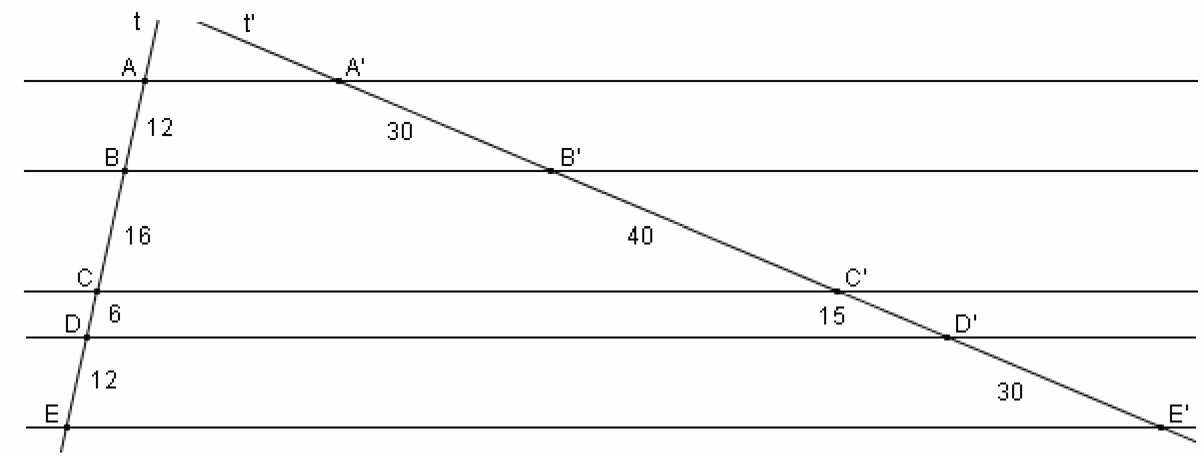
9.2 - SIMILITUDINI

❑ IL TEOREMA DI TALETE (= “Grande” Teorema di Talete)

Quando un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali, i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali



Vale a dire, con riferimento alla figura:

(1) $AB : CD = A'B' : C'D'$

o anche, applicando la proprietà del permutare:

(2) $AB : A'B' = CD : C'D'$

Il “Teorema di Talete” è dunque una **generalizzazione** dell’enunciato che avevamo chiamato “**Piccolo Teorema di Talete**” e che affermava: **“***Se un fascio di parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull’altra*”.

I DUE MODI ALTERNATIVI DI “VEDERE” LA PROPORZIONALITA’

Dicendo “**i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali**”, voglio intendere che:

♪ **un segmento (sulla 1ª trasversale) sta ad un altro segmento (sempre sulla 1ª trasversale) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo**
(vedi **proporzione 1)**

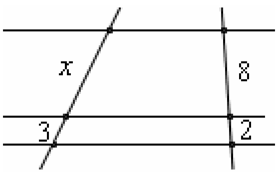
oppure, in modo PERFETTAMENTE EQUIVALENTE:

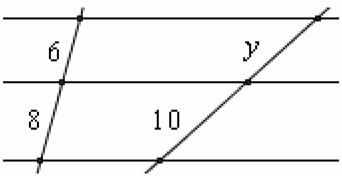
♫ **un segmento (sulla 1ª trasversale) sta al suo corrispondente (sulla 2ª trasversale) come un altro segmento (sulla 1ª trasversale) sta al suo corrispondente (sulla 2ª trasversale)**
(vedi **proporzione 2)**

Dimostrazione del Teorema di Talete

Quando un fascio di parallele è tagliato da due trasversali t e t',
si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l’insieme S dei segmenti giacenti su t
(S è una classe di grandezze, “sottoclasse” della più generale classe di tutti i segmenti del piano)
e l’insieme S' dei segmenti che giacciono su t'.
E’ noto da un teorema precedente che
“a segmenti uguali su una trasversale, corrispondono segmenti uguali sull’altra”;
ed è evidente che
“a un segmento, su una trasversale, che sia somma di due certi segmenti,
corrisponde quel segmento, sull’altra trasversale, che è la somma dei rispettivi corrispondenti”
(ad es. nella figura, al segmento AC, che è la somma AB+BC, corrisponde il segmento $A'C'$,
che è proprio la somma di $A'B'$ (corrispondente di AB) con $B'C'$ (corrispondente di BC).
Allora sono verificate le condizioni del “Criterio di Proporzionalità” (cap. 7, pag. 195),
per cui la tesi è dimostrata.

Due esercizietti sul Teorema di Talete: determina x e y.





Soluzioni

$x:3=8:2$ oppure $x:8=3:2$
da cui $x=12$

$6:8=y:10$ oppure $6:y=8:10$
da cui $y=15/2=7{,}5$

❑ POLIGONI SIMILI

Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono “simili” se sono uno l’ingrandimento dell’altro.

