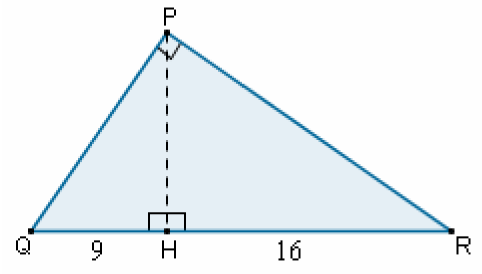
ESEMPI NUMERICI, ESERCIZI SUI TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

a) In un triangolo rettangolo PQR, di ipotenusa QR, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano rispettivamente 9 cm e 16 cm. Determinare perimetro e area del triangolo.



$Q\hat{P}R = 90°$

$PH \perp QR$

$QH = 9 \text{ cm},\ \ HR = 16 \text{ cm}$

$2p(PQR) = ?$

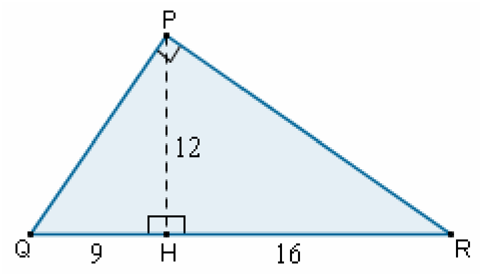
$S(PQR) = ?$

Il fatto che siano note le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa ci fa venire in mente il 2° Teorema di Euclide, del quale sono "protagoniste" tali due proiezioni, insieme con l'altezza relativa all'ipotenusa. Dunque

$\boxed{PH^2 = QH \cdot HR}$ (**Euclide 2°**, PQR)

e da qui ricaviamo

$\boxed{PH \underset{\text{NOTA 1}}{=} \sqrt{QH \cdot HR}} = \sqrt{9 \cdot 16} \underset{\text{NOTA 2}}{=} \sqrt{144} \underset{\text{NOTA 3}}{=} 12 \text{ cm}$



NOTA 1 Ovviamente, davanti alla radice non mettiamo il doppio segno ± perché il valore negativo non avrebbe senso in questo contesto.

NOTA 2 Anche: $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

NOTA 3 L'unità di misura, a stretto rigore, andrebbe scritta ad ogni passaggio della catena; noi, per brevità, la mettiamo solo nel passaggio finale.

Ora possiamo ricavare il cateto PQ:

♪ applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PHQ:

$\boxed{PQ^2 = QH^2 + PH^2}$ (**Pitagora**, PHQ)

da cui

$\boxed{PQ = \sqrt{QH^2 + PH^2}} = \sqrt{9^2 + 12^2} =$

$= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$

♫ oppure applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo PQR:

$\boxed{PQ^2 = QR \cdot QH}$ (**Euclide 1°**, PQR), da cui

$\boxed{PQ = \sqrt{QR \cdot QH}} = \sqrt{(9+16) \cdot 9} =$

$= \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$

E possiamo ricavare il cateto PR:

♪ applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PHR:

$\boxed{PR^2 = HR^2 + PH^2}$ (**Pitagora**, PHR)

da cui

$\boxed{PR = \sqrt{HR^2 + PH^2}} = \sqrt{16^2 + 12^2} =$

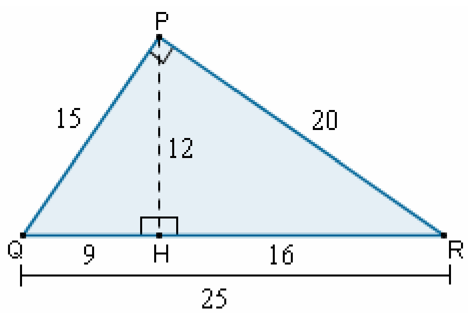
$= \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$

♫ oppure applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo PQR:

$\boxed{PR^2 = QR \cdot HR}$ (**Euclide 1°**, PQR), da cui

$\boxed{PR = \sqrt{QR \cdot HR}} = \sqrt{(9+16) \cdot 16} =$

$= \sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$

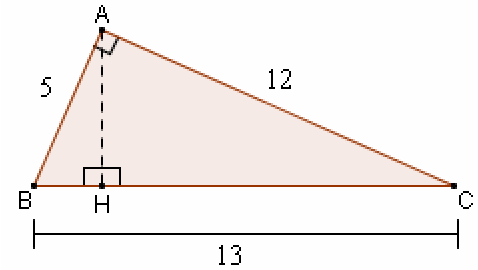


$\boxed{2p(PQR) =}\ PQ + QR + PR = 15 + 25 + 20 = \boxed{60 \text{ cm}}$

$\boxed{S(PQR)} = \dfrac{QR \cdot PH}{2} = \dfrac{25 \cdot \cancel{12}^{6}}{\cancel{2}} = \boxed{150 \text{ cm}^2}$

oppure $S(PQR) = \dfrac{PQ \cdot PR}{2} = \dfrac{15 \cdot \cancel{20}^{10}}{\cancel{2}} = 150 \text{ cm}^2$

b) In un triangolo rettangolo i cui lati misurano 5, 12 e 13, quali sono le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa? E dell'altezza relativa all'ipotenusa?

