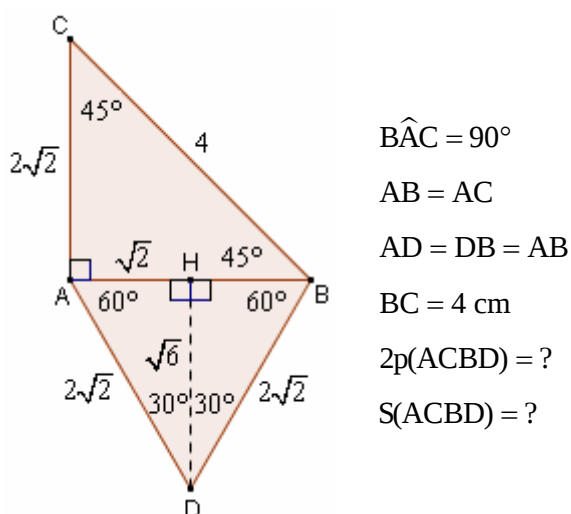


PROBLEMI CON TRIANGOLI RETTANGOLI PARTICOLARI - ESEMPI SVOLTI

- Sul lato AB del triangolo ABC, rettangolo in $\hat{A}$ e isoscele, si costruisce il triangolo equilatero ABD. E' noto che $BC = 4$ cm ; si desidera determinare perimetro e area del quadrilatero ACBD.



Innanzitutto, il triangolo ABC, essendo rettangolo e isoscele, ha gli angoli acuti di 45° .

$$AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm, e allora anche } AD = DB = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Tracciata l'altezza DH di ABD, avremo $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$

ed essendo AHD un triangolo rettangolo "particolare" ($90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$) sarà: $HD = AH\sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \text{ cm}$.

Ora $2p(ACBD) = 4 + 3 \cdot 2\sqrt{2} = 4 + 6\sqrt{2} = 2(2 + 3\sqrt{2}) \text{ cm}$ e, per quanto riguarda l'area,

$$S(ACBD) = S(ABC) + S(ABD) = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = 2 \cdot 2 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

- Un triangolo ABC ha i due angoli di vertice A e B che misurano 45° e 30° rispettivamente. Si sa che il perimetro del triangolo misura $2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$. Quanto misura la sua area?

Tracciando l'altezza CH relativa ad AB il triangolo ABC ne risulta spezzato in due triangoli rettangoli "particolari" ...

Per questo problema, è necessario porre una incognita, e conviene scegliere $CH = x$.

Si avrà

$$AH = CH = x,$$

$$\text{poi } AC = x\sqrt{2} \text{ (AHC : } 90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$$

$$\text{e } CB = 2x, HB = x\sqrt{3} \text{ (CHB : } 90^\circ, 30^\circ, 60^\circ)$$

Equazione risolvente:

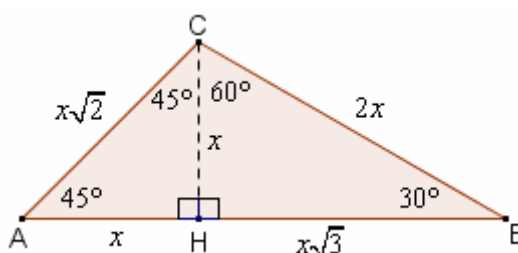
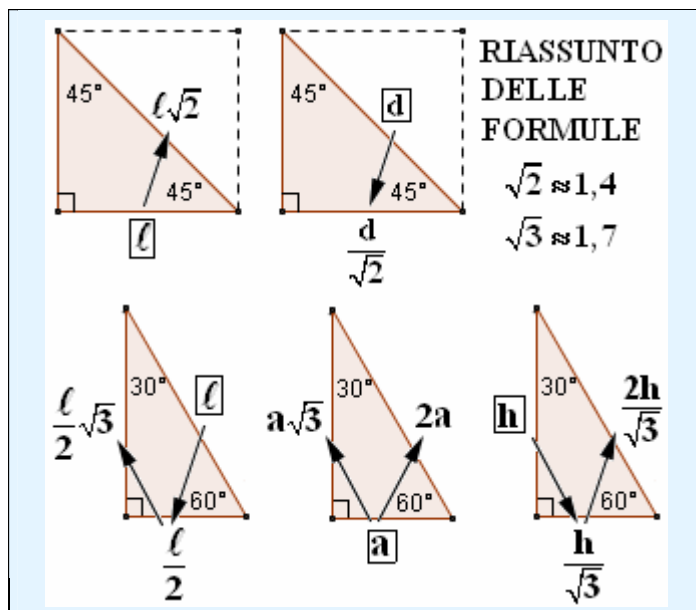
$$x\sqrt{2} + x + x\sqrt{3} + 2x = 2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2});$$

$$x\sqrt{2} + x\sqrt{3} + 3x = 2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2});$$

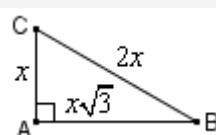
$$x(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3) = 2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\text{da cui } CH = 2a, AB = 2a + 2a\sqrt{3} = 2a(1 + \sqrt{3})$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{2a(1 + \sqrt{3}) \cdot 2a}{2} = 2a^2(1 + \sqrt{3})$$



Un errore che si può commettere in problemi di questo tipo è di esprimere tutti e tre i lati di un triangolo rettangolo "particolare" con l'uso delle formule, poi applicare Pitagora per impostare l'equazione risolvente. Purtroppo però l'equazione così ottenuta ... non porta da nessuna parte perché è indeterminata! Infatti le formule stesse sono state ricavate tramite il teorema di Pitagora, quindi il procedimento equivale a riutilizzare la stessa informazione per due volte!!!