Specifichiamo meglio, cercando di dare una veste matematica precisa a questa idea.

Se ti sforzi di disegnare due poligoni, ad esempio due quadrilateri,
in modo che **uno di essi appaia come l’ingrandimento dell’altro**,
ti renderai conto che dovrai innanzitutto disegnarli
con **gli angoli rispettivamente uguali**;
… ma ciò **non sarà sufficiente**:
ci vorrà qualcosa in più, e precisamente dovrai fare in modo che **i lati siano in proporzione**.

I due poligoni della figura sottostante
hanno gli angoli rispettivamente uguali.
Eppure, evidentemente,
NON sono “uno l’ingrandimento dell’altro”…

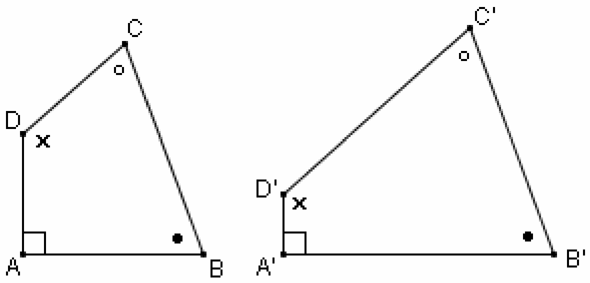


Figura 1

… Invece i due poligoni di quest’altra figura,
oltre ad avere gli angoli rispettivamente uguali,
hanno pure i lati proporzionali,
perché ciascun lato del primo poligono
è i 2/3 del lato che gli corrisponde
nel secondo poligono.
In questa Figura 2, i due poligoni in gioco appaiono
“uno l’ingrandimento dell’altro”.

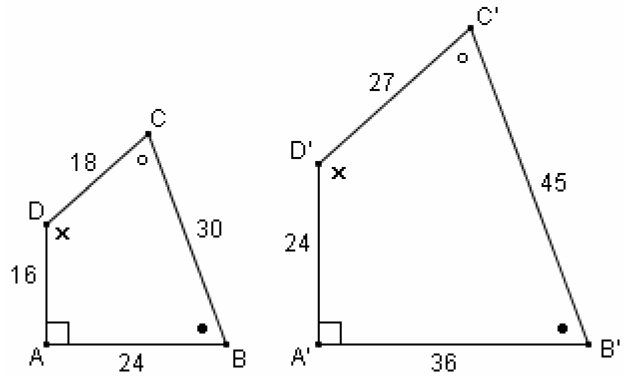


Figura 2

Da queste considerazioni discende la seguente

DEFINIZIONE
Due poligoni aventi lo stesso numero di lati si dicono SIMILI se hanno:
I) gli angoli rispettivamente uguali
II) e i lati corrispondenti proporzionali

Dire che “hanno i lati corrispondenti proporzionali” significa dire
che il rapporto fra due lati corrispondenti è lo stesso per ogni coppia di lati corrispondenti.

Con riferimento alla *Figura 2*,

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'.$$

Tale rapporto costante si dice
“**rapporto di similitudine**”.

Ad es., in *Figura 2*, il rapporto di similitudine
dei due quadrilateri ABCD, $A'B'C'D'$
(presi in quest’ordine), è 3/2
(prendendoli invece nell’ordine opposto,
il rapporto di similitudine sarebbe 2/3)

$$\textit{rapporto di similitudine} = \frac{\textit{lato poligono pensato per secondo}}{\textit{lato poligono pensato per primo}}$$

per cui se il rapporto di similitudine è
<1, *il secondo è rimpicciolito rispetto al primo;*
>1, *il secondo è ingrandito rispetto al primo.*

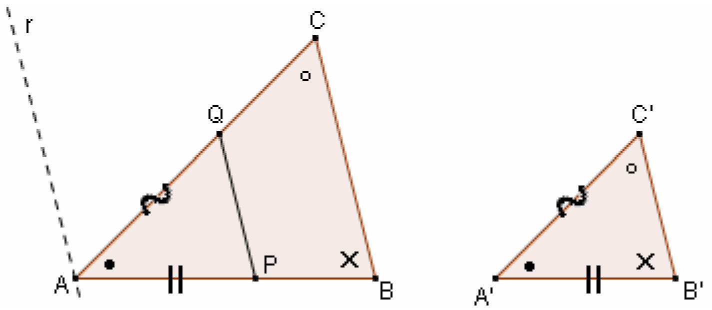
❑ TRIANGOLI SIMILI

Abbiamo visto che due poligoni si dicono simili
se hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati corrispondenti proporzionali.

Nel caso dei triangoli, tuttavia, **questa definizione si rivela sovrabbondante**,
perché si può dimostrare che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali,
allora hanno SENZ’ALTRO anche i lati corrispondenti proporzionali;
cosa che invece non necessariamente accade per i poligoni con più di tre lati.

