

9.3 - APPLICAZIONI DELLE SIMILITUDINI

TEOREMA DELLA BISETTRICE

La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati

IPOTESI
 $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$

TESI
 $BD : DC = AB : AC$

Dimostrazione

Da C tracciamo la parallela alla bisettrice AD, e sia E il punto di intersezione fra tale parallela e la retta del lato AB. Osserviamo che il triangolo ACE è isoscele ($AE = AC$). Infatti, gli angoli \widehat{ACE} , \widehat{AEC} sono uguali perché:

$\widehat{ACE} = \widehat{DAC}$ (alterni interni, $AD \parallel CE$, trasv. AC)

$\widehat{DAC} = \widehat{DAB}$ (ipotesi)

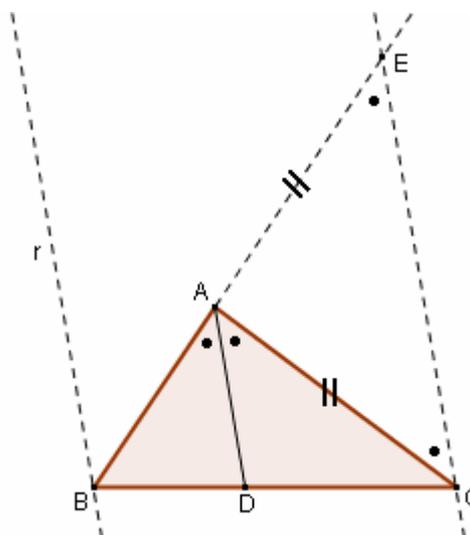
$\widehat{DAB} = \widehat{AEC}$ (corrispondenti, $AD \parallel CE$, trasv. BE)

Ora, per B tracciamo una terza parallela ad AD e CE. Per il Teorema di Talete avremo:

$BD : DC = AB : AE$

e quindi, essendo $AE = AC$,

$BD : DC = AB : AC$, c.v.d.



TEOREMA DELLE DUE CORDE

Se due corde di una circonferenza si tagliano, le due parti dell'una formano i medi e le due parti dell'altra gli estremi di una proporzione

IPOTESI

Le due corde AB, CD si tagliano in P

TESI

$PA : PC = PD : PB$

(o qualunque altra proporzione che abbia PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa)

Dimostrazione

Tracciamo AD e BC.

I due triangoli APD, CPB sono simili perché:

$\widehat{APD} = \widehat{CPB}$ (opposti al vertice)

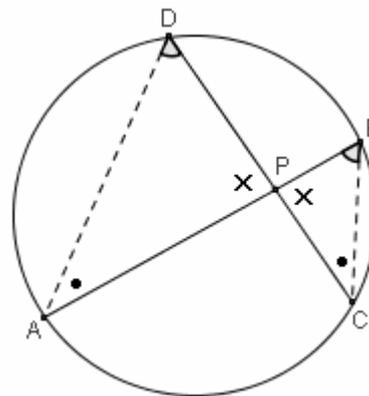
$\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ (sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco \widehat{BD})

$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (per diff. rispetto a 180° , oppure perché angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco \widehat{AC})

Sussiste dunque la proporzione

$PA : PC = PD : PB$,

dalla quale, applicando la proprietà del permutare ai medi e agli estremi, e la proprietà dell'invertire, si possono ricavare tutte quelle proporzioni, caratterizzate dal fatto di avere PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa.



**ENUNCIATO
EQUIVALENTE:**

"Se due corde di una circonferenza si tagliano, il prodotto delle due parti dell'una è uguale al prodotto delle due parti dell'altra ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$)"

TEOREMA DELLE DUE SECANTI

Condotte da un punto esterno ad una circonferenza due secanti, un'intera secante (NOTA) e la sua parte esterna formano i medi e l'altra intera secante e la sua parte esterna gli estremi di una proporzione

NOTA: per "secante" si intende qui quel "pezzo" della retta secante, compreso fra il punto esterno e l'intersezione con la circonferenza, più lontana da questo.