$$x^2 + (x\sqrt{3})^2 = (2x)^2$$

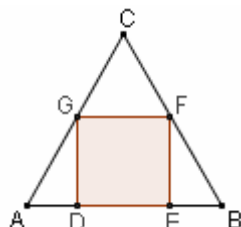
$$x^2 + 3x^2 = 4x^2$$

$$4x^2 = 4x^2 \text{ INDETERMINATA! } \odot$$

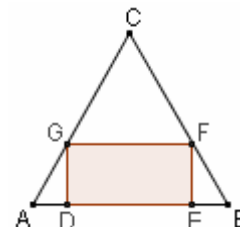
❑ **PROBLEMI CON TRIANGOLI RETTANGOLI “PARTICOLARI”** ($90^\circ/30^\circ/60^\circ$, $90^\circ/45^\circ/45^\circ$)

- 1) ➡ Nel triangolo ABC è $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, e l'altezza CH misura cm 6. Trova perimetro e area di ABC.
- 2) Un trapezio isoscele ABCD ha gli angoli adiacenti alla base maggiore AB uguali a 60° , e $AD = DC = CB = 10$ cm. Determinarne perimetro e area.
- 3) Calcolare perimetro e area di un trapezio rettangolo ABCD, in cui altezza e base minore sono uguali, l'angolo acuto $\hat{B}$ misura 30° , e la diagonale minore AC è lunga $a\sqrt{6}$.
- 4) ➡ Sapendo che in un triangolo di area $8k^2\sqrt{3}$ due lati sono uno il doppio dell'altro e formano un angolo di 120° , determinare il terzo lato.
- 5) Il triangolo isoscele ABC ha la base maggiore AB che supera di 1 cm il lato obliquo. Determina i lati di ABC, sapendo che la somma delle aree dei tre triangoli equilateri costruiti sui suoi lati vale $\text{cm}^2 \frac{43}{2}\sqrt{3}$.
- 6) ➡ Sul lato AB di un triangolo equilatero ABC si prende il punto P tale che sia $AP = 2PB$. Da P si traccia poi la parallela al lato BC, fino ad incontrare il lato AC in Q. Determinare il lato del triangolo equilatero in modo che la diagonale del trapezio BCQP misuri $a\sqrt{7}$.

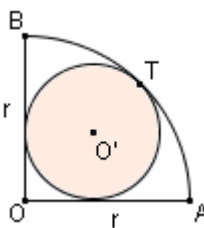
- 7) Quanto misura il lato del quadrato inscritto (vedi figura) in un triangolo equilatero di lato 1 m?



- 8) In un triangolo equilatero di lato unitario, si inscrive (vedi figura) un rettangolo la cui base è doppia dell'altezza. Quanto misura l'area del rettangolo?



- 9) Dato un segmento AB di lunghezza a, determinare al suo interno un punto P in modo che, costruiti (dalla stessa parte rispetto ad AB) i due triangoli equilateri APC e PBD, e congiunto C con D, il triangolo CPD risulti $\frac{3}{16}$ del triangolo equilatero di lato AB.
- 10) Disegna un triangolo equilatero ABC il cui lato misuri ℓ . In ABC inscrivi un rettangolo DEFG (la base DE del rettangolo è una parte del segmento AB; F sta su BC, G sta su CA). Traccia le diagonali DF, EG del rettangolo e indica con O il punto in cui si tagliano. Determina ora il segmento $AD = x$ in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo DOG misuri $\ell^2/2$.
- 11) Sulla diagonale AC di un quadrato ABCD, di lato $4a$, determinare un punto P in modo che il quadrilatero ABPD sia equivalente ad un triangolo equilatero, avente il lato uguale al lato del quadrato.
- 12) All'interno di un quadrato ABCD di lato ℓ si disegna il triangolo equilatero ABE. La diagonale AC del quadrato taglia il segmento BE in F. Quanto misurano i due segmenti FB, FE?
- 13) Quanto misura il raggio di un cerchio, inscritto in un quadrante (= quarta parte di cerchio: vedi figura) di raggio r?



♥ Controlla sempre se il valore della soluzione da te trovata è “plausibile”, cioè se può andar d'accordo con le misure nella figura, tenendo conto che $\sqrt{2} \approx 1,4$ e $\sqrt{3} \approx 1,7$

- 14) E' dato un triangolo equilatero ABC di lato ℓ . Sul lato AB si prenda un punto P tale che, dette H e K le proiezioni di P su CA e su CB rispettivamente, il triangolo PHK sia equivalente a $\frac{1}{6}$ di ABC.

SOLUZIONI

- 1) $2p = \text{cm } 6(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$; $S = \text{cm}^2 6(\sqrt{3} + 3)$ 2) $2p = \text{cm } 50$, $S = \text{cm}^2 75\sqrt{3}$
- 3) $2p = a(3 + 5\sqrt{3})$; $S = \frac{3}{2}a^2(2 + \sqrt{3})$ 4) $4k\sqrt{7}$ 5) $CA = CB = 5$ cm, $AB = 6$ cm
- 6) $3a$ 7) lato quadrato = $m(2\sqrt{3} - 3)$ 8) $S = \frac{3}{4}(2 - \sqrt{3})$ 9) $AP = \frac{1}{4}a \vee AP = \frac{3}{4}a$
- 10) $x = \frac{4}{13}\ell \vee x = 0$ (soluz. "degenere", quest'ultima, che sta alla nostra discrezione di accettare o scartare)
- 11) $AP = a\sqrt{6}$ 12) $FB = \ell(\sqrt{3} - 1)$; $FE = \ell(2 - \sqrt{3})$ 13) $r(\sqrt{2} - 1)$ 14) $AP = \frac{1}{3}\ell \vee AP = \frac{2}{3}\ell$