

10.5 - LA FORMULA DI ERONE

Questa celebre formula **esprime l'area di un triangolo, in funzione delle misure dei suoi lati**.

Sia ABC un triangolo qualunque.
Adottando una simbologia molto efficace, e molto utilizzata, indichiamo con:

- a la misura del lato opposto al vertice A,
- b la misura del lato opposto al vertice B,
- c la misura del lato opposto al vertice C.

Il nostro obiettivo è di esprimere l'area S del triangolo in funzione delle tre misure a, b, c.

A tale scopo, proponiamoci innanzitutto di determinare la misura dell'altezza CH relativa alla base AB.

Posto AH = x, avremo:

$CH^2 = b^2 - x^2$ (Pitagora su AHC),
ma anche:

$CH^2 = a^2 - (c - x)^2$ (Pit. su BHC).

Sarà dunque, per la proprietà transitiva,

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

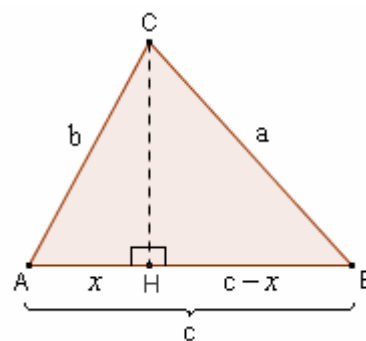
e da questa equazione potremo ricavare x:

$$b^2 - \cancel{x^2} = a^2 - c^2 + 2cx - \cancel{x^2}$$

$$2cx = b^2 - a^2 + c^2$$

$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$$

Ora che abbiamo determinato AH = x, andiamo a calcolare CH applicando Pitagora al triangolo rettangolo AHC (vedi colonna qui a fianco) →



$$CH = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{(b^2 - a^2 + c^2)^2}{4c^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 - a^2 + c^2)^2}{4c^2}} = \frac{1}{2c} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 - a^2 + c^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(2bc + (b^2 - a^2 + c^2))(2bc - (b^2 - a^2 + c^2))} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(2bc + b^2 - a^2 + c^2)(2bc - b^2 + a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)} =$$

Ponendo a questo punto $[a+b+c] = \text{perimetro} = [2p]$ potremo scrivere

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)} = \frac{1}{2c} \sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c} \cdot 4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

E' quindi

$$S = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Abbiamo così costruito la bella

FORMULA DI ERONE (area di un triangolo in funzione dei lati):
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ a, b, c misure dei lati; p SEMIperimetro

Ad **ESEMPIO**,
l'area di un triangolo
di lati 7, 8 e 9 cm,
e quindi
di semiperimetro
(7+8+9)/2=12 cm,
misura cm²

$$\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}.$$

$$\text{ovvero} \\ \text{cm}^2 \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}.$$

A PROPOSITO
Detti A, B, C i vertici di un triangolo,
a, b, c i lati rispettivamente opposti,
e indicato con p il SEMIperimetro
del triangolo,
le distanze dei punti di contatto
della circonferenza inscritta
dai tre vertici A, B, C
valgono rispettivamente
p-a, p-b, p-c,
come indicato in figura:
dimostra questo bell'enunciato! →