Questo enunciato prende il nome di “Primo Criterio di Similitudine”.

TEOREMA (1° Criterio di Similitudine):
Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora sono simili, cioè hanno anche i lati corrispondenti proporzionali



IPOTESI
$\hat{A} = \widehat{A'}; \quad \hat{B} = \widehat{B'}; \quad \hat{C} = \widehat{C'}$

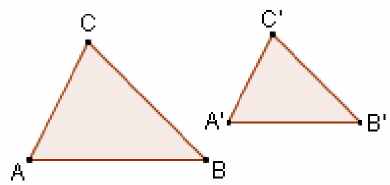
TESI
ABC è simile con $A'B'C'$,
cioè vale anche la proporzione
$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

Dimostrazione (per la prima proporzione; per le altre si procede in modo analogo)
Prendiamo sulla semiretta AB un segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC un segmento $AQ = A'C'$.
Il triangolo APQ risulterà uguale al triangolo $A'B'C'$ per il Primo Criterio di Uguaglianza dei Triangoli (è infatti $\hat{A} = \widehat{A'}$ per ipotesi). Pertanto $A\hat{P}Q = \widehat{B'} = \hat{B}$ e quindi le due rette PQ e BC, formando con la trasversale AB due angoli corrispondenti uguali, sono parallele. Tracciamo ora per A un'altra retta r parallela a PQ e BC. Per il Teorema di Talete avremo $AB : AP = AC : AQ$
e quindi anche, essendo $AP = A'B'$ e $AQ = A'C'$, $AB : A'B' = AC : A'C'$

Il 1° Criterio di Similitudine è un teorema che si applica con **grandissima frequenza** negli esercizi.
Osserviamo fra l'altro che si può subito concludere che due triangoli dati sono simili anche se si sa (per ipotesi o per precedente dimostrazione) che hanno **DUE angoli rispettivamente uguali**, perché **allora (per differenza rispetto a 180°) saranno certo uguali anche gli angoli rimanenti**.

♥ **PUNTUALIZZAZIONE: DUE MODI ALTERNATIVI DI "VEDERE" LA PROPORZIONALITA'**

Quando so che due certi triangoli ABC e $A'B'C'$ sono simili,
allora posso impostare le proporzioni
$AB : A'B' = AC : A'C'; \quad AB : A'B' = BC : B'C'; \quad AC : A'C' = BC : B'C'$
Permutando i medi in ciascuna delle tre, esse diventano:
$AB : AC = A'B' : A'C'; \quad AB : BC = A'B' : B'C'; \quad AC : BC = A'C' : B'C'$

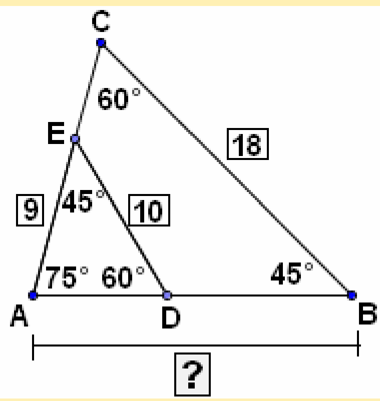


Quindi **se abbiamo due triangoli simili, l'affermazione che "i lati corrispondenti sono proporzionali" può essere interpretata indifferentemente in due modi, perfettamente equivalenti fra loro.**

♪ Si può interpretare nel senso che il rapporto tra due lati corrispondenti è costante, cioè che
"un lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente,
come un altro lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente"…

♫ … ma si può anche interpretare nel senso che il rapporto di due lati del 1° triangolo è uguale al rapporto dei due lati corrispondenti del 2° triangolo (presi nello stesso ordine), cioè che
"un lato (del 1° triangolo) sta ad un altro lato (sempre del 1° triangolo)
come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo".

♥ ESEMPIO DI ESERCIZIO



Nella figura, i due triangoli ABC, ADE sono simili per il 1° Criterio.
Dunque, per determinare AB, imposteremo *una qualunque* fra le proporzioni che coinvolgono AB insieme con segmenti noti, ad esempio

- $AB : AE = BC : DE$ ("un lato, del 1° triangolo, sta al suo corrispondente, come un altro lato, del 1° triangolo, sta al suo corrispondente"; AB e AE si corrispondono perché entrambi opposti a un angolo di 60°)
- OPPURE $AB : BC = AE : DE$ (un lato, del 1° triangolo, sta a un altro lato, sempre del 1° triangolo, come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo")

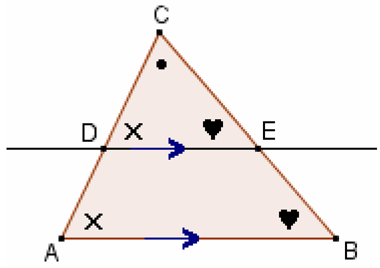
♥ **In due triangoli simili, sono corrispondenti ("omologhi") due lati che stiano opposti ad angoli uguali, o allo stesso angolo**

Bene; prendiamo una qualsiasi delle proporzioni, ad es. $AB : AE = BC : DE$ e sostituiamo al posto degli elementi noti, AE, BC e DE, la loro misura (AB fa da "*x*", ma è inutile una nuova lettera in questo caso: lasceremo AB).

