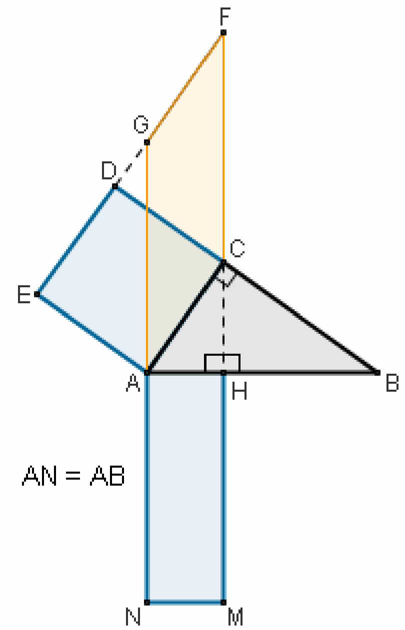
8.2 - I TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

IL 1° TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo,
il quadrato costruito su di un cateto
è equivalente al rettangolo,
avente per dimensioni
l'ipotenusa
e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa:

$\boxed{q(AC) \doteq r(AB, AH)}$



Se pensiamo che due superfici equivalenti,
ossia aventi la stessa estensione, hanno la stessa "area"
(dove per "area" intendiamo la "misura numerica dell'estensione"),
e teniamo presenti le formule per l'area di quadrato e rettangolo,
note dalle scuole medie e discusse in questo volume
nel capitolo dedicato alla "Misura delle Grandezze",
otteniamo

il 1° Teorema di Euclide enunciato IN FORMA ARITMETICA:
In un triangolo rettangolo, il quadrato di un cateto
(nel senso di "la misura del cateto, elevata alla seconda")
è uguale al prodotto dell'ipotenusa per la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa
(ci si riferisce al prodotto delle misure, ovviamente):

$\boxed{AC^2 = AB \cdot AH}$ **Figura dinamica GEOGEBRA** ⇨

DIM.
La figura mostra:
- un triangolo rettangolo ABC;
- il quadrato ACDE costruito su di un cateto;
- e il rettangolo AHMN, il quale, poiché si è preso AN = AB, ha una dimensione uguale all'ipotenusa AB, e l'altra dimensione uguale alla proiezione AH del cateto AC prima considerato, sull'ipotenusa.

Vogliamo dimostrare che le due superfici $ACDE = q(AC)$ e $AHMN = r(AB, AH)$ sono equivalenti.
A tale scopo, prolunghiamo i tre segmenti NA, MC, ED, in modo da ottenere il parallelogrammo ACFG.
Tale parallelogrammo farà da "figura-ponte": faremo vedere che è equivalente sia al quadrato, che al rettangolo.
E con ciò resterà dimostrato, per la proprietà transitiva dell'equivalenza,
che il quadrato ACDE e il rettangolo AHMN sono equivalenti fra loro.
Ora, che il parallelogrammo ACFG e il quadrato ACDE siano equivalenti è immediato:
infatti, se si prende AC come base sia per ACFG che per ACDE, si vede che il segmento CD fa da altezza per entrambi: quindi il parallelogrammo e il quadrato sono equivalenti perché hanno stessa base e stessa altezza.
Un poco più impegnativo è dimostrare che sono equivalenti il rettangolo AHMN e il parallelogrammo ACFG.
AHMN e ACFG sono inscritti nella stessa striscia, avente per lati le due rette NG ed MF: quindi, se si prendono come rispettive basi AN e AG, hanno la stessa altezza (ad esempio, il segmento AH fa da altezza per entrambi).
Si tratta allora di dimostrare che hanno anche ugual base, cioè che risulta AN = AG.
Ma AN = AB, quindi se riusciamo a far vedere che AB = AG, la nostra dimostrazione sarà completata.
A tale scopo, confrontiamo i due triangoli ABC, AGE: se riusciamo a dimostrarli uguali, siamo a posto.
In effetti tali due triangoli hanno:
- $AC = AE$ perché lati di un quadrato;
- $A\widehat{C}B = A\widehat{E}G = 90°$
- $C\widehat{A}B = E\widehat{A}G$ perché complementari dello stesso angolo $G\widehat{A}C$
  ($C\widehat{A}B = G\widehat{A}B - G\widehat{A}C = 90° - G\widehat{A}C = C\widehat{A}E - G\widehat{A}C = E\widehat{A}G$)

E' dunque ABC = AGE per il Secondo Criterio, come intendevamo provare. La tesi è perciò dimostrata.

