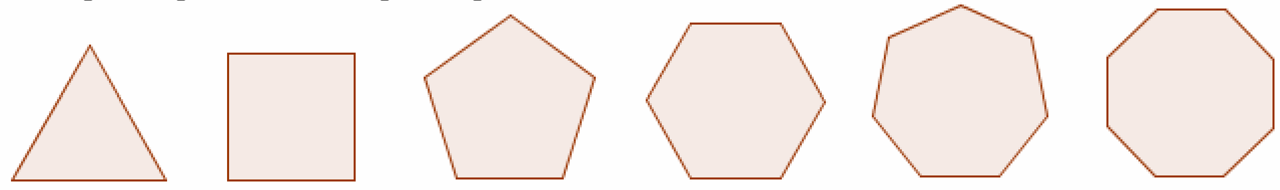
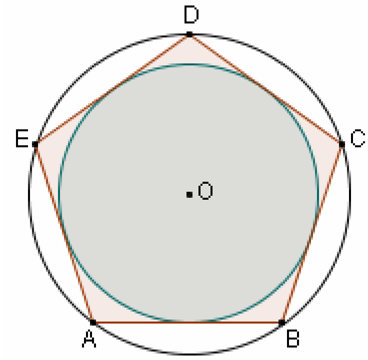
10.2 - POLIGONI REGOLARI

Si dice REGOLARE un poligono che abbia tutti i lati e tutti gli angoli uguali.

Sono poligoni regolari:
il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare, l'esagono regolare, l'eptagono regolare, l'ottagono regolare, l'ennagono regolare, il decagono regolare, l'undecagono regolare, il dodecagono regolare, ecc.

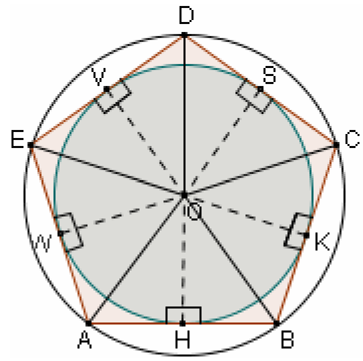


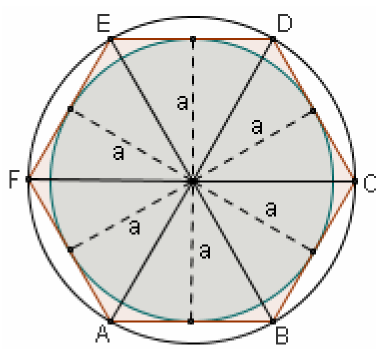
Si può dimostrare che **un poligono regolare è inscrivibile in una circonferenza, e circoscrivibile ad un'altra circonferenza;** e che **tali due circonferenze circoscritta e inscritta hanno lo stesso centro** (tale punto viene detto, semplicemente, "il centro del poligono regolare").



In un poligono regolare, congiungendo il centro con i vertici, si ottengono tanti triangoli quanti sono i lati del poligono. Essi sono tutti uguali fra loro (3° Criterio) e le loro altezze, condotte dal centro O, sono anch'esse tutte uguali fra loro. Una qualsiasi di tali altezze viene detta "**apotema**" del poligono regolare.

Possiamo dire, in definitiva, che in un poligono regolare l'"apotema" è la distanza del centro O da uno qualsiasi dei lati. L'apotema coincide col raggio della circonferenza inscritta.





Per calcolare l'**area** di un poligono regolare, si possono sommare le aree dei triangoli ottenibili congiungendo il centro coi vertici. Con riferimento alla figura qui a sinistra, abbiamo

$$S = \frac{AB \cdot a}{2} + \frac{BC \cdot a}{2} + \frac{CD \cdot a}{2} + \frac{DE \cdot a}{2} + \frac{EF \cdot a}{2} + \frac{FA \cdot a}{2} =$$
$$= \frac{(AB + BC + CD + DE + EF + FA) \cdot a}{2}$$

In definitiva, in un poligono regolare l'area è data dalla formula:

$$\boxed{\mathbf{S = \frac{perimetro \cdot apotema}{2}}}$$

Per stabilire quanto misura uno degli **angoli** di un dato poligono regolare, basterà ricordare che la somma degli angoli di un poligono di n lati è $(n-2) \cdot 180°$ e tener presente che in un poligono regolare gli angoli sono tutti uguali tra loro, per ottenere