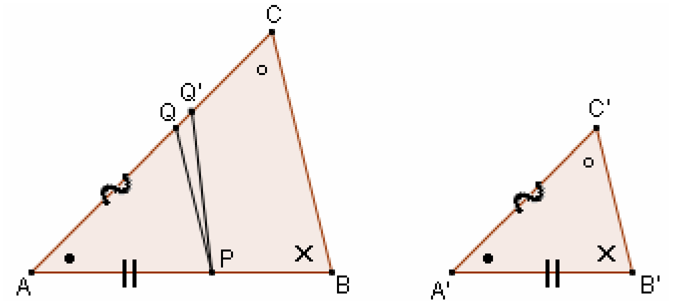
Avremo così $AB : 9 = 18 : 10$ da cui $AB = \frac{9 \cdot 18}{10} = \frac{162}{10} = 16,2$

COROLLARIO del 1° Criterio di Similitudine:
Una retta parallela ad un lato di un triangolo stacca da questo un triangolo simile al dato

Con riferimento alla figura qui a fianco:
basta tener presente che,
quando si hanno due parallele con trasversale,
gli angoli corrispondenti sono uguali …



TEOREMA (2° Criterio di Similitudine):
Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali, allora sono simili



IPOTESI
$AB : A'B' = AC : A'C'$
$\widehat{A} = \widehat{A'}$

TESI
ABC simile con $A'B'C'$

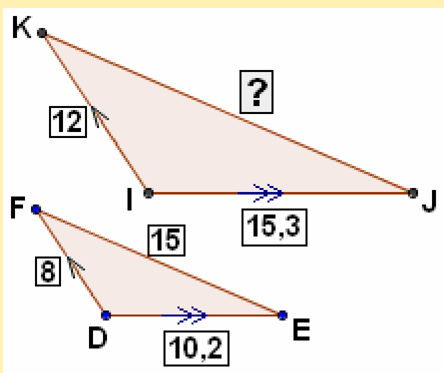
Dimostrazione
Prendiamo sulla semiretta AB il segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC il segmento $AQ = A'C'$. Ora il triangolo APQ risulterà uguale ad $A'B'C'$ per il 1° Crit. di Uguaglianza dei Triangoli ($\widehat{A} = \widehat{A}'$ per ipotesi).
Basterà dunque dimostrare che ABC è simile ad APQ; e a tale scopo, tenendo presente il Corollario del Primo Criterio di Similitudine, basterà far vedere che PQ è parallela a BC.
Per assurdo. Se PQ *NON* fosse parallela a BC, la parallela a BC condotta da P taglierebbe AC in un punto Q' distinto da Q; i due triangoli ABC, APQ' risulterebbero simili e si avrebbe
(1) $AB : AP = AC : AQ'$
D'altra parte, per ipotesi e per la costruzione effettuata, vale pure la proporzione
(2) $AB : AP = AC : AQ$.   Ma

se due proporzioni hanno ordinatamente uguali tre termini,
allora hanno necessariamente uguale anche il termine rimanente
(“**UNICITA' DELLA QUARTA PROPORZIONALE**”: vedi NOTA)

Quindi, dal fatto che valgano contemporaneamente le due proporzioni (1) e (2),
si trae $AQ' = AQ$, e quindi $Q' \equiv Q$, contro quanto supposto.

NOTA
Se è $\boxed{\mathbf{a : b = c : d}}$ e contemporaneamente $\boxed{\mathbf{a : b = c : e}}$ allora si ha $\mathbf{d = \frac{bc}{a}}$ ma anche $\mathbf{e = \frac{bc}{a}}$ quindi sarà $\boxed{\mathbf{d = e}}$ **(UNICITA' DELLA QUARTA PROPORZIONALE, O DEL QUARTO PROPORZIONALE)**

♥
ESEMPIO



In figura, i due angoli $E\widehat{D}F, J\widehat{I}K$ hanno i lati paralleli e concordi, quindi sono fra loro uguali.
Inoltre $12 : 8 = 15{,}3 : 10{,}2$ (i due rapporti valgono entrambi 3/2).
Di conseguenza si può affermare che i due triangoli EDF, JIK sono simili per il 2° Criterio di Similitudine.
Potremo perciò, per determinare JK, scrivere una qualunque proporzione che coinvolga JK e segmenti noti, ad esempio

