

## Cap. 8: EQUIVALENZE; I TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

### 8.1 - L'EQUIVALENZA DELLE SUPERFICI PIANE

- Una “**superficie piana**” è una porzione di piano, limitata da una linea chiusa: ad esempio, sono superfici piane i poligoni, o i cerchi.
- L’ “**estensione**” di una superficie piana è “la quantità di piano occupata dalla superficie”.  
*“Superficie” ed “estensione” sono “concetti primitivi”,  
 la cui descrizione è insita implicitamente negli assiomi che ad essi si riferiscono.*

Due superfici con uguale estensione sono dette “**equivalenti**”.

*Se prendiamo una lamiera di metallo e ritagliamo da essa due porzioni di ugual peso, avremo l'idea di due superfici equivalenti.*

*Ancora: l'imbianchino che impieghi la stessa quantità di vernice per pitturare due diverse pareti, ha verniciato due superfici equivalenti.*

Il simbolo che utilizzeremo per indicare equivalenza sarà un “uguale, col puntino sopra”:  $\doteq$

#### ASSIOMI della relazione di “equivalenza fra superfici piane”

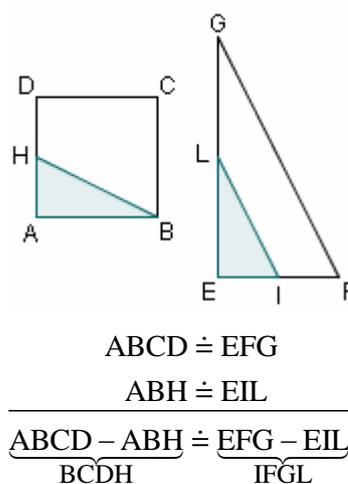
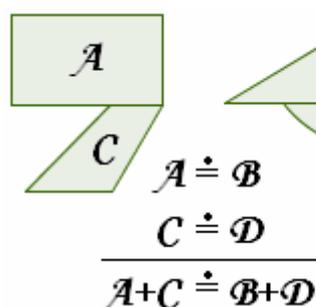
1. **Due superfici uguali (= congruenti) sono equivalenti**
2. **L'equivalenza delle superfici piane gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva**
  - PROPRIETA' RIFLESSIVA  $\forall A, A \doteq A$   
 Ogni superficie è equivalente a sé stessa
  - PROPRIETA' SIMMETRICA  $A \doteq B \rightarrow B \doteq A$   
 Se una superficie  $A$  è equivalente ad una superficie  $B$ , allora anche  $B$  è equivalente ad  $A$
  - PROPRIETA' TRANSITIVA  $(A \doteq B \wedge B \doteq C) \rightarrow A \doteq C$   
 Se una superficie  $A$  è equivalente ad una superficie  $B$ ,  
 e la superficie  $B$  a sua volta è equivalente ad una superficie  $C$ ,  
 allora  $A$  è equivalente a  $C$ :  
 In altre parole, due superfici equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.

#### 3. **Somme, o differenze, di superfici equivalenti (in particolare: uguali), sono equivalenti**

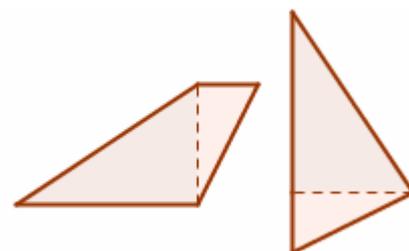
NOTA. Per “**somma**” di due superfici, intendiamo la superficie “totale”.

*Per poter essere “sommate”, due superfici devono essere prive di intersezione, o, al più, avere in comune soltanto punti del contorno.*

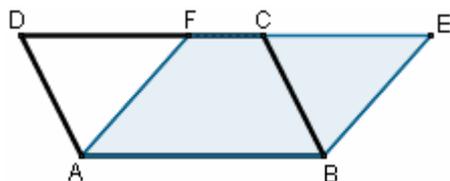
*Per sommare due superfici  $S$  ed  $S'$  che siano parzialmente sovrapposte, così da avere in comune anche dei punti interni ai contorni, occorre sostituire ad una di esse (es.  $S'$ ) una superficie congruente, o equivalente, disposta in modo tale da poter essere sommata con  $S$ .*



