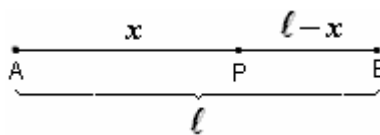


SEZIONE AUREA

Definizione. Si dice “sezione aurea” di un segmento, quella parte del segmento che è media proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente

Preso un segmento AB di lunghezza ℓ ,
e detta AP la sua sezione aurea, avremo:
 $AB : AP = AP : PB$

Posto ora $AP = x$, sarà $PB = \ell - x$ da cui:



$$\ell : x = x : (\ell - x)$$

$$x^2 = \ell(\ell - x)$$

$$x^2 = \ell^2 - \ell x$$

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

e risolvendo:

$$x_{1,2} = \frac{-\ell \pm \sqrt{\ell^2 + 4\ell^2}}{2} = \frac{-\ell \pm \sqrt{5\ell^2}}{2} = \frac{-\ell \pm \ell\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ell & \text{non accettabile perchè negativa} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ell \end{cases}$$

Dunque la sezione aurea di un segmento di lunghezza ℓ misura

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ell$$

Essendo $\sqrt{5} \approx 2,236$, si ha che la sezione aurea di un segmento è lunga circa 0,618 volte il segmento stesso.

TEOREMA

Il lato del DECAGONO REGOLARE inscritto in una circonferenza è uguale alla sezione aurea del raggio

Delle due figure qui a fianco, la prima mostra un decagono regolare inscritto; quella sottostante evidenzia uno solo dei dieci triangolini isosceli uguali in cui il decagono regolare è suddiviso dai raggi che ne congiungono i vertici col centro.

Vogliamo dimostrare che AB è uguale alla sezione aurea del raggio OB.

Cominciamo col domandarci: quanto misura l'angolo $\widehat{AOB}$?

Ovviamente, la risposta è $360^\circ : 10 = 36^\circ$.

E perciò avremo $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$.

Tracciando, ora, la bisettrice AW dell'angolo $\widehat{OAB} = 72^\circ$, risulterà $\widehat{WAO} = \widehat{WAB} = 72^\circ : 2 = 36^\circ$, e nel triangolo ABW si avrà $\widehat{BWA} = 180^\circ - \widehat{WBA} - \widehat{WAB} = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

Le misure angolari così ricavate garantiscono che:

- AWO è isoscele ($AW = OW$);
- ABW è isoscele ($AB = AW = OW$) e simile a BOA.

Da questa similitudine si trae la proporzione

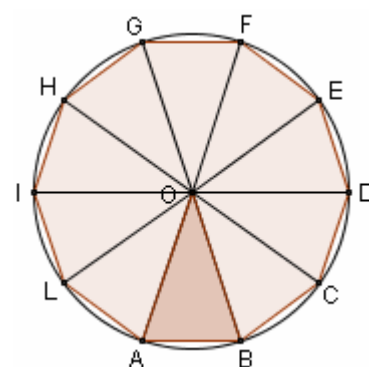
$$OB : AB = AB : BW,$$

la quale, essendo $AB = OW$, può essere riscritta come

$$OB : OW = OW : BW.$$

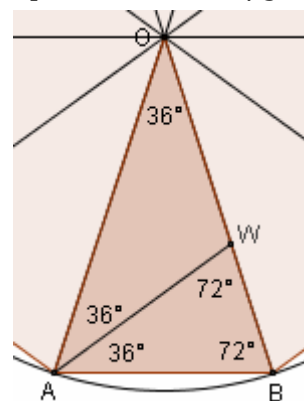
Ma ciò prova che OW è la sezione aurea di OB;

ed essendo, appunto, $AB = OW$, il teorema è dimostrato.



Sopra: un decagono regolare inscritto.

Sotto: un particolare della figura.



E' pertanto

$$\ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$$