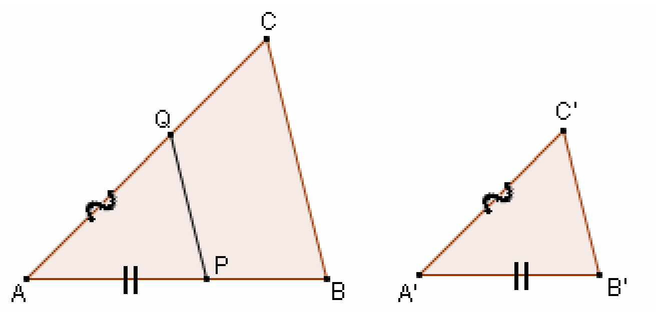
$$JK : EF = IK : DF \quad \text{da cui} \quad JK = \frac{EF \cdot IK}{DF} = \frac{15 \cdot \cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{45}{2} = 22{,}5$$

(è possibile, se si preferisce, anche scrivere
$JK : EF = IK : DF \ \rightarrow \ JK : 15 = 12 : 8 \ \rightarrow \ JK = 15 \cdot 12 / 8 = 22{,}5$).

Più rapidamente, osservato che i lati del triangolo grande sono una volta e mezza quelli del triangolo piccolo,

$$JK = \frac{3}{2} EF = \frac{3}{2} \cdot 15 = \frac{45}{2} = 22{,}5$$

TEOREMA (3° Criterio di Similitudine):
Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente proporzionali, allora sono simili



HP $AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'$

TH ABC simile con $A'B'C'$

OSSERVAZIONE
Quindi, considerate le due condizioni
che nei *poligoni* definiscono la similitudine:

1) uguaglianza degli angoli corrispondenti
2) proporzionalità dei lati

- il Terzo Criterio ci dice che, NEI TRIANGOLI, è sufficiente la SECONDA,
- mentre il Primo Criterio ci diceva che, sempre NEI TRIANGOLI, è sufficiente la PRIMA.

Dimostrazione
Prendiamo sulla semiretta AB il segmento $AP=A'B'$, e sulla semiretta AC il segmento $AQ=A'C'$.
Essendo

$AB:A'B'=AC:A'C'$

si avrà anche

$AB:AP=AC:AQ$

I due triangoli ABC, APQ sono perciò simili per il 2° Criterio di Similitudine; quindi sarà pure

(1) $AB:AP=BC:PQ$

D'altra parte, essendo, per ipotesi, $AB:A'B'=BC:B'C'$ e, per costruzione, $AP=A'B'$, si ha altresì

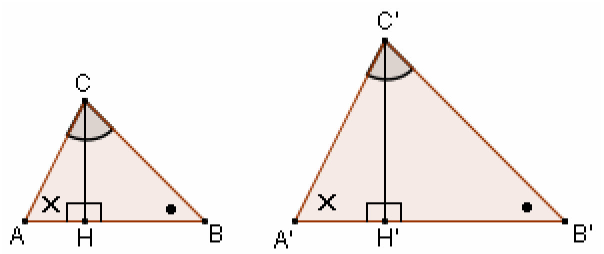
(2) $AB:AP=BC:B'C'$

Confrontando le due proporzioni (1) e (2), per l'unicità della quarta proporzionale si trae

$PQ=B'C'$.

Allora i due triangoli APQ, $A'B'C'$ sono uguali per il 3° Criterio di uguaglianza dei triangoli,
ed essendo ABC simile ad APQ, sarà pure ABC simile ad $A'B'C'$, come volevasi dimostrare.

TEOREMA
In due triangoli simili, le basi stanno fra loro come le rispettive altezze



IPOTESI

ABC simile con $A'B'C'$
$CH\perp AB,\ C'H'\perp A'B'$

TESI

$AB:A'B'=CH:C'H'$

Dimostrazione
Dalla similitudine di ABC e $A'B'C'$
segue

$AB:A'B'=AC:A'C'$

Inoltre, poiché per ipotesi si ha $\widehat{A}=\widehat{A}'$,
anche i due triangoli rettangoli ACH e $A'C'H'$
sono simili, da cui

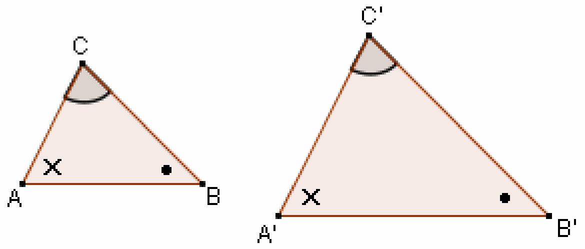
$AC:A'C'=CH:C'H'$.