RIAS-SU-MEN-DO:

$\boxed{ABC = AGE \ \ (2° \text{ crit.}) \to AB = AG \ \ (\text{quindi } AN = AB = AG)}$

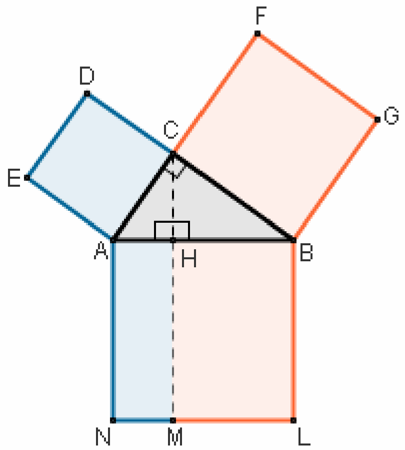
$\left.\begin{array}{l} \boxed{AHMN \doteq ACFG} \ (\text{ugual base}: AN = AG, \text{ stessa altezza } AH) \\ \boxed{ACFG \doteq ACDE} \ (\text{stessa base } AC, \text{ stessa altezza } CD) \end{array}\right] \to \boxed{AHMN} \doteq ACFG \boxed{\doteq ACDE}$ **c.v.d.**

OSSERVAZIONE: la dimostrazione appena conclusa costituisce un bell'esempio di METODO TOP-DOWN!

IL TEOREMA DI PITAGORA

In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa

$\boxed{q(AC)+q(BC) \doteq q(AB)}$



Il Teorema di Pitagora enunciato IN FORMA ARITMETICA:

In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati dei cateti (“quadrato” nel senso di “misura elevata alla seconda”) **è uguale al quadrato dell'ipotenusa**

$\boxed{AC^2+BC^2=AB^2}$

Figura dinamica GEOGEBRA ⇨

DIM.
La figura mostra:
- un triangolo rettangolo ABC;
- i quadrati ACDE e CBGF costruiti sui cateti e il quadrato ABLN costruito sull'ipotenusa.

E' stata anche tracciata l'altezza CH relativa all'ipotenusa,
poi prolungata fino ad incontrare il segmento NL in M.
In questo modo, sono comparsi nella figura due rettangoli:
- AHMN, che ha una dimensione uguale all'ipotenusa,
  e l'altra dimensione uguale alla proiezione del cateto AC sull'ipotenusa;
- HBLM, che ha una dimensione uguale all'ipotenusa,
  e l'altra dimensione uguale alla proiezione del cateto BC sull'ipotenusa.

Ora si ha

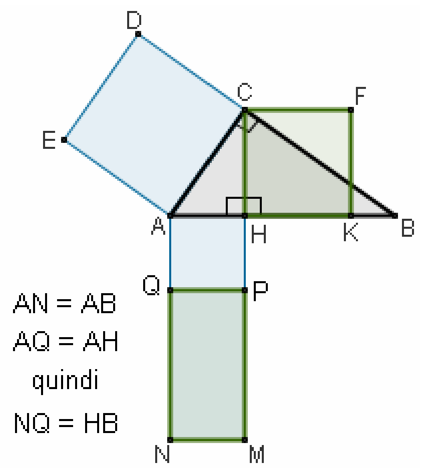
$$AHMN \doteq ACDE \quad (1° \text{ Teorema di Euclide})$$
$$HBLM \doteq CBGF \quad (1° \text{ Teorema di Euclide})$$
$$\overline{\underbrace{AHMN+HBLM}_{ABLN} \doteq ACDE+CBGF}$$

c.v.d.

IL 2° TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa

$\boxed{q(CH) \doteq r(AH,HB)}$



Il 2° Teorema di Euclide enunciato IN FORMA ARITMETICA:

In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

$\boxed{CH^2 = AH \cdot HB}$

Figura dinamica GEOGEBRA ⇨

DIM.
Nella figura compaiono:
- un triangolo rettangolo ABC;
- il quadrato ACDE costruito sul cateto AC;
- il quadrato CHKF costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa (CH);
- il rettangolo AHMN, che è una “vecchia conoscenza” proveniente dal Primo Teorema di Euclide:
  infatti la dimensione AN è stata presa uguale all'ipotenusa AB.
  poi sul segmento AN è stato preso un segmento AQ = AH e da Q è stata tracciata la parallela QP ad AH,
  così da ottenere il quadrato AHPQ ed il rettangolo NMPQ.
  Quest'ultimo rettangolo ha una dimensione uguale ad AH, mentre l'altra sua dimensione è
  $NQ = AN - AQ = AB - AH = HB$.
  Insomma, NMPQ ha le due dimensioni uguali alle proiezioni AH, HB dei due cateti sull'ipotenusa,
  ed è dunque il rettangolo di cui parla la tesi.

Si tratta, in definitiva, di dimostrare che il quadrato CHKF è equivalente al rettangolo NMPQ.
E tale equivalenza si può provare con la seguente catena:

$$CHKF \underset{\substack{\text{Pitagora} \\ \text{su AHC}}}{\doteq} ACDE - AHPQ \underset{\substack{\text{ACDE è equivalente} \\ \text{ad AHMN} \\ \text{per il 1° Teorema di Euclide} \\ \text{applicato ad ABC}}}{\doteq} AHMN - AHPQ = NMPQ$$

c.v.d.