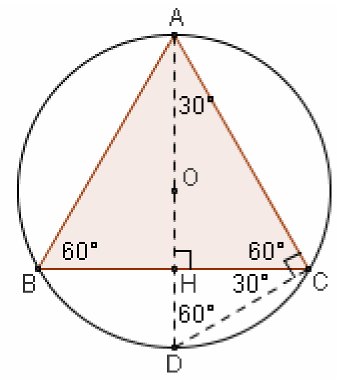
$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°}}$$

Avremo dunque, ad esempio: $\alpha_5 = 108°$, $\alpha_6 = 120°$, $\alpha_8 = 135°$, $\alpha_{10} = 144°$, ecc.

MISURA DEL LATO DI UN POLIGONO REGOLARE, IN FUNZIONE DEL RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO

Proponiamoci ora di determinare quanto misuri il lato di un poligono regolare rispettivamente di 3, 4, 5, 6, 8, 10 lati (sono questi i casi più rilevanti), che sia inscritto in un cerchio di raggio noto R
(“**misura ℓ_n del lato di un poligono regolare di n lati, espressa in funzione del raggio R del cerchio circoscritto**”).

TRIANGOLO EQUILATERO



Tracciamo il diametro AD; avremo:

$AD = 2R$;

$A\hat{C}D = 90°$ (perchè inscritto in una semicirconferenza);

$A\hat{D}C = 60°$ (perchè $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AC}$; e $A\hat{B}C = 60°$)

Quindi, considerando il triangolo rettangolo “particolare” ACD, si avrà

$$AC = \frac{AD}{2}\sqrt{3} = \frac{2R}{2}\sqrt{3} = R\sqrt{3}$$

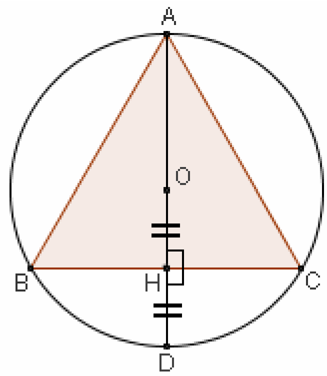
Resta così stabilito che

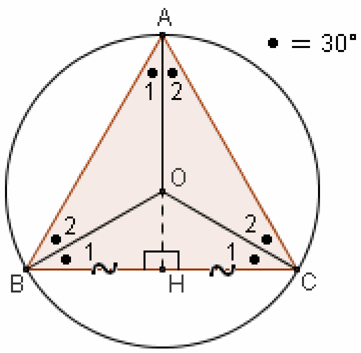
$$\boxed{\ell_3 = R\sqrt{3}}$$

Fra l’altro, osservando la figura sovrastante, è immediato dimostrare che $OH = HD = R/2$, e ciò suggerisce un metodo comodissimo per disegnare con precisione un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza (vedi figura qui a destra):

si traccia un diametro qualunque AD, si prende il punto medio H del raggio OD e per H si traccia la perpendicolare ad AD fino ad incontrare la circonferenza in due certi punti B e C.

Questi, insieme con A, saranno i vertici di un triangolo equilatero.





Allo stesso importante risultato di cui sopra ($\ell_3 = R\sqrt{3}$) si sarebbe potuto anche pervenire nel modo seguente.
Congiungiamo O con A, B e C;
avremo AOB = AOC = BOC per il 3° Criterio.
Essendo poi tali triangoli, oltre che uguali, anche isosceli, si avrà

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{60°}{2} = 30°.$$

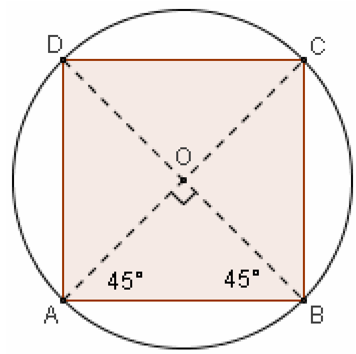
Tracciamo ora $OH \perp BC$: avremo $BH = HC = \frac{1}{2}BC$,

perché la perpendicolare a una corda condotta dal centro taglia la corda stessa in due parti uguali;

ed essendo BOH un triangolo rettangolo “particolare”, risulterà

$$BH = \frac{BO}{2}\sqrt{3} = \frac{R}{2}\sqrt{3} \quad \text{da cui} \quad \ell_3 = BC = 2BH = R\sqrt{3}$$