Confrontando le due proporzioni, segue subito la tesi.

OSSERVAZIONE
Perciò, se due triangoli sono simili,
qualora, ad esempio,
ogni lato del primo
sia i 2/3 del lato che gli corrisponde nel secondo
(con rapporto di similitudine 3/2, quindi),
anche ogni altezza del primo
sarà i 2/3 dell'altezza
che gli corrisponde nel secondo.

Insomma, il rapporto fra
due qualsiasi lati corrispondenti
finisce per essere anche il rapporto
fra due qualsiasi *altezze* corrispondenti.

TEOREMA. In due triangoli simili, i perimetri stanno fra loro come due lati omologhi



IPOTESI

ABC simile con $A'B'C'$

TESI

$2p(ABC) : 2p(A'B'C') = AB : A'B'$
$(= AC : A'C' = BC : B'C')$

Dimostrazione

Semplicissima. Poiché, per ipotesi, ABC e $A'B'C'$ sono simili, si avrà $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$.
Applicando a questa catena di rapporti uguali
la proprietà del comporre gli antecedenti e i conseguenti (NOTA),
si otterrà $(AB + AC + BC) : (A'B' + A'C' + B'C') = AB : A'B'$ $(= AC : A'C' = BC : B'C')$, cioè la tesi.

NOTA. Questa proprietà afferma:

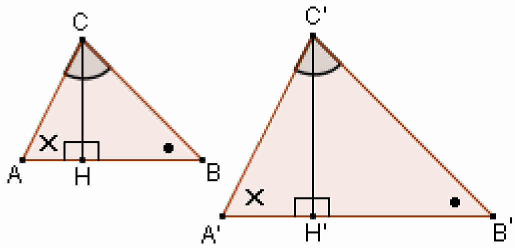
"data una catena di rapporti uguali,
la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti
come ciascun antecedente sta al proprio conseguente"

Ad esempio, da $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ ricaviamo $(14 + 6 + 10) : (7 + 3 + 5) = \left\langle \begin{array}{l} 14:7 \\ 6:3 \\ 10:5 \end{array} \right.$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90
e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$x:4 = y:11 = z:3 \quad (x+y+z):(4+11+3) = x:4 \quad 90:18 = x:4 \quad x = \frac{90 \cdot 4}{18} = 20$ ... e analogamente per y, z

TEOREMA
In due triangoli simili, le aree stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi (NOTA)



IPOTESI

ABC simile con $A'B'C'$

TESI

$$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

Dimostrazione

Poiché, come già dimostrato,
in due triangoli simili le basi stanno fra loro
come le rispettive altezze, si avrà

$AB : A'B' = CH : C'H'$ $\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{CH}{C'H'}\right)$

da cui

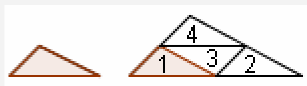
$$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{\frac{AB \cdot CH}{2}}{\frac{A'B' \cdot C'H'}{2}} = \frac{AB \cdot CH}{A'B' \cdot C'H'} =$$

$$= \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CH}{C'H'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

NOTA

Quindi, se nel passaggio da un triangolo
ad un altro simile il lato, ad esempio,
raddoppia, allora l'area diventa il **quadruplo**!

Osserva
d'altronde
la figura ...

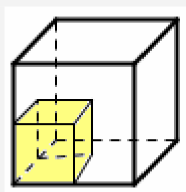


Se poi il lato triplica, l'area diventa 9 volte, ecc.
Questo vale, più in generale,
per tutti i poligoni, anzi per tutte le figure piane
sottoposte a dilatazione o contrazione.

Nello **spazio tridimensionale**,
avviene qualcosa del genere ... però ...

In due figure solide simili,
i volumi stanno fra loro
come i CUBI di due lati omologhi.

Se un solido subisce, ad es., una dilatazione
in modo che ogni misura lineare raddoppi,
il suo volume diventerà 8 volte tanto.



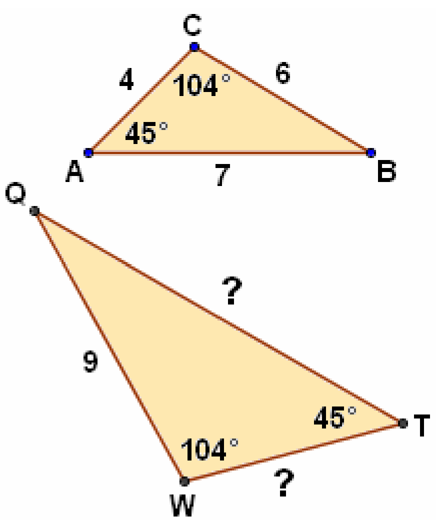
Il cubo di lato doppio
richiede 8 cubetti piccoli
per essere riempito.
Quindi il suo volume
è 8 volte il volume
del cubetto piccolo.

