segmento **a**, ma comunque NON potrà mai coincidere esattamente con **a**!

Supponiamo che **a** ed **u** siano incommensurabili,
e supponiamo che, per due certi numeri razionali m/n e m'/n',
si abbia: $\frac{m}{n}\mathbf{u} < \mathbf{a} < \frac{m'}{n'}\mathbf{u}$.
Allora diremo che il numero razionale m/n costituisce una "misura per difetto del segmento **a**"
e che il numero razionale m'/n' costituisce una "misura per eccesso del segmento **a**".

E' evidente che esisteranno infiniti numeri razionali caratterizzati dal fatto
di essere misure **per difetto** del segmento **a**;
come pure, esisteranno infiniti numeri razionali caratterizzati dal fatto
di essere misure **per eccesso** di **a** …
… ma - ribadiamolo - se **a** e **u** sono incommensurabili non esiste alcun numero razionale,
che abbia il diritto di essere considerato la misura ***esatta*** di **a** rispetto a **u**.

In caso di incommensurabilità di **a** con **u**, la misura di **a** rispetto a **u** sarà espressa da un numero **IRRAZIONALE**:
precisamente, da quel numero irrazionale che è maggiore di tutte le misure razionali per difetto di **a**,
e minore di tutte le misure razionali per eccesso di **a**.

NUMERI IRRAZIONALI
Un numero si dice "irrazionale" se non è esprimibile sotto forma di frazione
(intesa come "rapporto fra due numeri interi").

- Il discorso fatto sulla "misura" può essere schematizzato, in sostanza, affermando che
  l' "IRRAZIONALITÀ" è "l'aspetto aritmetico dell'INCOMMENSURABILITÀ".
  - ♪ incommensurabilità = concetto geometrico
  - ♫ irrazionalità = concetto aritmetico (da *arithmós* = numero)

- **Un numero irrazionale è "definito", "individuato",**
  dalle sue "approssimazioni razionali per difetto" e dalle sue "approssimazioni razionali per eccesso".

  Ad esempio, il numero irrazionale
  $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095...$
  è definito come "quell'entità numerica che è
  maggiore di 1 ma minore di 2;
  maggiore di 1,4 ma minore di 1,5;
  maggiore di 1,41 ma minore di 1,42;
  ecc. ecc. "

- Esistono infiniti numeri razionali, ed esistono pure infiniti numeri irrazionali,
  ma, in un certo senso,
  i numeri irrazionali sono "più infiniti ancora" dei razionali
  (la loro "numerosità" ha un "grado di infinito" maggiore).

  Se io "pesco a caso" un punto su di una *number line*,
  normalmente la sua ascissa sarà *irrazionale*;
  sì, certo, potrebbe anche capitarmi di "beccare" un punto con ascissa *razionale*,
  ma la probabilità che ciò accada è *infinitamente piccola* !!!!!

  Straordinario …
  Se vuoi approfondire queste tematiche,
  di cui fu geniale esploratore il matematico danese Georg Cantor (1845-1918),
  puoi andare alla pagina 402 di questo volume.