QUADRATO



E' chiaro che il punto O di intersezione delle diagonali
di un quadrato inscritto in un cerchio
coincide col centro del cerchio stesso
(basta ricordare che in un quadrato le diagonali sono uguali
e si tagliano scambievolmente per metà,
per concludere che OA = OB = OC = OD
e dedurre quindi che O, essendo equidistante dai punti A, B, C e D,
è il centro del cerchio circoscritto al quadrato ABCD).
Ricordando poi che in un quadrato le diagonali
sono perpendicolari e bisettrici degli angoli,
e considerando il triangolo rettangolo particolare AOB, avremo:

$AB = OA \cdot \sqrt{2}$

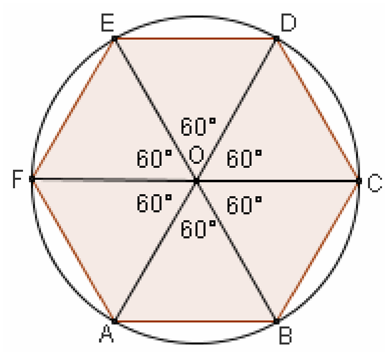
cioè

$$\boxed{\ell_4 = \mathbf{R}\sqrt{2}}$$

Se si vuole disegnare perfettamente un quadrato inscritto,
basta disegnare due diametri perpendicolari:
le loro estremità saranno i quattro vertici del quadrato.

PENTAGONO REGOLARE: ne riparleremo dopo aver trattato il decagono regolare.

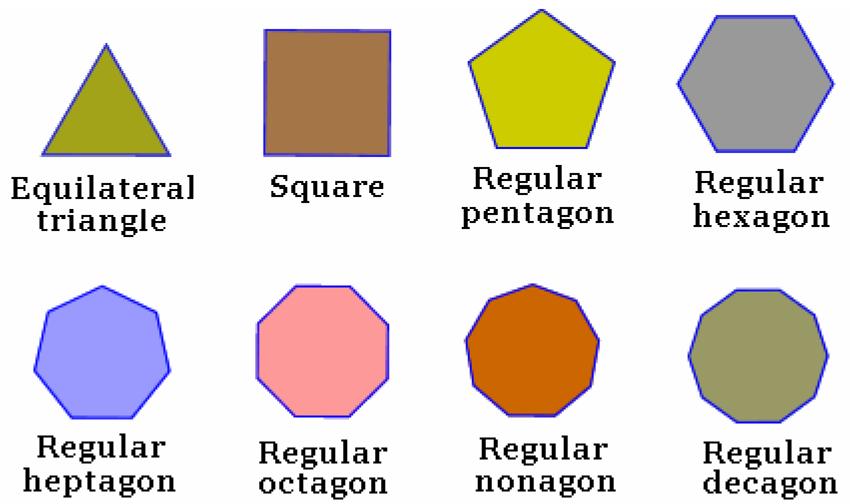
ESAGONO REGOLARE

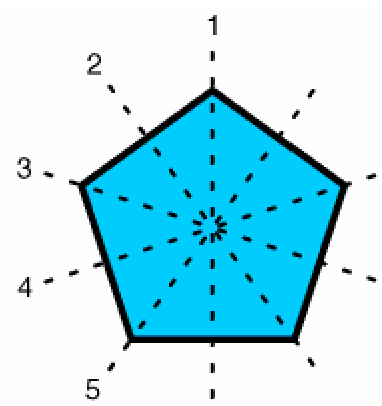


I 6 angoli di vertice O nella figura sono tutti uguali fra loro
(perché i 6 triangoli sono tutti uguali fra loro per il 3° Criterio;
oppure, perché sono angoli al centro che insistono
su corde uguali e quindi su archi uguali).
Allora ciascuno di questi 6 angoli misurerà 360°:6 = 60°;
perciò ciascuno dei 6 triangoli,
essendo isoscele e avendo un angolo di 60°, sarà equilatero.
Pertanto è AB = OA = OB = R ;
quindi,

$$\boxed{\ell_6 = \mathbf{R}}$$

"Il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza,
è uguale al raggio della circonferenza stessa"





Five lines of symmetry
of a regular pentagon
(http://library.thinkquest.org)