OSSERVAZIONE RIASSUNTIVA

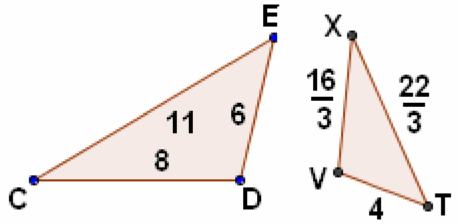
Nel passaggio da un triangolo a un altro
simile, *ogni lato viene moltiplicato per k*?
Allora risulteranno moltiplicati anche

- il PERIMETRO per k,
- ciascuna ALTEZZA per k,
- l'AREA invece per il numero k^2.

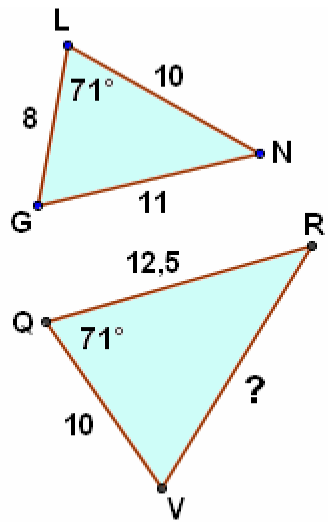
ESERCIZI sui triangoli simili



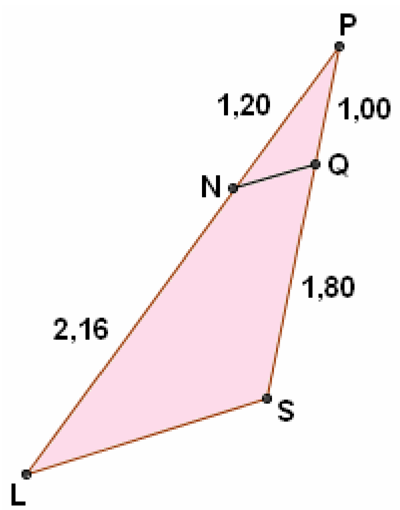
1) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli ABC, WTQ sono simili?
Quanto misurano i lati indicati col punto interrogativo?
Quanto vale il rapporto di similitudine?



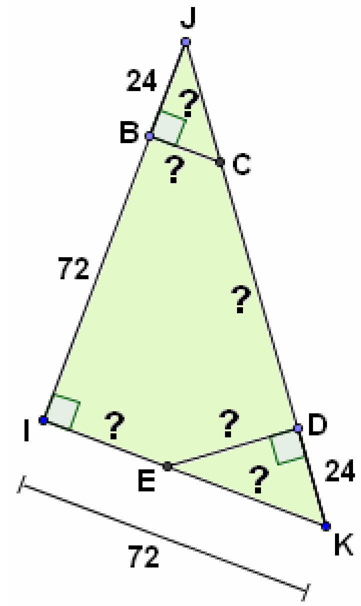
2) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli CDE, VTX sono simili? Quanto vale il rapporto di similitudine?



3) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli GNL, QVR sono simili? Quanto vale il rapporto di similitudine? Quanto misura il lato indicato col punto interrogativo?



4) Siamo certi che NQ sia parallela a LS?

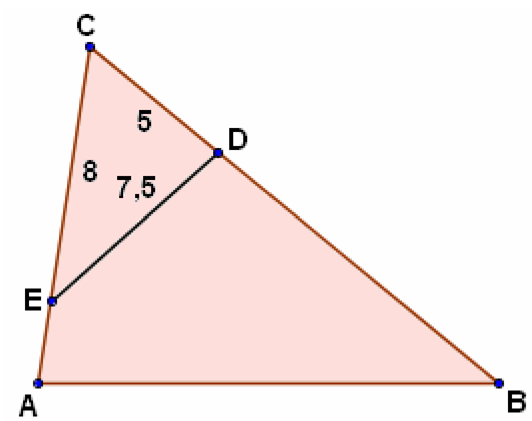


5) Quanto misura, innanzitutto, l'ipotenusa del triangolo rettangolo IJK?

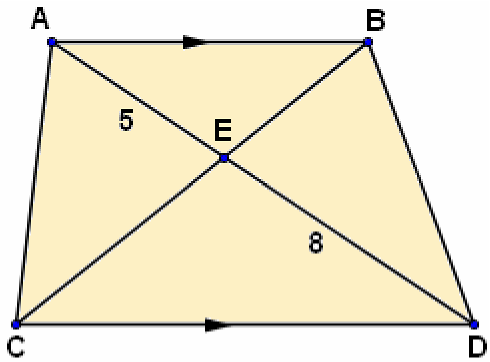
Quale teorema ci garantisce che i triangoli IJK, BJC sono simili? Quanto vale il loro rapporto di similitudine?