IPOTESI PA, PC secanti

TESI $PA : PC = PD : PB$ (o qualunque altra proporzione che abbia PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa)

Dimostrazione

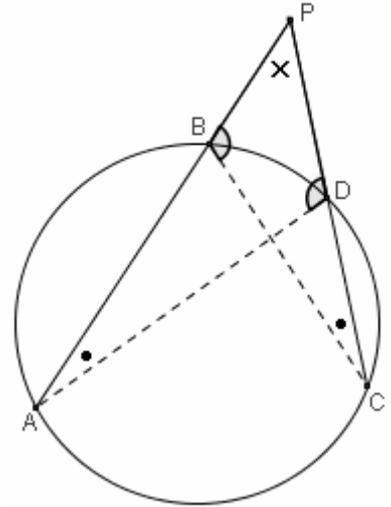
Tracciamo AD e BC. I due triangoli APD, CPB sono simili per avere:

\hat{P} in comune

$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco \widehat{BD})

$\widehat{ADP} = \widehat{CBP}$ (per differenza rispetto a 180°)

Sussiste dunque la proporzione $PA : PC = PD : PB$, dalla quale, applicando la proprietà del permutare ai medi e agli estremi, e quella dell'invertire, si possono ricavare tutte quelle proporzioni, caratterizzate dal fatto di avere PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa



ENUNCIATO EQUIVALENTE: "Condotte da un punto esterno ad una circonferenza due secanti, il prodotto di un'intera secante per la sua parte esterna è uguale al prodotto dell'altra secante per la sua parte esterna ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$)"

TEOREMA DELLA TANGENTE E DELLA SECANTE

Condotte da un punto esterno ad una circonferenza una tangente ed una secante, la tangente (NOTA) è media proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna

NOTA: per "tangente" si intende qui il segmento di tangente, compreso fra il punto esterno e punto di contatto.

IPOTESI PA secante, PT tangente

TESI $PA : PT = PT : PB$

Dimostrazione

Tracciamo AT, BT. Dico che i due triangoli APT, BPT sono simili.

Essi infatti hanno, innanzitutto, l'angolo \hat{P} in comune;

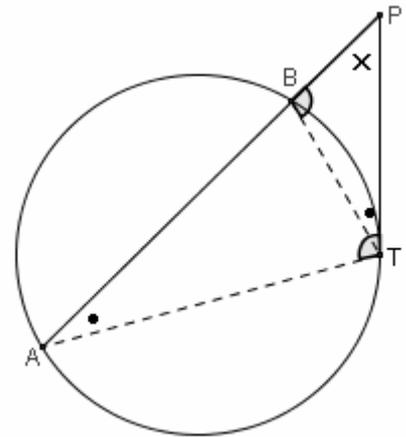
per dimostrare un'altra uguaglianza fra angoli bisogna questa volta ricordare che esistono anche gli "angoli alla circonferenza di 2^a specie"

(quelli che hanno un lato secante e l'altro tangente).

\widehat{BTP} è, appunto, un angolo alla circonferenza di 2^a specie, che insiste

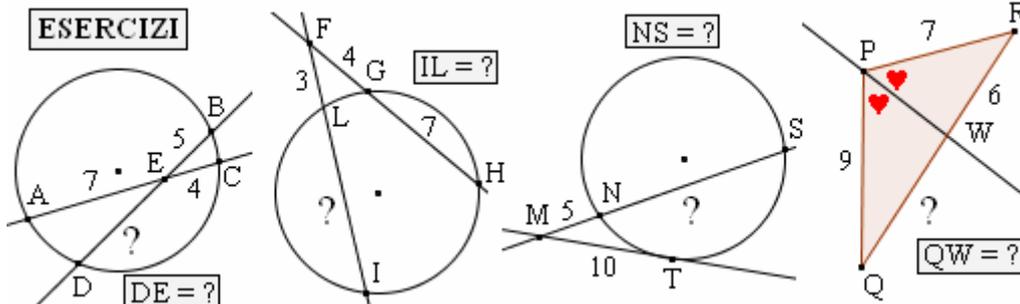
sull'arco \widehat{BT} , ed è perciò uguale a \widehat{BAT} , angolo alla circonferenza di 1^a specie che insiste sullo stesso arco.

Dimostrata così la similitudine fra APT e BPT, si ha subito la tesi: $PA : PT = PT : PB$, c.v.d.



ENUNCIATO EQUIVALENTE: "Condotte da un punto esterno ad una circonferenza una tangente e una secante, il quadrato del segmento di tangente è uguale al prodotto dell'intera secante per la sua parte esterna ($PT^2 = PA \cdot PB$)"

ESERCIZI



RISPOSTE

DE = 28/5; IL = 35/3;
NS = 15; QW = 54/7

Questa bella figura dinamica GEOGEBRA mostra bene il legame di "continuità" fra gli ultimi 3 teoremi →

Altri problemi sulle applicazioni delle similitudini si trovano a pagina 223, altri ancora a pagina 266