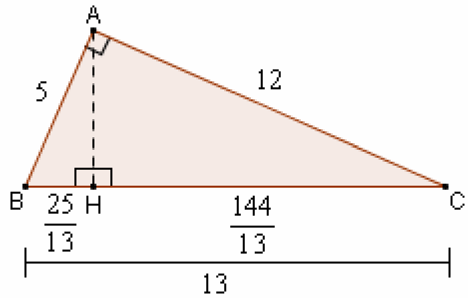


$\boxed{AB^2 = BC \cdot BH}$ (**Euclide 1°**, ABC)

$BC \cdot BH = AB^2$ (scambiando i membri)

$\boxed{BH = \dfrac{AB^2}{BC}} = \dfrac{5^2}{13} = \dfrac{25}{13}$ cm

$HC = BC - BH = 13 - \dfrac{25}{13} = \dfrac{144}{13}$ cm



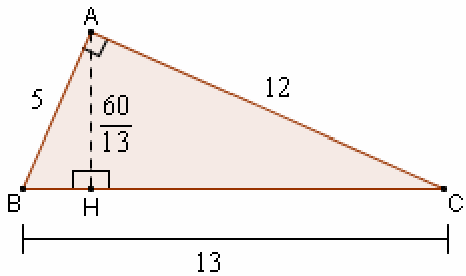
$\boxed{AH^2 = BH \cdot HC}$ (**Euclide 2°**, ABC)

$\boxed{AH = \sqrt{BH \cdot HC}} = \sqrt{\dfrac{25}{13} \cdot \dfrac{144}{13}} = \sqrt{\dfrac{5^2 \cdot 12^2}{13^2}} = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = \dfrac{60}{13}$ cm

In alternativa (con calcoli, però, più pesanti)
si sarebbe potuta calcolare immediatamente l'altezza relativa all'ipotenusa mediante la formula

$\boxed{\text{altezza} = \dfrac{\text{doppia area}}{\text{ipotenusa}} = \dfrac{\text{prodotto cateti}}{\text{ipotenusa}}}$

$AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = \dfrac{60}{13}$ cm

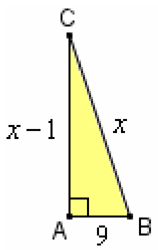


per poi ricavare le proiezioni con Pitagora:

$\boxed{BH^2 + AH^2 = AB^2}$ (**Pitagora**, ABH)

$BH^2 = AB^2 - AH^2$, $\boxed{BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}} = \sqrt{5^2 - \left(\dfrac{60}{13}\right)^2} = \ldots = \sqrt{\dfrac{625}{169}} = \dfrac{25}{13}$ cm

c) In un triangolo rettangolo, un cateto misura metri 9, e l'altro cateto è inferiore di 1 metro all'ipotenusa. Determina tutti i lati del triangolo.



$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\boxed{9^2 + (x-1)^2 = x^2}$

$81 \cancel{+x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2}$

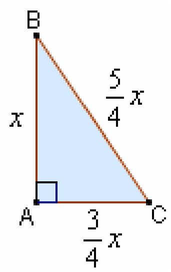
$-2x = -82;\quad x = 41$

$BC = 41$ m, $AC = 40$ m

In questo problema,
Pitagora è stato utilizzato
per impostare l'equazione risolvente.

INUTILE, IN CASI SIMILI,
SCOMODARE formule inverse o RADICI QUADRATE:
quando si desidera scrivere un'uguaglianza
contenente x che serva da equazione risolvente,
basta a tale scopo la relazione pitagorica "originaria".

d) In un triangolo rettangolo, i cateti sono uno i ¾ dell'altro e il perimetro misura 36*a*. Determinare l'area.



$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} =$

$= \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{3}{4}x\right)^2} = \ldots = \dfrac{5}{4}x$

$x + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}x = 36a \quad \ldots \quad x = 12a$

$AC = \dfrac{3}{4}x = \dfrac{3}{4} \cdot 12a = 9a$

$S = \dfrac{AC \cdot AB}{2} = \dfrac{9a \cdot 12a}{2} = 54a^2$

In questo problema, dunque,
il teorema di Pitagora
è stato impiegato
per esprimere un segmento in funzione di *x*.