Quale teorema ci garantisce che i triangoli IJK, DEK sono simili? Quanto vale il loro rapporto di similitudine?

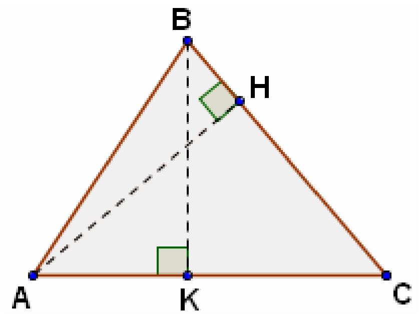
Quanto misurano i segmenti indicati col punto interrogativo?



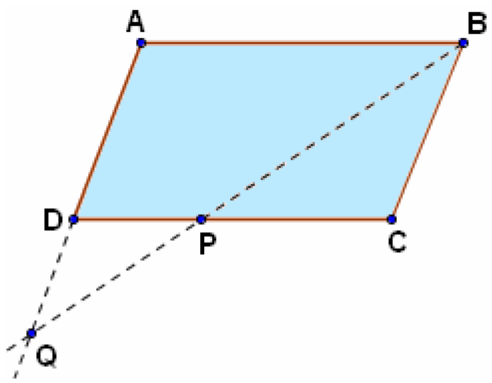
6) Sapendo che CA = 10 e CB = 16, è possibile dedurre che EDC è simile ad ABC, e determinare la misura di AB: perché?



7) AD, BC sono le diagonali di un trapezio e si tagliano in E.
I due triangoli AEB, CED sono simili?
E i due triangoli AEC e BED?
Qual è il rapporto fra i perimetri dei triangoli AEB, CED?
Qual è il rapporto tra le loro aree?
Se CB misurasse 12 cm, quanto misurerebbero CE ed EB?



8) In un triangolo ABC,
siano AH e BK
due altezze.
Dimostra che
$AC \cdot CK = BC \cdot CH$



9) Dal vertice B di un parallelogrammo ABCD
si traccia una semiretta BP,
essendo P un punto sul lato DC;
questa semiretta va a intersecare
la retta AD in Q.
I due triangoli BPC e ABQ sono simili:
perché?
Se $AB = 10$, $AD = 6$ e $DP = 4{,}2$
quanto misurerà DQ?

Problemi vari sulle similitudini sono proposti a partire da pagina 258

RISPOSTE

1) Il 1° Criterio di Similitudine; $WT : AC = WQ : BC \rightarrow WT : 4 = 9 : 6$ oppure $WT : WQ = AC : BC \rightarrow ...$
WT = 6 e QT = 10,5; rapporto di similitudine 3/2 (2/3 se i triangoli venissero pensati in ordine inverso)

2) Il 3° Criterio; 2/3   3) Il 2° Criterio; 5/4 = 1,25; 13,75

4) Sì, il parallelismo è certo. Uno dei modi di giustificare l'affermazione è il seguente:
i due triangoli PNQ, PLS sono simili per il 2° Criterio (con rapporto di similitudine 2,8);
ma allora, ad esempio, si ha $P\hat{N}Q = P\hat{L}S$; ed essendo questi due angoli in posizione di corrispondenti rispetto alle due rette NQ ed LS tagliate dalla trasversale LP, tali due rette sono fra loro parallele.

5) 120; il 1° Crit.; 1/4; il 1° Crit.; 1/3; BC = 18; JC = 30; DE = 32; EK = 40; IE = 32; CD = 66

6) Poiché 5:10 = 8:16, i due lati che formano l'angolo $\hat{C}$ sono proporzionali
e si può invocare il 2° Criterio di Similitudine. AB misurerà 15.

7) AEB e CED sono simili per il 1° Criterio (due angoli alterni interni di rette parallele con trasversale sono uguali); invece AEC e BED, in generale, *non* sono simili.
Il rapporto fra i perimetri dei triangoli AEB e CED è 5/8 e il rapporto tra le loro aree è 25/64.
CE misurerebbe cm $12 \cdot 8/13 = 96/13$ ed EB misurerebbe cm $12 \cdot 5/13 = 60/13$.

8) I due triangoli ACH e BCK sono simili per il 1° Criterio, e dalla proporzione $AC : BC = CH : CK$
segue la tesi (in una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi).

9) 1° Criterio: $C\hat{B}P = A\hat{Q}B$ perché alterni interni rispetto a due parallele con trasversale,
$C\hat{P}B = A\hat{B}Q$ per la stessa ragione; oppure, $\hat{C} = \hat{A}$ perché angoli opposti in un parallelogrammo.
Anche: per ovvie ragioni BPC è simile con QPD che a sua volta è simile con ABQ, quindi …
DQ misurerà 4,345 circa (similitudine fra QPD e BPC)