**COROLLARIO**  
 dell'assioma 3:  
**due superfici**  
**equiscomponibili**  
 (ossia: scomponibili in parti  
 rispettivamente uguali)  
 sono equivalenti



*Ad esempio, sono equivalenti il trapezio e il triangolo in figura, perché scomponibili in triangoli rispettivamente uguali*

**TEOREMA. Due parallelogrammi aventi ugual base e uguale altezza sono equivalenti**

IPOTESI

ABCD, ABEF parallelogrammi  
con ugual base e uguale altezza

TESI  $ABCD \doteq ABEF$ 

DIM.

I due triangoli ADF, BCE sono uguali per il Primo Criterio perché hanno:  $AD = BC$  (lati opposti di un parallelogrammo);  $AF = BE$  (stesso motivo);  $\widehat{DAF} = \widehat{CBE}$  (angoli coi lati paralleli e concordi). Quindi:

$ABED \doteq ABED$  (ogni superficie è equivalente a sé stessa : assioma 2, proprietà riflessiva dell'equivalenza)

$ADF \doteq BCE$  (due superfici uguali sono anche equivalenti : assioma 1)

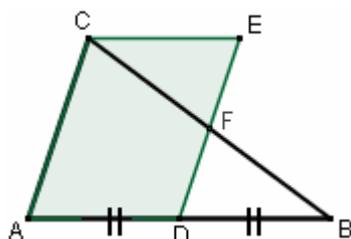
$$\frac{ABED - ADF}{ABEF} \doteq \frac{ABED - BCE}{ABCD}$$

*Vuoi sapere perché abbiamo preferito ragionare per differenza anziché per somma? Clicca qui: [⇨](#)*

**COROLL. Un parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo avente ugual base e uguale altezza**

NOTA 1 – Il corollario appena enunciato autorizza a calcolare l'area di un parallelogrammo tramite la stessa formula che consente di calcolare l'area di un rettangolo:

$S_{\text{RETT.}} = b \cdot h$  (vedi a questo proposito il precedente capitolo "Misura delle Grandezze").

**TEOREMA. Un triangolo è equivalente a un parallelogrammo avente base uguale a metà base del triangolo, e per altezza la stessa altezza**

IPOTESI:

ABC triangolo

ADEC parallelogrammo con  $AD = \frac{1}{2}AB$ , e stessa altezza di ABC

TESI

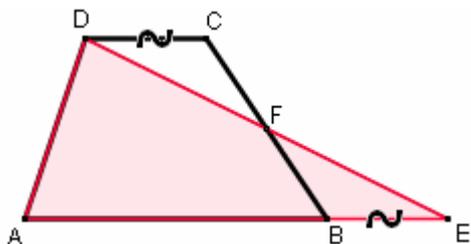
$ABC \doteq ADEC$

DIM.

I due triangoli DBF, EFC sono uguali per il Secondo Criterio (due parallele, alterni interni,  $DB=AD=CE$ ). Possiamo allora scrivere la catena  $ABC = ADFC + DBF \doteq ADFC + EFC = ADEC$ , che dimostra la tesi.

NOTA 2 – Combinando questo teorema con la NOTA 1 si ha la

**formula per l'area di un triangolo:**  $S_{\text{TRIANG.}} = \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}$

**COROLLARIO. Due triangoli con ugual base e uguale altezza sono equivalenti****TEOREMA. Un trapezio è equivalente a un triangolo avente base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza**

IPOTESI

ABCD trapezio

$BE = DC$ ,

così che il triangolo AED abbia base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza del trapezio

TESI

$ABCD \doteq AED$

DIM.

I due triangoli FCD e FBE sono uguali per il Secondo Criterio. Ne consegue

$ABCD = ABFD + FCD \doteq ABFD + FBE = AED$ , c.v.d.

NOTA 3 - Questo teorema, insieme con la formula di cui alla NOTA 2, giustifica la

**formula per l'area di un trapezio:**  $S_{\text{TRAP.}} = \frac{(\text{BASE MAGG.} + \text{base min.}) \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$